Juros – Conceitos gerais

No quotidiano de qualquer cidadão existem inúmeras situações onde estão presentes os conceitos financeiros, seja quando se pensa num possível investimento como por exemplo um depósito a prazo como num possível financiamento, quando se pensa em efetuar um empréstimo para a compra de um bem ou de uma habitação.

O Cálculo Financeiro tem como base, aquilo que por norma se chama valor temporal do dinheiro (ou valor do dinheiro no tempo).

O valor temporal do dinheiro determina que uma mesma quantia não tem para nós o mesmo valor se pudemos dispor dela imediatamente ou apenas dentro de algum tempo.

A definição de juro é: Remuneração de determinado capital durante um determinado prazo. É, no fundo, o valor do dinheiro, tendo em conta o fator tempo.

Só existe esta remuneração de determinado capital, por três ordens de razões:

1. Privação de liquidez, pois quem empresta um determinado capital, fica impossibilitado de o utilizar para outros fins, e está a conceder essa possibilidade à outra parte.
2. Perda do poder de compra, pois o mercado financeiro não é estático e tendo em conta a inflação, aquilo que em média custa hoje 1000€, custará daqui a um ano, mais de 1000€.
3. Risco, pois quem empresta corre sempre o risco de não vir a receber de volta o valor emprestado. Quanto maior for o prazo do empréstimo, maior é o risco.

Tempo, capital e juro

No Cálculo Financeiro as variáveis fundamentais são: o capital, o tempo e a taxa de juro. Estas três variáveis estão presentes em qualquer operação financeira.

A Operação Financeira é a operação que transforma um ou mais capitais, de determinado montante, noutro de outro montante, por ação do tempo e da taxa de juro. Requer, pois, a existência simultânea de capital, tempo e taxa de juro.

As operações financeiras, são usualmente divididas em curto, médio e longo prazo, consoante o seu horizonte temporal seja até um ano, de um a cinco anos ou mais de cinco anos, respetivamente.

Numa operação financeira existem sempre pelos menos dois intervenientes, o mutuário que é quem pede emprestado, logo é o devedor e o mutuante que é quem empresta sendo este o credor.

As operações bancárias estão divididas em operações ativas que são aquelas que têm subjacente o recebimento de juros por parte de instituições bancárias (por exemplo, os empréstimos bancários). As outras operações são as passivas e que têm implícito o pagamento de juros por parte das instituições bancárias (por exemplo, depósitos a prazo).

Juro e taxa de juro

O cálculo matemático do juro é simples e basta multiplicar as três variáveis entre si.

j= **c** x **t** x **i**

j : representa o juro

c : representa o capital

t : representa o tempo

i : representa a taxa de juro (na forma decimal)

A contagem do tempo pode ser efetuada de vários modos, mas existem as Convenções ou Base de Cálculo para a Contagem de Prazos e as mais frequentes são:

Base de Cálculo	Explicação
ACT / ACT (ou REAL /REAL)	Númerador: dias reais entre as duas datas, tendo em consideração a existência de anos bissextos. Denominador: dias reais do ano (365, se for ano comum, 366, se for ano bissexto
ACT / 365 (ou REAL / 365)	Númerador: dias reais entre as duas datas, tendo em consideração a existência de anos bissextos. Denominador: 365 (mesmo que se trate de um ano bissexto)
ACT / 360 (ou REAL / 360)	Númerador: dias reais entre as duas datas, tendo em consideração a existência de anos bissextos. Denominador: 360 (independentemente de se tratar de um ano comum ou bissexto)
30/360	Numerador: Admite-se que todos os meses têm 30 dias e conta-se o prazo em conformidade com esta hipótese Denominador: 360 (independentemente de se tratar de um ano comum ou bissexto)

Exemplo:

Determine para cada Base de Cálculo, o número de dias entre 27 de janeiro de 2016 e 7 de setembro de 2016, bem como o seu equivalente em anos (2016: ano bissexto).

Base de Cálculo	Explicação
ACT / ACT (ou REAL /REAL)	(4+29+31+30+31+30+31+31+7) / 366 = 0,612022 anos
ACT / 365 (ou REAL / 365)	(4+29+31+30+31+30+31+31+7) / 365 = 0,613699 anos
ACT / 360 (ou REAL / 360)	(4+29+31+30+31+30+31+31+7) / 360 = 0,622222 anos
30/360	(3+30+30+30+30+30+30+30+7) / 360 = 0,611111 anos

NOTA : **t** e **i** têm de ser expressos na mesma unidade de tempo. Por exemplo se estivermos a fazer uma análise anual, ambos têm de estar em anos, mas se for mensal, ambos terão de estar em meses.

Exemplo:

Calcule o juro produzido por um depósito de 2000€, remunerado à taxa anual de 6% nas *seguintes situações:*

a) *Após 1 ano*
b) *Após 4 meses*
c) *Após 112 dias (ano civil e ano comercial)*

Resolução:

a) $j = 2000 \times 1 \times 0.06$

   $j = 120€$

b) $j = 2000 \times (4 / 12) \times 0.06$

   $j = 40\ €$

c) *Ano Civil:*

   $j = 2000 \times (112/365) \times 0.06$

   $j = 36.82€$

   Ano comercial:

   $j = 2000 \times (112/360) \times 0.06$

   $j = 37.33€$

Desconto e taxa de desconto

Uma operação de capitalização ou de desconto é uma operação financeira que torna equivalente um dado capital, com vencimento num momento futuro (C_n), e um outro capital, com vencimento num dado momento n-t anterior ao momento do vencimento do primeiro.

Existem três modalidades de desconto: o desconto por dentro, o desconto por fora e o desconto composto.
As duas primeiras modalidades aplicam-se e são calculadas em acordo com o regime de capitalização simples.
O desconto composto é calculado atendendo ao regime de capitalização composta.

<u>Desconto por dentro:</u>

O montante do desconto é o que resulta da diferença entre o valor de um capital num determinado momento n (C_n), e o valor do mesmo num determinado momento n-t (C_{n-t}) e notando por D esse mesmo montante, teremos:

D= $C_n - C_{n-t}$

No desconto por dentro (D_d), o valor do montante a deduzir é calculado sobre o próprio produto líquido do desconto, logo sobre C_{n-t} . Isto significa que o desconto por dentro corresponde ao juro simples vencido pelo valor líquido do desconto no prazo que decorre entre a data do vencimento do capital e aquela em que se realiza a operação, o mesmo é dizer que, em t, logo, temos a fórmula de cálculo:

$$\mathbf{D_d = \frac{C_n \times i \times t}{1 + i \times t}}$$

Exemplo:

Qual o desconto por dentro sofrido por um capital de 3000€, à taxa 5%, quando faltavam 60 dias para o seu vencimento?

$$D_d = \frac{3000 \times 0.05 \times \frac{60}{360}}{1 + 0.05 \times \frac{60}{360}}$$

$$D_d = \frac{25}{1.00833}$$

$$D_d = 24.79€$$

<u>Desconto por fora:</u>

Esta modalidade de desconto é designada por desconto comercial ou desconto bancário, pois é utilizada nas operações de desconto de letras. O montante de desconto é, neste caso, calculado sobre o valor do capital no termo da operação, isto é, sobre C_n. Se notarmos, por desconto por fora (D_f) o montante do desconto por fora, daí resulta a fórmula:

$$\mathbf{D_f = C_n \times i \times t}$$

Exemplo:

