UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E INFORMÁTICA
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

CCSE

CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO

UEPA

ÁLGEBRA LINEAR

Rubens Vilhena Fonseca

Marília Brasil Xavier
REITORA

Prof. Rubens Vilhena Fonseca
COORDENADOR GERAL DOS CURSOS DE MATEMÁTICA

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ

MATERIAL DIDÁTICO

EDITORAÇÃO ELETRONICA

Odivaldo Teixeira Lopes

ARTE FINAL DA CAPA

Odivaldo Teixeira Lopes

REALIZAÇÃO

UEPA
UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

F676a Fonseca, Rubens Vilhena
Álgebra linear / Rubens Vilhena Fonseca – Belém: UEPA / Centro de Ciências Sociais e Educação, 2011.
148 p.; il.

ISBN: 978-85-88375-58-1

1.Álgebra linear. I. Universidade Estadual do Pará. II. Título.

CDU: 512.64
CDD: 512.5

Índice para catálogo sistemático
1. Álgebra Linear: 512.64

Belém - Pará - Brasil
- 2011 -

SUMÁRIO

Capitulo 4 - OPERADORES LINEARES

Capítulo 5 - VETORES PRÓPRIOS E VALORES PRÓPRIOS

Capítulo 6 - SIMPLIFICAÇÃO DA EQUAÇÃO GERAL DAS CÔNICAS

Capítulo 1

ESPAÇOS VETORIAIS

1.1 – ESPAÇO VETORIAL REAL

Seja um conjunto **V**, não vazio, sobre o qual estão definidas as operações de *adição e multiplicação por escalar*, isto é:

$\forall \mu, \nu \in V, \quad \mu + \nu \in V$

$\forall \alpha \in IR, \forall \mu \in V, \alpha\mu \in V$

O conjunto **V** com estas duas operações é chamado *espaço vetorial real* se forem verificados os seguintes axiomas:

A) Em relação à adição:
A_1) $(\mu + \nu) + \omega = \mu + (\nu + \omega), \forall \mu, \nu, \omega \in V$
A_2) $\mu + \nu = \nu + \mu, \forall \mu, \nu, \omega \in V$
A_3) $\exists\, 0 \in V, \forall \mu \in V, \mu + 0 = \mu$
A_4) $\forall \mu \in V, \exists (-\mu) \in V, \mu + (-\mu) = 0$

M) Em relação à multiplicação por escalar:
M_1) $(\alpha\beta)\, \mu = \alpha\, (\beta\mu)$
M_2) $(\alpha+\beta)\, \mu = \alpha\mu + \beta\mu$
M_3) $\alpha\, (\mu + \nu) = \alpha\mu + \alpha\nu$
M_4) $1\mu = \mu$
para $\forall \mu, \nu \in \forall \alpha, \beta \in IR$

- Os elementos μ, ν, ω, ..., de um espaço vetorial **V** são denominados *vetores*.

- Se a definição de espaço vetorial considerasse como escalares o conjunto **C** dos números complexos, **V** seria um *espaço vetorial complexo*. Entretanto, nesta INTRODUÇÃO À ÁLGEBRA LINEAR serão considerados somente espaços vetoriais reais.

- Por ter sido dada a definição de forma genérica, para um espaço vetorial **V** qualquer, ela serve para conjuntos diversos, tais como (o que si verá a seguir) o $\mathbf{IR^2}$,
- o $\mathbf{IR^3}$, o conjunto das matrizes $M_{(m\ n)}$, etc. Assim, conforme seja o espaço vetorial considerado, os vetores terão a natureza dos elementos desse espaço e

os conjuntos correspondentes terão a mesma "estrutura" em relação às operações de adição e multiplicação por escalar.

- Embora sejam dados exemplos de vários espaços vetoriais, serão examinados, de preferência, aqueles cujas aplicações se referem à Geometria Analítica.

Exemplos

1) O conjunto $\mathbf{V = IR^2 = \{(x, y) / x, y \in IR\}}$ é um espaço vetoríal com as operações de adição e multiplicação por um número real assim definidas:

$$\mathbf{(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)}$$

$$\boldsymbol{\alpha (x, y) = (\alpha x, \alpha y)}$$

Essas operações são denominadas *operações usuais.*

Para verificar os oito axiomas de espaço vetorial, sejam μ = $\mathbf{(x_1, y_1)}$, v = $\mathbf{(x_2, y_2)}$ **e** ω = $\mathbf{(x_3, y_3)}$.

$$\begin{aligned} A_1)\ (\mu + \nu) + \omega &= ((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) + (x_3, y_3) \\ &= ((x_1 + x_2, y_1+y_2)) + (x_3,y_3) \\ &= ((x_1 + x_2) + x_3, (y_1 + y_2) + y_3) \\ &= (x_1 + (x_2 + x_3), y_1 + (y_2 + y_3)) \\ &= (x_1, y_1) + (x_2 + x_3, y_2 + y_3) \\ &= (x_1, y_1) + ((x_2, y_2) + (x_3, y_3)) \\ &= \mu+(\nu + \omega) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_2)\ \mu + \nu &= (x_1, y_1) + (x_2, y_2) \\ &= (x_1 + x_2, y_1+y_2) \\ &= (x_2 + x_1, y_2 + y_1) \\ &= (x_2, y_2) + (x_1, y_1) \\ &= \nu + \mu \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_3)\ \exists\, 0 = (0, 0) \in IR^2, \forall \mu \in IR^2, \mu + 0 &= (x_1, y_1) + (0, 0) \\ &= (x_1 + 0, y_1 + 0) \\ &= (x_1, y_1) \\ &= \mu \end{aligned}$$

A_4) $\forall \mu = (x_1, y_1) \in IR^2$, $\exists (-\mu) = (-x_1, -y_1) \in IR^2$,

$$\mu + (-\mu) = (x_1, y_1) + (-x_1, -y_1)$$
$$= (x_1 - x_2, y_1 - y_1)$$
$$= (0, 0) = 0$$

M_1) $(\alpha\beta)\mu = (\alpha\beta)(x_1, y_1)$

$$= ((\alpha\ \beta)\ x_1,\ (\alpha\ \beta)\ y_1)$$
$$= (\alpha\ (\beta\ x_1), \alpha\ (\beta\ y_1))$$
$$= \alpha\ (\beta\ x_1, \beta\ y_1)$$
$$= \alpha\ (\beta\ (x_1, y_1))$$
$$= \alpha\ (\beta\mu)$$

M_2) $(\alpha + \beta)\mu = (\alpha + \beta)(x_1, y_1)$

$$= ((\alpha\ \beta)\ x_1,\ (\alpha + \beta)\ y_1)$$
$$= (\alpha\ x_1 + \beta\ x_1, \alpha\ y_1 + \beta\ y_1)$$
$$= (\alpha\ x_1, \alpha\ y_1) + (\beta\ x_1, \beta\ y_1)$$
$$= \alpha\ (x_1, y_1) + \beta\ (x_1, y_1)$$
$$= \alpha\mu + \beta\mu$$

M_3) $\alpha\ (\mu + \nu) = \alpha\ ((x_1, y_1) + (x_2, y_2))$

$$= \alpha\ (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$
$$= (\alpha\ (x_1 + x_2, \alpha\ (y_1 + y_2))$$
$$= (\alpha\ x_1 + \alpha\ x_2, \alpha\ y_1 + \alpha\ y_2)$$
$$= (\alpha\ x_1, \alpha y_1) + (\alpha\ x_2, \alpha y_2)$$
$$= \alpha\ (x_1, y_1) + \alpha\ (x_2, y_2)$$
$$= \alpha\mu + \alpha\nu$$

M_4) $1\mu = 1\ (x_1, y_1)$

$$= (1x_1, 1y_1)$$
$$= (x_1, y_1)$$
$$= \mu$$

2) Assim como um par ordenado (x_1, x_2) de números reais representa um ponto ou um vetor no $\mathbf{IR^2}$, e uma terna ordenada (x_1, x_2, x_3) de números reais representa um ponto ou um vetor no $\mathbf{IR^3}$, como se sabe da Geometria Analítica, pode-se dizer, estendendo a idéia, embora

sem representação geométrica, que uma quádrupla ordenada de números reais (x_1, x_2, x_3, x_4) é um ponto ou um vetor do $\mathbf{IR}^4$ e que uma n-upla ordenada de números reais $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ é um ponto ou um vetor do $\mathbf{IR}^n$. Analogamente, os conjuntos $\mathbf{IR}^3$, $\mathbf{IR}^4$, ..., $\mathbf{IR}^n$ são também espaços vetoriais com as *operações usuais* de adição e multiplicação por escalar. A verificação dos oito axiomas para esses conjuntos é análoga à do $\mathbf{IR}^2$.

3) O conjunto **IR**, em relação às operações usuais de adição e de multiplicação por escalar é um espaço vetorial. De fato, sabe-se que a adição de números reais satisfaz os axiomas A_1, A_2, A_3 e A_4 e que, na multiplicação, se verificam os axiomas M_1, M_2, M_3 e M_4.

4) O conjunto das matrizes $M_{(m,\ n)}$ com as operações de adição e multiplicação por escalar, definidas nos itens A.8 e A.9 do APÊNDICE, é um espaço vetorial. Em particular, o conjunto das matrizes quadradas M_n é um espaço vetorial em relação às mesmas operações.

5) O conjunto $\mathbf{IR}^2 = \{(a, b) / a, b \in \mathbf{IR}\}$ *não* **é** um espaço vetorial em relação às operações assim definidas:

$$\mathbf{(a, b) + (c, d) = (a + c, h + d)}$$

$$\mathbf{k\,(a, b) = (ka, b),\ k \in IR}$$

Como a adição aqui definida é a usual, verificam-se os axiomas A_1, A_2, A_3 e A_4 de espaço vetorial, conforme se viu no Exemplo 1. Logo, não devem se verificar alguns (ou algum) dos axiomas relativos à multiplicação.

Sejam $\mu = (x_1,y_1)$, $v = (x_2, y_2)$ e $\alpha, \beta \in$ IR

$$\begin{aligned} M_1)\ (\alpha\beta)\mu &= (\alpha\beta)\,(x_1, y_1) \\ &= ((\alpha\beta)\,x_1, y_1) \\ &= (\alpha\,(\beta\,x_1), y_1) \\ &= \alpha\,(\beta\,x_1, y_1) \\ &= \alpha\,(\beta\,(x_1, y_1)) \\ &= \alpha\,(\beta\,\mu) \end{aligned}$$

(Este axioma se verifica)

$$\begin{aligned} M_2)\ (\alpha+\beta)\mu &= (\alpha+\beta)\,(x_1, y_1) \\ &= ((\alpha+\beta)\,x_1, y_1) \\ &= (\alpha x_1 + \beta\,x_1, y_1) \\ &\neq \alpha\,(x_1, y_1) + \beta\,(x_1, y_1) \end{aligned}$$

$= (ax_1, y_1) + (\beta\, x_1, y_1)$
$= (\alpha x_1 + \beta\, x_1, 2\, y_1)$

Como se vê, $(\alpha + \beta)\, \mu \neq \alpha\mu + \beta\mu$ e, portanto, não se verificando, no mínimo, o axioma $\mathbf{M_2}$, o conjunto de que trata este Exemplo *não* é um espaço vetorial.

1.2- PROPRIEDADES DOS ESPAÇOS VETORIAIS

Da definição de espaço vetorial **V**, decorrem as seguintes propriedades:

I) Existe um único vetor nulo em **V** (elemento neutro da adição).

II) Cada vetor $\mu \in V$ admite apenas um simétrico $(-\mu) \in V$.

III) Para quaisquery, $\mu, \nu, \omega, \in V$, se $\mu + \omega = \nu + \omega$, então $\mu = \nu$.

IV) Qualquer que seja $\nu \in V$, tem-se: $-(-\nu) = \nu$, isto é, o oposto de $-\nu$ é ν.

V) Quaisquer que sejam $\mu, \nu \in V$, existe um e somente um x, tal que $\mu + x = \nu$

VI) Qualquer que seja $\nu \in V$, $0\nu = 0$. O primeiro 0 é o número real zero e o segundo é o vetor zero.

VII) Qualquer que seja $\lambda \in IR$, $\lambda 0 = 0$.

VIII) $\lambda\nu = 0$, implica $\lambda = 0$ ou $\nu = 0$.

IX) Qualquer que seja $\nu \in V$, $(-1)\, \nu = -\nu$.

X) Quaisquer que sejam $\nu \in V$ e $\lambda \in IR$, $(-\lambda)\, \nu = \lambda\, (-\nu) = -(\lambda\nu)$.

1.3 – SUBESPAÇOS VETORIAIS

Sejam **V** um espaço vetorial e **S** um subconjunto não-vazio de **V**. O subconjunto **S** é um *subespaço vetorial* de **V** se **S** é um espaço vetorial em relação à adição e à multiplicação por escalar definidas em **V**.

A definição parece indicar que, para um subconjunto **S** ser subespaço vetorial de **V**, se deveria fazer a verificação, em **S**, dos oito axiomas de espaço vetorial relativos à adição e à multiplicação por escalar. Entretanto, como **S** é parte de **V** (que é espaço vetorial), não é necessária essa verificação. Para citar só um exemplo, o axioma A_2 ($\mu + \nu = \nu + \mu$) não precisa ser examinado porque se a comutatividade da adição é valida para todos vetores de **V**, ela valerá para todos vetores de **S**. A seguir, as condições para um subconjunto **S** ser subespaço vetorial de **V**.

- Um subconjunto **S**, *não-vazio,* de um espaço vetorial **V**, é um subespaço vetorial de **V** se forem satisfeitas as seguintes condições:

I) Para quaisquer $\mu, \nu \in S$, $\mu + \nu \in S$.

II) Para quaisquer $\alpha \in IR$, $\mu \in S$, $\alpha\mu \in S$.

De fato: se μ é um vetor qualquer de **S**, pela condição **II**, $\alpha\, \mu \in S$ para todo $\alpha \in$ **IR**. Fazendo $\alpha = 0$, vem $0\mu \in S$**,** ou seja, $0 \in S$ (axioma A_3); fazendo $\alpha = -1$, tem-se $(-1)\mu = -\mu \in S$ (axioma A_4). Os outros axiomas A_1, M_1, M_2, M_3 e M_4 de espaço vetorial são verificados em S por ser S um subconjunto não-vazio deV.

- Todo espaço vetorial $V \neq \{0\}$ admite, pelo menos, dois subespaços: o conjunto $\{0\}$, chamado *subespaço zero* ou *subespaço nulo* e o próprio espaço vetorial **V**. Esses dois são os *subespaços triviais* de **V**. Os demais são denominados *subespaços próprios* de **V**.

- Os subespaços triviais do $\mathbf{IR^2}$, por exemplo, são **{**(0, 0)**}** e $\mathbf{IR^2}$, enquanto os subespaços próprios são as retas que passam pela origem do sistema de referência. De modo análogo, os subespaços triviais do $\mathbf{IR^3}$ são {(0, 0, 0)} e o $\mathbf{IR^3}$; os subespaços próprios do $\mathbf{IR^3}$ são as retas e os planos que passam pela origem do sistema de referência.

Exemplos

1) Sejam $V=IR^2$ e $S =\{(x,y)\} \in IR^2/y = 2x\}$ ou $S = \{(x, 2x); x \in IR\}$, isto é, **S** é o conjunto dos vetores do plano que têm a segunda componente igual ao dobro da primeira. Observe-se que $S \neq \varnothing$, pois $(0, 0) \in S$. (Daqui por diante, fica dispensada a necessidade de verificar se o conjunto é não-vazio porque *os exemplos tratarão somente de conjuntos não-vazios.)* Se **S** é subespaço vetorial de $V = IR^2$, **S** deve satisfazer às condições I e II. Para $\mu = (x_1, 2x_1) \in S$ e $\nu = (x_2, 2x_2) \in S$, tem-se:

I) $\mu + \nu = (x_1 + x_2, 2x_1 + 2x_2) = (x_1 + x_2, 2(x_1 + x,)) \in S$ pois a segunda componente de $\mu + \nu$ é igual ao dobro da primeira.

II) $\alpha\mu = \alpha (x_1, 2x_1) = (ax_1, 2ax_1) \in S$ pois a segunda componente de $\alpha\mu$ é igual ao dobro da primeira.

Portanto, **S** é um subespaço vetorial do $\mathbf{IR^2}$. Esse subespaço **S** representa geometricamente uma reta que passa pela origem do sistema de referência (Fig. 1.3).

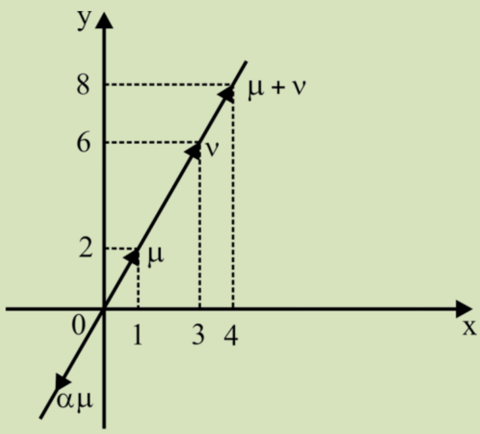


Figura 1.3

Observação

Observe-se que ao escolher dois vetores μ e ν da reta $y = 2x$, o vetor $\mu + \nu$ pertence à reta e, se se multiplicar um vetor μ da reta por α, o vetor $\alpha\mu$ também estará na reta. Se a reta dada **S** não passar pela origem, **S** não é um subespaço vetorial do $\mathbf{IR}^2$. Assim, para a reta

$S = \{(x,y) \in IR^2/y = 4 - 2x\}$ ou $S = \{(x,4 - 2x); x \in IR\}$ e os vetores $\mu = (1,2)$ e $\nu = (2,0)$ de S, verifica-se que $\mu + \nu = (3,2) \notin S$.

- Os exemplos destas duas retas sugerem, para qualquer subconjunto **S** de um espaço vetorial **V**, que sempre que $0 \notin S$, S *não é subespaço* de V. Esse fato é sempre útil para detectar, muitas vezes de imediato, que um subconjunto S não é subespaço vetorial. No entanto, não se pense que só pelo fato de $0 \in S$, o subconjunto S seja subespaço vetorial. É o caso do subconjunto $S = \{(x, |x|); x \in IR\} \subset IR^2$.

Observação

Observe-se que, nesse subconjunto, $(0, 0) \in S$ e que para os vetores $\mu = (3, 3)$ e $\nu = (-2, 2)$ de S, $\mu + \nu = (1, 5) \notin S$, o que mostra não ser S subespaço vetorial do IR^2.

2) Sejam $V = IR^3$ e $S = \{(x, y, 0); x, y \in IR\}$, isto é, S é o conjunto dos vetores do IR^3 que têm a terceira componente nula.

   Para $\mu = (x_1, y_1\ 0)$ e $\nu = (x_2, y_2, 0)$, tem-se:

   I) $\mu + \nu = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, 0) \in S$, pois a terceira componente de $\mu + \nu$ é nula.

   II) $\alpha\mu = \alpha\ (x_1, y_1, 0) = (ax_1, ay_1, 0) \in S$, pois a terceira componente de $\alpha\mu$ é nula.

   Logo, S é um subespaço vetorial do IR^3.

3) Sejam $V = IR^3$ e S $\{(x, y, z) \in IR^3/2x + 3y - 4z = 0\}$. Nessecaso:

   $\mu = (x_1, y_1, z_1) \in S$ implica $2x_1 + 3y_1 - 4z_1 = 0$

$\nu = (x_2, y_2, z_2) \in S$ implica $2x_2 + 3y_2 - 4z_2 = 0$

I) Somando, membro a membro, as duas igualdades, vem:

$2(x_1 + x_2,) + 3(y_1 + y_2) - 4(z_1 + z_2) = 0$

Essa igualdade mostra que:

$$\mu + \nu = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \in S,$$

pois as coordenadas de $\mu + \nu$ satisfazem a equação $2x + 3y - 4z = 0$.

II) Por outra parte,

$\alpha\mu = (ax_1, ay_1, az_1) \in S,$

pois, se

$2x_1 + 3y_1 - 4z_1 = 0$, então

$\alpha\,(2x_1 + 3y_1 - 4z_1) = 0$

ou

$2(\alpha x_1) + 3\,(\alpha y_1) - 4(\alpha z_1) = 0,$

o que demonstra que as componentes de $\alpha\mu$ satisfazem a equação $2x + 3y - 4z = 0$. Logo, S é um subespaço vetorial do IR^3. Esse subespaço S representa um plano passando pela origem do sistema de referência.

4) Sejam $V = M_{(3,\,1)}$ e S o conjunto-solução do sistema linear homogêneo:

$$\begin{cases} 3x + 4y - 2z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \\ x + 3y - z = 0 \end{cases}$$

Fazendo:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}, \qquad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad e \quad 0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

o sistema, em notação matricial, será dado por AX = 0, sendo X elemento do conjunto-solução **S**. Se

$$\mu = X_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \quad e \quad \nu = X_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

são soluções do sistema, então:

$AX_1 = 0$ e $AX_2 = 0$

I) Somando, membro a membro, as duas igualdades, vem:

$A(X_1 + X_2) = 0$, o que implica $X_1 + X_2 \in S$,

isto é, a soma de duas soluções é ainda uma solução do sistema.

II) Por outra parte, multiplicando por a a primeira igualdade, vem:

$\alpha (AX_1) = \alpha\, 0$ ou $A(\alpha X_1) = 0$, o que implica $\alpha X_1 \in S$,
isto é, o produto de uma constante por uma solução é ainda uma solução do sistema. Logo, o conjunto-solução **S** do sistema linear homogêneo é um sub-espaço vetorial de $M_{(3,\,1)}$.
AX=O.

- O subespaço **S** é também chamado *espaço-solução* do sistema AX = 0.
- Se um sistema linear é *não-homogêneo*, o seu conjunto solução **S** *não* é um subespaço vetorial (verificação a cargo do leitor).

5) Sejam

$$V = M_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & c \end{bmatrix}; a, b, c, d \in IR \right\} \text{ e } S = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix};\ a,\ c \in IR \right\},$$

isto é, **S** é o conjunto das matrizes quadradas de ordem 2, cujos elementos da segunda coluna são nulos.

Para quaisquer
$\mu = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ c_1 & 0 \end{bmatrix} \in S,\ \nu = \begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ c_2 & 0 \end{bmatrix} \in S$ e $\alpha \in IR$, tem-se:

I) $\mu + \nu \in S$;

II) $\alpha\, \mu \in S$.

Logo, **S** é um subespaço vetorial de M_2.

1.4 - COMBINAÇÃO LINEAR DE VETORES

Sejam os vetores $v_1, v_2, ..., v_n$ do espaço vetorial **V** e os escalares a_1, a_2 a_n. Qualquer vetor $v \in$ V da forma

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + ... + a_n v_n$$

é uma combinaçao linear dos vetores $v_1, v_2, .., v_n$.

Exemplos

No espaço vetorial $\mathbf{IR^3}$, o vetor $\boldsymbol{v}$ **= (-7, -15, 22)** é uma combinação linear dos vetores $\boldsymbol{v_1}$ **= (2, -3, 4)** e $\boldsymbol{v_2}$ **= (5, 1, -2)** porque:

$v = 4v_1 - 3v_2$

De fato:

$$\begin{aligned}(-7, -15, 22) &= 4\,(2, -3, 4) - 3\,(5, 1, -2)\\ &= (8, -12, 16) + (-15, -3, 6)\\ &= (-7, -15, 22)\end{aligned}$$

1.4.1 — Problemas Resolvidos

Os problemas 1 a 3 se referem aos vetores $v_1 = (1, -3, 2)$ e $v_2 = (2, 4, -1)$ do IR^3.

1) Escrever o vetor $v = (-4, -18, 7)$ como combinação linear dos vetores v_1 e v_2.

Solução

Pretende-se que:

$v = a_1v_1 + a_2v_2$,

sendo a_1 e a_2 escalares a determinar. Deve-se ter:

$$(-4, -18, 7) = a_1\,(1, -3, 2) + a_2\,(2, 4, -1)$$

$$(-4, -18, 7) = (a_1, -3a_1, 2a_1) + (2a_2, 4a_2, -a_2)$$

$$(-4, -18, 7) = (a_1 + 2a_2, -3a_1 + 4a_2, 2a_1 - a_2)$$

Pela condição de igualdade de vetores, como se sabe da Geometria Analítica, resulta o sistema

$$\begin{cases} a_1 + 2a_2 = -4 \\ -3a_1 + 4a_2 = -18 \\ 2a_1 - a_2 = 7 \end{cases}$$

Cuja solução é: $a_1 = 2$ e $a_2 = -3$.

Portanto: $v = 2v_1 - 3v_2$

2) Mostrar que o vetor v = (4, 3, -6) não é combinação linear dos vetores v_1 e v_2.

Solução

Deve-se mostrar que não existem escalares a_1 e a_2, tais que:

$v = a_1v_1 + a_2v_2$

Utilizando procedimento análogo ao do problema anterior, vem:

$(4, 3, -6) = a_1(l, -3, 2) + a_2(2, 4, -1)$
$(4, 3, -6) = (a_1, -3 a_1, 2 a_1) + (2a_2, 4a_2, -a_2)$

$(4, 3, -6) = (a_1 + 2a_2, -3 a_1 + 4a_2, 2 a_1 - a_2)$

Desta última igualdade, resulta o sistema:

$$\begin{cases} a_1 + 2a_2 = 4 \\ -3a_1 + 4a_2 = 3 \\ 2a_1 - a_2 = -6 \end{cases}$$

sistema esse que é incompatível, o que comprova não poder o vetor v ser escrito como combinação linear de v_1 e v_2.

3) Determinar o valor de ***k*** para que o vetor $\mu = (-1, k, -7)$ seja combinação linear de v_1 e v_2.