Qual o desconto sofrido pelo capital de 5000€, à taxa de 7%, quando faltavam 90 dias para o seu vencimento?

$$D_f = 5000 \times 0.07 \times \frac{90}{360}$$

$$D_f = 87.5€$$

<u>Desconto composto:</u>

Quando falamos de desconto composto (D_c), estamos a pressupor que o montante a deduzir ao valor nominal corresponderá ao valor do juro composto a vencer pelo produto líquido do desconto, de modo a perfazer, no vencimento, o próprio valor nominal do capital.
A fórmula do desconto composto é:

$$\mathbf{D_c = C_n\,[1 - (1 + i)^{-t}]}$$

Exemplo:

Calcular o desconto composto sofrido por um capital de 20000€, por um período de 5 anos, à taxa de 6%.

$$D_c = 20000\,[1 - (1 + 0.06)^{-5}]$$

$$D_c = 20000\,(1 - 0.74725)$$

$$D_c = 5055€$$

Valor atual e valor acumulado:

Tanto no regime de juro simples como no regime de juro composto, é possível determinar o valor atual e o valor acumulado.

No regime de juro simples:

Para apurarmos o valor acumulado, temos de utilizar a fórmula:

$$\mathbf{M = C_n \, . \, (1 + t \times i)}$$

M = Valor acumulado

Para apurarmos o valor atual, temos de utilizar a fórmula:

$$\mathbf{V = \frac{M}{1 + t \times i}}$$

V = Valor atual

No regime de juro composto:

Para apurarmos o valor acumulado, temos de utilizar a fórmula:

$$\mathbf{M = C_n \, . \, (1 + i)^t}$$

M = Valor acumulado

Para apurarmos o valor atual, temos de utilizar a fórmula:

$$\mathbf{V = \frac{M}{(1 + i)^t}}$$

V = Valor atual

Regimes de equivalência

Juro simples (Fórmula geral e derivadas)

O regime de juro simples, é aquele que por norma é aplicado a investimentos de curto prazo e que são renováveis com a regularidade contratualizada, podendo ser anual, semestral, trimestral, mensal, etc.

O capital acumulado (C_n), é apurado tendo em conta o capital investido $(C_{0)}$, a taxa de juro e o tempo de duração do contrato.

A fórmula do apuramento é:

$$\mathbf{C_n = C_0 \cdot (1 + t \times i)}$$

A fórmula do juro total:

$$\mathbf{J_k = C_0 \times t \times i}$$

Exemplo:

Qual o juro produzido e qual o capital acumulado por um capital de 5000€, aplicado durante 3 anos a uma taxa anual de 5% em regime de capitalização simples?

Juro produzido:

$$J_k = 5000 \times 3 \times 0.05 = 750€$$

Capital acumulado:

1ª Hipótese: ao valor investido, somar os juros auferidos = 5000 + 750 = 5750€

2ª Hipótese: aplicação da fórmula: C_n *= 5000 (1 + 3 × 0.05) = 5750€*

Se o período de tempo surgir em meses, teremos que calcular qual o valor da taxa de juro ao mês e para tal, temos de utilizar a fórmula:

$$J_k = C_0 \times \frac{i}{12}$$

Caso, o juro total produzido por um dado capital aplicado durante t meses, temos de utilizar a fórmula:

$$J_k = C_0 \times \frac{t \times i}{12}$$

Por sua vez, o capital acumulado resultante deste tipo de aplica, será apurado com a utilização da fórmula:

$$\mathbf{C_n = C_0 \left(1 + \frac{t \times i}{12}\right)}$$

Nota Importante: Quando estamos a referirmos ao apuramento do valor em dias, as fórmulas são as mesmas, só que em vez de dividirmos por 12, temos de dividir por 360 dias, que é o que está convencionado como ano comercial.

Juro Composto (Fórmula geral e derivadas)

Neste regime de capitalização, os juros produzidos em cada período acrescem ao capital existente no período anterior, e passam também eles, de base ao cálculo dos juros no período seguinte. Este regime é denominado de "juros de juros".

O apuramento do juro no período 1 é calculado:

$$\mathbf{J_1 = C_0 \times i}$$

O juro a formar no período 2 resulta da aplicação da taxa de juro ao capital acumulado no período 1, logo:

$$J_2 = C_1 \times i = C_0 \,(1 + i) \times i$$

Já para o período 3, temos:

$$J_3 = C_2 \times i = C_0 \,(1 + i)^2 \times i$$

Generalizando a fórmula para um dado período de tempo, utilizamos para o apuramento dos juros:

$$\mathbf{J_{t} = C_{t-1} \times i = C_0 (1 + i)^{t-1} \times i}$$

Para o apuramento do total de um investimento no regime de juro composto, é utilizada a fórmula:

$$\mathbf{C_n = C_0 (1 + i)^{t}}$$

O montante total do juro que a capitalização de investimento gerou, é obtido:

Juro Total $(J_t) = C_n - C_0$

Que é igual na aplicação da fórmula:

Juro Total $(J_t) = C_0 [(1 + i)^{t} - 1]$

Exemplo:

Consideremos um investimento de 5000€, aplicados durante 3 anos, à taxa de 5% ao ano no regime de juro composto. Qual o montante acumulado?

$$C_n = 5000 (1 + 0.05)^3$$

$$C_n = 5000 \times 1.157625$$

$$C_n = 5788.13€$$

E qual o total de juros produzidos?

Total de juros (J_t) *= 5788.13 – 5000 = 788.13€*

Agora com a utilização da fórmula:

$J_t = 5000 [(1 + 0.05)^3 - 1]$ *= 788.13€*

Capitalização e atualização

A capitalização demonstra-nos que um determinado montante à data de hoje não terá certamente o mesmo valor daqui por um ano.

O valor temporal do dinheiro determina que um capital tem um certo valor num determinado momento; reportado a outro momento, o seu valor é outro (pode ser inferior se reportado a um momento passado, e superior se reportado a um momento posterior).

A atualização (ou desconto) e capitalização visam reportar determinado valor a um momento anterior. Diz-se atualizar (ou descontar) esse valor, mas quando é reportado a um momento posterior, diz-se capitalizar esse valor.

Para atualizar ou capitalizar é necessário assumir uma taxa, dita de atualização ou desconto, no primeiro caso, e de capitalização ou de juro no segundo caso.

Generalizando e simplificando, podemos dizer que atualizar um valor é reportá-lo a um momento anterior e capitalizar um valor é reportá-lo a um momento posterior.

Equivalência de capitais

Regime de Juro Simples:

No regime de juro simples, para se capitalizar um valor **c** , durante **t** determinados períodos à taxa **i** (**t** e **i** expressos na mesma unidade de tempo), temos de efetuar a multiplicação pelo fator (1+ti). Este fator, é o fator de capitalização de um único capital em regime de juro simples.

Fator de Capitalização Simples (FCS) = (1+ti)

Exemplo:

O Manuel tem uma divida de 5000€ que termina hoje. Na impossibilidade de a liquidar, solicitou que o fizesse daqui a 10 meses. Acordou com o credor a utilização do regime de juro simples anual de 7%. Quanto deve pagar no final deste novo prazo?