Solução:

Deve-se ter:

$\mu = a_1v_1 + a_2v_2$

$(-l, k, -7) = a_1 (1,-3,2) + a_2(2, 4, -1)$

$(-1, k, -7) = (a_1, -3 a_1, 2 a_1) + (2a_2, 4a_2, -a_2)$

$(-1, k, -7) = (a_1 + 2a_2, -3 a_1 + 4a_2, 2 a_1 -a_2)$

Dessa igualdade, vem o sistema

$$\begin{cases} a_1 + 2a_2 = -1 \\ -3a_1 + 4a_2 = k \\ 2a_1 - a_2 = -7 \end{cases}$$

do qual resulta, como solução do problema proposto, $k = 13$ ($a_1 = -3$ e $a_2 = 1$). De fato:

$$\begin{aligned} (-1, 13, -7) &= -3 (1, -3, 2) + 1 (2, 4, -1) \\ &= (-3, 9, -6) + (2, 4, -1) \\ &= (-1, 13, -7) \end{aligned}$$

4) Verificar de quantas maneiras o vetor $v = (5, 2) \in IR^2$ pode ser escrito como combinação linear dos vetores $v_1 = (1,0)$, $v_2 = (0, 1)$ e $v_3 = (3, 1)$.

Solução

$(5,2) = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3$

$(5,2) = a_1 (1,0) + a_2 (0, 1) + a_3 (3, 1)$

$(5,2) = (a_1, 0) + (0, a_2) + (3a_3, a)$

$(5,2)=(a_1+3a_3, a_2 + a_3)$.

Dessa igualdade resulta o sistema

$$\begin{cases} a_1 + 3a_3 = 5 \\ a_2 + a_3 = 2 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} a_1 = 5 - 3a_3 \\ a_2 = 2 - a_3 \end{cases}$$

e, portanto, para cada valor arbitrário atribuído a a_3 se obtém um valor para a_1 e outro para a_2. Assim, o vetor v pode ser escrito de infinitas maneiras como combinação linear dos vetores v_1, v_2 e v_3.

1.5 - SUBESPAÇO VETORIAL GERADO

Sejam V um espaço vetorial e $A = \{v_1, v_2, \mathbf{...}, v_n\} \subset V$, $A \neq \emptyset$. O conjunto S de todos os vetores de V que são combinações lineares dos vetores de A é um subespaço vetorial de V. De fato, se

$\mu = a_1v_1 + a_2v_2 + ... a_nv_n$

e

$v = b_1v_1 + b_2v_2 + ... + b_nv_n$

são dois quaisquer vetores de S, pode-se escrever:

I) $\mu + v = (a_1 + b_1) v_1 + (a_2 + b_2) v_2 + ... + (a_n + b_n) v_n$

II) $\alpha \mu = (\alpha a_1) v_1 + (\alpha a_2)v_2 + ... + (\alpha a_n)v_n$,

isto é, $\mu + v \in S$ e $\alpha \mu \in S$ por serem combinações lineares de $v_1, v_2, \mathbf{...}, v_n$. Logo, S é um subespaço vetprial de V.

O subespaço S diz-se *gerado* pelos vetores $v_1, v_2, ..., v_n$, ou *gerado* pelo conjunto A e se representa por $S = [v_1, v_2, ..., v_n]$ ou $S = G(A)$.

- Os vetores v_1, v_2, ..., v_n são chamados *geradores* do subespaço S, e A é o *conjunto gerador* de S.

- Todo conjunto $A \subset V$ gera um subespaço vetorial de V, podendo ocorrer que G(A) = V, caso em que A é o conjunto gerador de V.

Exemplos

1) Os vetores $e_1 = (1, 0)$ e $e_2 = (0, 1)$ geram o espaço vetorial $V = IR^2$, pois qualquer par $(x, y) \in IR^2$ é combinação linear de e_1 e e_2:

$$(x, y) = xe_1 + ye_2 = x\,(1,0) + y\,(0, 1) = (x, 0) + (0, y) = (x, y)$$

Assim, $[e_1, e_2] = IR^2$.

2) Os vetores $e_1 = (1, 0, 0)$ e $e_2 = (0, 1, 0)$ do IR^3 geram o subespaço $S = \{(x,y, 0) \in IR^3 \,/\, x, y \in IR\}$, pois:

$$(x, y, 0) = xe_1 + ye_2 = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) = (x, 0, 0) + (0, y, 0) = (x, y, 0),$$

isto é, $[\, e_1, e_2] = S$ é subespaço próprio do IR^3 e representa geometricamente o plano x O y (Fig. 1. 5).

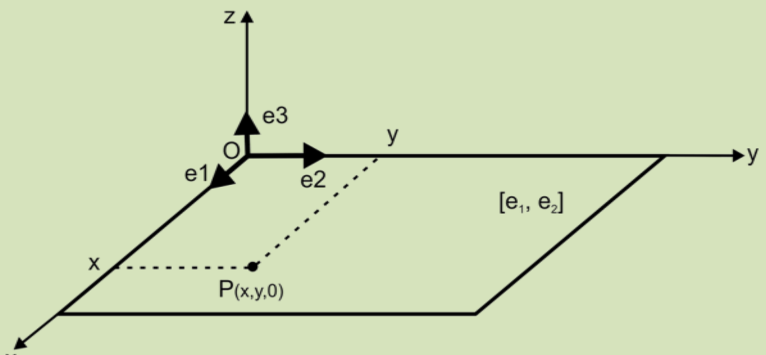


Figura 1.5

3) Os vetores $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ e $e_3 = (0, 0, 1)$ geram o espaço vetorial $V = IR^3$, pois qualquer vetor $v = (x, y, z) \in IR^3$ é combinação linear de e_1, e_2 e e_3:

$$\begin{aligned}(x,y,z) = xe_1 + ye_2 + ze_3 &= x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)\\ &= (x, 0, 0) + (0, y, 0) + (0, 0, z)\\ &= (x, y, z)\end{aligned}$$

Assim, $[e_1, e_2, e_3] = IR^3$.

1.5.1. - Problemas Resolvidos

1) Verificar se o conjunto A = {v_1 = (1,2), v_2 = (3, 5)} gera o IR^2.

Solução

Para que o conjunto A gere o IR^2 é necessário que qualquer vetor v = (x, y) $\in$ IR^2 seja combinação linear de v_1 e v_2, isto é, devem existir números reais a_1 e a_2, tais que:

$v = a_1 v_1 + a_2 v_2$

$(x,y) = a_1(1, 2) + a_2 (3,5)$

$(x, y) = (a_1, 2a_1) + (3a_2, 5a_2)$

$(x,y) = (a_1 + 3a_2, \ 2a_1 + 5a_2)$.

Dessa igualdade resulta o sistema:

$$\begin{cases} a_1 + 3a_2 = x \\ 2a_1 + 5a_2 = y \end{cases}$$

que, resolvido em função de x e y, fornece:

$a_1 = -5x + 3y$ e $a_2 = 2x - y$,

isto é, G(A) IR^2.

Se v = (x, y) = (5, 8), por exemplo:

$(5,8) = (-5 \text{ x } 5 + 3 \text{ x } 8)v_1 + (2 \text{ x } 5 - 8)v_2$

$= -1(1, 2) + 2(3, 5)$

$= (-1, -2) + (6, 10)$

$= (5,8)$

2) Verificar se os vetores e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1) e ω = (7,4) geram o IR^2.

Solução

Para que os vetores e_1, e_2 e ω o gerem o IR^2 é necessário mostrar que para qualquer vetor v = (x, y) $\in$ IR^2, existem números reais a_1, a_2 e a_3 tais que:

$v = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3\omega$

$(x, y) = a_1(1, 0) + a_2(0, 1) + a_3(7, 4)$

$(x, y) = (a_1, 0) + (0, a_2) + (7a_3, 4a_3)$

$(x, y) = (a_1 + 7a_3, a_2 + 4a_3)$.

Dessa igualdade resulta o sistema:

$$\begin{cases} a_1 + 7a_3 = x \\ a_2 + 4a_3 = y \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} a_1 = x - 7a_3 \\ a_2 = y - 4a_3 \end{cases}$$

Fazendo, por exemplo, $a_3 = 2$, vem:

$a_1 = x - 14$
$a_2 = y - 8$

e, portanto, $(x, y) = (x - 14)\, e_1 + (y - 8)e_2 + 2\omega$,

isto é, $[e_1, e_2, \omega] = IR^2$.

Se, por exemplo, $v = (x, y) = (3, 10)$, vem:

$$\begin{aligned} (3, 10) &= (3-14)\, e_1 + (10 - 8)e_2 + 2\omega \\ &= -11(1,0) + 2(0,1) + 2(7,4) \\ &= (-11,0) + (0,2) + (14, 8) \\ &= (-11 + 14, 2 + 8) \\ &= (3, 10) \end{aligned}$$

- É interessante assinalar que, no problema 1, o espaço vetorial IR^2 foi gerado por 2 vetores e, neste problema, por 3 vetores. De modo análogo pode-se mostrar que o IR^3 pode ser gerado por 3,4 ou mais vetores. O fato sugere que um espaço vetorial dado pode ser gerado por um número variável de vetores. No entanto, existe um número mínimo de vetores que gera um espaço vetorial: esse número mínimo será estudado mais adiante.

1.6 – ESPAÇOS VETORIAIS FINITAMENTE GERADOS

Um espaço vetorial V *é finitamente gerado* se existe um conjunto finito $A \subset V$, tal que $V = G(A)$.

Os exemplos de espaços vetoriais dados são todos de espaços vetoriais finitamente gerados. Por exemplo, foi visto que o IR^3 é gerado por um conjunto de 3 vetores. Embora existam espaços vetoriais gerados por um conjunto de infinitos vetores, aqui serão tratados somente espaços vetoriais finitamente gerados.

1.7 – DEPENDÊNCIA E INDEPENDÊNCIA LINEAR

Sejam V um espaço vetorial e A = $\{v_1, v_2, \ldots v_n\} \subset V$. A equação

$a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n = 0$

admite, pelo menos, uma solução, a solução trivial:

$a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$

Diz-se que o conjunto A é *lineannente independente* (LI) ou que os vetores v_1, v_2 ..., v_n são LI no caso de a equação (1) admitir apenas a solução trivial.

Se existirem soluções $a_i \neq 0$, diz-se que o conjunto A é *linearmente dependente* (LD) ou que os vetores v_1, v_2, ... v_n são LD.

Exemplos

1) No espaço vetorial IR^2, os vetores $e_1 = (1, 0)$ e $e_2 = (0, 1)$, são LI.
De fato:

$a_1e_1 + a_2e_2 = 0$

$a_1 (1, 0) + a_2 (0, 1) = (0, 0)$

$(a_1, 0) + (0, a_2) = (0, 0)$

$(a_1, a_2) = (0, 0)$

isto é:

$a_1 = 0$ e $a_2 = 0$

2) No espaço vetorial IR^3, os vetores $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ e $e_3 = (0, 0, 1)$ são LI. A verificação é análoga à do Exemplo 1.

3) No espaço vetorial IR^2, os vetores $v_1 = (2, 3)$ e $v_2 = (-4, -6)$ são LD. De fato:

$a_1v_1 + a_2v_2=0$

$a_1 (2, 3) + a_2 (-4, -6) = (0,0)$

$(2a_1, 3a_1) + (-4a_2,-6a_2) = (0,0)$

$(2a_1 - 4a_2, 3a_1-6a_2) = (0,0)$

Dessa igualdade resulta o sistema

$$\begin{cases} 2a_1 - 4a_2 = 0 \\ 3a_1 - 6a_2 = \ \ 0 \end{cases}$$

que admite a solução $a_1 = 2\ a_2$. Fazendo, por exemplo, $a_2 = 3$, se obtém $a_1 = 6$ e a equação

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 = 0$$

fica:

$$6\ (2,\ 3) + 3\ (-4,\ -6) = (0,0)$$

Logo, v_1 e v_2 são LD porque a equação acima se verifica para coeficientes de v_1 e v_2 diferentes de zero.

4) No espaço vetorial IR^2, os vetores $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$ e $\omega = (7,4)$ são LD. De fato:

$$a_1\ e_1 + a_2\ e_2 + a_3 \omega = 0$$

$$a_1\ (1,0) + a_2\ (0,1) + a_3\ (4,7) = (0,0)$$

$$(a_1,\ 0) + (0,\ a_2) + (4\ a_3,\ 7a_3) = (0,0)$$

$$(a_1 + 4a_3,\ a_2 + 7a_3) = (0,0)$$

Dessa igualdade se obtém o sistema:

$$\begin{cases} a_1 + 4a_3 = 0 \\ a_2 + 7a_3 = \ \ 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} a_1 = -4a_3 \\ a_2 = -7a_3 \end{cases}$$

fazendo $a_3 = 2$, por exemplo, vem:

$$a_1 = -8 \quad \text{e} \quad a_2 = -14$$

e

$$-8\ (1,0) - 14\ (0,1) + 2\ (4,7) = (0,0)$$

Logo, os vetores e_1, e_2 e ω são LD porque a equação acima se verifica para coeficientes de e_1, e_2 e ω diferentes de zero.

5) No espaço vetorial IR^3, os vetores $v_1 = (6,2,3)$ e $v_2 = (0,5,3)$ são LI. De fato:

$$a_1\ (6,\ 2,\ 3) + a_2\ (0,\ 5,\ 3) = (0,0,0)$$

$$(6a_1,\ 2a_1,\ 3a_1) + (0,\ 5a_2,\ 3a_2) = (0,0,0)$$

$$(6a_1,\ 2a_1 + 5a_2,\ 3a_1 + 3a_2) = (0,0,0)$$

ou

$$\begin{cases} 6a_1 \quad = \quad 0 \\ 2a_1 + 5a_2 = 0 \\ 3a_1 + 3a_2 = 0, \end{cases}$$

sistema que admite somente a solução trivial: $a_1 = a_2 = 0$. Portanto, os vetores v_1 e v_2 sao **LI**.

1.7.1 - Propriedades da Dependência e da Independência Linear

I) O vetor $v = 0$ do espaço vetorial V é LD, pois para qualquer $a \neq 0$:

$a\,0 = 0$

II) Um único vetor $v \neq 0$ do espaço vetorial é LI, porque a igualdade ao = 0 só se verifica para $a = 0$.

III) Se um conjunto $A \subset V$ contém o vetor nulo, A é LD. De fato, se

$A = \{v_1, v_2 ..., 0, **...,** v_n\}$, a equação:

$0\,v_1 + 0\,v_2 + ... + a\,0 + ... + 0\,v_n = 0$

se verifica para $a \neq 0$. Logo, A é LD.

IV) Se num conjunto de vetores não nulos $A = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ um deles é combinação linear dos outros, o conjunto é LD. De fato, supondo n = 3 e $v_1 = a_2 v_2 + a_3 v_3$, pode-se escrever:

$-1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 = 0$

Nesta igualdade existe, pelo menos, um $a_i \neq 0$ ($a_1 = -1$), o que prova ser $A = \{v_1, v_2, v_3\}$ **LD**.

Reciprocamente, se um conjunto de vetores não nulos $A = \{v_1, v_2, v_3)$ é LD, um deles pode ser escrito como combinação linear dos outros. De fato, por definição, um dos coeficientes da igualdade

$$a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 = 0$$

deve ser diferente de zero. Supondo , por exemplo, que $a_2 \neq 0$, vem:

$$a_2v_2 = -a_1v_1 - a_3v_3$$

$$v_2 = -\frac{a_1}{a_2}v_1 - \frac{a_3}{a_2}v_3,$$

e, portanto, v_2 é combinação linear dos outros dois vetores.

A demostração seria análoga para um conjunto de vetores não nulos A = {v_1, v_2,. .., v_n}

- Esta propriedade pode ser enunciada de forma equivalente: um conjunto A {v_1, v_2, ..., v_n} é LI se, e somente se, nenhum dos vetores for combinação linear dos outros.
- Para o caso particular de dois vetores pode-se dizer: dois vetores v_1 e v_2 são LD se, e somente se, um vetor é múltiplo escalar do outro.

> No exemplo 3, item 1.7 viu-se que os vetores v_1 = (2,3) e v_2 = (-4, -6) são LD, devendo-se notar que $v_2 = -2v_1$, isto é, v_2 é múltiplo escalar de v_1; no exemplo 5, mesmo item, viu-se que os vetores v_1 = (6, 2, 3) e v_2 = (0, 5, -3) são LI, pois $v_1 \neq k\, v_2$ para qualquer $k \in$ IR.

V) Se uma parte de um conjunto $A \subset V$ é LD, A também é LD. De fato, supondo que em

$$A = \{v_1, v_2, ..., v_r, ..., v_n\}$$

a parte

$$A_1 = \{v_1, v_2, ..., v_r\} \text{ é LD,}$$

o que significa existirem $a_i \neq 0$ que satisfazem a igualdade:

$$a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_rv_r = 0$$

e esses mesmos $a_i \neq 0$ também satisfazem a igualdade:

$$a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_rv_r + 0\, v_{r+1} + ... + 0\, v_n = 0$$

Logo, A = {v_1,v_2, ..., v_r, ..., v_n} é LD.

VI) Se um conjunto $A \subset V$ é LI, qualquer parte A_1 de A é também LI. De fato, se A_1 fosse LD, pela propriedade anterior, o conjunto A seria LD, o que contraria a hipótese.

VII) Se $A = \{v_1, ... v_n\} \subset V$ é LI e $B = \{v_1, ..., v_n, \omega\} \subset V$ é LD, ω é combinação linear de $v_1, ..., v_n$. De fato, se B é LD, existem escalares $a_1, ..., a_n$, b, nem todos nulos, tais que:

$$a_1v_1 + ... + a_nv_n + b\omega = 0$$

Se b = 0, então algum dos a_i não é zero na igualdade:

$$a_1v_1 + ... + a_nv_n = 0$$

o que eontradiz a hipótese de que A é LI. Por conseguinte, $b \neq 0$ e: $b\omega = -a_1v_1 - \ldots -a_nv_n$

$$\omega = -\frac{a_1}{b}v_1 - \cdots - \frac{a_n}{b}v_n$$

isto é, ω é combinação linear de $v_1, \ldots, v_n$

1.7.2 – Problemas Resolvidos

Nos problemas de 1 a 3 verificar se são LD ou LI os conjuntos dados.

1) $A = \{(5,7), (3,8)\} \subset IR^2$

Solução

O conjunto, por ter dois vetores tais que um não é múltiplo escalar do outro, é LI.

2) $A = \{(12, 6), (4,2)\} \subset IR^2$

Solução

O conjunto, por ter dois vetores tais que um é múltiplo escalar do outro (o 1º é o triplo do 2º), é LD.

3) $A = \{(1, 2, 3), (0, 1, 2), (0, 0, 1)\} \subset IR^3$

Solução

Seja a equação:

$a_1 (1, 2, 3) + a_2 (0, 1, 2) + a_3 (0, 0, 1) = 0$

$(a_1, 2a_1, 3a_1) + (0, a_2, 2a_2) + (0, 0, a_3) = (0, 0, 0)$

$(a_1, 2a_1 + a_2, 3a_1 \pm 2a_2 + a_3) = (0, 0, 0)$

Dessa igualdade resulta o sistema

$$\begin{cases} a_1 & = 0 \\ 2a_1 + a_2 & = 0 \\ 3a_1 + 2a_2 + a_3 & = 0 \end{cases}$$

que admite somente a solução trivial: $a_1 = a_2 = a_3 = 0$. Portanto, o conjunto é LI.

1.8 - BASE E DIMENSÃO

1.8.1 - Base de um Espaço Vetorial

Um conjunto B = $\{v_1 ..., v_n\} \subset$ V é uma base do espaço veiorial **V** se:

I) B é LI

II) B gera V

Exemplos

1) B = {(l,0), (0,1)} é base do IR^2, denominada *base canônica*. De fato:

I) B é LI (ver Exemplo 1, item 1.7)

II) B gera IR^2 (ver Exemplo l, item 1.5)

2) B = {(1,2), (3,5)} é base do IR^2. De fato:

I) B é LI.

$a_1(1,2) + a_2(3,5) = (0,0)$

$(a_1, 2a_1) + (3a_2, 5a_2) = (0,0)$

$(a_1 + 3a_2, 2a_1 + 5a_2) = (0,0)$

ou

$$\begin{cases} a_1 + 3a_2 = 0 \\ 2a_1 + 5a_2 = 0 \end{cases}$$

Sistema que admite somente a solução trivial ($a_1 = a_2 = 0$), o que confirma ser B LI.

II) B gera o IR^2 (ver Problema 1, item 1.5)

3) B = $\{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0,0,1)\}$ é base da IR^3. De fato:

I) B é LI (ver exemplo 2, item 1.7)

II) B gera IR^3 (ver exemplo 3, item 1.5)

4) B = $\{v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (1, 1, 0), v_3 = (1,0,0)\}$ é base do IR^3. De fato:

I) B é LI.

$a_1(1, l, 1) + a_2\,(1,1,0) + a_3\,(1,0,0) = 0$

$(a_1, a_1, a_1) + (a_2, a_2, 0) + (a_3, 0, 0) = (0, 0, 0)$

$(a_1 + a_2 + a_3,\ a_1 + a_2, a_1) = (0, 0, 0)$

ou

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ a_1 + a_2 \qquad\ \ = 0 \\ a_1 \qquad\qquad\quad = 0 \end{cases}$$

sistema que admite somente a solução trivial ($a_1 = a_2 = a_3 = 0$), o que confirma ser B LI.

II) B gera o IR^3. De fato, qualquer vetor $v = (x, y, z)$ é combinação linear de v_1, v_2 e v_3:

$(x, y, z) = a_1v_1 \pm a_2v_2 + a_3v_3$

$(x, y, z) = a_1\,(1, 1, 1) + a_2\,(1, 1, 0) + a_3(1, 0, 0)$

$(x, y, z) = (a_1, a_1, a_1) + (a_2, a_2, 0) + (a_3, 0, 0)$

$(x, y, z) = (a_1 + a_2 + a_3, a_1 + a_2, a_1)$

ou

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = x \\ a_1 + a_2 \qquad\ \ = y \\ a_1 \qquad\qquad\quad = z \end{cases}$$

isto é, $a_1 = z$, $a_2 = y - z$ e $a_3 = x - y$; portanto:

$(x, y, z) = z(1, l, 1) + (y - z)\,(1, 1, 0) + (x-y)\,(0, 0, 1)$,

o que comprova ser qualquer vetor $v = (x,y,z)$ combinação linear de v_1, v_2, e v_3. Logo, $[v_1, v_2, v_3] = IR^3$.

5) B = {(1,2), (2,4)} não é base do IR^2 pois B é LD (verificação análoga à do exemplo 3, item 1.7).

6) B = {(1,0), (0,1), (7,4)} não é base do IR^2, pois é LD (ver exemplo 4, item 1.7).

1.8.2 – Dimensão de um Espaço Vetorial

Se V é um vetorial e possui uma base com n vetores, V tem dimensão n. A dimensão de V se indica por dim V = n.

- O espaço vetorial {0}, constituído somente pelo vetor nulo, é de dimensão zero.

Exemplos

1) dim IR^2 = 2 (ver exemplos 1 e 2, item l.8.1).

2) dim IR^3 = 3 (ver Exemplos 3 e 4, item 1.8.1)

3) dim {0} = 0

1.8.3 – Propriedades Relativas à Base e à Dimensão

I) Qualquer conjunto LI de um espaço vetorial V é base do subspaço por ele gerado. Por exemplo, o conjunto
$B = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0)\} \subset IR^3$

gera o subespaço:

$S = \{(x, y, 0) \in IR^3 / x, y \in IR\}$ (ver Exemplo 2, item 1.5)

Como B é também LI, B é base de S.

II) Se $B = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ for base de um espaço vetorial V, todo conjunto com mais de n vetores de V é LD.

Para simplificar, sejam dim V = 2 e $B = \{v_1, v_2\}$ uma base de V e considere-se B' = $\{\omega_1, \omega_2, \omega_2\} \subset V$. Pretende-se mostrar que B' é LD. Para tanto é suficiente provar que existem escalares x_i (com i = 1, 2, 3), não todos nulos, tais que:

$$x_1\omega_1 + x_2\omega_2 + x_3\omega_3 = 0$$

Tendo em vista que B é uma base de V, os vetores de B' podem ser escritos como combinação linear dos vetores de B, isto é, existem escalares a_i, b_i, c_i (i = 1,2), tais que:

$$\omega_1 = a_1v_1 + a_2v_2$$

$$\omega_2 = b_1v_1 + b_2v_2$$

$$\omega_3 = c_1v_1 + c_2v_2$$

Substituindo-se ω_1, ω_2 e ω_3 de (2) e (1), vem:

$$x_1(a_1v_1 + a_2v_2) + x_2(b_1v_1 + b_2v2) + x_3(c_1v_1 + c_2v_2) = 0$$

ou

$(a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3)\ v_1 + (a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3)\ v_2 = 0$

Por serem v_1 e v_2 LI, tem-se

$$\begin{cases} a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 = 0 \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 = 0 \end{cases}$$

Esse sistema linear homogéneo, por ter m = 3 variáveis (x_1, x_2 e x_3) e n = 2 equações (m > n), admite soluções não triviais, isto é, existe $x_i \neq 0$, o que prova que B é LD.

A demonstração pode ser estendida, com raciocínio análogo, para B contendo n vetores e B'm vetores, com m > n.

Esta propriedade assegura que, num espaço vetorial V de dimensão n, qualquer conjunto LI de V tem, no *máximo*, n vetores. Assim, por exemplo, já se viu que dimensão IR^2 = 2 e, portanto, no IR^2 o número máximo de vetores LI é 2 e todo conjunto com mais de 2 vetores (Exemplo 4, item 1.7) é LD.

III) Duas bases quaisquer de um espaço vetorial têm o mesmo número de vetores. De fato:

Sejam A = $\{v_1, ..., v_n\}$ e B = $\{\omega_1, ..., \omega_m\}$ duas bases de um espaço vetorial V. Como A é base e B é LI, pela propriedade anterior n $\geq$ m. Por outra parte, como B é a base e A é LI, deve-se ter n $\leq$ m. Logo n = m.

IV) Se B = $\{v_1, v_2 ..., v_n\}$ é uma base de um espaço vetorial V, qualquer vetor $v \in$ V se exprime de maneira única como combinação linear dos vetores de B. De fato, tendo em vista que B é uma base de V, para qualquer $v \in$ V pode se escrever:

$$v = a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n \qquad (3)$$

Supondo que o vetor v pudesse ser expresso como outra combinação linear dos vetores da base, ter-se-ia:

$$v = b_1v_1 + b_2v_2 + ... + b_nv_n \qquad (4)$$

Subtraindo, membro a membro, a igualdade (4) da igualdade (3), vem:

$$0 = (a_1\text{-}b_1)v_1 + (a_2\text{-}b_2)v_2 + ... + (a_n\text{-}b_n)v_n$$

Tendo em vista que os vetores da base são LI:

$$a_1 - b_1 = 0,\ a_2 - b_2 = 0,\ ...,\ a_n - b_n = 0,$$

isto e:

$$a_1 = b_1,\ a_2 = b_2,\ ...,\ a_n = b_n$$

Os números a_1, a_2, ..., a_n são pois, univocamente determinados pelo vetor v e pela base $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$.

V) Se V é um espaço vetorial tal que dim V = n e S é um subespaço vetorial de V, então dim S $\leq$ n.

No caso de dim S = n, tem-se S = V, isto é, S é subespaço trivial de V; se dim S < n, S é subespaço próprio de V.

VI) A *dimensão de um subespaço vetorial* pode ser determinada pelo *número de variáveis livres* de seu vetor genérico. O fato pode ser verificado por meio do seguinte problema: Determinar a dimensão do subespaço
$S = \{(x,y,z) \in IR^3/2x + y + z = 0\}$.

Isolando z (ou x, ou y) na equação de definição, tem-se:

$z = -2x-y$,

onde x e y são as variáveis livres. Para qualquer vetor $(x, y, z) \in S$ tem-se:

$(x, y, z) = (x, y, -2x-y)$

ou

$(x, y, z) = (x, 0, -2x) + (0, y, -y)$

ou ainda,

$(x, y, z) = x(1, 0,-2) + y(0, l, -1)$,

isto é, todo vetor de S é combinação linear dos vetores (1, 0, -2) e (0, 1-1). Como esses dois vetores geradores de S são LI, o conjunto {(1, 0, -2), (0, 1, -1)} é uma base de S e, conseqüentemente, dim S = 2.

Mas, tendo em vista que a cada variável livre x e y corresponde um vetor da base na igualdade (1), conclui-se que *o número de variáveis livres é a dimensão do subespaço.*

- Se se desejasse apenas obter uma base do subespaço S, se adotaria, na prática, um processo simplificado. Assim, no subespaço S onde $z = -2x-y$,

fazendo x = 1 e y = 1, vem: z = -2-1 = -3 $\therefore$ $v_1 = (1, 1, -3)$,

fazendo x = -1 e y = 2, vem: z = 2-2 = 0 $\therefore$ $v_2 = (-1, 2, 0)$,

o conjunto S = {(1, l, -3), (-1, 2, 0)} é outra base de S. Na verdade, S tem infinitas bases, porém todas com dois vetores somente.

1.9 - COMPONENTES DE UM VETOR

Na propriedade IV do item anterior, viu-se que $v \in V$ é expresso assim:

$v = a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n$,

sendo B = {v_1, v_2, ..., v_n} uma base de V. Os números a_1, a_2, ..., a_n, univocamente determinados por *v* e pela base B, são denominados *componentes* ou *coordenadas* de *v* em relação à base B.

- Um vetor $v \in$ V (dim V = n), de componentes a_1, a_2, ..., a_n em relação a uma base B, é indicado por v_B e se representa por:

  $v_B = (a_1, a_2, ..., a_n)$

  O mesmo vetor *v* pode ser representado na forma matricial:

  $$v_B = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

- Os vetores de uma base B = {$v_1 v_2$, ..., v_n} de um espaço vetorial V podem ser representados por uma matriz na qual as componentes de cada vetor da base constituem uma coluna dessa matriz, dispostas as colunas na ordem em que os vetores foram enunciados. Assim, a base

  B = {v_1 = (1,4,1), v_2 = (l,7,0), v_3 = (2,0,0)} do IR^3
  é representada por:

  $$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 7 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Se os vetores de uma base A = {$v_1 = (x_{11}, x_{12})$, $v_2 = (x_{21}, x_{22}$} do IR^2 tiverem, por conveniência ou necessidade, de ser escritos em linha numa matriz, se escreverá:

$A^t = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}$, pois a transporta de A^t é $A = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} \\ x_{12} & x_{22} \end{bmatrix}$

- As bases canônicas do IR^2, IR^3, ..., IR^n são representadas, cada uma, por uma matriz unidade (também chamada matriz *identidade):*

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

1.10 – MUDANÇA DE BASE

Dadas duas bases A e B de um espaço vetorial V, pretende-se estabelecer a relação entre as componentes de um vetor v em relação à base A e as componentes do mesmo vetor em relação à base B. Para facilitar, considere-se o caso em que dim V = 2. O problema para espaços vetoriais de dimensão n é análogo.

Sejam as bases A = $\{v_l, v_2\}$ e B = $\{\omega_1, \omega_2\}$ e V. Dado um vetor $v \in$ V, este será combinação linear dos vetores das bases A e B:
um vetor

$$v = x_1 v_1 \pm x_2 v_2 \tag{1}$$

ou

$$v_A = (x_1, x_2) \text{ ou, ainda, } v_A = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{1-I}$$

e

$$v = y_1\omega_1 + y_2\omega_2 \tag{2}$$

ou

$$v_B = (y_1, y_2) \text{ ou, ainda, } v_B = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \tag{2-1}$$

Por outro lado, os vetorés da base A podem ser escritos em relação à base B, isto é:

$$v_1 = a_{11}\omega_1 + a_{21}\omega_2$$

$$v_2 = a_{12}\omega_1 + a_{22}\omega_2 \tag{3}$$

Substituindo-se v_1 e v_2 de (3) em (1), vem:

$$v = x_1(a_{11}\omega_1 + a_{21}\omega_2) + x_2(a_{12}\omega_1 + a_{22}\omega_2)$$

ou

$$v = (a_{11} x_1 + a_{12}x_2)\, \omega_1 + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2)\, \omega_2 \tag{4}$$

Comparando as igualdades (4) e (2) vem:

$$y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2$$

$$y_2 = a_{21}x_1 \pm a_{22}x_2$$

ou na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{5}$$

Tendo em vista as igualdades (2-I) e (1-I) e fazendo

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

a equação matricial (5) pode ser escrita assim:

$$v_B = Mv_A \qquad (6)$$

A finalidade da matriz M, chamada *matriz de mudança de base de A para B*, é transformar as componentes de um vetor *v* na base A em componentes do mesmo vetor o na base B. Se se quiser, em lugar de transformar v_A em v_B, transformar v_B em v_A, a igualdade (6)

$$Mv_A = v_B$$

permite escrever

$$v_A = M^{-1}v_B \qquad (7)$$

uma vez que M é inversível. Assim, M transforma v_A em v_B e M^{-1} transforma v_B em v_A

1.10.1 - Determinação da Matriz de Mudança de Base

As igualdades (3) do item anterior permitem escrever:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} \qquad (8)$$

Fazendo

$v_1 = (x_{11}, x_{12})$, $v_2 = (x_{21}, x_{22})$, $\omega_1 = (y_{11}, y_{12})$ e $\omega_2 = (y_{21}, y_{22})$,

a igualdade (8) fica

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ x_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \qquad (9)$$

mas ,

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} = A^t, \ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} = M^t \ e \ \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} = B^t$$

logo a equação (9) é

$$A^t = M^tB^t$$

ou

A = BM (propriedade da matiz transposta).

Como B é uma matriz inversível, vem:

$$M = B^{-1}A \qquad (10)$$

- Da igualdade (10), conforme propriedade da matriz inversa, vem:

$M^{-1} = A^{-1}B$ (11)

- Não é demais insistir: M é matriz de mudança de base de A para B (da primeira base para a segunda) e M^{-1} é matriz de mudança de base de B para A (da segunda para a primeira).

É facil entender que a matriz de mudança de base num espaço de dimensão 3 ou de dimensão n é dada pela mesma fórmula ($M = B^{-1} A$ ou $M^{-1} = A^{-1}B$), sendo A e B de ordem 3 ou n, uma vez que a demonstração respectiva é análoga à do espaço de dimensão 2.

- Se a base A for a base canônica e, portanto A = I**,** tem-se:

$M = B^{-1}$ (12)

$M^{-1} = B$ (13)

1.10.2 - Problemas Resolvidos

Os problemas 1 a 4 se referem às bases do IR^2:

A = {(1,3), (1,-2)} e B = {(3,5), (1,2)}

1) Determinar a matriz de mudança de base de A para B.

Solução

$M = B^{-1}A$

mas,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix},\ \det B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = 6 - 5 = 1, \text{ e}$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$$

logo:

$$M = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 4 & -11 \end{bmatrix}$$

2) Determinar a matriz de mudança de base de B para A.

Solução

$M^{-1} = A^{-1}B$

mas

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}, \det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 3 = -5 \quad \text{e}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

logo:

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{11}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

3) Sabendo que $v_A = (3, 2)$, calcular v_B.

Solução

$v_B = Mv_A$

$$v_B = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 4 & -11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -10 \end{bmatrix}$$

4) Sabendo que $v_B = (5, -10)$, calcular v_A.

Solução

$v_A = M^{-1}v_B$

$$v_A = \begin{bmatrix} \frac{11}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

5) Considere-se no IR^2, a base canônica A = {$e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$} e base B = {$v_1 = (1,3)$, $v_2 = (1,-2)$}. Sabendo que $v_A = (5,0)$, calcular v_B.

Solução

$v_B = Mv_A$

e

$M = B^{-1}$

logo:

$v_B = B^{-1}v_A$

mas,

$$v_A = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \quad e \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

A Figura 1.10-5 mostra que o vetor de componentes 5 e 0 na base canônica A tem componentes 2 e 3 na base B:

(5,0) = 5(1,0) + 0(0, 1)

(5,0) = 2(1,3) + 3(1,-2)

• Se fosse dado $v_B = (2,3)$, o leitor encontraria $v_A = (5,0)$.

6) Dadas a base canônica A = {$e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$} e a base B = {$v_1 = (2,1)$, $v_2 = (-1,2)$ do IR^2, calcular v_B sabendo-se que $v_A = (4,7)$.

Solução

$v_B = Mv_A$

$M = B^{-1}A$

$A = I$

$M = B^{-1}$

$v_B = B^{-1}v_A$

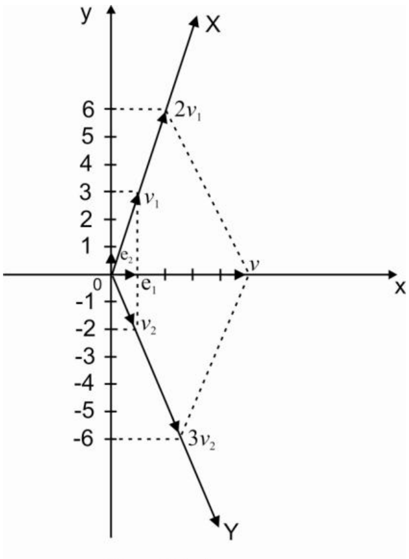


Figura 1.10-5

mas:

$$v_A = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad e \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

logo:

$$v_B = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

A Figura 1.10-6 mostra que:

$(4,7) = 4e_1 + 7e_2$

$= 3v_1 + 2v_2$

ou

$(4,7) = 4(1,0) + 7(0,1)$

$= 3(2,1) + 2(-1,2),$

Isto é,

$(4,7) = (4,7)_A = (3,2)_B$

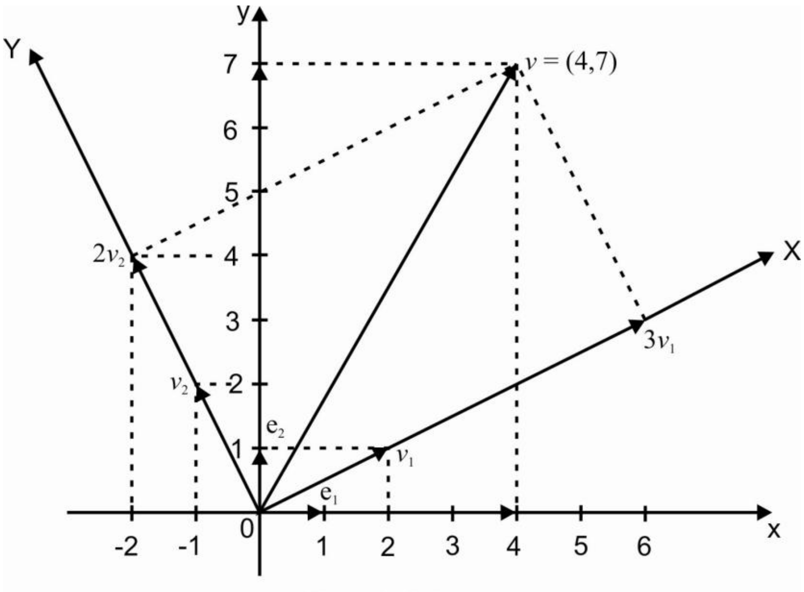


Figura 1.10-6

Capítulo 2

ESPAÇOS VETORIAIS EUCLIDIANOS

2.1- PRODUTO INTERNO EM ESPAÇOS VETORIAIS

Em Geometria Analítica se define *oproduto escalar (ou produto interno usual)* de dois vetores no $\mathbf{IR}^2$ e no $\mathbf{IR}^3$ e se estabelecem, por meio desse produto, algumas propriedades geométricas daqueles vetores[1]. Agora, pretende-se generalizar o conceito de produto interno e, a partir dessa generalização, definir as noções de comprimento ou módulo, distância e ângulo num espaço vetorial V.

Chama-se *produto interno* no espaço vetorial V uma aplicação de V x V em IR que a todo par de vetores $(\mu, v) \in V \times V$ associa um número real, indicado por $\mu \cdot v$ ou por $<\mu, v>$, tal que os seguintes axiomas sejam verificados:

$P_1)$ $\mu \cdot v = v \cdot \mu$

$P_2)$ $\mu \cdot (v + \omega) = \mu \cdot v + \mu \cdot \omega$

$P_3)$ $(\alpha\mu) \cdot v = \alpha\, (\mu \cdot v)$ para todo número real α

$P_4)$ $\mu \cdot \mu \geq 0$ e $\mu = 0$ se, e somente se, $\mu = 0$

- O número real $\mu \cdot v$ é também chamado de *produto interno* dos vetores, μ e v.
- Da definição de produto interno decorrem as propriedades:

I) $0 \cdot \mu = \mu \cdot 0 = 0, \forall\, \mu \in V$

II) $(\mu + v) \cdot \omega = \mu \cdot \omega + v \cdot \omega$

III) $\mu \cdot (\alpha v) = \alpha\, (\mu \cdot v)$

IV) $\mu \cdot (v_1 + v_2 + \ldots + v_n) = \mu \cdot v_1 + \mu \cdot v_2 + \ldots + \mu \cdot v_n$

[1] Ver *Geometria Analítica* (Alfredo Steinbruch e Paulo Winterle) - Editora McGraw-Hill.

Exemplos

1) No espaço vetorial V = IR^2, a aplicação (função) que associa a cada par de vetores $\mu = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$ o número real

$\mu \,.\, v = 2x_1x_2 + 5y_1y_2$

é um produto interno. De fato:

P_1) $\mu \,.\, v = 2x_1x_2 + 5y_1y_2$

$= 2x_2x_1 + 5y_2y_1$

$= v \,.\, \mu$

P_2) Se $\omega = (x_3, y_3)$, então:

$\mu \,.\, (v + \omega) = (x_1y_1) \,.\, (x_2 + x_3, y_2 + y_3)$

$= 2x_1 (x_2 + x_3) + 5y_1 (y_2 + y_3)$

$= (2x_1x_2 + 5y_1y_2) + (2x_1x_3 + 5y_1y_3)$

$= \mu \,.\, v + \mu \,.\, \omega$

P_3) $(\alpha\, \mu) \,.\, v = (\alpha x_1, \alpha y_1) \,.\, (x_,, y_2)$

$= 2\, (\alpha x_1)x_2 + 5\, (\alpha y_1)\, y_2$

$= \alpha\, (2x_1x_2 + 5y_1y_2)$

$= \alpha\, (\mu \,.\, v)$

P_4) $\mu \,.\, \mu = 2x_1x_1 + 5y_1y_1 = 2x_1^2 + 5y_1^2 \geq 0$ e $\mu \,.\, \mu = 2x_1^2 + 5y_1^2 = 0$ se, e somente se, $x_1 = y_1 = 0$, isto é, se $\mu = (0,0) = 0$.

- O produto interno examinado neste exemplo é diferente do produto interno usual no IR^2; este seria definido por:

$\mu \,.\, v = x_1x_2 + y_1y_2$

Daí se depreende ser possível a existência de mais um produto interno num mesmo espaço vetorial.

2) Se $\mu = (x_1, y_1, z_1)$ e $v = (x_2, y_2, z_2)$ são vetores quaisquer do IR^3, o número real

$\mu \cdot v \quad = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$

define o produto interno usual no IR^3.

De forma análoga, se $\mu = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $v = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, o número real

$\mu \cdot v = x_1y_1 + x_2y_2, + \ldots + x_ny_n$

define o poduto interno usual no IR^n

2.1.1 - Problemas Resolvidos

1) Em relação ao produto interno usual do IR^2, calcular $\mu \cdot v$, sendo:
   a) $\mu = (-2, 6)$ e $v = (3, -4)$
   b) $\mu = (4, 8)$ e $v = (0, 0)$

   Solução

   a) $\mu \cdot v = -2\,(3) + 6\,(-4) = -6 -24 = -30$
   b) $\mu \cdot v = 4\,(0) + 8\,(0) = 0 + 0 = 0$

2) Em relação ao produto interno $\mu \cdot v = 2x_1x_2 + 5y_1y_2$, calcular $\mu \cdot v$ para $\mu = (2,1)$ e $v = (3, -2)$

   Solução

   $\mu \cdot v = 2(2)\,(3) + 5(1)\,(-2) = 12 - 10 = 2$

3) Sejam $v_1 = (1, 2, -3)$, $v_2 = (3, -1, -1)$ e $v_2 = (2, -2, 0)$ do IR^3. Considerando esse espaço munido do produto interno usual, determinar o vetor μ tal que $\mu = v_1 = 4$, $\mu \cdot v_2 = 6$ e $\mu\, v_3 = 2$.

   Solução

   Se $\mu = (x, y, z)$, então:

   $(x, y, z) \cdot (1, 2, -3) = 4$

   $(x, y, z) \cdot (3, -1, -1) = 6$

   $(x, y, z) \cdot (2, -2, 0) = 2$

Efetuando os produtos internos indicados, obtém-se o sistema

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ 3x - y - z \ = 6 \\ 2x - 2y \qquad = 2 \end{cases}$$

cuja solução é x = 3, y = 2 e z = 1. Logo, μ = (3, 2, 1).

2.2 - ESPAÇO VETORIAL EUCLIDIANO

Um espaço vetorial real, de dimensão finita, no qual está definido um produto interno, é um *espaço vetorial euclidiano.* Neste capítulo serão considerados somente espaços vetoriais euclidianos.

2.3 - MÓDULO DE UM VETOR

Dado um vetor *v* de um espaço vetorial euclidiano V, chama-se *módulo, norma* ou *comprimento* de *v* o número real não-negativo, indicado por | *v* |, definido por:

$$|v| = \sqrt{(v.v)}$$

Assim, se *v* = (x_1, y_1 z_1) for um vetor do IR^3 com produto interno usual, tem-se:

$$|v| = \sqrt{(x_1, y_1, z_1).(x_1, y_1, z_1)} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

Se | *v* | = 1, isto é, se *v* . *v* = 1, o vetor *v* é chamado vetor unitário. Dado um vetor não-nulo $v \in$ V, o vetor

$$\frac{1}{|v|}\ x\ v = \frac{v}{|v|}$$

é um vetor unitário. De fato:

$$\frac{v}{|v|}\ .\ \frac{v}{|v|} = \frac{v\,.v}{|v|^2} = \frac{|v|^2}{|v|^2} = 1$$

Portanto, $\frac{v}{|v|}$ é unitário. Diz—se, nesse caso, que o vetor *v* foi *normalizado*.

2.3.1 - Problemas Resolvidos

1) Dado o vetor v = (-2, 1, 2) $\in$ IR^3 calcular o módulo de v e normalizar v, considerando que:
   a) IR^3 está munido do produto interno usual;
   b) em IR^3 está definido o produto interno $v_1 \,.\, v_2 = 3x_1x_2 + 2y_1y_2 + z_1z_2$, sendo $v_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $v_2 = (x_2, y_2, z_2)$.

Solução

a) $|v| = \sqrt{(-2,1,2).(-2,1,2)} = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 2^2}$

$$= \sqrt{4+1+4} = \sqrt{9} = 3$$

$$\frac{v}{|v|} = \frac{(-2,1,2)}{3} = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

b) $|v| = \sqrt{(-2,1,2).(-2,1,2)} = \sqrt{3(-2)^2 + 2(1)^2 + 2^2}$

$$= \sqrt{12+2+4} = \sqrt{18}$$

$$\frac{v}{|v|} = \frac{(-2,1,2)}{\sqrt{18}} = \left(-\frac{2}{\sqrt{18}}, \frac{1}{\sqrt{18}}, \frac{2}{\sqrt{18}}\right)$$

É importante observar que o módulo de v depende do produto interno utilizado: se o produto interno muda, o módulo se modifica. Por outro lado, os dois vetores $\frac{v}{|v|}$ obtidos em a) e b), a partir de v, são unitários em relação ao respectivo produto interno.

2) Dado o espaço vetorial V = IR^3 munido do produto interno usual, calcular a componente m do vetor v = (6, -3, m) de modo que $|v|$ = 7.

Solução

$$|v| = \sqrt{6^2 + (-3)^2 + m^2} = 7$$

$$\sqrt{36 + 9 + m^2} = 7$$

$$36 + 9 + m^2 = 49$$

$$m^2 = 4$$

$$m = \pm 2$$

2.3.2 - Propriedades do Módulo de um Vetor

Seja V um espaço vetorial euclidiano.

I) $|v| \geq 0$, $\forall\, v \in$ V e $|v| = 0$ se, esomentese, $v = 0$

Esta propriedade é uma conseqüência de P_4.

II) $|\alpha v| = |\alpha|\, |v|, \forall\, v\, V,\ \forall\, \alpha \in$ IR. De fato:

$$|\alpha v| = \sqrt{(\alpha v).(\alpha v)} = \sqrt{\alpha^2(v.v)} = |\alpha|\, \sqrt{v.v} = |\alpha|\, |v|$$

III) $|\mu\, .\, v| \leq |\mu|\, |v|, \forall\, \mu, v\ \in$ V. De fato:

a) Se $\mu = 0$ ou $v = 0$, vale a igualdade $|\mu\, .\, v| = |\mu|\, |v| = 0$

b) Se nem μ nem v são nulos, para qualquer $\alpha \in$ IR, vale a desigualdade:

$(\mu + \alpha v)\ (\mu + \alpha v) \geq 0$ pelo axioma P_4

ou

$$\mu\, .\, \mu + \mu\, .\, (\alpha v) + (\alpha v)\, .\, \mu + \alpha^2\, (v\, .\, v) \geq 0$$

ou ainda

$$|\, v\, |^2\, \alpha^2 + 2(\mu\, .\, v)\, \alpha + |\, \mu\, |^2 \geq 0$$

Tendo em vista que o primeiro membro dessa igualdade é um t.rinômio do 2º grau em α $(|v|^2 > 0)$ que deve ser positivo ou nulo para qualquer valor de *a*, o discriminante do trinômio deve ser negativo ou nulo:

$$(2\mu\, .\, v)^2 - 4\, |v|^2\, |\mu|^2 \leq 0$$

$$4(\mu\, .\, v)^2 - 4\, |\mu|^2\ \leq 0$$

$$(\mu\, .\, v)^2 - |\mu|^2\, |v|^2 \leq 0$$

mas

$$(\mu\, .\, v)^2 = |\mu . v|^2$$

logo:

$$|\mu\, .\, v|\ \leq |\mu|\, |v|$$

Essa desigualdade é conhecida com o nome de *Desigualdade de Schwac* ou *Ineqaação de Cauchy-Schwarz.*

IV) $|\, \mu + v\, |\ \leq\ |\, \mu\, | +\ |\, \mathrm{v}\, |$, $\forall\, \mu, v \in$ V. De fato:

$$|\, \mu + v\, |\ = \sqrt{(\mu + v)\ .\ (\mu + v)}$$

$$|\mu + v| = \sqrt{(\mu . \mu + 2)(\mu + v) + v . v}$$

$$|\mu + v|^2 = |\mu|^2 + 2(\mu . v) + |v|^2$$

mas,

$$\mu . v \leq |\mu . v| \leq |\mu|\ |v|$$

logo:

$$|\mu + v|^2 \leq |\mu|^2 + 2|\mu||v| + |v|^2$$

ou,

$$|\mu + v|^2 \leq (|\mu| + |v|)^2$$

ou ainda

$$|\mu + v| \leq |\mu| + |v|$$

Essa desigualdade, denominada *desigualdade triangular,* vista no IR^2 ou no IR^3, confirma a propriedade geométrica segundo a qual, num triângulo, a soma dos comprimentos de dois lados é maior do que o comprimento do terceiro lado (Fig. 2.3.2).