Resolução:

$$\mathbf{C_n = c\,(1 + ti)}$$

c = 5000

t =10 meses

i = 7% = 0.07

$$C_n = 5000\,(1 + \frac{10}{12} \times 0.07)$$

$$C_n = 5291{,}67€$$

Atualização (ou desconto) em RJS:

A atualização ou desconto em RJS tem duas conceções diferentes, a Solução Comercial (ou desconto por fora) e a Solução Racional (ou desconto por dentro).

Solução Comercial:

Tem-se em consideração que a taxa de juro incide sobre o capital nominal, como tal, **D = cti**

Solução Racional:

Tem-se em consideração que a taxa de juro incide sobre o capital atual (**c´**), como tal, **D = c´ti**

Das duas soluções, a mais utilizada na prática é a Solução Comercial ou Desconto por Fora (**Df**), como tal, o **Df= cti.**

Na aplicação da Solução Racional e necessitando de apurar o capital atual comercial simples, temos de aplicar a fórmula: $\mathbf{C_{as} = c\,(1 - ti)}$

O Fator de Atualização Comercial Simples (**FACS) = (1 – ti)**

Tendo alguns dados necessários para o apuramento da Solução Racional, mas desconhecendo a taxa de descontos simples(d_{cs}), a mesma pode ser apurada:

$$\mathbf{d_{cs} = \frac{i}{1 - ti}}$$

Exemplo:

A Maria, tem uma divida de 10.000€ com vencimento daqui a 4 anos. Se a mesma pretender antecipar o pagamento da sua divida, quanto deve pagar hoje, tendo sido acordada a taxa anual de 5% e a utilização do desconto comercial simples?
Determine igualmente a taxa de desconto associada a esta operação.

Resolução:

c = 10.000

t = 4

i = 5% = 0.05

Começamos por calcular o desconto comercial simples tendo em consideração o valor atual da dividia:

$$C_{as} = \mathbf{10.000\ (1 - 4\ x\ 0.05}\ )$$

$$C_{as} = 8000€$$

Se fosse hoje, teria de pagar 8000€, com o desconto efetuado.

Será que este valor com a atual taxa de juro vai valer os 10000€ ao fim de 3 anos?

8000 x (1+ 4 x 0.05) = 9600€.

Conclui-se que com a aplicação do desconto e a atual taxa de juro o credor ao fim de 3 anos, não tem os 10.000€ que existe em divida, como tal, temos de apurar qual será a taxa de juro que garanta os 10.000€ ao fim de 3 anos:

8000 * (1 + 4 x i) = 10000

(1+4 x i) = 10000/ 8000

(1+4i) = 1.25

4i= 1.25 – 1

4i = 0.25

i = 0.25/4

i = 0.0625

i = 6.25%

Para ter o valor dos 10000€ garantidos com o desconto efetuado, a taxa de juro a aplicar será de 6.25%

Operações financeiras de curto prazo

Desconto de letras

A letra é um título pelo qual uma pessoa – *o sacador* – ordena outra – *o sacado* – que lhe pague a si próprio ou a terceiro – *o tomador ou beneficiário* – uma determinada quantia monetária em determina data.

O desconto das letras, por norma é designado por desconto bancário e é a totalidade de encargos a deduzir ao valor nominal do título.

Por norma são cobrados vários custos:

- Juros;

- Comissão de cobrança;

- Imposto de selo;

- Portes.

O desconto bancário com a abreviatura (D_B), é o somatório das deduções efetuadas pela entidade bancária ao valor nominal da letra e utiliza-se a seguinte fórmula:

$$\mathbf{D_B = D_f + Com.Cob + Imp.Selo + P}$$

$\mathrm{D_f} = \text{montante de juros calculados pela fórmula de desconto por fora;}$

Com. Cob = valor da comissão de cobrança;

Imp. Selo = o imposto de selo que tem de ser calculado à taxa legal em vigor;

P = Portes.

Cálculo do Desconto por fora:

VN = valor nominal da letra;

t = número de dias que decorre desde a data do desconto à data do vencimento da letra;

d = taxa praticada.

Fórmula: $\boldsymbol{D_f = VN \times \left(\frac{t+2}{360} \times d\right)}$

A Comissão de Cobrança (CC) é sempre calculada sobre o VN da letra, logo é apurada:

Com. Cob. = VN x CC

O apuramento do Imposto de selo é calculado com recurso a:

Imp. Selo = 4% x VN x $\boldsymbol{\left(\frac{t+2}{360} \times d + CC\right)}$

Somando todos os componentes do desconto bancário, temos a fórmula final:

$$\mathbf{D_B = VN\left(\frac{t+2}{360} \times d + CC\right)(1 + IP) + P}$$

IP = Imposto de selo.

Após o apuramento do desconto bancário, pretende-se apurar qual o montante a creditar na conta do cedente e que tem por norma o nome de *Produto Líquido do Desconto* e a sigla PLD_B. Para o apuramento do mesmo, basta deduzir o valor do desconto ao valor nominal da letra.

$$\mathbf{PLD_B = VN - D_B}$$

Simplificando para que não se tenha de efectuar vários cálculos separados podemos utilizar só a fórmula que nos indica logo o PLD_B :

$$\mathbf{PLD_B = VN - \left[VN\left(\frac{t+2}{360} \times d + CC\right)(1 + IP) + P\right]}$$

Exemplo:

Uma letra cujo valor nominal era de 3000€ encontrava-se datada para o dia 30 de agosto de um determinado ano. Qual terá sido o montante creditado na conta do cedente, sabendo que a letra foi apresentada a desconto no dia 22 de junho e que o banco escolhido para o efeito, praticou as seguintes condições:

Taxa de desconto: 12%

Comissão de Cobrança: 1%

Portes: 2€

Resolução:

Temos de ter em consideração que o ano tem sempre 360 dias, logo cada mês tem 30 dias, assim sendo e tendo em consideração a data de 20/05, temos de contar os dias:

Maio: 10 dias + Junho 22 dias + julho 30 dias + agosto 30 dias, que dá o total de 92 dias.

$$PLD_B = 3000€ - \left[3000€\left(\frac{92 + 2}{360} \times 12\% + 1\%\right)(1 + 4\%) + 2€\right]$$

$$PLD_B = 3000 - [3000 \times 0.041 \times 1.04] - 2€$$

$$PLD_B = 3000 - 127.92 - 2$$

$$PLD_B = 2870{,}08€$$

Reforma de letras

A reforma das letras não é um método utilizado com muita regularidade, mas a mais comum é aquela em que o sacado, líquida uma parcela da dívida, e aceita uma nova letra com o valor remanescente. Nestas situações estamos perante uma *reforma parcial.*

Pode existir a *reforma integral* que é aquela em que o sacado não efetua nenhum pagamento.