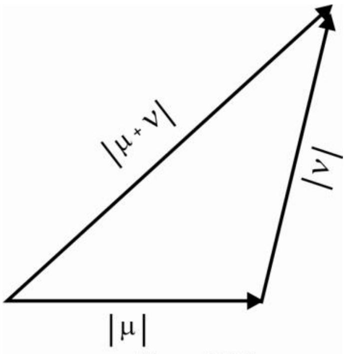


Figura 2.3.2

A igualdade somente ocorre quando os dois vetoresp μ e *v* são colineares.

2.4 - ÂNGULO DE DOIS VETORES

Dados dois vetores μ e *v* não nulos, de um espaço vetorial V, a desigualdade de Schwarz $|\mu . v| \leq |\mu|\ |v|$ pode ser escrita assim:

$$\frac{\mu . v}{|\mu|\ |v|} \leq 1$$

ou

$$\left|\frac{\mu . v}{|\mu||v|}\right| \leq 1$$

o que implica:

$$-1 \leq \frac{\mu \, . \, v}{|\,\mu\,| \;\, |\,v\,|} \leq 1$$

Por esse motivo, pode-se dizer que a fração

$$\frac{\mu \, . \, v}{|\,\mu\,| \;\, |\,v\,|}$$

é igual ao co-seno de um ângulo θ, denominado *ângulo dos vetores* μ e v:

$$\cos \theta = \frac{\mu \, . v}{|\,\mu\,| \; |\,v\,|}, \;\; 0 \leq \theta \leq \pi$$

2.4.1 - Problemas Resolvidos

Nos problemas 1 e 2, considerando o produto interno usual no IR^3 e no IR^4 respectivamente, calcular o ângulo entre os vetores dados em cada um deles.

1) $\mu = (2,1,-5)$ e $v = (5, 0, 2)$

Solução

$$|\,\mu\,| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-5)^2} = \sqrt{4 + 1 + 25} = \sqrt{30}$$

$$|\,v\,| = \sqrt{5^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{25 + 0 + 4} = \sqrt{29}$$

$$\mu \, . \, \nu = 2(5) + 1(0) - 5\,(2) = 10 + 0 - 10 = 0$$

$$\cos \theta = \frac{\mu \, . \, v}{|\,\mu\,|\,|\,v\,|} = \frac{0}{\sqrt{30} \text{ x } \sqrt{29}} = 0 \quad \therefore \theta = \frac{\pi}{2}$$

2) $\mu = (1, -1, 2, 3)$ e $v = (2, 0, 1, -2)$

Solução

$$\mu \, . \, v = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{1 + 1 + 4 + 9} = \sqrt{15}$$

$$|\,v\,| = \sqrt{2^2 + 0^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{4 + 0 + 1 + 4} = \sqrt{9} = 3$$

$$\mu \, . \, v = 1(2) - 1(0) + 2(1) + 3(-2) = 2 - 0 + 2 - 6 = -2$$

$$\cos \theta = \frac{\mu \, . \, v}{|\,\mu\,| \;\, |v|} = \frac{-2}{\sqrt{15} \text{ x } 3} \quad \therefore \; \theta = arc \cos \left(-\frac{2}{3\sqrt{15}} \right)$$

3) Sendo V um espaço vetorial euclidiano e μ, $v \in$ V, calcular o co-seno do ângulo entre os vetores μ e ν, sabendo que $|\mu| = 3$, $|v| = 7$ e $|\mu + v| = 4\sqrt{5}$.

Solução

$$|\mu + v| = \sqrt{(\mu + v) . (\mu + v)}$$

$$|\mu + v|^2 = |\mu|^2 + 2\mu . v + |v|^2$$

$$\left(4\sqrt{5}\right)^2 = 3^2 + 2\mu . v + 7^2$$

$80 = 9 + 2\mu . v + 49$

$2\mu . v = 80 – 58$

$2\mu . v = 22$

$\mu . v = 11$

$$\cos\theta = \frac{\mu . v}{|\mu|\ |v|} = \frac{11}{3 \text{ x } 7} = \frac{11}{21} \cong 0{,}5238$$

4) No espaço vetorial das matrizes quadradas V = M_2, dadas duas matrizes quaisquer

$\mu = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}$ e $v = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}$, o número real

$\mu . v = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2$

define um produto interno em M_2.
Sabendo que: $\mu = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ e $v = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$,
calcular:

a) $|\mu + v|$

b) o ângulo entre μ e v

Solução

a) $\omega = \mu + v = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$$|\omega| = \sqrt{\omega . \omega} = \sqrt{1^2 + 4^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 16 + 0 + 4} = \sqrt{21} = |u + v|$$

b) $|\mu| = \sqrt{\mu . \mu} = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{1 + 4 + 1 + 1} = \sqrt{7}$

$$|v| = \sqrt{v . v} = \sqrt{0^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{0 + 4 + 1 + 1} = \sqrt{6}$$

$\mu \cdot v = 1(0) + 2(2) - 1(1) + 1(1) = 0 + 4 - 1 + 1 = 4$

$$\cos\theta = \frac{\mu \cdot v}{|\mu|\,|v|} = \frac{4}{\sqrt{7} x \sqrt{6}} = \frac{4}{\sqrt{42}} \;\therefore\; \theta = \arccos\frac{4}{\sqrt{42}}$$

2.5 - DISTÂNCIA ENTRE DOIS VETORES

Chama-se *distância* entre dois vetores (ou pontos) μ e v, o número real, representado por d (μ,v), definido por:

$$d(\mu,v) = |\mu - v|$$

Se $\mu = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$ são vetores (ou pontos) do IR^2, com produto interno usual, tem-se:

$$d(\mu,v) = |\mu - v| = |(x_1 - x_2, y_1 - y_2)|$$

ou

$$d(\mu, v) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Exemplos

Calcular a distância entre os vetores (ou pontos) $\mu = (9,5)$ e $v = (4,2)$.

Solução

$$d(\mu, v) = \sqrt{(9-4)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34} \cong 5{,}83$$

2.6 - VETORES ORTOGONAIS

Dado um espaço vetorial euclidiano V, diz-se que dois vetores μ e v de V são *ortogonais*, e se representa por $\mu \perp v$, se, e somente se, $\mu \cdot v = 0$.

- O vetor $0 \in V$ é ortogonal a qualquer vetor $v \in V$: $0 \cdot v = 0$
- Se $\mu \perp v$, então $\alpha\,\mu \perp v$, para todo $\alpha \in IR$
- Se $\mu_1 \perp v$ e $\mu_2 \perp v$, então $(\mu_1 + \mu_2) \perp v$

Exemplos

1) Os vetores $\mu = (2,7)$ e $v = (-7,2)$ de IR^2, munido do produto interno usual, são ortogonais. De fato:

$$\mu \cdot v = 2(-7) + 7(2) = -14 + 14 = 0$$

2) Osvetores $\mu = (-3,2)$ e $v = (4,3)$ são ortogonais no espaço vetorial V = IR^2 em relação ao produto interno $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = x_1x_2 + 2y_1y_2$. De fato:

$$\mu \cdot v = -3(4) + 2(2)(3) = -12 + 12 = 0$$

2.7 - CONJUNTO ORTOGONAL DE VETORES

Dado um espaço vetorial euclidiano V, diz-se que um conjunto de vetores $\{v_1, v_2, ..., v_n\} \subset V$ é *ortogonal*, se dois vetores quaisquer, distintos, são ortogonais, isto é, $v_i\, v_j = 0$ para $i \neq j$. *Exemplo:*

No IR, o conjunto {(l,2,-3), (3,0,1), (1,-5,-3)} é ortogonal em relação ao produto interno usual. De fato:

$$(1,2,-3) \cdot (3,0,1) = 1(3) + 2(0) - 3(1) = 3 + 0 - 3 = 0$$
$$(1,2,-3) \cdot (1,-5,-3) = 1(1) + 2(-5) - 3(-3) = 1 - l0 + 9 = 0$$
$$(3,0,1) \cdot (1,-5,-3) = 3(1) + 0(-5) + 1(-3) = 3 + 0 - 3 = 0$$

2.7.1 - Conjunto Ortogonal e Independência Linear

Um conjunto ortogonal de vetores não-nulos $A = \{v_1, v_2, ..., v_n)$ de um espaço vetorial euclidiano V é linearmente independente (LI). De fato efetuando, em ambos os membros da igualdade

$$a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n = 0$$

o produto interno por v_1, vem:

$$(a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n) \cdot v_i = 0 \cdot v_i$$

ou

$a_1 (v_1 \,.\, v_i) + ... + a_i (v_i \,.\, v_i) + ... + a_n (v_n \,.\, v_i) = 0$

Tendo em vista que A é ortogonal $v_j \,.\, v_i = 0$ para $j \neq i$, e $v_i \,.\, v_i \neq 0$, pois $v_i \neq 0$:

$a_1(0) +...+ a_1(v_i \,.\, v_i) +...+ a_n (0) = 0$,

ou

$a_1 (v_i \,.\, v_i) = 0$,

o que implica $a_i = 0$ para i = 1, 2, ..., n. Logo, A = $\{v_1, v_2, ..., v_n)$ é LI.

2.8 - BASE ORTOGONAL

Uma base B = $\{v_1, v_2, ..., v_n)$ de um espaço vetorial euclidiano V é *ortogonal* se os seus vetores são dois a dois ortogonais.

Considerando o que foi visto no item anterior, se dim V = n, qualquer conjunto de n vetores não-nulos e dois a dois ortogonais, constitui uma *base ortogonal.* O conjunto B = {(1,2,-3), (3,0,1), (1,-5,-3)}, apresentado como exemplo em 2.7, é uma base ortogonal do IR^3.

2.8.1 - Base Ortonormal

Uma base B = $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ de um espaço vetorial euclidiano V é *ortononnal* se B é ortogonal e todos os seus vetores são unitários, isto é:

$$v_j \,.\, v_j = \begin{cases} 0\ para\ i \neq \\ 1\ para\ i = \end{cases}$$

Exemplos

1) As bases canônicas {(1, 0), (0,1)} do IR^2, {(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)} do IR^3 e {(l, 0, 0 0), (0, 1, 0 ..., 0) (0,0,0,...,1)} do IR^n são bases ortonormais desses espaços em relação ao produto interno usual.

2) A base B = $\left\{v_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), v_2 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}$ do IR^2 é ortonormal em relação ao produto interno usual. De fato:

$$v_1 \, . \, v_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} = 0$$

$$v_1 \, . \, v_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$$v_2 \, . \, v_2 = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

3) Uma base ortonormal sempre pode ser obtida de uma base ortogonal normalizando cada um de seus vetores. Assim, da base ortogonal B = {v_1 = (1,2,-3), v_2 = (3,0,1), v_3 = (1,-5,-3)} do IR^3, relativamente ao produto interno usual, pode-se obter a base ortonormal B' = {μ_1, μ_2, μ_3}, sendo:

$$\mu_1 = \frac{v_3}{|v_1|} = \frac{(1,2,-3)}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2}} = \frac{(1,2,-3)}{\sqrt{1+4+9}} = \left(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{-3}{\sqrt{14}}\right)$$

$$\mu_2 = \frac{v_2}{|v_2|} = \frac{(3,0,1)}{\sqrt{3^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{(3,0,1)}{\sqrt{9+0+1}} = \left(\frac{3}{\sqrt{10}}, 0, \frac{1}{\sqrt{10}}\right)$$

$$\mu_3 = \frac{v_3}{|v_3|} = \frac{(1,-5,-3)}{\sqrt{1^2 + (-5)^2 + (-3)^2}} = \frac{(1,-5,-3)}{\sqrt{1+25+9}} = \left(\frac{1}{\sqrt{35}}, \frac{-5}{\sqrt{35}}, \frac{-3}{\sqrt{35}}\right)$$

O leitor poderá verificar que:

$\mu_1 \, . \, \mu_2 = \mu_1 \, . \, \mu_3 = \mu_2 \, . \, \mu_3 = 0$

$\mu_1 \, . \, \mu_1 = \mu_2 \, . \, \mu_2 = \mu_3 \, . \, \mu_3 = 1$

2.8.2 - Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt

Dado um espaço vetorial euclidiano V e uma base não ortogonal A = {v_1, v_2, ..., v_2} desse espaço, é possível, a partir dessa base, determinar uma base ortogonal B de V.

De fato, sabendo que v_1, v_2, ..., v_n não são ortogonais, considere-se

$\omega_1 = v_1$ (1)

$(v_2 - \alpha\omega_1) \, . \, \omega_1 = 0$

$v_2 \, . \, \omega_1 - \alpha(\omega_1 \, . \, \omega_1) = 0$

$\alpha = \dfrac{v_2 \, . \, \omega_1}{\omega_1 \, . \, \omega_1}$, isto é,

$\omega_2 = v_2 - \left(\dfrac{v_2 \, . \, \omega_1}{\omega_1 \, . \omega_1}\right) \omega_1$ (2)

Assim, os vetores ω_1 e ω_2 são ortogonais.

Considere-se o vetor $\omega_3 = v_3 - a_2\,\omega_2 - a_1\,\omega_1$ e determinem-se os valores de a_2, e a_1 de maneira que o vetor ω_3 seja ortogonal aos vetores ω_1 e ω_2:

$$\begin{cases} (v_3 - a_2\omega_2 - a_1\omega_1)\,.\,\omega_1 = 0 \\ (v_3 - a_2\omega_2 - a_1\omega_1)\,.\,\omega_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_3.\,\omega_1 - a_2(\omega_2\,.\,\omega_1) - a_1(\omega_1.\,\omega_1) = 0 \\ v_3.\,\omega_2 - a_2(\omega_2\,.\,\omega_2) - a_1(\omega_1.\,\omega_2) = 0 \end{cases}$$

Tendo em vista que $\omega_2\,.\,\omega_1\,.\,\omega_2 = 0$, vem:

$$\begin{cases} v_3\,.\;\omega_1 - a_1\,(\omega_1\,.\,\omega_1) = 0 \\ v_3\,.\;\omega_2 - a_2\,(\omega_2\,.\,\omega_2) = 0 \end{cases}$$

e

$$a_1 = \frac{v_3.\,\omega_1}{\omega_1.\,\omega_1}; \qquad a_2 = \frac{v_3.\,\omega_2}{\omega_2.\,\omega_2}, \text{isto é,}$$

$$\omega_1 = v_3 - \left(\frac{v_3.\omega_2}{\omega_2.\omega_2}\right)\omega_2 - \frac{v_3.\omega_1}{\omega_1.\omega_1}\,\omega_1 \qquad (3)$$

Assim, os vetores ω_1, ω_2 e ω_3 são ortogonais. Procedendo-se de modo análogo, obtém-se os demais vetores ortogonais da base B sendo

$$\omega_1 = v_1 - \left(\frac{v_1\,.\,\omega_i - 1}{\omega_{i-1}\,.\,\omega_{i-1}}\right)\omega_{i-1} - \left(\frac{v_i\,.\omega_{i-2}}{\omega_{i-2}\,.\,\omega_{i-2}}\right)\omega_{i-2} - \left(\frac{v_i.\omega_{i-3}}{\omega_{i-3}\,.\omega_{i-3}}\right)\omega_{i-3}\,\ldots \qquad (4)$$

a fórmula que permite calcular qualquer vetor $\omega_i \in$ B, i variando de 1 a n. Assinale-se que, em, se i = 3, se obtém (3); se i = 2 se obtém (2) e se i = 1, se obtém (1).

Assim, a partir da base não ortogonal A = {v_1, v_2, ..., vn} se obteve a base ortogonal B = {ω_1, ω_2, ..., ω_n}, como se desejava.

O processo que permite a determinação de uma base ortogonal B a partir de uma base qualquer A chama-se *processo de ortogonalízação de Gram-Schmidt.*

• Se só desejar uma base ortonormal C = {μ_1, μ_2, ..., μ_n} basta normalizar cada vetor ω_1 de B. Assim, fazendo $\mu_i = \frac{\omega_i}{|\omega_i|}$, tem-se a base C que é uma base ortonormal obtida por meio da base ortogonal B, a partir da base inicial não-ortogonal A.

Exemplos

Dada a base não-ortogonal, em relação ao produto interno usual, A = {v_1 = (1,1,1), v_2 = (0,1,1), v_3 = (0,0,1)},

determinar:

a) uma base ortogonal B = {ω_1, ω_2, ω_3} pelo processo de ortogonalização de Gram-Schmidt;
b) uma base ortonormal C = {μ_1, μ_2, μ_3 } normalizando cada vetor ω_i de B.

Solução

a) substituindo em (4), sucessivamente, i por 1, i por 2 e i por 3, pode-se escrever

a.1) ω1 = v1 = (1,1,1)

a.2) ω2 = v2 - $\left(\frac{v_2\,.\,\omega_1}{\omega_1\,.\omega_1}\right)\omega_1$

$$\frac{v_2.\,\omega_1}{\omega_1.\,\omega_1} = \frac{(0,1,1).\,(1,1,1)}{(1,1,1).\,(1,1,1)} = \frac{0+1+1}{1+1+1} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{v_2.\,\omega_1}{\omega_1.\,\omega_1}\omega_1 = \frac{2}{3} = (1,1,1) = \left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$$

$$\omega_2 = (0,1,1) - \left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$$

$$\omega_2 = \left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$$

a.3) $\omega_3 = v_3 - \left(\frac{v_3\,.\,\omega_2}{\omega_2\,.\,\omega_2}\right)\omega_2 - \left(\frac{v_3\,.\,\omega_1}{\omega_1\,.\,\omega_1}\right)\omega_1$

$$\frac{v_3.\,\omega_2}{\omega_2.\,\omega_2} = \frac{(0,0,1).\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)}{\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right).\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)} =$$

$$= \frac{0+0+\frac{1}{3}}{\frac{4}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{6}{9}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{v_3.\,\omega_2}{\omega_2.\,\omega_2} = \omega_2 = \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{2}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right)$$

$$\frac{v_3.\,\omega_1}{\omega_1.\,\omega_1} = \frac{(0,0,1).\,(1,1,1)}{(1,1,1).\,(1,1,1)} = \frac{0+0+1}{1+1+1} = \frac{1}{3}$$

$$\left(\frac{v_3.\,\omega_1}{\omega_1.\,\omega_1}\right) = \omega_1 = \frac{1}{3}\,(1,1,1) = \left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$$

$$\omega_3 = (0,0,1) - \left(\frac{2}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right) - \left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$$

$$\omega_3 = \left(\frac{2}{6},-\frac{1}{6},\frac{5}{6}\right) - \left(\frac{2}{6},\frac{2}{6},\frac{2}{6}\right)$$

$$\omega_3 = \left(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

A base B = $\left\{\omega_1 = (1,1,1), \omega_2 = \left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right), \omega_3 = \left(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right\}$ é base ortogonal obtida a partir da base não ortogonal A.

b.1) $\mu_1 = \frac{\omega_1}{|\omega_1|} = \frac{(1,1,1)}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

b.2) $\mu_2 = \frac{\omega_2}{|\omega_2|} = \frac{\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},\right)}{\sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2}} = \frac{\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)}{\sqrt{\frac{4}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}}} =$

$$= \frac{\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)}{\frac{\sqrt{6}}{3}} = \left(-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

b.3) $\mu_2 = \frac{\omega_3}{|\omega_3|} = \frac{\left(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{0^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{\left(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{0+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}} =$

$$= \frac{\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \left(0 - \frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

A base

$$C = \left\{\mu_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\quad \mu_2 = \left(-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right),\quad \mu_3 = \left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$$

é base ortonormal. De fato:

$\mu_1 \,.\, \mu_1 = \mu_2 \,.\, \mu_2 = \mu_3 \,.\, \mu_3 = 1$

$\mu_1 \,.\, \mu_2 = \mu_1 \,.\, \mu_3 = \mu_2 \,.\, \mu_3 = 0$

2.8.3 - Problemas Resolvidos

1) Calcular o valor de k para que os vetores $\mu = (5, k, -3)$ e $v = (k, 1, 2)$ sejam ortogonaís em relação ao produto interno usual do IR^3.

Solução

$$\mu \,.\, v = 0$$
$$(5, k, -3) \,.\, (k, 1, 2) = 0$$
$$5k + 1k - 6 = 0$$
$$6k = 6$$
$$k = 1$$

2) Dados $V = IR^2$ e o produto interno $(x_1, y_1) \,.\, (x_2, y_2) = 2x_1x_2 + 3y_1y_2$, calcular um vetor unitário simultaneamente ortogonal aos vetores $\mu = (1, 2)$ e $v = (2,4)$.

Solução

Sejam $\omega = (x, y)$ tal que $\omega \perp \mu$ e $\omega \perp v$, isto é:

$$\begin{cases} \omega.\mu = 0 \\ \omega.\mu = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} (x,y).(1,2) = 0 \\ (x,y).(2,4) = 0 \end{cases}$$

Com o produto interno dado obtém-se o sistema

$$\begin{cases} 2x + 6y = 0 \\ 4x + 12y = 0 \end{cases}$$

cuja solução é $x = -3y$.

Logo, $\omega = (-3y, y) = y(-3, 1)$ para $y \in IR$

Portanto, existem infinitos vetores simultaneamente ortogonais a μ e v, porém todos múltiplos de $(-3, 1)$. Para $y = 1$, por exemplo, obtém-sem $\omega_1 = (-3, 1)$ que, normalizado, fica:

$$S_1 = \frac{\omega_1}{\omega_1} = \frac{(-3,1)}{\sqrt{2(-3)^2 + 3(1)^2}} = \frac{(-3,1)}{\sqrt{18+3}} = \frac{(-3,1)}{\sqrt{18+3}} = \frac{(-3,1)}{\sqrt{21}} = \left(-\frac{3}{\sqrt{21}}, \frac{1}{\sqrt{21}}\right)$$

Assim, o vetor s_1 é um vetor unitário simultaneamente ortogonal aos vetores μ e v, em relação ao produto interno dado.

3) O conjunto $B = \{(1, -1), (2, m)\}$ é uma base ortogonal do IR^2 em relação ao produto interno $(x_1, y_1) \,.\, (x, y_2)\ 2x_1x_2 + y_1y_2$.

a) Calcular o valor de m.

b) Determinar, a partir de B, uma base ortonormal.

Solução

a) Tendo em vista que B é ortogonal, tem-se:

(1, -1) . (2, m) = 0

2 (1) (2) -1(m) = 0

4 - m = 0

m = 4

b) Normalizando cada vetor de B = {(l,-l), (2,4)} segundo o produto interno dado, vem:

$$\mu_1 = \frac{(1,-1)}{\sqrt{(1,-1).(1,-1)}} = \frac{(1,-1)}{\sqrt{2(1)^2+(-1)^2}} = \frac{(1,-1)}{\sqrt{2+1}} =$$

$$= \frac{(1,-1)}{\sqrt{3}} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\mu_2 = \frac{(2,4)}{\sqrt{(2,4).(2,4)}} = \frac{(2,4)}{\sqrt{2(2)^2+(4)^2}} = \frac{(2,4)}{\sqrt{8+16}} =$$

$$= \frac{(2,4)}{\sqrt{24}} = \frac{(2,4)}{2\sqrt{6}} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

Logo, B' = {μ_1, μ_2} é uma base ortonormal do IR^2 em relação ao produto interno dado.

2.9 - Problemas Propostos

Nos problemas 1 a 4, considerando os vetores v_1 = (x_1, y_1) e v_2 = (x, y_2) do espaço vetorial V = IR^2, verificar quais das funções *f* : V x V → IR, definidas em cada um deles, são produtos internos em V.

1) $f(v_1, v_2) = x_1x_2 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2y_1y_2$

2) $f(v_1, v_2) = x_1x_2 + y_1y_2$

3) $f(v_1, v_2) = x_1^2x_2 + y_1y_2^2$

4) $f(v_1, v_2) = x_1x_2 + y_1y_2 + 1$

Nos problemas 5 a 8, considerando os vetores $v_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $v_2, = (x_2, y_2, z_2)$ do espaço vetorial V = IR^3, verificar quais das funções f: V x V → IR, definidas em cada um deles, são produtos internos em V. Para aquelas que não são produto interno, citar os axiomas que não se verificam:

5) $f(v_1, v_2) = x_1x_2 + 3y_1y_2$

6) $f(v_1, v_2) = 3x_1x_2 + 5y_1y_2 + 2z_1z_2$

7) $f(v_1, v_2) = 2x_1^2y_1^2 + 3x_1^2y_2^2 + z_1^2z_2$

8) $f(v_1, v_2) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 – x_2y_1 – x_1y_2$

Nos problemas 9 e 10, considerando os vetores $\mu = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$, calcular os produtos internos indicados em cada um deles.

9) $\mu . v = x_1x_2 + y_1y_2$ para $\mu = (1, -1)$ e $v = (-7, 4)$

10) $\mu . v = 3x_1x_2 + 4y_1y_2$ para $\mu = (2, 3)$ e $v = (-5, 3)$

Nos problemas 11 e 12, considerando os vetoresu $\mu = (x_1, y_1\ z_1)$ e $v = (x_2, y_2\ z_2)$, calcular os produtos internos indicados em cada um deles.

11) $\mu . v = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$ para $\mu = (6, 4,-2)$ e $v = (2,3,-5)$

12) $\mu . v = 4x_1x_2 + 2y_1y_2 + 6z_1z_2$ para $\mu = (1,1,1)$ e $v = (1, 0, 1)$

Nos problemas 13 e 14, calcular o módulo dos vetores $v \in IR^2$ e $v \in IR^3$ em relação ao produto interno usual.

13) $\mu = (4,7)$

14) $v = (1, 2, 3)$

Nos problemas 15 e 16, calcular o módulo de cada um dos vetores do IR^3, em relação ao produto interno $v_1 . v_2 = 4x_1x_2 + 2y_1y_2 + z_1z_2$, sendo $v_1 = (x_1, y_1\ z_1)$ e $v_2 = (x_2, y_2, z_2)$.

15) $v = (3,-1,4)$

16) u = (-2, -5, -7)

17) Normalizar cada um dos vetores dos problemas 13 a 16.

Nos problemas 18 a 20, calcular a distância entre os vetores dados em cada um deles.

18) $\mu = (5, 6)$ e $v = (-10,7)$

19) $\mu = (-3, 1, 9)$ e $v = (8, 14, 6)$

20) $\mu = (4, 1, 7,9)$ e $v = (2, -3, -5, -11)$

Nos problemas 21 a 24, considerando o produto interno usual no IR^2, no IR^3 e no IR^4, calcular o ângulo entre os pares de vetores dados em cada um deles.

21) $\mu = (10, -3)$ e $v = (3, 10)$

22) $\mu = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $v = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

23) $\mu = (3, 1, -7)$ e $v = (0, 1, 3)$

24) $\mu = (1, 2, -1, -2)$ e $v = (0, 1, -1, -2)$

25) Dadas duas matrizes quaisquer

$$\mu = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \quad e \quad v = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix},$$

do espaço vetorial $V = M_2$, munido do produto interno $\mu \cdot v = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2$, e dados os vetores

$$\mu = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \quad e \quad v = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix},$$

calcular:

a) $|\mu + v|$
b) $d(\mu, v) = |\mu - v|$
c) o ângulo entre μ e v.

26) Considerar, no IR^3, o produto interno usual e calcular os valores de m para os quais os vetores μ e v são ortogonais:

a) $\mu = (3m, 2, -m)$ e $v = (-4, 1, 5)$

b) $\mu = (0, m-1, 4)$ e $v = (5, m-1, -1)$

27) Calcular um vetor v sirnultaneamente ortogonal aos vetores $v_1 = (1, 1, 2)$, $v_2 = (5, 1, 3)$ e $v_3 = (2, -2, -3)$ do espaço vetorial $V = IR^3$ em relação ao produto interno usual.

28) Calcular um vetor unitário μ simultaneamente ortogonal aos vetores $v_1 = (1, -1, 2)$ e $v_2 = (2, 1, 0)$ do espaço vetorial $V = IR^3$ em relação ao produto interno:

$$(x_1, y_1, z_1)\,(x_2, y_2, z_2) = 2x_1x_2 + y_1y_2 + 4z_1z_2$$

29) Dado o espaço vetorial $V = M_2$, munido do produto interno definido no problema 25, calcular x de modo que

$$\mu = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 5 & x \end{bmatrix} \quad e \quad v = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

sejam ortogonais.

30) SendoV = IR^4, munido do produto interno usual, determinar um vetor não-nulo $v \in IR^4$, simultaneamente ortogonal a $v_1 = (1, 1, 1, -1)$, $v_2 = (1,2,0,1)$ e $v_3 = (-4, 1, 5,2)$.

31) O conjunto B = {(2, -1), (*k*, 1)} é uma base ortogonal do IR^2 em relação ao produto interno:

$$(x_1, y_1) . (x_2, y_2) = 2x_1x_2 + x_1y_2 + x_2y_1 + y_1y_2$$

Calcular o valor de *k* e obter, a partir de B, uma base B ortonormal.

Nos problemas 32 a 34, é dada, em cada um deles, uma base não-ortogonal A, em relação ao produto interno usual. Determinar, a partir de A:

a) uma base ortogonal B, utilizando o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt;

b) uma base ortonormal C, normalizando cada vetor de B.

32) A = $\{v_1 = (3, 4), v_2 = (1,2)\}$

33) A = $\{v_1 = (1, 0, 0), v_2 = (0, 1,1), v_3 = (0,1,2)$

34) A = $\{v_1 = (1,0, 1), v_2 = (1,0,-1)\}$ $v_3 = (0,3,4)\}$

2.9.1 - Respostas ou Roteiros para os Problemas Propostos

1) É produto interno.
2) Não é.
3) Não é
4) Não é.
5) Não é. Não se verifica o axioma P_4.
6) É.
7) Não é. Não se verificam os axiomas P_2 e P_3.
8) É.

9) a 12) Roteiro: Esses problemas são resolvidos de modo análogo ao dos problemas 1 e 2, item 2.1.1.

13 e 14) Roteiro: Esses problemas são resolvidos de modo análogo ao do problema 1, alínea a), 1ª parte, item 2.3.1.

15 e 16) Roteiro: Esses problemas são resolvidos de modo análogo ao do problema 1, alínea b), 1ª parte, item 2.3.1.

17) Roteiro: Esse problema é resolvido de modo análogo ao do problema 1, alíneas a)

e b), 2ª parte, item 2.3.1.

18 a 20) Roteiro: Esses problemas são resolvidos de modo anâlogo ao do Exemplo do item 2.5.

21 a 24) Roteiro: Esses problemas são resolvidos de modo análogo ao dos problemas 1 e 2, item 2.4.

25) Roteiro: Esse problema é resolvido de modo análogo ao do problema 4, item 2.4.

26) a) $m = \frac{2}{17}$; $b)\ m = 3\ ou - 1$

27) v = a (1, 7, -4), a $\in$ IR

28) $\mu = \left(\frac{2}{9}, \frac{8}{9}, -\frac{1}{6}\right)$

29) x = 4

30) uma solução v = (9, -8, 6, 7)

31) $k = -\frac{1}{3}$ e $B' = \left\{\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}, \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{5}}\right)\right)\right\}$

32) a) B = $\{\omega_1 = (3,4),\ \omega_2 = (-4, 3)\}$

b) C = $\left\{\mu_1 = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right),\ \mu_2 = \left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)\right\}$

33) a) B = $\{\omega_1 = (1, 0, 0),\ \omega_2 = (0, 1, 1),\ \omega_3 = (0, -1, 1)$

b) $C = \left\{\mu_1 = (1,0,0), \mu_2 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \mu_3 = \left(0, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$

34) a) B = $\{\omega_1 = (1, 0, 1),\ \omega_2 = (1, 0, -1),\ \omega_3 = (0, 1, 0)\}$

b) $C = \left\{\mu_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \mu_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right),\ \mu_3 = (0,1,0)\right\}$

Capítulo 3

TRANSFORMAÇÕES LINEARES

3.1 - FUNÇÕES VETORIAIS

Neste Capítulo será estudado um tipo especial de função (ou aplicação) onde o domínio e o contradomínio são espaços vetoriais reais. Assim, tanto a variável independente como a variável dependente são vetores, razão pela qual essas funções são chamadas *funções vetoriais* ou *tranformações vetoriais.*

Para dizer que f é uma transformação do espaço vetorial V no espaço vetorial W, escreve-se f: V $\rightarrow$ W. Sendo f uma função, cada vetor $v \in$ V tem um só vetor imagem $\omega \in$ W, que será indicado por $\omega = f(v)$.

Exemplo

Uma transformação ***f*: IR^2 $\rightarrow$ IR^3** associa vetores v = (x, y) $\in$ IR^2 com vetores **ω = (a, b, c) $\in$ IR^3 (Fig. 3.1).**

Se a lei que define f é tal que

a = 3x, b = -2y e c = x - y,

a imagem de cada vetor (x, y) será representada por

f(x, y) = (3x, -2y, x-y).

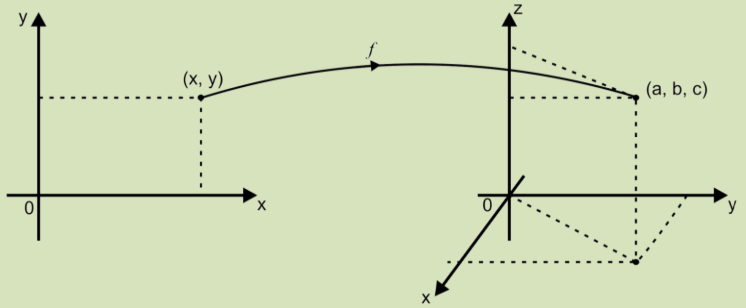


Figura 3.1

No caso de ser ti = (x, y) = (2, 1), tem-se:

$\omega = f(2, 1) = (3(2), -2(1), 2-1) = (6, -2, 1)$

3.2 - TRANSFORMAÇÕES LINEARES

Sejam V e W espaços vetoriais. Uma aplicação f: V $\rightarrow$ W é chamada *transformação linear de* V *em* W, se

I) $f(\mu + v) = f(\mu) + f(v)$

II) $f(\alpha\mu) = \alpha f(\mu)$,

para $\forall\ \mu, v \in$ V e $\forall\ \alpha \in$ IR.

Observe-se que, em I, $\mu + v \in$ V, enquanto $f(\mu) + f(v) \in$ W. Do mesmo modo, em II, $\alpha\mu \in$ V e $\alpha f(\mu) \in$ W (Fig. 3.2.a).

- Uma transformação linear de V em V (é o caso de V = W) é chamada *operador linear sobre V.*

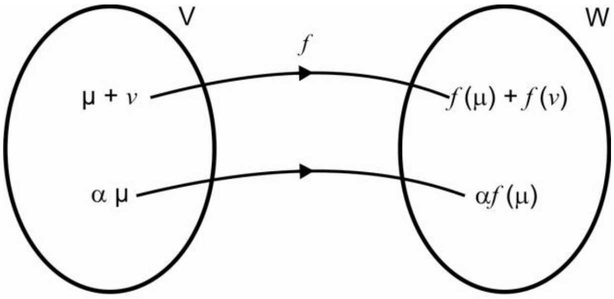


Figura 3.2.a

Exemplo

1) f: $IR^2 \rightarrow IR^3$, $f(x,y) = (3x,-2y, x - y)$ é linear. De fato, se $\mu = (x_1,y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$ são vetores genéricos do IR^2, tem-se:

I) $f(\mu + v) = f(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

$= (3(x_1 + x_2), - 2(y_1 + y_2), (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2))$

$= (3x_1 + 3x_2, - 2y_1 - 2y_2, x_1 + x_2 - y_1 - y_2)$

$= (3x_1, - 2y_1, x_1 - y_1) + (3x_2, - 2y_2, x_2 - y_2)$

$= f(\mu) + f(v)$.

II) Para todo $\alpha \in$ IR, tem-se:

$f(\alpha\mu) = f(\alpha x_1, \alpha y_1)$

$= (3\alpha x_1, - 2\alpha y_1, ax_1 - \alpha y_1)$

$= \alpha\,(3x_1, -2y_1, x_1 - y_1)$

$= \alpha f\,(\mu)$.

2) $f : IR \to IR$

$x \to 3\,x$ ou $f\,(x) = 3\,x$ é linear. De fato, se $\mu = x_1$ e $v = x_2$ são vetores quaisquer de IR (os vetores, nesse caso, são números reais), tem-se:

I) $f\,(\mu + v) = f\,(x_1 + x_2)$

$= 3(x_1 + x_2)$

$= 3\,x_1 + 3x_2$

$= f\,(\mu) + f\,(v)$.

II) $f\,(\alpha\mu) = f\,(\alpha x_1)$

$= 3\alpha x_1$

$= \alpha\,(3x_1)$

$= \alpha\, f\,(\mu)$.

3) A transformação identidade

I: $V \to V$

$v \to v$ ou I (v) é linear. De fato:

I) $I\,(\mu + v) = \mu + v = I\,(\mu) + I\,(v)$

II) $I\,(\alpha\mu) = \alpha\mu = \alpha\, I\,(\mu)$

4) A transformação nula (ou zero)

f: $V \to W$, f $(v) = 0$ é linear (Fig. 3.2.b) De fato:

I) $f\,(\mu + v) = 0 = 0 + 0 = f\,(\mu) + f\,(v)$

II) $f\,(\alpha\mu) = 0 = \alpha\, 0 = \alpha f\,(\mu)$

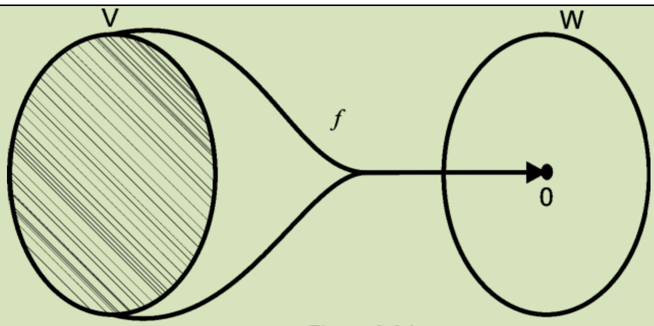


Figura 3.2.b

5) Seja A uma matriz de ordem 3 x 2. Essa matriz determina a transformação

f_A: $IR^2 \rightarrow AR^3$

$v \rightarrow A\,v$ ou $f_A(v) = A\,v$ que é linear. De fato:

I) $f_A(\mu + v) = A(\mu + v) = A\mu + Av = f_A(\mu) + f_A(v)$

II) $f_A(\alpha\mu) = A(\alpha\mu) = \alpha(A\mu) = \alpha f_A(\mu)$

Se, por exemplo, se tiver

$A_{(3,2)} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$ e $v = (x, y)$ for considerado um vetor-coluna

$v_{(2,1)} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

o produto Av é

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & - & y \\ 3x & + & 4y \\ 5x & & \end{bmatrix}$$

e, portanto,

$f_A(x, y) = (2x - y, 3x + 4y, 5x)$,

o que significa que a matriz $A_{(3,2)}$ determinou a transformação do vetor $v = (x, y) \in IR^2$ no vetor $\omega = (2x - y, 3x + 4y, 5x) \in IR^3$, transformação essa que é linear.

- De forma genérica, toda matriz $A_{(m,n)}$ determina a transformação linear

fA: $IR^n \rightarrow IR^m$

onde a imagem $f_A(v)$ **é** o produto da matriz $A_{(m,n)}$ pelo vetor-coluna $v_{(n,1)}$:

$A_{(m,n)} \times v_{(n,1)} = (Av)_{(m,1)} = f_A(v)$.

Uma transformação linear desse tipo chama-se *multiplicação por A.*

- Em 3.6 se verá o inverso, isto é, toda transformação linear *f*: $IR^n \rightarrow IR^m$ pode ser representada por uma matriz de ordem m X n.

6) A transformação *f*: $IR^2 \rightarrow IR^2$, $f(x, y) = (x^2, 3y)$ não é linear. De fato, se $\mu = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$ são vetores quaisquer do IR^2, tem-se:

$$f(\mu + v) = f(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = ((x_1 + x_2)^2, 3\,(y_1 + y_2)) =$$

$$= (x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2,\ 3y_1 + 3y_2$$

enquanto,

$$f(\mu) + f(v) = (x_1^2, 3y_1) + (x_2^2, 3y_2) = ((x_1^2 + x_2^2, 3y_1 + 3y_2),$$

isto é, $f(\mu + v) \neq f(\mu) + f(v)$.

3.2.1 - Interpretação Geométrica

Uma interpretação geométrica do significado de uma transformação linear pode ser dada considerando, por exemplo, o operador linear

f: $IR^2 \rightarrow IR^2$, $f(x,y) = (-3x + y, 2x + 3y)$

Se $\mu = (-1, 1)$ e $v = (0, 1)$, tem-se $f(\mu) = (4, 1)$ e $f(v) = (1, 3)$.

A Fig. 3.2.1.a mostra que, sendo $\mu + v$ a diagonal do paralelogramo determinado por μ e v, sua imagem $f(\mu + v)$ representa a diagonal do paralelogramo determinado por $f(\mu)$ e $f(v)$, isto é ,$f(\mu + v) = f(\mu) + f(v)$. Diz-se, nesse caso, que *f preserva a adição de vetores.*

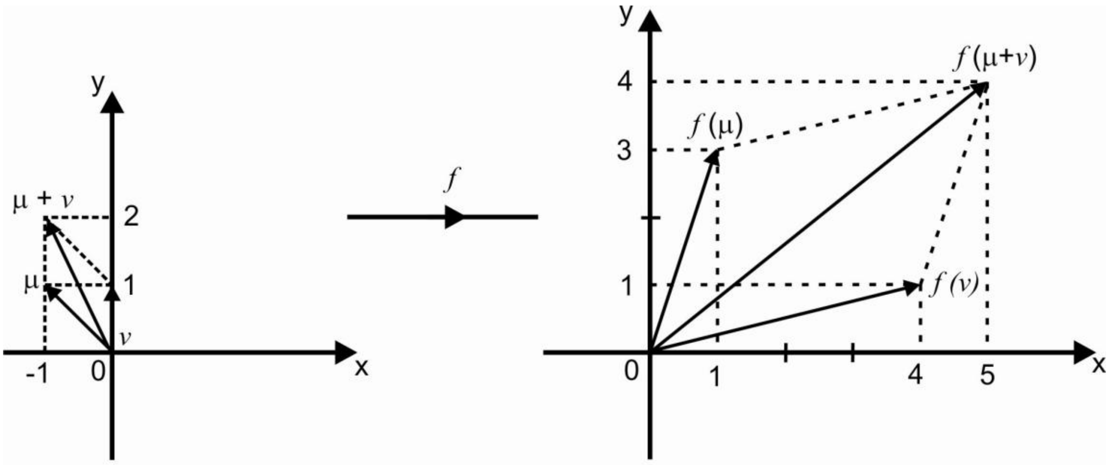


Figura 3.2.1.a

A Fig. 3.2.1 b mostra que, ao se multiplicar o vetor μ por 2, por exemplo, sua imagem $f(\mu)$ também fica multiplicada por 2. Esse fato vale para qualquer α real, isto *é*, $f(\alpha\mu)$ =

$\alpha f(\mu)$. Diz-se, nesse caso, que *f preserva a multiplicação de um vetor por um escalar*.

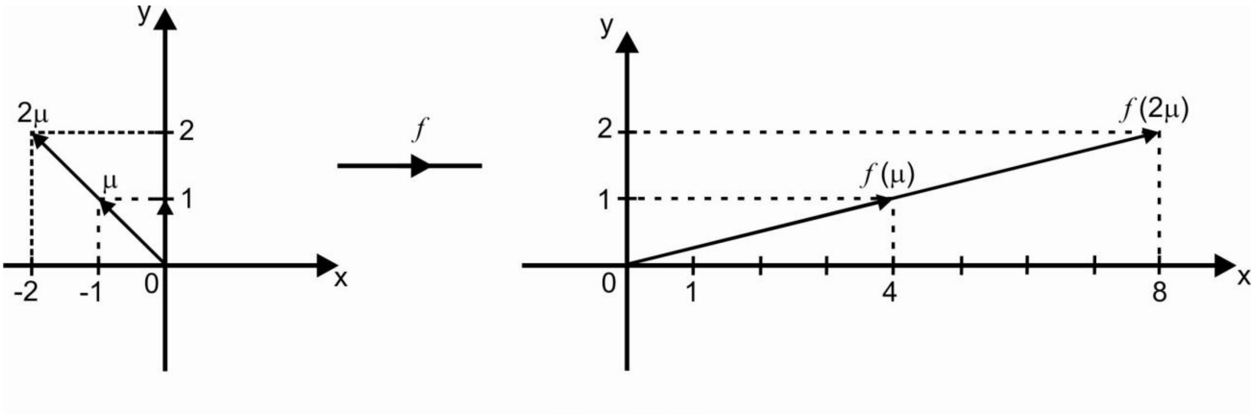


Figura 3.2.1.b

3.2.2 - Propriedades das Transformações Lineares

I) Se f: V $\rightarrow$ W é uma transformação linear, a imagem do vetor $0 \in$ V é o vetor $0 \in$ W. Esta propriedade decorre da condição II da definição, em 3.2, de transformação linear, para $\alpha = 0$:

$f\,(0) = f\,(0v) = 0\,f\,(v) = 0$

• Nos exemplos 1 e 2, de 3.2, verifica-se que

$f\,(0, 0) = (0,0,0)$ e $f\,(0) = 0$

e, em ambos os casos, as transformações são lineares. Entretanto, no exemplo 6 do mesmo item, embora $f\,(0, 0) = (0, 0)$, a transformação não é linear. Esses exemplos mostram que se f: V $\rightarrow$ W é linear, então $f\,(0) = 0$, mas a recíproca não é verdadeira, isto é, pode existir transformação com $f\,(0) = 0$ e f não ser linear. Uma conclusão, pois, se impõe: se $f(0) \neq 0$, a transformação não é linear. É o caso, por exemplo, da transformação:

f $IR^3 \rightarrow IR^2$, $f\,(x, y, z) = (2x + 3, 3x + 4z)$

que não é línear porque:

$f\,(0, 0,0) = (3,0) \neq 0$.

II) Sef V $\rightarrow$ W é uma transformação linear, tem-se:

$f(a_1v_1 + a_2v_2) = a_1\,f(v_1) + a_2\,f(v_2)$

para $\forall\, v_1$, $i_2 \in$ V e $\forall\, a_1, a_2 \in$ IR, isto é, a imagem de uma combinação linear dos vetores v_1 e v_2 é uma combinação linear das imagens $f\,(v_1)$ e $f\,(v_2)$ com os mesmos coeficientes a_1 e a_2. Este fato vale de modo geral:

$$f\,(a_1 v_1 + \dots + a_n v_n) = a_1 f\,(v_1) + \dots + a_n f(v_n)$$

Se B = $\{v_1, \dots, v_n\}$ é uma base de V, para todo $v \in V$, $\exists a_1, \dots, a_n \in$ IR, tal que

$$v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$$

e, portanto,

$$f\,(v) = a_1\ f\,(v_1) + \dots + a_n\ f\,(v_n),$$

isto é, dado $v \in$ V, o vetor f (v) *estará determinado se forem conhecidas as imagens dos vetores de* B. Em outras palavras, sempre que forem dados $f\,(v_1), \dots, f\,(v_n)$, onde $\{v_1, \dots, v_n\}$ é base do domínio V, a transformação linear f está perfeitamente definida.

3.2.3 - Problemas Resolvidos

1) Seja f: $IR^3 \to IR^2$ uma transformação linear e

$B = \{v_1 = (0,1,0),\ v_2 = (1,0,1),\ v_3 = (1, 1, 0)\}$
uma base do IR^3. Sabendo que $f(v_1) = (1, -2)$, $f(v_2) = (3,1)$ e $f(v_3) = (0, 2)$ determinar:

a) $f\,(5, 3, -2)$

b) $f\,(x, y, z)$

Solução

a) Expressando o vetor (5, 3, -2) como combinação linear dos vetores da base, vem:

$$(5, 3, -2) = a_1\,(0, 1,0) + a_2\,(1, 0, 1) + a_3(1, 1, 0)$$

ou

$$\begin{cases} \quad\; a_2 + a_3 = 5 \\ a_1 + \quad\; a_3 = 3 \\ \quad\; a_2 \quad\;\; = -2 \end{cases}$$

sístema cuja solução é: $a_1 = -4$, $a_2 = -2$ e $a_3 = 7$. Então,

$$(5, 3, -2) = -4v_1 - 2v_2 + 7v_3$$

Aplicando f, vem:

$$\begin{aligned} f\,(5, 3, -2) &= -4\,f\,(v_1) - 2f\,(v_2) + 7\,f\,(v_3) \\ &= -4\,(1,-2) - 2(3,1) + 7(0, 2) \end{aligned}$$

= (-4,8) + (-6,-2) + (0, 14)

= (-10, 20)

b) Procedendo do mesmo modo com o vetor genérico (x, y, z), tem-se:

(x, y, z) = a_1 (0, 1, 0) + a_2 (1, 0, 1) + a_3 (1, 1, 0)

ou

$$\begin{cases} \quad\;\; a_2 + a_3 = x \\ a_1 + \quad\;\; a_3 = y \\ \quad\;\; a_2 \quad\;\; = z, \end{cases}$$

sistema cuja solução é: a_1 = -x + y + z, a_2 = z e a_3 = x - z. Então,

(x, y, z) = (-x + y + z) v_1 + zv_2 + (x-z) v_3.

Aplicando a *f*, vem:

f (x, y, z) = (-x + y + z) f (v_1) + z f (v_2) + (x - z) f (v_3)

= (-x + y + z) (1, -2) + z (3,1) + (x-z) (0,2)

= (-x + y + z, 2x - 2y - 2z) + (3z, z) + (0,2x - 2z)

= (-x + y + 4z, 4x - 2y - 3z)

2) Um operador linear f: $IR^2 \rightarrow IR^2$ é definido por f (1,0) = (2, -3) e f (0, 1) = (-4, 1). Determinar f (x, y).

Solução

Observando que {(1, 0), (0, 1)} é a base canônica do IR^2 e que

(x,y) = x (1,0) + y (0, 1), vem:

f(x,y) = x f (l,0) + y f(0,1)

= x (2,-3) + y (-4, 1)

= (2x, -3x) + (-4y, y)

= (2x -4y, -3x + y)

3) Seja f: V $\rightarrow$ W uma transformação linear. Mostrar que:

a) $f(-v) = -f(v)$

b) $f(\mu - v) = f(\mu) - f(v)$

Solução

a) $f(-v) = f((-1)\,v) = -1\,f(v) = -f(v)$

b) $f(\mu - v) = f(\mu + (-1)v) = f(\mu) + -f(-1v) = f(\mu) - f(v)$

4) Seja o operador linear no IR^3 definido por:

$f(x,y,z) = (x + 2y + 2z,\ x + 2y - z, -x + y + 4z)$.

a) Determinar o vetor $\mu \in IR^3$ tal que $f(\mu) = (-1,8,-11)$

b) Determinar o vetor $v \in IR^3$ tal que $f(v) = v$

Solução

a) Sendo $f(\mu) = (-1,8,-11)$, isto é,

$(x + 2y + 2z,\ x + 2y - z,\ -x + y + 4z) = (-1, 8, -11)$, tem-se:

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = -1 \\ x + 2y - z = \quad 8 \\ -x + y + 4z = -11, \end{cases}$$

sistema cuja solução é: x = 1, y = 2 e z = -3.