Quando existe uma reforma de letras, o importante é apurar qual o valor nominal da nova letra. Seja que reforma for, ***o desconto imediato da letra de reforma resulta um produto líquido igual ao montante não liquidado na data de vencimento inicial.***

Neste apuramento, temos novas siglas:

PLD_R = Produto líquido do desconto da letra de reforma;

$VN_I =$ Valor nominal da letra reformada;

$VN_R =$ Valor nominal da letra de reforma;

PP = Pagamento realizado no caso de reforma parcial

Reforma integral da letra:

$$\mathbf{VN_I = VN_R - \left[VN_R\left(\frac{t + 2}{360} \times d + CC\right)(1 + IS) + P\right]}$$

Reforma parcial da letra:

$$\mathbf{VN_I - PP = VN_R - \left[VN_R\left(\frac{t + 2}{360} \times d + CC\right)(1 + IS) + P\right]}$$

Exemplo (1):

O sacado de uma letra de valor nominal de 10.000€, e o seu vencimento ocorre hoje, mas verificou-se que não tem meios financeiros para proceder à liquidação. O mesmo solicitou uma reforma integral por um período de 45 dias. A nova letra engloba encargos decorrentes de um possível desconto bancário imediato e que o banco pratica em operações similares, as seguintes condições:

Taxa de desconto: 8%

Comissões de cobrança: 2.25%

Porte: 2€

Calcule o VN da nova letra.

Resolução:

$$10000 = VN_R - \left[VN_R\left(\frac{45 + 2}{360} \times 0.08 + 0.0225\right)(1 + 0.04) + 2\right]$$

(=) 10000 = $VN_R - 0.0342\, VN_R - 2$

(=) 10000 +2 = 0.9658 VN_R

(=) 10002 / 0.9658 = VN_R

(=) 10356 = VN_R

Exemplo (2):

Imaginemos que o mesmo cliente que está referido no Exemplo (1), na data do vencimento da letra, o sacado procedeu à entrega de 50% do valor em dívida. Qual vai ser o valor da nova letra com a mesma informação que consta no Exemplo (1).

PP = 50% x 10000 = 5000€

Como uma parte já foi paga, logo temos que utilizar a reforma parcial da letra:

$$10000\ -\ 5000\ =\ VN_R\ -\ \left[VN_R\ \left(\frac{45+2}{360}\ \times\ 0.08\ +\ 0.0225\right)(1+0.04)\ +\ 2\right]$$

(=) 5000 = $VN_R\ -\ 0.0342\,VN_R - 2$

(=) 5000 + 2 = 0.9658 VN_R

(=) 5002 / 0.9658 = VN_R

(=) 5179 = VN_R

Desconto de Livranças:

A norma de funcionamento de uma livrança é muito idêntica à das letras, mas podem existir três tipos de desconto por financiamento:

1º - O VN da livrança corresponde ao capital mutuado, sendo os encargos decorrentes da operação de desconto tratados autónoma e antecipadamente.

2º - O VN da livrança inclui o capital mutuado, bem como os respetivos encargos.

3º - O VN da livrança corresponde ao capital mutuado, sendo os juros postecipados pagos antecipadamente pelo seu valor atual.

Nas livranças, o produto líquido do desconto por financiamento tem a sigla: PLD_F

1º tipo de desconto de financiamento:

Nesta possibilidade é temos: $PLD_F\ =\ VN$

Tendo em consideração os encargos inerentes ao desconto de livranças, que são, os juros, e imposto de selo podemos determinar a expressão matemática do desconto por financiamento que tem a sigla (D_F) para que possamos apurar o valor a liquidar com a sigla (VL).

Desconto por financiamento:

$$\mathbf{D_F = VN\ \left(\frac{t\ +\ 2}{360}\ \times\ d\right)(1\ +\ IS)}$$

Valor a liquidar:

$$VL = VN + D_F$$

Que nos permite apurar com a fórmula final:

$$\mathbf{VL = PLD_F \left[1 + \left(\frac{t + 2}{360} \times d\right)(1 + IS)\right]}$$

Exemplo:

Um empresário contratou com um Banco um financiamento a 100 dias, titulados com uma livrança de VN de 1500€. Quanto terá de pagar no seu vencimento ao banco, sabendo que o mesmo pratica uma taxa de 7.5% ao ano em operações desta natureza.

Resolução:

$$VL = 1500 \left[1 + \left(\frac{100 + 2}{360} \times 0.075\right)(1 + 0.04)\right]$$

(=) VL= 1500 x 1.0221

(=) VL = 1533.15€

Sendo o valor a pagar de 1533.15€, podemos concluir que o $D_F = 1533.15 - 1500 = 33.15€$

2º tipo de desconto de financiamento:

Neste caso, o VN da livrança engloba os encargos da operação de desconto, na data de emissão, a conta à ordem do cliente vai ser creditada pelo PLD, devendo a mesma ser debitada, no vencimento, pelo VN da livrança. Assim sendo:

$$\mathbf{VN = PLD_F + D_F}$$

Logo, temos a fórmula final:

$$\mathbf{VN = PLD_F + PLD_F \left(\frac{t + 2}{360} \times d\right)(1 + IS)}$$

Exemplo:

Um empresário contratou com um Banco um financiamento a 100 dias, titulados com uma livrança de VN de 1500€. Quanto terá de pagar no seu vencimento ao banco, sabendo que o mesmo pratica uma taxa de 7.5% ao ano em operações desta natureza.

Resolução:

$$VN = 1500 + 1500 \left(\frac{100 + 2}{360} \times 0.075\right)(1 + 0.04)$$

(=) VN= 1500 + 1500 x 0.0221

(=) VN= 1500 + 31.15

(=) VN = 1531.15€

O 1º e o 2º tipo de descontos de financiamento são praticamente equivalentes do ponto de vista financeiro.

3º tipo de desconto de financiamento:

Neste tipo de desconto de financiamento, os encargos embora postecipados, são pagos " à cabeça" pelo seu valor atualizado.

O VN da livrança vai corresponder à quantia a liquidar no seu vencimento e o montante a creditar na conta do subscritor vai resultar da aplicação de várias fórmulas:

VC = Valor a Creditar

Temos para apurar o VC:

$$\mathbf{VC = VN - \frac{D_F}{1 + i \times t}}$$

Exemplo:

Um empresário contratou com um Banco um financiamento a 100 dias, titulados com uma livrança de VN de 1500€. Quanto terá de pagar no seu vencimento ao banco, sabendo que o mesmo pratica uma taxa de 7.5% ao ano em operações desta natureza.

Tendo em consideração que é sempre o mesmo exemplo, já sabemos o valor do $D_F = 33.15€$

Assim sendo, já temos todos os dados para apurar o VC:

$$VC = 1500 - \frac{33.15}{1 + 0.075 \times \frac{100 + 2}{360}}$$

(=) VC= 1500 - $\frac{33.15}{1.02125}$

(=) VC = 1500 – 32.46

(=) VC = 1467.54€

Podemos concluir que o 3º tipo de desconto de financiamento configura um caso de aplicação da modalidade do desconto por dentro.

Rendas

Noções gerais:

Uma renda pode ter como definição, uma sucessão de capitais que se vencem em momentos equidistantes no tempo.

Os capitais que fazem parte desta sucessão, ou seja, os capitais que constituem a renda, têm a designação de **termos** da renda, o quais têm a sigla (T_K). O intervalo de tempo que decorre entre o vencimento de um termo e o vencimento do termo seguinte tem a designação de **período.** Por sua vez, a **duração** da renda engloba o tempo total, que separa o início do período relativo ao primeiro termo do fim do período concernente ao último termo da renda.