Logo, $\mu = (1, 2, -3)$.

b) Sendo $v = (x, y, z)$ e $f(v) = v$ ou $f(x, y, z) = (x, y, z)$, tem-se:

$(x + 2y + 2z,\ x + 2y - z,\ -x + y + 4z) = (x, y, z)$

ou

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = x \\ x + 2y - z = y \\ -x + y + 4z = z \end{cases}$$

sistema cuja solução geral é: x = 2z e y = -z.

Assim, existem infinitos vetores $v \in IR^3$ tais que $f(v) = v$ e todos da forma $v = (2z,-z, z)$ ou $v = z\,(2,-1, 1)$, $z \in IR$.

3.3 - NÚCLEO DE UMA TRANSFORMAÇÃO LINEAR

Chama-se *núcleo* de uma transformação linear f: V→ W ao conjunto de todos os vetores $v \in$ V que são transformados em $0 \in$ W. Indica-se esse conjunto por N(f) ou ker(f):

$$N(f) = \{v \in V / f(v) = 0\}$$

A Figura 3.3 mostra que N(f) ⊂ V e todos seus vetores têm uma única imagem que é o vetor zero de W.

Observe o leitor que N(f) ≠ ∅, pois $0 \in$ N(f) uma vez que $f(0) = 0$.

Exemplo

1) O núcleo da transformação linear

f: $IR^2 \to IR^2$, $f(x,y) = (x - 2y, x + 3y)$

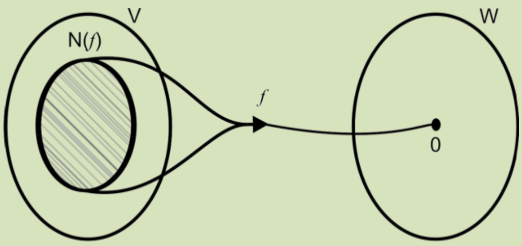


Figura 3.3

é o conjunto

N (f) = $\{(x, y) \in IR^2 / f(x, y) = (0, 0)\}$, isto é

$(x-2y, x + 3y) = (0,0)$

ou

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ x + 3y = 0 \end{cases},$$

sistema cuja solução é $x = y = 0$.

Logo, N(f) = {(0,0)}.

2) Seja a transformação linear

f: $IR^3 \to IR^2$, $f(x,y,z) = (x-y + 4z, 3x + y + 8z)$

Por definição, N(f) = $\{(x, y, z) \in IR^3 / f(x, y, z) = (0, 0)\}$, isto é, um vetor (x, y,

z) $\in$ N (f) se, e somente se,

(x - y + 4z, 3x + y + 8z) = (0,0)

ou

$$\begin{cases} x - y + 4z = 0 \\ 3x + y + 8z = 0 \end{cases}$$’

sistema cuja solução é: x = -3z e y = z.

Logo,

N (f) = {(-3z, z, z) $\in$ IR^3 /z $\in$ IR} = {z (-3,1,1) / z $\in$ IR}

ou

N (f) = [(-3,1, 1)].

3.4 - IMAGEM DE UMA TRANSFORMAÇÃO LINEAR

Chama-se *imagem* de uma transformação linear f: V $\rightarrow$ W ao conjunto dos vetores $\omega \in$ W que são imagens de vetores $v \in$ V. Indica-se esse conjunto por Im(f) ou f(V):

Im(f) = {$\omega \in$ W / f (v) = ω para algum $v \in$ V}.

A Figura 3.4.a apresenta o conjunto Im (f) $\subset$ W e também o núcleo de f.

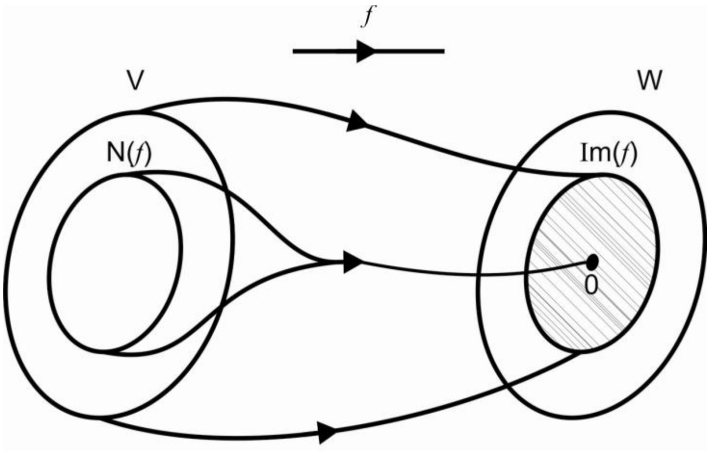


Figura 3.4.a

Observe-se que Im (f) $\neq$ 0, pois 0 = f(0) $\in$ Im (f).

Se Im(f) = W, f diz-se sobrejetora, isto é, para todo $\omega \in$ W, existe pelo menos um $v \in$ V tal que f(v) = ω.

Exemplo

1) Seja f: $IR^3 \rightarrow IR^3$, $f(x,y,z) = (x, y, 0)$ a projeção ortogonal do IR^3 sobre o plano x 0 y. A imagem de f é o próprio plano x 0 y (Fig. 3.4.b):

$$Im(f) = \{(x,y,0) \in IR^3 \,/\, x, y \in IR\}$$

Observe-se que o núcleo de f é o eixo dos z:

$$N(f) = \{(0,0,z) \,/\, z \in IR\}.$$

pois $f(0, 0, z) = (0, 0, 0)$ para todo $z \in IR$.

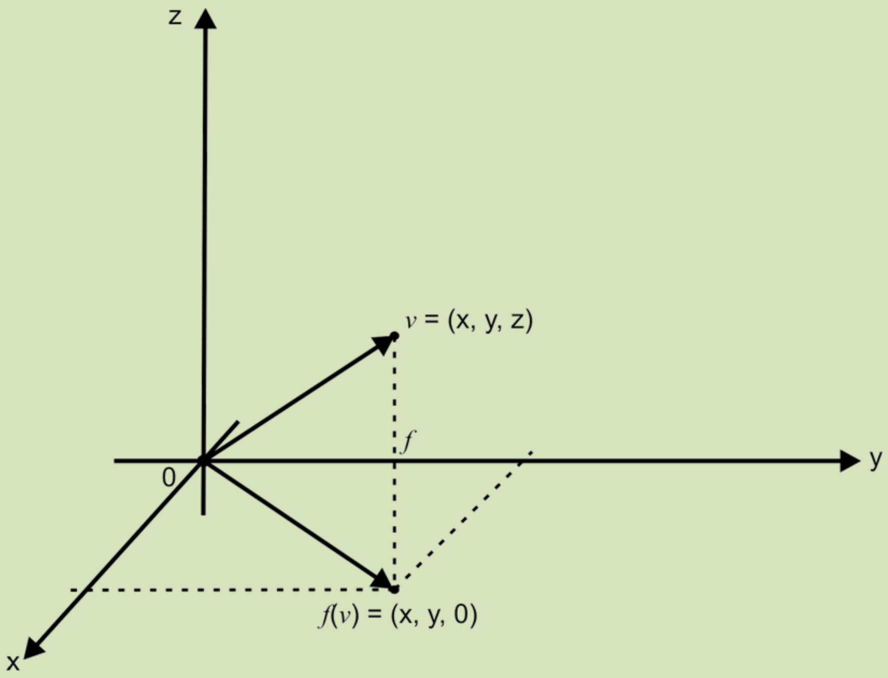


Figura 3.4.b

2) A imagem da transformação identidade I: $V \rightarrow V$, definida por $I(v) = v$, $\forall v \in V$, é todo espaço V. O núcleo, nesse caso, é $N(f) = \{0\}$.

3) A imagem da transformação nula f: $V \rightarrow W$, com $f(v) = 0$, $\forall v \in V$, é o conjunto $Im(f) = \{0\}$. O núcleo, nesse caso, é todo o espaço V.

3.5 - PROPRIEDADES DO NÚCLEO E DA IMAGEM

1) O núcleo de uma transformação linear f: V $\rightarrow$ W é um *subespaço* vetorial de V. De fato, sejam v_1 e v_2 vetores pertencentes ao N(f) e α um número real qualquer. Então, $f(v_1) = 0$, $f(v_2) = 0$ e:

    I) $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) = 0 + 0 = 0$,

    isto é, $v_1 + v_2 \in N(f)$

    II) $f(\alpha v_1) = \alpha f(v_1) = \alpha\, 0 = 0$,

    isto é, $\alpha\, v_1 \in N(f)$

2) A imagem de uma transformação linear f: V $\rightarrow$ W é um *subespaço* vetorial de W. De fato:

Sejam ω_1 e ω_2 vetores pertencentes à Im (f) e α um número real qualquer. A propriedade fica demonstrada se se provar que:

I) $\omega_1 + \omega_2 \in \text{Im}(f)$

II) $\alpha\omega_1 \in \text{Im}(f)$,

isto é, deve-se mostrar que existem vetores v e μ pertencentes a V, tais que

$$f(v) = \omega_1 + \omega_2 \quad \text{e} \quad f(\mu) = \alpha\omega_1.$$

Como $\omega_1, \omega_2 \in \text{Im}(f)$, existem vetores $v_1, v_2 \in V$ tais que $f(v_1) = \omega_1$ e $f(v_2) = \omega_2$. Fazendo $v = v_1 + v_2$ e $\mu = a\, v_1$, tem-se:

$$f(v) = f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) = \omega_1 + \omega_2$$

e

$$f(\mu) = f(\alpha v_1) = \alpha f(v_1) = \alpha\omega_1$$

Portanto, Im (f) é um subespaço vetorial de W.

3) Se V é um espaço vetorial da dimensão finita e f: V $\rightarrow$ W uma transformação linear, dim N(f) + dim Im(f) = dim V.

A propriedade não será demonstrada, mas comprovada por meio de problemas a serem resolvidos em 3.5.1 e dos exemplos dados em 3.4:

a) no exemplo 1, o núcleo (eixo dos z) tem dimensão 1 e a imagem (plano x 0 y) tem dimensão 2, enquanto o domínio IR^3 tem dimensão 3;

b) no exemplo 2 da transformação identidade, tem-se dim N(*f*) = 0. Conseqüentemente, dim Irn (*f*) = dim V, pois Im (*f*) = V;

c) no exemplo 3 da transformação nula, tem-se dim Im (*f*) = 0. Portanto, dim N (*f*) = dim V, pois N (*f*) = V.

3.5.1 - Problemas Resolvidos

1) Dado o operador linear

f: $IR^3 \to IR^3$, $f(x,y,z) = (x + 2y - z, y + 2z, x + 3y + z)$,

a) determinar o núcleo de *f*, a dimensão do núcleo e uma de suas bases;

b) determinar a imagem de *f*, a dimensão da imagem e uma de suas bases;

c) verificar a propriedade da dimensão (propriedade 3 de 3.5).

Solução

a_1) N (*f*) = {(x, y, z) $\in IR^3$ / *f*(x, y, z) = (0,0,0)}

De

(x + 2y - z, y + 2z, x + 3y + z) = (0,0, 0), vem

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ \quad\;\; y + 2z = 0 \\ x + 3y + z = 0 \end{cases}$$

sistema cuja solução é x 5z, y = -2z ou (5z, - 2z, z), z $\in$ IR, logo:

N(*f*) = {(5z, -2z, z), z $\in$ IR} = {z (5, -2, 1) / z $\in$ IR} = [(5, -2, 1)]

a_2) A única variável livre é z. Portanto:

dim N (*f*) = 1 (1)

a_3) Fazendo, em z (5, -2, 1), z = 1, obtém-se o vetor *v* = (5, -2, 1) e {(5, -2, l)} é uma base de N(*f*).

b_1) Im (*f*) = {(a, b, c) $\in IR^3$ / *f* (x,y,z) = (a, b, c)}, isto é,

(a, b, c) $\in$ Im (*f*) se existe (x, y, z) $\in IR^3$ tal que

(x + 2y - z, y + 2z, x + 3y + z) = (a, b, c)

ou

$$\begin{cases} x + 2y - z = a \\ \quad\;\; y + 2z = b \\ x + 3y + z = c, \end{cases}$$

sistema que só admite solução se a + b - c = 0 (ver prob.3, item A. 40.1, APÊNDICE)

Logo, Im(f) = {(a,b,c) $\in$ IR^3 / a + b - c = 0}

b_2) Como são duas as variáveis livres em a + b - c = 0

(c = a + b, por exemplo), tem-se:

dim Im (f) = 2 (2)

b_3) Fazendo em c = a + b,

a = 1 e b = 0, vem: c = 1 $\therefore$ v_1 = (1, 0, 1),

a = 0 e b = 1, vem: c = 1 $\therefore$ v_2 = (0, 1, 1),

o conjunto {v_1 = (1, 0, 1), v_2 = (0, 1, 1)} é uma base de Im(f).

c) A propriedade da dimensão afirma que

dim N(f) + dim Im(f) = dim IR^3 (V = IR^3, no caso) (3)

e,

dimIR^3 = 3 (4)

Substituindo (1), (2) e (4) em (3), verifica-se que

1 + 2 = 3.

2) Verificar se o vetor (5, 3) pertence ao conjunto Im (f), sendo

F: IR^2 $\rightarrow$ 1R^2, f (x, y) = (x - 2y, 2x + 13y)

Solução

Para que o vetor (5, 3) $\in$ Im (f) é necessário que exista (x, y) $\in$ IR^2 tal que

f(x,y) = (x-2y, 2x + 3y) = (5,3)

ou que o sistema

$$\begin{cases} x - 2y = 5 \\ 2x + 3y = 3 \end{cases}$$

tenha solução. Ora, como o sistema tem solução (x = 3 e y = -1), (5,3) $\in$ Im (f).

3.6 - MATRIZ DE UMA TRANSFORMAÇÃO LINEAR

Sejam f: V $\rightarrow$ W uma transformação linear, A uma base de V e B uma base de W. Sem prejuízo da generalização, será considerado o caso em que dim V = 2 e dim W = 3. Sejam A = $\{v_1,v_2\}$ e B = $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ bases de V e W, respectivamente. Um vetor $v \in$ V pode ser expresso por

$v = x_1 v_1 + x_2 v_2$ ou $v_A = (x_1,x_2)$

e a imagen $f(v)$ por

$$f(v) = y_1\omega_1 + y_2\omega_2 + y_3\omega_3 \text{ ou } f(v)_B = (y_1, y_2, y_3) \qquad (1)$$

Por outro lado:

$$f(v) = f(x_1v_1 + x_2v_2) = x_1 f(v_1) + x_2 f(v_2) \qquad (2)$$

Sendo f (v_1) e f (v_2) vetores de W, eles serão combinações lineares dos vetores de B:

$$f(v_1) = a_{11}\,\omega_1 + a_{21}\omega_2 + a_{31}\omega_3 \qquad (3)$$

$$f(v_2) = a_{12}\,\omega_1 + a_{22}\omega_2 + a_{32}\omega_3 \qquad (4)$$

Substituindo (3) e (4) em (2), vem

$$f(v) = x_1\,(a_{11}\,\omega_1 + a_{21}\omega_2 + a_{31}\omega_3) + x_2\,(a_{12}\,\omega_1 + a_{22}\omega_2 + a_{32}\omega_3)$$

ou

$$f(v) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2)\,\omega_1 + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2)\,\omega_2 + (a_{31}x_1 + a_{32}x_2)\,\omega_3 \qquad (5)$$

Comparando (5) com (1), conclui-se que:

$y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2$

$y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2$

$y_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2$

ou, na forma matricial

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

ou, ainda, simbolicamente

$f(v)_B = Tv_A$

sendo a matriz

$$T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

denominada *matriz de f em relação às bases* A e B. Essa matriz T é, na verdade, um operador que transforma v_A (componentes de um vetor v na base A) em $f\,(v)_B$ (componentes da imagem de v na base B).

- A matriz T é de ordem 3 x 2 sempre que dimV = 2 e dirnW = 3. Se a transformação linear f: V $\rightarrow$ W tivesse dim V = n e dim W = m, T seria uma matriz de ordem m x n.

- As colunas da matriz T são as componentes das imagens dos vetores v_1 e v_2 da base A de V em relação à base B de W, conforme se verifica em (3) e (4):

$$\begin{array}{cc} \left[\begin{array}{c} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{array}\right. & \left.\begin{array}{c} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{array}\right] \\ \uparrow & \uparrow \\ f(v_1)_B & f(v_2)_B \end{array}$$

- A matriz T depende das bases A e B consideradas, isto é, a cada dupla de bases corresponde uma particular matriz. Assim, uma transformação linear poderá ter uma infinidade de matrizes a representá-la. No entanto, fixadas as bases, a matriz é única.

3.6.1 - Problemas Resolvidos

1) Dadas a transformação linear

   f: $IR^3 \rightarrow IR^2$, $f\,(x, y, z) = (2x - y + z,\ 3x + y - 2z)$

e as bases

A = {v_1 = (1, 1, l), v_2 = (0, 1, 1), v_3 = (0,0,1)} e

B = {ω_1 = (2, 1), ω_2 = (5,3) },

a) determinar T, matriz de f nas bases A e B;

b) se v = (3, -4, 2) (vetor com componentes em relação à base canônica do IR^3), calcular $f\,(v)_B$ utilizando a matriz T.

Solução

a) A matriz T é de ordem 2 x 3:

$$\mathrm{T} = \begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \\ \uparrow \quad\quad\quad \uparrow \quad\quad\quad \uparrow \\ f(v_1)_B \quad f(v_2)_B \quad f(v_3)_B \end{array}$$

$f(v_1) = f\,(1,1,1) = (2, 2) = a_{11}(2, 1) + a_{21}\,(5,3)$

$$\begin{cases} 2a_{11} + 5a_{21} = 2 \\ 1a_{11} + 3a_{21} = 2 \end{cases} \therefore \begin{cases} a_{11} = -4 \\ a_{21} = \ \ 2 \end{cases}$$

$f(v_2) = f\,(0,1,1) = (0, -1) = a_{12}(2, 1) + a_{22}\,(5,3)$

$$\begin{cases} 2a_{12} + 5a_{22} = \ \ 0 \\ 1a_{12} + 3a_{22} = -1 \end{cases} \therefore \begin{cases} a_{12} = \ \ 5 \\ a_{22} = -2 \end{cases}$$

$f(v_3) = f\,(0,0,1) = (1, -2) = a_{13}(2, 1) + a_{23}\,(5,3)$

$$\begin{cases} 2a_{13} + 5a_{23} = \ \ 1 \\ 1a_{13} + 3a_{23} = -2 \end{cases} \therefore \begin{cases} a_{13} = \ \ 13 \\ a_{23} = -5, \end{cases}$$

logo:

$$T = \begin{bmatrix} -4 & 5 & 13 \\ 2 & -2 & -5 \end{bmatrix}$$

b) Sabe-se que

$f(v)_B = \mathrm{T}v_A$ (1)

Tendo em vista que v = (3, -4, 2) está expresso na base canônica, deve-se, primeiramente, expressá-lo na base A. Seja v_A = (a, b, c), isto é,

(3, -4, 2) = a (1, 1, 1) + b (0, 1, 1) + c (0, 0, 1)

ou

$$\begin{cases} a & & & = \ \ 3 \\ a + b & & & = -4 \\ a + b + c & & & = \ \ 2, \end{cases}$$

sistema cuja solução é a = 3, b = -7 e c = 6, ou seja, v_A = (3, -7, 6). Substituindo T e v_A em (1), vem

$$f(v)_B = \begin{bmatrix} -4 & 5 & 13 \\ 2 & -2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -7 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$f(v)_B = \begin{bmatrix} 31 \\ -10 \end{bmatrix}$$

- Observe-se que

$f(v)$ = 31(2, 1) – 10 (5,3) = (62,31) – (50, 30) = (12, 1),

isto é, os números 12 e 1 são as componentes de $f(v)$ em relação à base canônica do IR^2:

(12, 1) = 12(1, 0) + 1(0, 1) = (12, 0) + (0, 1) = (12, 1).

Naturalmente $f(v)$ = (12, 1) também seria obtido por

f (x, y, z) = (2x - y + z, 3x + y - 2z), considerando-se v = (3, -4, 2):

$f(v)$ = (2(3) - (-4) + 2,3(3) + (-4) -2(2))

$f(v)$ = (6 + 4 + 2, 9 – 4 – 4) = (12,1).

2) Considerando as bases canônicas A = {(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, O, 1)} e B = { (1, 0), (0, 1) do IR^3 e do IR^2, respectivamente, e a mesma transformação linear do problema anterior.

$f : IR^3 \rightarrow IR^2$, f (x,y,z) = (2x - y + z,3x + y - 2z), (2)

a) determinar T, matriz de f nas bases A e B;
b) se v = (3, -4, 2), calcular $f(v)_B$, utilizando a matriz T.

Solução

a) f (1, 0, 0) = (2, 3) = 2(1,0) + 3(0, 1)

f (0, 1, 0) = (-1, 1) = -1(1,0) + 1(0, 1)

f (0, 0, 1) = (1, -2) = 1(1, 0)- 2(0, 1),

logo:

$$T = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad (3)$$

- No caso de serem A e B bases canônicas do domínio e do contra-domínio, respectivamente, como é ocaso deste problema, a matriz T é chamada matriz canônica def e escreve-se, simplesmente

$f(v)$ = Tv (4)

ficando subentendido que $v = v_A$ e $f(v) = f(v)_B$

- Examinando, em (2), a lei que define a transformação f, verifica-se, em (3), que sua matriz canônica T fica determinada formando a primeira coluna com os coeficientes de x, a segunda coluna com os coeficientes de y e a terceira com os coeficientes de z.

b) Tendo em vista que v = (3, -4, 2) = v_A, que $f(v)_B = f(v)$ e que $f(v)$ = Tv

conforme está expresso em (4), tem-se:

$$f(v)_B = f(v) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$f(v)_B = f(v) = \begin{bmatrix} 12 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Observe o leitor que calcular *f* (*v*) = $\begin{bmatrix} 12 \\ 1 \end{bmatrix}$ pela matriz T é o mesmo que fazê-lo pela lei definidora de *f*, conforme se pode ver na parte final do problema anterior.

3.6.2 - Transformações Lineares e Matrizes

No item 3.6 viu-se que, fixadas duas bases – uma no domínio e outra no contradomínio –, cada transformação linear é representada por uma matriz nestas bases.

Do mesmo modo, dada uma matriz qualquer e fixadas duas bases – uma no domínio e outra no contradomínio –, ela representa uma transformação linear. Na prática, *cada matriz pode ser interpretada como matriz canônica de uma transformação linear f*. Assim, por exemplo, a matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

representa, nas bases canônicas, a transformação linear

$$f: IR^2 \to IR^3,\ f(x,y) = (2x - 3y, 5x - y, 4y) \qquad (1)$$

Entretanto, a mesma matriz, numa outra dupla de bases, representará uma transformação linear diferente de (1). (Ver item 3.9, problema 33.)

- Sabe-se que um *operador linear* sobre V é uma transformação linear *f*: V → V (é o caso particular de W = V). Nesse caso, para a representação matricial, é muitas vezes conveniente fazer A = B, e a matriz da transformação é denominada *matriz de f em relação à base* A (ou matriz de *f* na base A) e indicada por T_A. Por exemplo, dada a base A = {(1, -2), (-1, 3)}, determinar a matriz do operador linear

$$f: IR^2 \to IR^2,\ f(x,y) = (2x-y, x + y)$$

nesta base.

Calculando as componentes das imagens dos vetores da base A em relação à própria base, vem:

$f(1, -2) = (4, -1) = a_{11}(1, -2) + a_{21}(-1,3)$

$$\begin{cases} 1a_{11} + 1a_{21} = 4 \\ -2a_{11} + 3a_{21} = -1 \end{cases} \therefore \begin{cases} a_{11} = 11 \\ a_{21} = \ \ 7 \end{cases}$$

$f(-1, 3) = (-5, 2) = a_{12}(1, -2) + a_{22}(-1,3)$

$$\begin{cases} 1a_{12} + 1a_{22} = -5 \\ -2a_{12} + 3a_{22} = 2 \end{cases} \therefore \begin{cases} a_{12} = -13 \\ a_{22} = \ -8 \end{cases}$$

logo:

$$T_A = \begin{bmatrix} 11 & -13 \\ 7 & -\ 8 \end{bmatrix}$$

- A matriz canônica do operador linear deste exemplo é

$$T_A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

As matrizes T_A e T, por representarem o mesmo operador f em bases diferentes, são denominadas matrizes semelhantes e serão estudadas no Capítulo 4.

- Quando a matriz do operador linear f é T_A, a fórmula (1) de 3.6.1 fica: $f(v)_A = T_A v_A$.