Existem vários fatores que permitem identificar uma sucessão de capitais como sendo uma renda, mas não ignorando as outras, um dos fatores mais relevantes é a **equidistância entre o vencimento dos seus termos.**

Classificação das rendas:

Conforme já foi indicado, uma renda é composta por fatores que permitem a sua classificação, os quais vamos ter alguns em consideração:

- A duração

A duração dsa rendas determina se as mesmas são temporárias quando as mesmas são compostas por um número limitado de termos. Ou são perpétuas, nos casos em que a sua composição é um número ilimitado de termos.

- A dependência de fatores aleatórios

As rendas são designadas por rendas certas, quando todos os elementos são previamente conhecidos. Em contrapartida, quando existem determinados elementos que podem ser alterados em função da ocorrência de certos fatores, designamos estas rendas como incertas.

- O vencimento dos termos

As rendas são antecipadas, caso os seus termos vençam no início do respetivo período. Quando o vencimento dos termos ocorra no final do período correspondente, mas mesmas são postecipadas ou normais.

- O valor dos termos

Os termos da renda mantendo-se inalterados, trata-se de uma renda de termos constantes. Quando os termos da renda podem alterar-se em função de determinados critérios, então estamos perante uma renda de termos variáveis.

O diferimento

As rendas que o primeiro termo vence no primeiro período da renda, digna-se por renda imediata. Quando uma renda não tem o vencimento do primeiro termo no primeiro período da renda, mas ocorrendo por N períodos adiante, esta renda é designada por renda diferida. Quando estamos perante uma renda diferida, temos um prazo de diferimento, que é o intervalo de tempo que decorre desde o momento do vencimento do primeiro termo da renda até ao momento em que esse vencimento ocorreria caso se tratasse de uma renda imediata.

Nota: Um exemplo muito comum onde podemos identificar o período de diferimento, é nos empréstimos bancários, mas com um outro nome, que é o período de carência.

O período

As rendas podem ter períodos diversos, pois os vencimentos podem ocorrer em momentos equidistantes no tempo. Não existe nenhuma regra de definição dos períodos, mas os mais comuns são:

- Anual = anuidades
- Semestral = semestralidades
- Trimestral = trimestralidades
- Mensal = mensalidades

A finalidade

Uma renda com o objetivo somente de remuneração da colocação de um capital a rentabilizar, designamos por uma renda de remuneração.

Por sua vez, quando a renda se destina a liquidar uma divida contraída no momento zero, então estamos perante uma renda de amortização.

Quando se pretende que se forme um determinado montante de capital num momento futuro, estamos na presença de uma renda de acumulação. Neste caso, ao total dos termos renda e acrescidos dos juros produzidos, vamos apurar o valor acumulado no final do período contratado.

Rendas de amortização de termos constantes

O valor dos termos da renda deve sempre incluir, uma parcela para liquidar o capital inicial e a outra para liquidar os juros, calculados sobre o capital em dívida no inicio de cada período à taxa de juro contratada (i). O valor atual **(R(0)),** é o somatório dos termos **T** ,utilizados no momento zero.

Fórmula:

$$\mathbf{R}\,(\mathbf{0}) = \mathbf{T} \times \frac{\mathbf{1} - (\mathbf{1} + \mathbf{i})^{-\mathbf{n}}}{\mathbf{i}}$$

Exemplo:

Calcular o termo constante de uma renda de amortização de 20 unidades, cujo valor atual é de 100.000€, à taxa de juro de 8.5%.

$$100.000 = T \times \frac{1 - (1 + 0.085)^{-20}}{0.085}$$

(=) 100.000 = T x 9.4633

(=) 100.000 / 9.4633 = T

(=) 10.567€ = T

Rendas de acumulação em termos constantes:

Este tipo de renda, determina que o valor acumulado obtido no momento n resulta do montante das entregas efetuadas (n x T), ao qual acresce o montante dos juros que por elas foram produzidos, o que é o mesmo que dizer que o valor acumulado será igual ao somatório do T termos capitalizados para o momento n.

R(n) = Valor Acumulado

Fórmula:

$$\mathbf{R(n) = T \times \frac{(1 + i)^{n} - 1}{i}}$$

Exemplo:

Quanto estará acumulado por uma aplicação financeira, ao fim de 20 anos, a uma taxa anual de 12%, mas sabendo que para essa aplicação foram efetuadas entregas mensais no valor de 50€?

Resolução:

$$i_{mensal} = \frac{0.12}{12} = 0.01$$

Sendo uma renda mensal, temos:

n = 20 anos x 12 meses = 240 meses

Aplicando a fórmula:

$$R(n) = 50 \times \frac{(1+0.01)^{240} - 1}{0.01}$$

(=) R(n) = 50 x 989.26

(=) R(n) = 49463€

No final dos 20 anos, esta aplicação tem o valor acumulado de 49463€.

Rendas Antecipadas:

Neste tipo de rendas, o primeiro termo vence-se, agora, no momento zero, ou seja, no início do 1º período da renda, por sua vez, o último termo, reporta-se ao momento n-1, isto é, ao início do último período da renda.

$$\ddot{\mathrm{R}}(0) = \text{Valor atual da renda antecipada.}$$

Fórmula:

$$\ddot{\mathbf{R}}(\mathbf{n}) = (\mathbf{1}+\mathbf{i}) \times \mathbf{T} \times \frac{(\mathbf{1} + \mathbf{i})^{\mathbf{n}} - \mathbf{1}}{\mathbf{i}}$$

Exemplo:

O cliente Alfa deposita no início de cada mês a quantia de 500€. Quanto terá acumulado passado um ano, tendo conhecimento que a instituição financeira pratica uma taxa de capitalização mensal de 0.5%.

Resolução:

Durante o ano, foram efetuados 12 depósitos de 500€ no início de cada mês, logo:

$$\ddot{R}(n) = (1 + 0.005) \times 500 \times \frac{(1+0.005)^{12} - 1}{0.005}$$

(=) $\ddot{R}(n)$ *= 1.005 x 500 x 12.34*

(=) $\ddot{R}(n) = 6200.85€$

No final o valor acumulado será de 6200.85€

Rendas Perpétuas:

Uma renda perpétua é uma renda que tem um número de termos considerado ilimitado. Ter um investimento por tempo ilimitado é uma utopia, como tal, apenas faz sentido analisar o seu valor atual e nunca o seu valor acumulado.

Quando se considera que um número de termos é ou pode ser considerado ilimitado, isso não significa obrigatoriamente que n seja infinito. Apenas que n é suficientemente elevado para que se possa assumir a renda como sendo perpétua.

Além do já indicado, podemos definir com mais precisão que o conceito de renda perpétua dizendo que uma renda será perpétua se o último termo já não acrescentar valor significativo ao valor atual (global) da renda.

A fórmula para o seu apuramento é a mesma que utilizamos para calcular o valor atual das rendas de amortizações de termos constantes.

Operações financeiras de médio e longo prazo

Amortização e empréstimos clássicos:

Um empréstimo é uma operação financeira através da qual um determinado individuo, que é o sujeito activo, cede a outro, o denominado sujeito passivo, uma determinada quantia C_0, por um dado período de tempo (n), obrigando-se o segundo a devolver ao primeiro essa quantia, de uma só vez ou em montante fracionados, acrescida de juros calculados à taxa acordada entre as partes.

Este tipo de contrato está definido legalmente no Art. 1142º do Código Civil. No entanto, no contexto da matemática financeira, apenas interessa a análise dos contratos de mútuo, em que a coisa mutuada é o dinheiro e que para além disso, têm caracter oneroso.

À semelhança do que acontece no âmbito das rendas, diversos são, também os critérios de classificação dos empréstimos. O que é mais importante, porém, no contexto da matemática financeira, é o que resulta do *processo de amortização* dos mesmos, ou seja, do modo como esses empréstimos são liquidados.

Existem inúmeras hipóteses neste domínio, mas em qualquer dos casos, deve observar-se o designado *princípio fundamental de amortização de empréstimo, que estabelece que, à data do contrato, o valor atual das obrigações do mutuante equivale ao valor atual das obrigações do mutuário.*

Sistemas de amortização de empréstimos:

Os vários sistemas de amortização de empréstimos distinguem-se, atendendo fundamentalmente, a dois fatores:

- Ao modo de reembolso do capital;
- Ao modo de pagamento dos juros.

Nos sistemas de amortização com reembolsos periódicos, existe sempre lugar à criação de uma renda de amortização, uma vez que os termos são entregues ao mutuante, reduzindo o montante do capital em divida. Cada termos da renda (C_K) é composto por duas parcelas:

- A parcela do juro (ou quota de juro), que é calculada sobre o valor do capital em divida no início de cada período e tem a designação (J_K).
- A parcela do reembolso (ou quota de capital), que amortiza parte do capital em dívida e que designamos por (M_K).

Desta forma temos o termo genérico da renda de amortização refente a um dado período K e que é dado por:

$$\mathbf{C_K = J_K + M_K}$$

Amortização não sistemática:

Neste sistema, a amortização do empréstimo processa-se sem que exista qualquer tipo de regra, o que é pouco usual. Por norma, esta amortização irregular ocorre, sobretudo, no âmbito de empréstimos não titulados ou em que existam procedentes da existência de relações de proximidade entre mutuantes e mutuários.

Exemplo:

Um determinado empréstimo no valor de 23.000€, contraído há dois anos atrás doi liquidado da seguinte forma:

- *entrega de 3000€, 3 meses após a contratação do empréstimo;*

- *entrega de 8000€, 15 meses após a contratação do empréstimo;*

- *entrega de 5000€, 21 meses após a contratação do empréstimo;*

- *entrega de 7000€, no momento presente.*

Em cada amortização efetuada, além dos montantes indicados, foram também pagos os juros em dívida e a taxa praticada foi a anual de 8%. Calcule o montante total desses juros.

Resolução:

A fórmula a ser aplicada é a do somatório de todos os juros:

$$\sum_{\mathbf{k=1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{J_K} = \mathbf{C_0}[(\mathbf{1+i})^{\mathbf{n}} - \mathbf{1}]$$

$$\sum_{k=1}^{n} J_K = 23.000 \left[(1+0.08)^{\frac{3}{12}} - 1\right] + 20.000 \left[(1+0.08)^{\frac{12}{12}} - 1\right]$$
$$+ 12.000 \left[(1+0.08)^{\frac{6}{12}} - 1\right] + 7.000 \left[(1+0.08)^{\frac{3}{12}} - 1\right]$$
$$= 446.81 + 1600 + 470.77 + 135.99 = 2653.57€$$

Foram pagos 2653.57€ a título de juros.

<u>Amortização única com pagamento periódico de juro simples:</u>

Neste sistema, o montante do capital em dívida em liquidado no final do prazo contratado, sendo o juro pago período a período, no montante de ($C_0 \times i$).

O encargo total a pagar pelo mutuário no momento do vencimento resulta de :

$C_n = C_0 + C_0 \times i$, que é o mesmo que ter : $C_n = C_0 + J_K$

Exemplo:

O montante de 10.000€ foi emprestado por dois anos, tendo sido acordado que os juros seriam pagos mensalmente à taxa de 10% e que o capital seria devolvido no final do prazo do contrato. Calcule o montante a pagar em cada mês, o montante total pago em título de juros e o montante a entregar na última prestação.

Resolução:

Apurar a taxa de juro mensal : $i_{mensal} = \frac{0.10}{12} = 0.008$

Apuramento do juro a ser pago mensalmente: $J_K = 10.000 \times 0.008 = 80€$

Apuramento do montante de juros a pagar : 80€ x 24 meses = 1920€

Apuramento do montante a pagar na última prestação: é o montante em dívida mais os juros do mês em questão, logo:

$$C_n = 10.000 + 80 = 10.080€$$

<u>Amortização única com pagamento antecipado de juro composto:</u>

Este tipo de amortização é mais conhecida, como pagamento de juros "à cabeça". Na formalização do contrato, é de imediato cobrado ao mutuário os juros totais decorrentes do processo de capitalização composta.

Como estes juros são pagos logo no momento da celebração do contrato, estamos a falar no momento atual, logo para apurar os juros no momento atual (J_0), teremos de aplicar a fórmula:

$$\mathbf{J_0 = C_0[1 - (1 + i)^{-n}]}$$

O valor líquido resultante do financiamento (V_{LF}), após os juros terem sido pagos no início do contrato é apurado com a seguinte fórmula:

$$\mathbf{V_{LF} = C_0(1 + i)^{-n}}$$

Exemplo:

Uma empresa pretende ter de imediato o valor de 20.000€. Recorreu a um banco que lhe apresentou as condições: os juros teriam que ser antecipados e com uma taxa de juro anual de 7.5% e que o capital teria de ser liquidado na totalidade daqui a 1 ano. Qual deverá ser o montante mutuado?

Resolução:

Sabemos que o $V_{LF} = 20.000$, *logo devemos calcular o* C_0*:*

$$20.000 = C_0\,(1 + 0.075)^{-1}$$

$$(=)20.000 = C_0 \times 0.93$$

$$(=)20.000/0.93 = C_0$$

$$(=)\ 21.505{,}38 = C_0$$

Amortizações de empréstimos de longa duração:

Este sistema de amortização está associado e é muito aplicado nos créditos habitação que por norma são de longa duração. Neste tipo de amortização, a prestação é composta por uma parte que amortiza parte da dívida e outra parte que é os juros que têm que ser pagos em cada prestação.

Existem vários sistemas de amortizações de empréstimos de longa duração, mas o mais aplica em Portugal, por norma é o sistema francês.

O termo genérico da renda (prestação) de amortização é :

$$\mathbf{\bar{C} = J_K + M_K}$$

$$\bar{C} = \ Valor\ da\ presta\text{ção}\ ou\ renda$$

$$M_K = \ Valor\ a\ amortizar\ \text{à}\ d\text{í}vida\ inicial$$

O capital mutuado C_0 corresponde ao valor atual de uma renda de amortização com n termos constantes iguais a $\bar{C}$.

$$\mathbf{C_0 = \ \bar{C} \times \frac{1 \ - \ (1 \ + \ i\,)^{-n}}{i}}$$

Exemplo:

Um empréstimo no valor de 100.000€ vai ser liquidado em 3 anos, através de prestações semestrais constantes de capital e juros. A taxa de juro anual é de 13%. Qual o montante das prestações?