3.7 - OPERAÇÕES COM TRANSFORMAÇÕES LINEARES

3.7.1 - Adição

Sejam $f_1 : V \to W$ e : $f_2\ V \to W$ transformações lineares. Chama-se *soma* das transformações f_1 e f_2 à transformação linear

$f_1 + f_2 : V \to W$

$\qquad v \to (f_1 + f_2)\, v = f1(v) + f_2(v),\ \forall\ v \in V.$

Se T_1 e T_2 são as matrizes de f_1 e f_2 em bases quaisquer de V e W, a matriz S que representa $f_1 + f2$ é

$S = T_1 + T_2$

3.7.2 - Multiplicação por Escalar

Sejam $f : V \to W$ uma transformação linear e $\alpha \in IR$. Chama-se produto de f pelo escalar α à transformação linear

$\alpha f : V \to W$

$v \to (\alpha f)(v) = \alpha f(v), \forall\ v \in V$

Se T é a matriz de f em bases quaisquer de V e W, a matriz E que representa o produto de f pelo escalar α é:

$E = \alpha T.$

3.7.3 - Composição

Sejam f_1: $V \to W$ e f_2: $W \to U$ transformações lineares. Chama-se *aplicação composta de* f_1 *com* f_2, e se representa por $f_2 \circ f_1$, à transformação linear

$f_2 \circ f_1: V \to U$

$v \to (f_2 \circ f_1)(v) = f_2(f_1(v) \supset v \in V.$

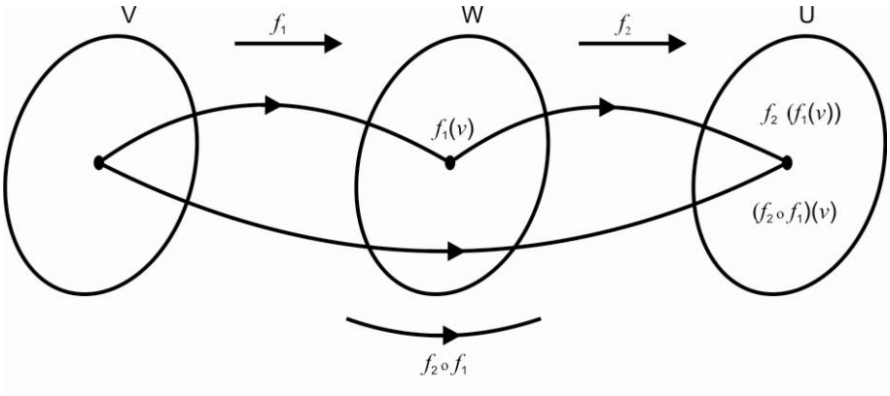


Figura 3.7.3

Se T_1 e T_2 são as matrizes de f_1 e f_2 em bases quaisquer dos espaços V, W e U, a matriz P que representa a composição $f_2 \circ f_1$ é

$P = T_2T_1$

3.7.4 - Problemas Resolvidos

Nos problemas 1 a 7, que se referem às transformações lineares

f_1: $IR^2 \to IR^2$, f_1 (x, y) = (x - 2y, 2x + y), f_2: $IR^2 \to IR^2$, f_2 (x,y) = (x, x - y) e f_3 : $IR^2 \to IR^3$, f_3 (x, y) = (2x + 3y, y, -x), determinar:

1) ($f_1 + f_2$) (x,y)

Solução

($f_1 + f_2$) (x, y) = f_1(x,y) + f_2(x,y)

= (x - 2y, 2x + y) + (x, x - y)

= (2x - 2y, 3x)

2) ($3f_1 - 2f_2$) (x, y)

Solução

($3f_1$-$2f_2$) (x,y) = ($3f_1$) (x, y) - ($2f_2$) (x, y)

= $3f_1$ (x,y) - $2f_2$ (x,y)

= 3(x-2y, 2x + y) – 2 (x, x-y)

= (3x - 6y, 6x+3y) – (2x, 2x - 2y)

= (x-6y, 4x + 5y)

3) A matriz canônica de $3f_1 – 2f_2$

Solução

A = $\begin{bmatrix} 1 & -6 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

Observe o leitor que esta matriz é igual a:

$$3\mathrm{T}_1 - 2\mathrm{T}_2 = 3\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

onde T_1 e T_2 são as matrizes canônicas de f_1 e f_2, respectivamente.

4) A matriz canônica de $f_2 \circ f_1$

Solução

$$T_2T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$$

5) A matriz canônica de $f_1 \circ f_2$

Solução

$$T_1T_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Assinale-se que $f_1 \circ f_2 \neq f_2 \circ f_1$ e esse fato geralmente ocorre.

6) A matriz canônica de $f_1 \circ f_1$

Solução

$$T_1T_1 = T_1^2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

O operador $f_1 \circ f_1$ é também representado por f_1^2.

7) A matriz canônica de $f_3 \circ f_2$

Solução

$$T_3T_2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

A transformação $f_2 \circ f_3$ não existe pela impossibilidade de multiplicar T_2 por T_3.

3.8 - TRANSFORMAÇÕES LINEARES PLANAS

Transformação linear plana é toda função linear cujos domínio e contradomínio constituem o IR^2. Serão estudadas algumas de especial importância e suas correspdndentes interpretações geométricas, ficando a cargo do leitor verificar que são lineares.

3.8.1 - Reflexões

a) *Reflexão em relação ao eito dos x*

Essa transformação linear leva cada ponto ou vetor (x,y) para a sua imagem (x, -y), simétrica em relação ao eixo dos x:

f: $IR^2 \rightarrow IR^2$ f (x y) = (x, -y) (Figura 3.8.l.a)

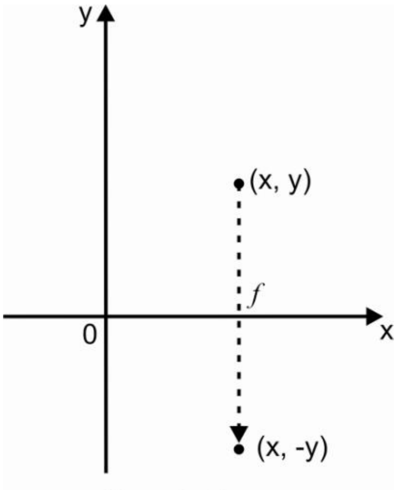


Figura 3.8.1.a

A matriz canônica dessa transformação é:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

logo:

$$\begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

b) *Reflexão em relação ao eixo dos y*

$f : IR^2 \to IR^2$, $f(x, y) = (-x, y)$ (Figura 3.8.1b)

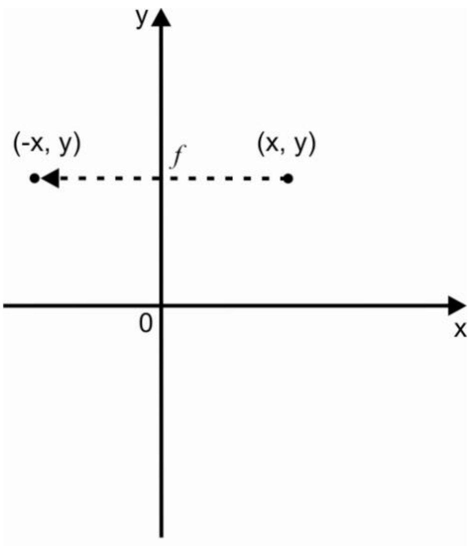


Figura 3.8.1.b

A matriz canônica dessa transformação é:

$$A= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Logo:

$$\begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

c) *Reflexão em relação à origem*

f : $IR^2 \to IR^2$, f (x,y) = (-x, -y) (Figura 3.8.l c)

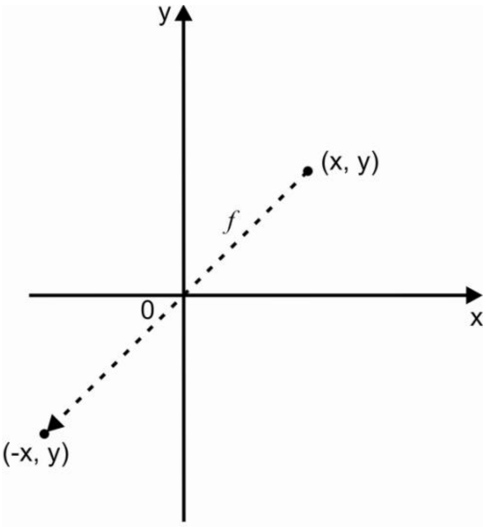


Figura 3.8.1.c

A matriz canônica dessa transformação é:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

logo:

$$\begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

d) *Reflexão em relação à reta y = x*

f : $IR^2 \to IR^2$, f (x,y) = (y ,x) (Figura 3.8.l d)

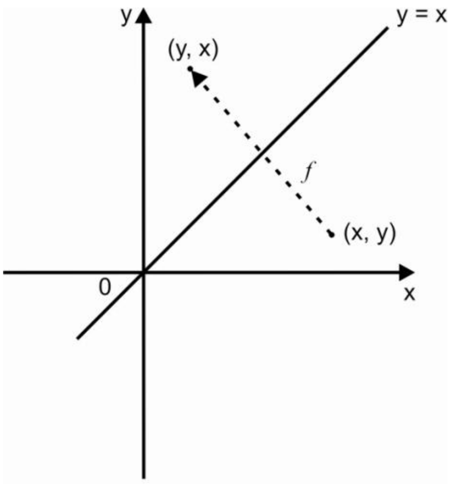


Figura 3.8.1.d

A matriz canônica dessa transformação é:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

logo:

$$\begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

e) *Reflexão em relação à reta* y = - x

f: $IR^2 \rightarrow IR^2$, *f*(x,y) = (-y, -x) (Figura 3.8.1. e)

A matriz canônica dessa transformação é:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

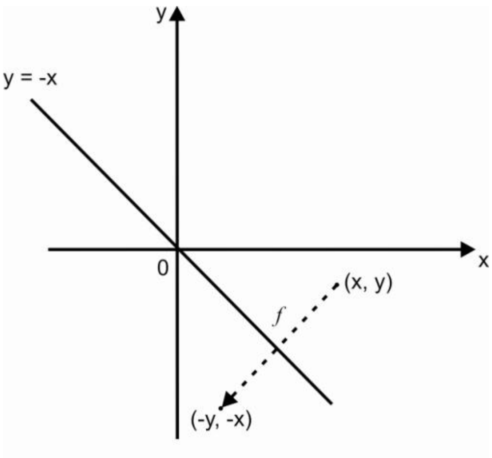


Figura 3.8.1.e

logo,

$$\begin{bmatrix} -y \\ -x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

3.8.2 – Dilatações e Contrações

a) *Dilatação ou contração na direção do vetor*

$f : \mathrm{IR}^2 \to \mathrm{IR}^2$, $f\,(x, y) = \alpha = (x, y) = (\alpha x, \alpha y)$, $\alpha \in \mathrm{IR}$ (Figura 3.8.2.a)

A matriz canônica dessa transformação é:

$A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}$,

logo,

$$\begin{bmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

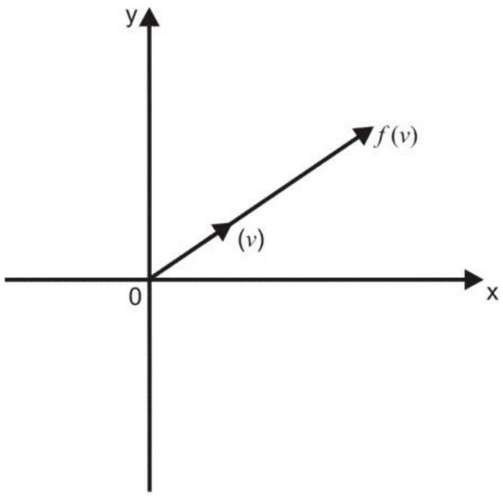


Figura 3.8.2.a

Observe o leitor que

– se $|\alpha| > 1$, f dilata o vetor;

– se $|\alpha| < 1$, f contrai ovetor;

– se $\alpha < 1$, f é a identidade I;

– se $\alpha < 0$, f muda o sentido do vetor.

- A transformação f: $IR^2 \to IR^2$, $f(x, y) = \frac{1}{2}(x, y) = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right)$ é um exemplo de contração.

b) *Dilatação ou contração na direção do eixo dos x*

f: $IR^2 \to IR^2$, $f(x, y) = (\alpha x, y)$, $\alpha \geq 0$ (Fig. 3.8.2.b)

A matriz canônica dessa transformação é:

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

logo:

$$\begin{bmatrix} \alpha x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Observe o leitor que

– se $\alpha > 1$, f dilata o vetor;

– se $0 \leq \alpha < 1$, f contrai o vetor.

- A transformação dada é também chamada dilatação ou contração na direção horizontal de um fator α.

A Fig. 3.8.2.b mostra uma dilatação de fator $\alpha = 2$ e uma contração de fator $\alpha = \frac{1}{2}$.

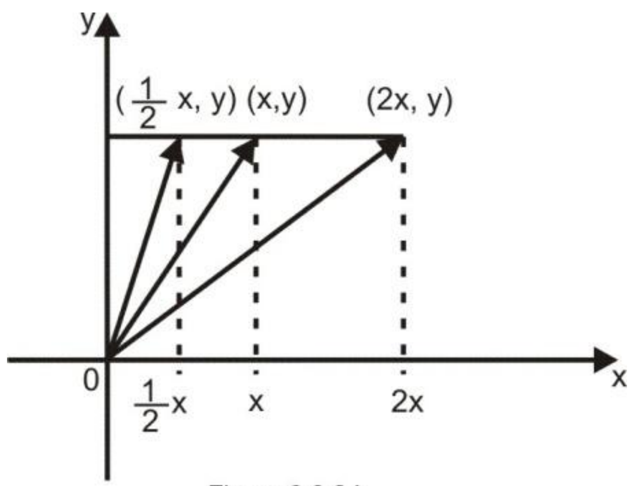


Figura 3.8.2.b

c) *Dilatação ou contração na direção do eixo dos y*

f :$IR^2 \to IR^2$, $f(x, y) = (x\ \alpha\ y)$, $\alpha \geq 0$ (Figura3.8.2.c)

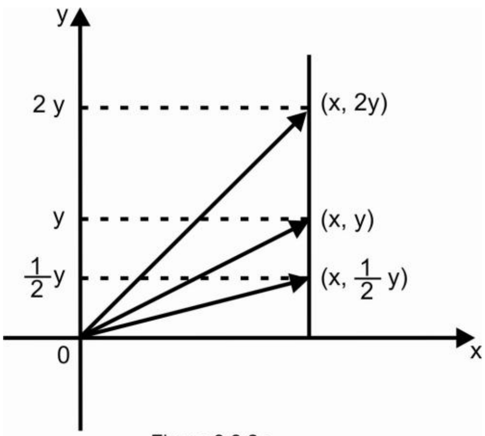


Figura 3.8.2.c

A matriz canônica dessa transformação é:

A = $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}$,

logo:

$$\begin{bmatrix} x \\ \alpha y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Observe o leitor que

– se $\alpha > 1$, f dilata o vetor;

– se $0 \leq \alpha$ 1, f contrai o vetor.

- Nos casos b) e c), se $\alpha = 0$, viria, respectivamerite:

b) f (x, y) = (0, y) e f seria a projeção do plano sobre o eixo dos y (Fig. 3.8.2.d)

c) f (x,y) = (x, 0) e f seria a projeção do plano sobre o eixo dos x (Fig. 3.8.2.e)

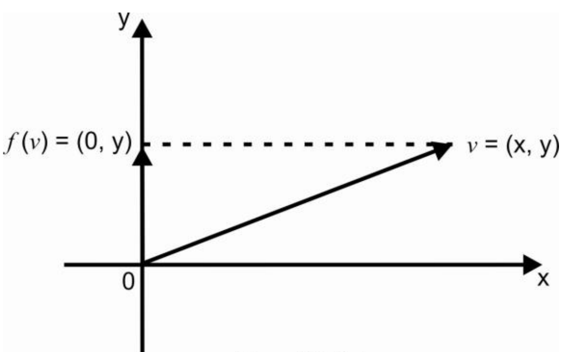


Figura 3.8.2.d

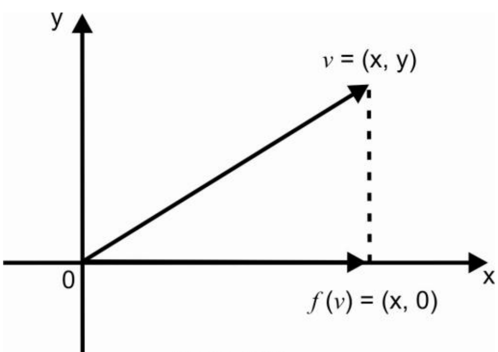


Figura 3.8.2.e

3.8.3. – Cisalhamentos

a) *Cisalhamento na direção do eixo dos x*

$f : IR^2 \rightarrow IR^2$, $f(x,y) = (x + \alpha y, y)$

A matriz canônica desse cisalhamento é:

$A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,

logo:

$$\begin{bmatrix} x + \alpha y \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

O efeito desse cisalhamento, para um determinado valor de α, é transformar o retângulo OAPB no parelelogramo OAP'B' de mesma base e mesma altura (Fig. 3.8.3.a).

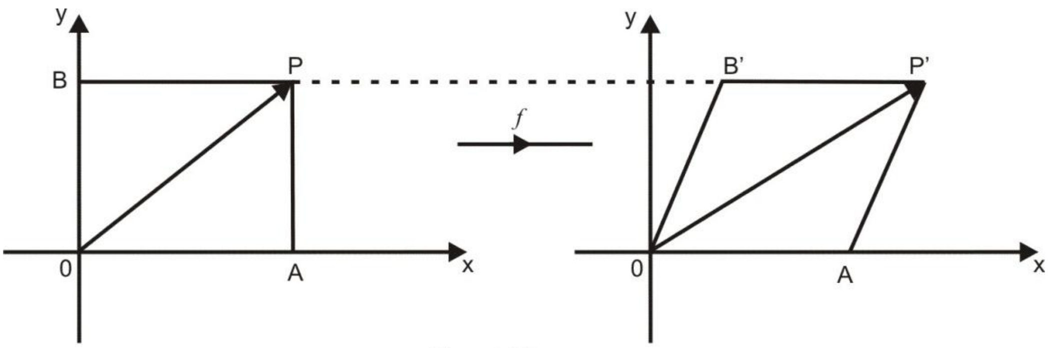


Figura 3.8.3.a

Por esse cisalhamento, cada ponto (x, y) se desloca paralelamente ao eixo dos x até chegar em $(x + \alpha y, y)$, com exceção dos pontos do próprio eixo dos x – que permanecem em sua posição –, pois para eles y = 0. Assim, fica explicado por que o retângulo e o paralelogramo da Figura têm a mesma base $\overline{OA}$.

- Esse cisalhamento é também chamado cisalhamento horizontal de fator α.

b) *Cisalhamento na direção do eixo dos y*

$f : IR^2 \rightarrow IR^2$, $f(x, y) = (x, y + \alpha x) = (x, \alpha x + y)$

A matriz canônica desse cisalhamento é:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{bmatrix}$

logo:

$$\begin{bmatrix} x \\ \alpha x + y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

O efeito desse cisalhamento, para um determinado valor de α, é transformar o retângulo OAPB no paralelogramo OAP'B' de mesma base e mesma altura (Fig. 3.8.3.b)

Por esse cisalhamento, cada ponto (x, y) se desloca paralelamente ao eixo dos y até chegar em (x, α x + y), com exceção dos pontos do próprio eixo dos y – que permanecem em sua posição –, pois para eles x = 0. Assim, fica explicado por que o retângulo e o pasralelogramo da Figura têm a mesma base $\overline{OA}$.

- *Esse cisalhamento é também chamado cisaihamento vertical de fator α.*

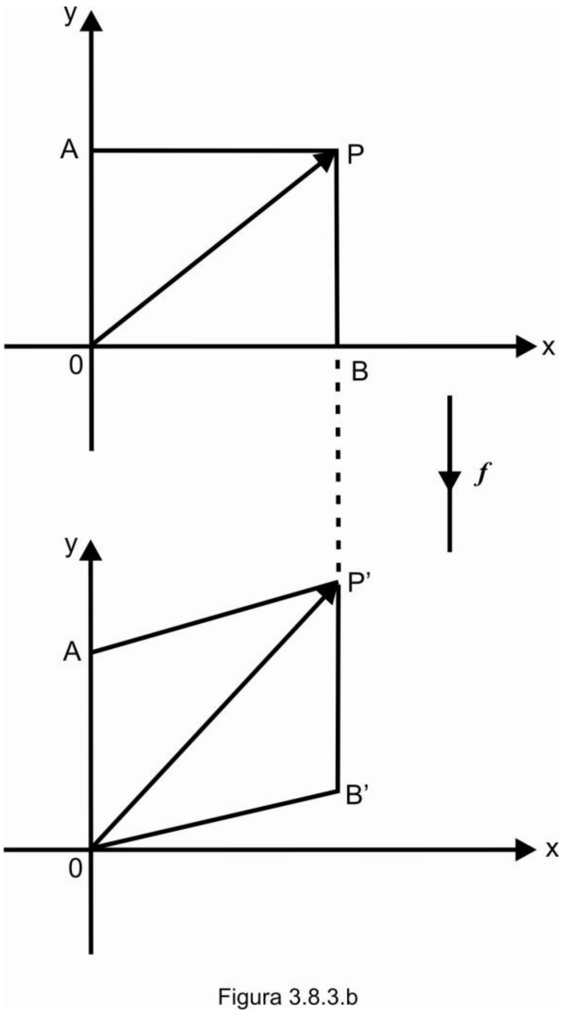


Figura 3.8.3.b

3.8.4 – Rotação do Plano

A rotação do plano de um ângulo θ em torno da origem do sistema de coordenadas, sistema determinado pela base A = {e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1), é uma transformação linear f_θ : $IR^2 \rightarrow IR^2$ que a cada vetor *v* = (x, y) faz corresponder o vetor f_θ (*v*) = (x', y') (Fig. 3.8.4.a).

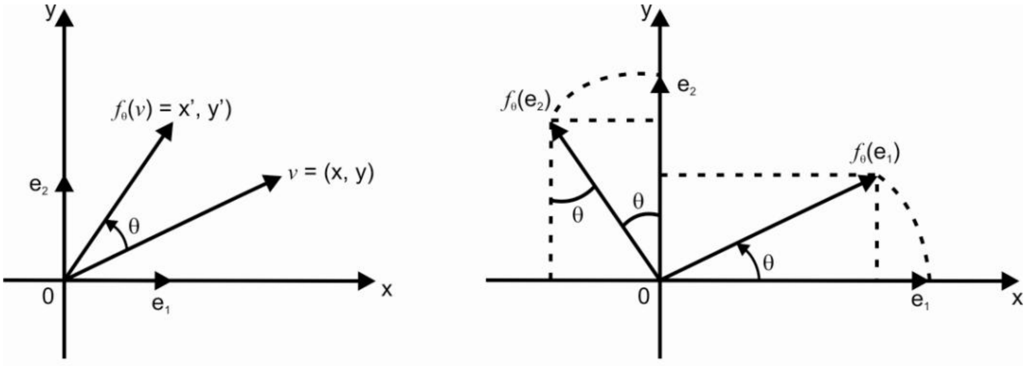


Figura 3.8.4.a

Figura 3.8.4.b

Um vetor *v* = (x, y) é expresso, na base A, por

v = x e_1 + y e_2,

e, de acordo com a propriedade II) das transformações lineares, item 3.2.2, pode-se escrever:

$$f_\theta(v) = xf_\theta\,(e_1)\ yf_\theta\,(e_2) \qquad (1)$$

Mas, conforme a figura 3.8.4.b, tem-se:

$$f_\theta\,(e_1) = (\cos\theta,\ \text{sen}\theta) \qquad (2)$$

$$f_\theta\,(e_2) = (-\text{sen}\theta,\ \cos\theta) \qquad (3)$$

Substituindo (2) e (3) em (l),vem:

$$f_\theta\,(v) = (x',\ y') = x\,(\cos\theta,\ \text{sen}\ \theta) + y\,(-\text{sen}\ \theta,\ \cos\theta)$$

$$= ((\cos\theta)\ x,\ (\text{sen}\ \theta)\ x) + ((-\text{sen}\ \theta)\ y + (\cos\theta)y)$$

$$= ((\cos\theta)\ x + (-\text{sen}\ \theta)y,\ (\text{sen}\ \theta)x + (\cos\theta)\ y) \qquad (4)$$

A matriz canônica dessa transformação f_θ é

$$T_\theta = \begin{bmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{bmatrix},$$

logo:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

A matriz T_θ, chamada matriz de rotação de um ângulo θ, $0 \le \theta \le 2\pi$, é a matriz canônica da transformação f_θ: $IR^2 \to IR^2$, definida em (4).

- Nada impede que, a rotação do plano seja de um ângulo $\theta < 0$; nesse caso, o ângulo será designado por $-\theta$ e a respectiva matriz de rotação, por $T_{(-\theta)}$:

$$T_{(-\theta)} = \begin{bmatrix} \cos(-\theta) & -sen(-\theta) \\ sen\,(-\theta) & \cos\,(-\theta) \end{bmatrix},$$

mas,

$\cos(-\theta) = \cos\theta$

$\text{sen}(-\theta) = -\text{sen}\,\theta$,

logo:

$$T_{(-\theta)} = \begin{bmatrix} cos\theta & sen\theta \\ -sen\theta & cos\theta \end{bmatrix},$$

Como se pode ver $T_{(-\theta)} = T_\theta^{-1}$, isto é, a matriz da rotação de um ângulo $-\theta$ é a inversa da matriz da rotação de um ângulo θ. Este fato significa que se, por intermédio da matriz T_θ, se leva o vetor $v = (x, y)$ à sua imagem $f(v) = (x', y')$, por meio da matriz $T_{(-\theta)} = T_\theta^{-1}$ a imagem $f(v) = (x', y')$ é trazida de volta ao vetor $v = (x, y)$. Assim:

$f(v) = T_\theta v$

e

$v = T_\theta^{-1} f(v)$

ou, na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\theta & sen\theta \\ -sen\theta & cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

3.8.5 – Problemas Resolvidos

1) Determinar a matriz da transformação linear f em IR^2 que representa um cisalhamento de fator 2 na direção horizontal seguida de uma reflexão em relação ao eixo dos y.