Resolução:

Apurar a taxa de juros semestral : $i_{sem} \ = \ \frac{0.13}{2} \ = \ 0.065$

Logo o montante das prestações são:

$$100000 = \bar{C} \times \frac{1 - (1 + 0.065)^{-6}}{0.065}$$

$$(=)\ 100000 = \bar{C} \times 4.84$$

$$(=)\ \frac{100000}{4.84} = \bar{C}$$

$$(=)\ 20661{,}16 = \bar{C}$$

Tendo em consideração que que já sabemos como calcular o valor de cada prestação constante, também é possível apurar o montante do capital em divida num determinado momento. O capital em dívida, corresponde ao valor atualizado das prestações que se encontram por liquidar, ou seja, o valor da renda de amortização com **m** termos constantes, sendo que **m** é o número de prestações em falta.

Sendo (D_p), o capital em divida imediatamente após o pagamento da prestação de ordem p, da qual resulta a fórmula:

$$\mathbf{D_p = \bar{C} \times \frac{1 - (1 + i)^{-m}}{i}}$$

Exemplo:

Um empréstimo no valor de 750000€ vai ser amortizado ao longo dos próximos 20 anos, através de prestações mensais constantes à taxa nominal de 10% ao ano. Qual o montante em dívida após o pagamento da 80ª prestação?

Resolução:

Total de prestações: 12 meses x 20 anos = 240 prestações

Taxa de juro mensal: $i_{mensal} = \frac{0.10}{12} = 0.008$

Apuramento do valor da prestação mensal:

$$750000 = \bar{C} \times \frac{1 - (1 + 0.008)^{-240}}{0.008}$$

$$(=)\ 750000 = \bar{C} \times 106.53$$

$$(=)\ \frac{750000}{106.53} = \bar{C}$$

$$(=)\ 7040{,}27 = \bar{C}$$

Se já pagamos 80 prestações, faltam pagar 160 prestações, logo :

p = 80

m = 160

$$D_{160} = 7040.27 \times \frac{1 - (1 + 0.008)^{-160}}{0.008}$$

$$D_{160} = 7040.27 \times 90.07$$

$$D_{160} = 634102{,}23€$$

Caso pretendamos saber qual o capital amortizado (A_p) após o pagamento de uma determinada prestação de ordem p, temos de utilizar a fórmula:

$$\mathbf{A_p = C_0 - \bar{C} \times \frac{1 - (1 + i)^{-m}}{i}}$$

Exemplo:

Dando continuidade ao exercício anterior, vamos calcular o montante de capital amortizado após o pagamento da 55ª prestação.

Resolução:

$$A_{55} = 750000 - 7040.27 \times \frac{1 - (1 + 0.008)^{-185}}{0.008}$$

$$A_{55} = 71478.24€$$

Sistema de amortização constante:

Neste sistema $\mathbf{\bar{M}}$ a amortização constante, e sendo $\mathbf{J_K}$ sempre decrescente, significa que $\mathbf{C_K}$ é necessariamente decrescente em **K**.

O termo genérico da renda de amortização é:

$$\mathbf{C_K = J_K + \bar{M}}$$

O valor da parcela de capital a amortizar em cada período é igual ao montante inicial divido pelo número de prestações a efetuar:

$$\mathbf{\bar{M} = \frac{C_0}{n}}$$

Por sua vez, a quota de juro a pagar num dado momento K, é calculada, tendo como base o capital em divida no início do período. No entanto, nesse momento, já terão disso efetuadas K-1 amortizações, entanto, no entanto por realizar n-(K-1), logo usamos a fórmula:

$$\mathbf{J_K = [C_0 - (K - 1) \times \bar{M}] \times i}$$

Exemplo:

Um empréstimo vai ser amortizado em 20 prestações anuais constantes de capital, sendo os juros cobrados à taxa de 8%. Sabendo que os juros que compõe a 10ª prestação ascendem a 750€, determine o montante do empréstimo, bem como o montante da 5ª anuidade.

Resolução:

$$J_{10} = [20 - (10 - 1)] \times \bar{M} \times 0.08 = 750€$$

$$(=)\ 11 \times \bar{M} \times 0.08 = 750$$

$$(=)0.88 \times \bar{M} = 750$$

$$(=)\overline{M} = \frac{750}{0.88}$$

$$(=)\ \overline{M} = 852.27€$$

Logo, já podemos calcular o montante do empréstimo:

$$C_0 = 20 \times 852.27$$

$$C_0 = 17045.45€$$

O apuramento da 5ª prestação:

$$J_5 = [20 - (5 - 1)] \times 852.27 \times 0.08$$

$$J_5 = 16 \times 852.27 \times 0.08$$

$$J_5 = 1090.91€$$

Já sabemos o valor dos juros da 5ª prestação e o valor contante que é amortizado, logo o valor da prestação é a soma de ambos:

$$C_5 = 1090.91 + 852.27 = 1943.18€$$

- Uma forma de simplificar alguns cálculos, é criar um quadro de amortização, que por norma é composto da seguinte forma:

Tempo	**Cap. Em Dívida**	**Juros** ($\boldsymbol{J_K}$)	**Amortização** ($\boldsymbol{M_K}$)	**Prestação** ($\boldsymbol{\overline{C}}$)
1		$J_K = i \times C\ DIV_K$	$M_K = \bar{C} - J_K$	Fixa
2	$C\ DIV_K = C\ DIV_{K-1} - M_{K-1}$			
3				
4				

Locação Financeira:

Uma locação financeira é uma modalidade de financiamento, no qual o locador, de acordo com as instruções do seu cliente, adquire um bem, que pode ser móvel ou imóvel e o cede para uso temporário, mediante um contrato e o pagamento de uma quantia periódica, pelo prazo determinado no contrato, podendo ou não existir a opção de compra no final do prazo do contrato.

Um contrato de locação financeira tem de ter alguns elementos fundamentais para a sua celebração:

- O montante do financiamento (do bem móvel ou imóvel);
- A duração do contrato;
- O valor da opção de compra;
- O valor das rendas.

Um contrato de locação financeira tem como duração máxima, 30 anos, conforme está determinado legalmente.

Durante o período contratualizado, o cliente é o proprietário económico do bem, sem a respetiva propriedade jurídica do locador.

No final do contrato, conforme já foi referido pode existir a compra do bem, se o mesmo tiver sido acordado entre ambas as partes e isso constar do contrato de locação financeira, caso a compra não exista, pode ser celebrado um novo contrato de locação financeira ou simplesmente restituir o bem à locadora.

Empréstimos Obrigacionistas:

Vários autores têm definições distintas sobre o que é uma obrigação, mas de forma a simplificar, diremos que as obrigações correspondem a frações de um empréstimo global, em regra um grande montante.

Sendo títulos de longo prazo, os fundos captados destinam-se, geralmente, ao financiamento do investimento.

A subscrição de obrigações pode ser particular ou pública. É uma subscrição particular quando se destina a um determinado segmento de compradores e estes já são previamente conhecidos. Por sua vez, é uma subscrição pública quando os títulos são disponibilizados aos investidores em geral.

Tipos de obrigações:

- Obrigações clássicas, ou obrigações de taxa fixa não reversível;
- Obrigações de rendimento variável ou indexadas;
- Obrigações de caixa;
- Obrigações convertíveis;
- Obrigações de cupão zero;
- Obrigações com warrants;
- Obrigações com opção de reembolso antecipado;
- Obrigações grupadas;
- Obrigações perpétuas;
- Obrigações hipotecárias;
- Obrigações participantes;
- Obrigações subordinadas;
- Junk Bonds;
- Euro-obrigações;
- Obrigações do Tesouro;
- Obrigações de capitalização automática.

Tendo em consideração as inúmeras obrigações que existem no mercado, devemos analisar os aspetos relevante no cálculo financeiro:

Valor nominal e montante do empréstimo:

O montante global de um empréstimo obrigacionista (C_0) apura-se com a multiplicação do número de obrigações emitidas (N) pelo valor nominal (V_n).

$$\mathbf{C_0 = N \times V_n}$$

Taxa de juro das obrigações:

A taxa pode ser fixa ao longo do período de vigência do contrato ou pode ser indexada, que varia em função de um determinado padrão de referência que se chama de indexante.

$$\mathbf{J_K = i \times V_n}$$

Liquidez das obrigações:

Sendo as obrigações, um contrato de longa duração, estas podem ser transacionadas no mercado secundário de títulos, que em Portugal é no mercado a contado da Euronext Lisbon.

A relação da oferta e da procura de títulos, resulta em cada momento, a formação de um determinado preço (p) , que é denominada de cotação do título.

Esta relação de confronto entre a procura e a oferta, determina também um confronto entre o preço e o Valor nominal e do qual podem resultar 3 situações distintas:

- ✓ Se $p < V_n$, dizemos que a cotação está abaixo do par, ou seja, é inferior ao valor indicado na face do título;
- ✓ Se $p = V_n$, dizemos que a cotação está ao par, isto é, o valor de mercado é igual ao valor indicado na face do título;
- ✓ Se $p > V_n$, significa que a cotação está acima do par, logo o título está a ser transacionado no mercado por um preço superior ao que se encontra mencionado na sua face.

Valor de emissão:

O valor de emissão (V_e), é o valor pelo qual os títulos são colocados à subscrição, logo, é o valor pago pelo obrigacionista para se tornar detentor dos mesmos.

O valor de emissão não é necessariamente idêntico ao valor nominal, logo temos que os analisar:

- ✓ Se $V_e < V_n$, diremos que a emissão se efetua abaixo do preço par, logo é vantajoso para o investidor. Nesta situação temos uma emissão que foi efetuada a desconto;
- ✓ Se $V_e = V_n$, a emissão ocorreu ao par, logo, o valor de emissão coincide com o valor de referência, como tal, não é nem vantajoso ou desvantajoso para o investidor:
- ✓ Se $V_e > V_n$, a emissão está a efetuar-se acima do par, logo é mais desvantajoso para o investidor. Neste acontecimento, a emissão ocorreu a prémio

Valor de reembolso:

O valor de reembolso (V_r)é a quantia paga por cada título pela empresa emitente ao obrigacionista aquando da amortização do empréstimo.

O valor de reembolso não tem de ser necessariamente idêntico ao valor nominal, pelo que temos de apurar o seu efeito:

- ✓ Se $V_r < V_n$, significa que o reembolso é efetuado abaixo do par, o que não é atrativo para um investidor.
- ✓ Se $V_r = V_n$, consideramos que o reembolso é feito ao par, logo não determina nem ganho nem perda ao investidor.
- ✓ Se $V_r > V_n$, verifica-se que o reembolso se efetua acima do par, o que demonstra ser a situação mais vantajosa para o investidor.
- ✓ Quando o $V_r > V_n$, o valor da diferença entre ambos se designa de prémio de reembolso.

Processos de amortização:

A amortização dos empréstimos obrigacionistas, ocorrem por norma de duas formas:

- De uma só vez, em data pré-fixada;
- Periodicamente, por intermédio de uma renda de amortização.

Reembolso ao par:

Se a amortização for efetuada, e em cada cupão, uma quota constante de capital, liquidaremos, em cada período, uma parcela de capital correspondente a $\bar{m}$ obrigações, sendo que:

$$\bar{\mathbf{m}} = \frac{\mathbf{N}}{\mathbf{n}}$$

N = número de obrigações emitidas

n = número de reembolsos a efetuar.

$\bar{M}$ = quota de capital a amortizar em cada período

$$\bar{\mathbf{M}} = \bar{\mathbf{m}} \times \mathbf{V_r}$$

Como a amortização é feita ao par:

$$\bar{\mathbf{M}} = \bar{\mathbf{m}} \times \mathbf{V_n}$$

Como acontece no processo de amortização de empréstimos de longa duração, nos empréstimos obrigacionistas também é útil ser criado um quadro de amortização, mas o mesmo vai conter mais dados que são:

- **Número de obrigações vivas**, que é o número de obrigações que ainda estão em circulação;
- **Valor nominal das obrigações vivas**, que se apura multiplicando o número de obrigações vivas em cada momento k pelo valor nominal das obrigações;

- **Número de obrigações mortas**, que nos dá em cada momento k, o número de obrigações que já foram amortizadas.

Os quadros de amortização dos empréstimos obrigacionistas obedecem à seguinte estrutura:

Período de tempo	**Nº de Obrigações Vivas**	**Valor Nominal de Obrigações Vivas**	**Juros (J_K)**	**Amortização (M_k)**	**Prestação (C_K)**	**Nº de Obrigações Mortas**
…						
…						
k						
….						

Exemplo:

O IEFP emitiu um empréstimo obrigacionista, titulado por 100.000 ações, sendo o valor nominal de 1€. O IEFP vai pagar cupões semestrais à taxa anual de 5% e a amortização será efetuada ao par, através de quotas semestrais constantes de capital, durante os próximos 4 anos. Efetue o quadro de amortização do empréstimo.

Resolução:

$$C_0 = 100000 \times 1 = 100000€$$

Como a amortização é feita ao par e são 8 quotas semestrais constantes:

$$\bar{M} = \frac{100000}{8} = 12500€$$

Já sabemos que serão amortizadas 12500 ações por semestre, mas temos de calcular a taxa de cupão ao semestre:

$$i_{sem} = \frac{0.05}{2} = 0.025$$

Assim sendo já podemos construir o quadro de amortização e será efetuado em €:

Período de tempo	**Nº de Obrigações Vivas**	**Valor Nominal de Obrigações Vivas**	**Juros (J_K)**	**Nº de Obrigações a amortizar**	**Amortização (M_k)**	**Prestação (C_K)**	**Nº de Obrigações Mortas**
1	100000	100000	2500	12500	12500	15000	12500
2	87500	87500	2187,5	12500	12500	14687,5	25000
3	75000	75000	1875	12500	12500	14375	37500
4	62500	62500	1562,5	12500	12500	14062,5	50000
5	50000	50000	1250	12500	12500	13750	62500
6	37500	37500	937,5	12500	12500	13437,5	75000
7	25000	25000	625	12500	12500	13125	87500
8	12500	12500	312,5	12500	12500	12812,5	100000

Bibliografia:

Todos os conteúdos pedagógicos facultados no decorrer da UFCD tiverem como referências bibliográficas:

Manual de matemática financeira / Ana Paula C. L. P. S. Quelhas, Fernando A. M. Correia. - 3ª ed. rev. - Coimbra : Almedina, 2014. - 727 p. ; 24 cm. - Bibliografia, p. 725-727. - ISBN 978-972-40-5440-7

Cálculo financeiro : teoria e prática / Rogério Matias. - 6ª ed. - Lisboa : Escolar Editora, 2018. - XVII, 749 p. : il. ; 24 cm + formulário ([1] f.). - ISBN 978-972-592-539-3