Solução

a) A matriz canônica do cisalhamento de fator 2 é

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e, por conseguinte, por meio de A_1, se obtém $f_1(v) = (x', y')$ a partir de $v = (x, y)$:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad (1)$$

b) A matriz canônica da reflexão, em relação ao eixo dos y, é:

$$A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e, por conseguinte, por meio de A_2, se obtém $f_2(x', y') = (x'', y'')$ a partir de (x', y'):

$$\begin{bmatrix} x" \\ y" \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \qquad (2)$$

Substituindo (1) em (2), tem-se:

$$\begin{bmatrix} x" \\ y" \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

ou

$$\begin{bmatrix} x" \\ y" \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Portanto, a matriz

$$A_2A_1 = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

representa a transformação composta $f = f_2 \circ f_1$ do cisalhamento com a reflexão.

- É de assinalar-se que, conforme foi visto no estudo de composição de transformações lineares, item 3.7.3, a matriz da composição é obtida pelo produto das matrizes que representam cada transformação, tomadas na ordem inversa: $A_2 A_1$. Esse fato continua válido no caso de haver uma composição com mais de duas transformações lineares.

2) Sabendo que $e_1 = (1, 0)$ e $e_2 = (0, 1)$, calcular as imagens $f_\theta(e_1)$ e $f_\theta(e_2)$ pela rotação do plano de um ângulo $\theta = 30^o$.

Solução

a) $f_\theta(e_1) = (x', y') = T_\theta e_1$

ou

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 30^o & -\operatorname{sen} 30^o \\ \operatorname{sen} 30^o & \cos 30^o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

b) $f_\theta(e_2) = (x'', y'') = T_\theta e_2$

ou

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 30^o & -\operatorname{sen} 30^o \\ \operatorname{sen} 30^o & \cos 30^o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

- Partindo das imagens $(x', y') = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ e $(x'', y'') = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, pode-se determinar os vetores da partida (a”, b”), respectivamente, por meio de uma rotação no plano de um ângulo de -30^o. De fato:

a) $$\begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 30^o & \operatorname{sen} 30^o \\ -\operatorname{sen} 30^o & \cos 30^o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

b) $$\begin{bmatrix} a'' \\ b'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 30^o & \operatorname{sen} 30^o \\ -\operatorname{sen} 30^o & \cos 30^o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a" \\ b" \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Como se vê, (a', b') = (1, 0) = e_1 e (a", b") = (0, 1) = e_2.

3) Dado o vetor v = (4, 2), calcular a imagem f_θ (v) pela rotação do plano de um ângulo de 90º.

   Solução (ver figura 3.8.5.a)

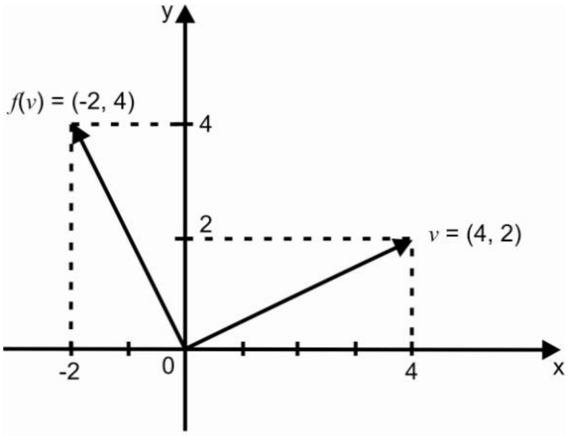


Figura 3.8.5.a

f (v) = (x'y') = $T_\theta v$

ou

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 90^o & -\operatorname{sen} 90^o \\ \operatorname{sen} 90^o & \cos 90^o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

- Assim como no problema anterior, partindo de $f(v)$ = (-2, 4), pode-se calcular o vetor de partida v = (x, y) por meio de uma rotação de -90º:

$v = T_\theta^{-1} f(v)$

ou

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 90^o & \operatorname{sen} 90^o \\ -\operatorname{sen} 90^o & \cos 90^o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

4) Os pontos A (2, -1), B (6, 1) e C (x, y) são vértices de um triangulo eqüilátero. Calcular as coordenadas do vértice C utilizando a matriz de rotação de plano.

Solução

A Fig. 3.8.5.b permite escrever:

$\overrightarrow{AB}$ = B – A = (6, 1) – (2, – 1) = (4, 2)

$\overrightarrow{AC}$ = C – A = (x, y) – (2, - 1) = (x – 2, y + 1)

O vetor $\overrightarrow{AC}$ pode ser considerado a imagem do vetor $\overrightarrow{AB}$ pela rotacão do plano de um ângulo de 60º em torno de A (no triângulo eqüilátero $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}|$).

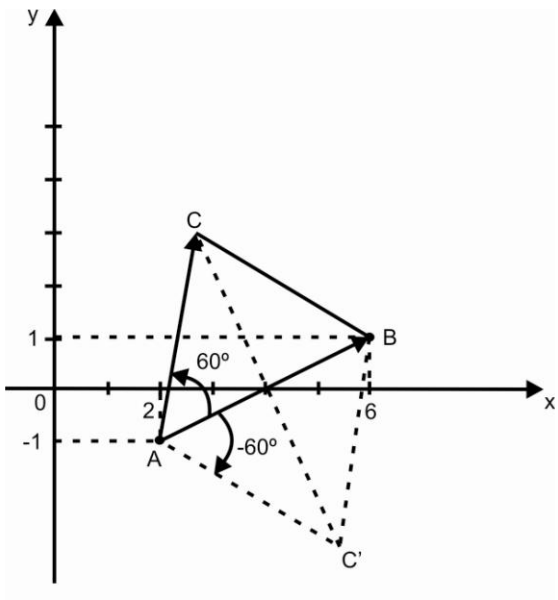


Figura 3.8.5.b

Designando o vetor $\overrightarrow{AB}$ por v = (4, 2) e o vetor $\overrightarrow{AC}$ por f_θ (v) = (x -2, y + 1), tem-se:

$f_\theta(v) = T_\theta v$

ou

$$\begin{bmatrix} x & - & 2 \\ y & + & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 60^o & -\operatorname{sen} 60^o \\ \operatorname{sen} 60^o & \cos 60^o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x & - & 2 \\ y & + & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x & - & 2 \\ y & + & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & - & \sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & + & 1 \end{bmatrix}$$

Pela condição de igualdade de matrizes, vem:

$$\begin{cases} x - 2 = 2 - \sqrt{3} \\ y + 1 = 2\sqrt{3} + 1 \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} x = 4 - \sqrt{3} \\ y = 2\sqrt{3} \end{cases}$$

Logo,

$$C\left(4 - \sqrt{3}, 2\sqrt{3}\right)$$

- O prob lema tem outra solução que seria obtida fazendo uma rotação de -60° do vetor $\overrightarrow{AB} = v$ em torno de A (a carga do leitor).

Capítulo 4

OPERADORES LINEARES

4.1 – OPERADORES LINEARES

No Capítulo anterior se viu que as transformações lineares de um espeço vetorial V em si mesmo, isso é f : V $\rightarrow$ V, são chamados *operadores lineares* sobre V.

As propriedades gerais das transformções lineares de V em W e das correspondentes matrizes retangulares são válidas para os operadores lineares. Estes e as correspondentes *matrizesquadradas* possuem, entretanto, propriedades particulares, que serão estudadas neste capítulo.

- Tendo em vista aplicações em Geometria Analítica, serão estudados, de preferência, operadores lineares em IR^2 e IR^3.

- As transformações lineares planas do capítulo anterior são todas *operadores lineares no* IR^2. Ao apresntá-las, teve-se como objetivos principais mostrar suas matrizes canônicas, a correspondente interpretação geométrica e a composição de transformações. Estas são as razões de o referido assunto ter aparecido no Capítulo 3.

4.2 – OPERADORES INVERSÍVEIS

Um operador f : V $\rightarrow$ V associa a cada vetor $v \in$ V um vetor $f(v) \in$ V. Se por meio de outro operador g for possível inverter essa correspondência, de tal modo que a cada vetor transformado $f(v)$ se associe o vetor de partida v, diz-se que g é *operador inverso* de f e se indica por f^{-1}. Nesse caso $f^{-1}(f(v)) = v$ (Fig. 4.2).

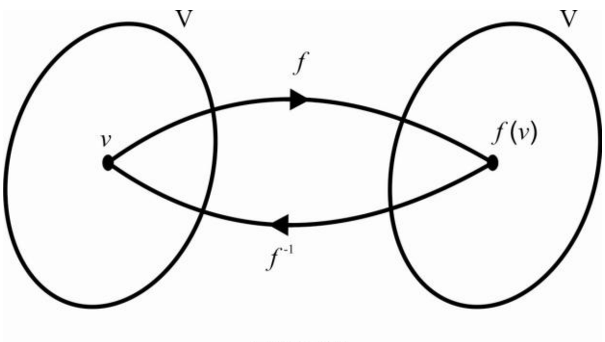


Figura 4.2

Quando o operador linear f admite o inverso f^{-1}, diz-se que f é *inversível*, ou *regular* ou *não-singular*.

4.2.1 – Propriedade dos operadores Inversíveis

Da definição e do fato de que a cada operador linear corresponde uma matriz, decorrem as seguintes propriedades:

I) Se f é inversível e f^{-1} o seu inverso, tem-se
$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I$ (identidade)

II) Se f é linear inversível, f^{-1} também é linear.

III) A matriz B de f^{-1} numa certa base (na prática será sempre considerada a base canônica) é a inversa da matriz T de f na mesma base, isto é, $B = T^{-1}$.

- Como conseqüência da propriedade III, tem-se: f é inversível se, e somente se, det $T \neq 0$, fato esse que será utilizado "preferencialmente" para verificar se f é inversível.

4.2.2 – Problema Resolvido

1) Dado o operador linear $f : IR^2 \to IR^2$ definido por

$f(x, y) = (4x - 3y, -2x + 2y)$,

a) mostrar que f é inversível;

b) determinar uma regra que defina f^{-1}.

Solução

a) A matriz canônica de f é

$$T = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \text{ e det } T = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 6 = 2 \neq 0$$

Como det $T \neq 0$, f é inversível.

b) A matriz T^{-1}, inversa de T, é:

$$T^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{2}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{2}{2} & \frac{4}{2} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

logo,

$$f^{-1}(x, y) = T^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & + & \frac{3}{2}y \\ x & + & 2y \end{bmatrix}$$

ou

$$f^{-1}(x, y) = \left(x + \frac{3}{2}\, y,\; x + 2y\right)$$

- Deve ser entendido que se f leva o vetor (x, y) ao vetor (x’, y’), isto é,

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

o operador f^{-1} traz de volta o vetor (x’, y’) para a posição inicial (x, y), ou seja,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = T^{-1} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

Assim, neste problema, se v = (x, y) = (2, 1):

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = T^{-1} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- As transformações lineares planas vistas no Capítulo 3 são todas *operadores lineares inversíveis*. Fica a cargo do leitor verificar que o inverso de uma reflexão em relação a uma reta é uma reflexão em relação à mesma reta, o inverso de uma dilatação é uma contração, etc.

4.3 – MATRIZES SEMELHANTES

Seja $f : V \to V$ um operador linear. Se A e B são bases de V e T_A e T_B as matrizes que representam o operador f nas bases A e B, respectivamente, então

$$T_B = Q^{-1}\, T_A\, Q, \qquad (1)$$

Sendo Q a matriz de mudança de base de B para A. De fato:

Pela definição de matriz de uma transformação linear, pode-se escrever

$$f(v)_A = T_A v_A \qquad (2)$$

$$f(v)_B = T_B v_B \qquad (3)$$

Designando-se por Q a matriz de mudança de base de B para A. tem-se:

$$v_A = Q v_B \qquad (4)$$

$$f(v)_A = Q\, f\,(v)_B \qquad (5)$$

Substituindo (4) e (5) em (2), vem:

$$Q\, f\,(v)_B = T_A\, Q v_B$$

Como a matriz Q é inversível, pode-se escrever:

$$Q^{-1}\, Q\, f\,(v)_B = Q^{-1}\, T_A\, Q v_B$$

ou

$$f\,(v)_B = Q^{-1}\, T_A\, Q v_B, \qquad (6)$$

uma vez que $Q^{-1}\, Q = I$. Comparando (6) com (3), vem:

$$T_B = Q^{-1}\, T_A\, Q$$

que é a relação apresentada em (1).

É preciso que o leitor atente para o fato de que, na relação (1), a matriz Q é a matriz de mudança de base de B para A (da 2ª base para a 1ª).

As matrizes T_A e T_B são chamadas *matrizes semelhantes.*

Por conseguinte, duas matrizes são semelhantes quando definem, em V, um mesmo operador linear f, em duas bases diferentes. Mais pricisamente, duas matrizes T_A e T_B são semelhantes se existe uma matriz inversível Q tal que

$$T_B = Q^{-1} T_A\, Q$$

4.3.1 – Propriedade de Matrizes Semelhantes

Matrizes semelhantes possuem o mesmo determinante. De fato, de

$T_B = Q^{-1}\, T_A\, Q,$

vem

$QT_B = QQ^{-1}\, T_A Q$

ou

$QT_B = T_A Q$

e

$\det Q \times \det T_B = \det T_A \times \det Q$

ou

$\det T_B = \det T_A.$

4.3.2 – Problemas Resolvidos

1) Sejam $f : IR^2 \rightarrow IR^2$ um operador linear e as bases A = {(3, 4), (5, 7)} e B = {(1, 1), (-1, 1)}. Sabendo que

$T_A = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix},$

calcular T_B utilizando a relação $T_B = Q^{-1}\, T_A\, Q$.

Solução

AS bases A e B, como se sabe, podem ser representadas, respectivamente, pelas matrizes

$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$

Tendo em vista que Q é a matriz de mudança de base de B para A, pode-se escrever:

$Q = A^{-1}\, B$

mas,

$A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ -4 & 3 \end{bmatrix},$

portanto,

$Q = \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -12 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}$

e

$$Q^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{7}{2} & \frac{12}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{2} & 6 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

logo,

$$T_B = \begin{bmatrix} \frac{7}{2} & 6 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 12 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -12 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$$

- Observe o leitor que det T_A = det T_B = -6

2) Dado o operador linear $f : IR^2 \to IR^2$, $f(x, y) = (2x + 9y, x + 2y)$, determine T, matriz canônica de *f*, e, a seguir, utilizando a relação entre matrizes semelhantes, calcular a matriz de *f* na base B = {(3, 1), (-3, 1)}.

Solução

a) É imediato que a matriz canônica de *f* é

$$T = \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

b) A matriz Q de mudança de base de B para a base canônica A é dada por

$$Q = A^{-1} B = I^{-1} B = IB = B = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$Q^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{3}{6} \\ -\frac{1}{6} & \frac{3}{6} \end{bmatrix}$$

logo,

$$T_B = Q^{-1}\,TQ = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{3}{6} \\ -\frac{1}{6} & \frac{3}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{5}{6} & \frac{15}{6} \\ \frac{1}{6} & -\frac{3}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- É interessante desde já observar que a matriz diagonal T_B que representa *f* na base B *é mais simples , no sentido de "estrutura"* do que a matriz canônica T, fato este que não ocorreu no problema anterior com as matrizes T_A e T_B. A simplificação da matriz de um operador *f* está ligada à escolha adequada de uma base, pois é a matriz de mudança de base Q que atua sobre a matriz de um operador linear para transformá-la em outra matriz do mesmo operador. A escolha de uma base "certa", que torna a matriz de um operador f a mais simples possível, será objeto de estudo no próximo capítulo.

4.4 – OPERADOR ORTOGONAL

Uma operador linear $f : V \to V$ é *ortogonal* se preserva o módulo de cada vetor, isto é, se para qualquer $v \in V$:

$$|f(v)| = |v|.$$

Tendo em vista que o módulo de um vetor é calculado por meio de um produto interno $\left(|v| = \sqrt{v.v}\right)$, os operadores ortogonais são definidos nos espaços vetoriais euclidianos.

- No estudo dos operadores ortogonais, serão consideradas somente bases ortonormais em V e, particularmente, a base canônica.

- É fundamental que, sendo α uma base ortonormal de V, o produto interno de dois vetores quaisquer de V, nessa base, é sempre o usual. Isso será demonstrado para o caso de dim V = 2, uma vez que o caso de dim V = n é similar.

Sejam $\alpha = \{\mu_1, \mu_2\}$ uma base ortonormal de V e μ e v vetores quaisquer de V, sendo

$\mu = a_1\mu_1 + a_2\mu_2$ ou $\mu_\alpha = (a_1, a_2)$

$v = b_1\mu_1 + b_2\mu_2$ ou $\mu_\alpha = (b_1, b_2)$

O produto interno dos vetores μ e v é

$$\begin{aligned} \mu \,.\, v &= (a_1\mu_1 + a_2\mu_2) \,.\, (b_1\mu_1 + b_2\mu_2) \\ &= a_1\mu_1 \,.\, (b_1\mu_1 + b_2\mu_2) + a_2\mu_2 \,.\, (b_1\mu_1 + b_2\mu_2) \\ &= a_1b_1 \,.\, (\mu_1 \,.\, \mu_1) + a_1b_2\, (\mu_1 \,.\, \mu_2) + a_2b_1\, (\mu_2 \,.\, \mu_1) + \\ &\quad + a_2b_2\, (\mu_2 \,.\, \mu_2) \end{aligned}$$

Como α é ortonormal, isto é:

$$\mu_i \,.\, \mu_j = \begin{cases} 1 \text{ se } i = j \\ 0 \text{ se } i \neq \end{cases}$$

tem-se

$$\mu \,.\, v = a_1b_1 + a_2b_2$$

- Representando μ e v na forma matricial, isto é,

$$\mu = \left[\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}\right] \quad e \quad v = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix},$$

Pode-se escrever

$$\mu \, . \, v = \mu^t v,$$

isto é

$$\mu \, . \, v = [\, a_1 \quad a_2] \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = a_1\, b_1 + a_2\, b_2.$$

Na notação (1), está-se identificando a matriz $\mu^t\, v$, de ordem 1, com o número $\mu \, . \, v$, o que será utilizado em futuras demonstrações.

Exemplos

1) IR^2, o operador linear definido por

$$f\,(x, y) = \left(\tfrac{4}{5}x - \tfrac{3}{5}y,\ \tfrac{3}{5}x + \tfrac{4}{5}y\right)$$

é ortogonal. De fato:

$$|f(x, y)| = \sqrt{\left(\tfrac{4}{5}x - \tfrac{3}{5}y\right)^2 + \left(\tfrac{3}{5}x + \tfrac{4}{5}y\right)^2}$$

$$= \sqrt{\tfrac{16}{25}x^2 - \tfrac{24}{25}xy + \tfrac{9}{25}y^2 + \tfrac{9}{25}x^2 + \tfrac{24}{25}xy + \tfrac{16}{25}y^2}$$

$$= \sqrt{\tfrac{25}{25}x^2 + \tfrac{25}{25}y^2}$$

$$= \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$= |(x, y)|,\ \forall\ (x, y) \in IR^2$$

2) A rotação do plano de um ângulo θ definida por $f\,(x, y) = (x \cos\theta - y \text{ sen } \theta + y \cos\theta)$, é ortogonal. De fato:

$$|f\,(x, y)| = \sqrt{(x\, cos\ \theta - y sen\theta)^2 + (x\ sen\ \theta + y \cos\theta)^2}$$

Desenvolvendo o radicando e simplificando:

$$|f\,(x, y)| = \sqrt{(x^2 + y^2)\ cos^2\theta + (x^2 + y^2)\ sen^2\theta}$$

$$= \sqrt{(x^2 + y^2)\ (cos^2\theta + sen^2\theta)}$$

$$= \sqrt{x^2 + y^2}$$

$= |(x, y)|, \forall (x, y) \in IR^2$

3) No IR^3, o operador linear definido por

$f(x, y, z) = (-y, x, -z)$

é ortogonal. De fato:

$$|f(x, y, z)| = \sqrt{(-y)^2 + x^2 + (-z)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = |(x, y, z)|$$

4.4.1 – Propriedades dos Operadores Ortogonais

I) Se $f : V \rightarrow V$ é um operador ortogonal e A a matriz de f numa base ortonormal qualquer, isto é, $f(v) = Av$, A é uma *matriz ortogonal*, ou seja, $A^t = A^{-1}$. De fato, como f é ortogonal, tem-se:

$$|f(v)| = |v|$$

ou

$$|Av| = |v|$$

ou, ainda

$$\sqrt{Av \,.\, Av} = \sqrt{v \,.\, v}$$

$$Av \,.\, Av = v \,.\, v$$

isto é,

$$(Av)^t\, Av = v^t\, v$$

$$(v^t A^t)\, Av = v^t\, v$$

ou

$$v^t (A^t A)\, v = v^t\, v$$

o que implica

$$A^t A = I \therefore A^t = A^{-1}.$$

Assim, uma matriz ortogonal é uma matriz que representa um operador ortogonal numa base ortonormal.

Exemplos

1) A matriz canônica A do exemplo 1 do item 4.4 é ortogonal, pois

$$A = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} \quad \therefore \quad A^t = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} = A^{-1}$$

2) A matriz canônica A do Exemplo 2 do item 4.4 é ortogonal, pois

$$A = \begin{bmatrix} cos\ \theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{bmatrix} \quad \therefore \quad A^t = \begin{bmatrix} cos\theta & cos\theta \\ -sen\theta & cos\theta \end{bmatrix} = A^{-1},$$

(ver Apêndice, Probl. 3, A. 29. 1.1)

II) As colunas (ou linhas) de uma matriz ortogonal são vetores ortonormais. Seja uma matriz ortogonal de ordem 2:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Pretende-se provar que os vetores-coluna

$$\mu_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} \ e \ \mu_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix}$$

São ortonormais. Calculando A^tA, tem-se:

$$A^tA = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}a_{11} & + & a_{21}a_{21} & a_{11}a_{12} & + & a_{21}a_{22} \\ a_{12}a_{11} & + & a_{22}a_{21} & a_{12}a_{12} & + & a_{22}a_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \mu_1 \ . \ \mu_1 & + & \mu_1 \ . \ \mu_2 \\ \mu_2 \ . \ \mu_1 & + & \mu_2 \ . \ \mu_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tendo em vista que $\mu_i \ . \ \mu_j = \begin{cases} 1 \text{ para } i = j \\ 0 \text{ para } i \neq j, \end{cases}$

os vetores μ_1 e μ_2 são ortonormais

Estes vetores formam, conseqüentemente, uma base ortonormal do espaço vetorial correspondente. Por outro lado, os vetores-coluna de uma base ortonormal determinam uma matriz ortogonal.

Exemplo – A matriz

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}$$

é ortogonal, pois para os vetores

$\mu_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \mu_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e $\mu_3 = (0, 1, 0)$, tem-se:

$\mu_1 \, . \, \mu_1 = \mu_2 \, . \, \mu_2 = \mu_3 = 1$

$\mu_1 \, . \, \mu_2 = \mu_1 \, . \, \mu_3 = \mu_2 \, . \, \mu_3 = 0$

- A demonstração da propriedade II) para uma matriz ortogonal de ordem n é análoga.

III) O produto de duas matrizes ortogonais é uma matriz ortogonal.

IV) Num espaço vetorial euclidiano, a matriz de mudança de uma base ortonormal para outra base ortonormal é uma matriz ortogonal.

V) A matriz, numa base ortonormal, de um operador ortogonal $f : V \to V$ é sempre ortogonal, independente da base ortonormal do espaço vetorial V.

VI) Todo operador ortogonal $f : V \to V$ preserva o produto interno dos vetores. De fato, se μ e v são dois vetores quaisquer de V e A a matriz que representa o operador f, tem-se:

$$\begin{aligned} f(\mu) \, . \, f(v) &= (A\mu) \, . \, (Av) \\ &= (A\mu)^t \, (Av) \\ &= (\mu^t \, A^t) \, Av \\ &= \mu^t \, (A^t \, A) \, v \\ &= \mu^t \, v = \mu \, . \, v. \end{aligned}$$

- Decorre dessa propriedade que todo operador ortogonal $f : V \to V$ preserva o ângulo de dois vetores, isto é, o ângulo entre dois vetores μ e v é igual ao ângulo entre $f(\mu)$ e $f(v)$.

- Fica a carga do leitor, a título de exercício, provar as propriedades III, IV e V.

VII) Se A é uma matriz ortogonal, $\det A = \pm 1$. De fato, como A é ortogonal,

$$A^tA = I$$

logo,

$$\det (A^tA) = \det I$$

ou

$$(\det A^t) \times (\det A) = 1$$

mas,

$$\det A^t = \det A,$$

portanto,

$$(\det A)^2 = 1$$

e

$$\det A = \pm 1.$$

- Decorre dessa propriedade que todo operador orthogonal é inversível.

4.5 – OPERADOR SIMÉTRICO

Diz-se que um operador linear $f : V \to V$ é *simétrico* se a matriz A que o representa numa base ortonormal é simétrica, isto é, se

$$A = A^t$$

- Demonstra-se que a matriz, numa base ortonormal, de um operador simétrico é sempre simétrica, independente da base ortonormal do espaço vetorial. Neste estudo serão utilizadas somente bases canônicas.

Exemplos

1) O operador linear $f : IR^2 \to IR^2$, $f(x, y) = (2x + 4y, 4x - y)$ é simétrico pois a matriz canônica de f

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

é simétrica, isto é, $A = A^t$

2) No IR^3, o operador *f* definido por *f* (x, y, z) = (x – y, - x + 3y – 2z, - 2y) é simétrico e sua matriz canônica é

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} = A^t$$

4.5.1 – Propriedade dos Operadores Simétricos

Se $f : V \to V$ é um operador simétrico, tem-se para quaisquer vetores μ e $v \in V$:

$f(\mu) \, . \, v = \mu \, . \, f(v)$

De fato, sendo $A = A^t$ a matriz simétrica de *f*, vem:

$$\begin{aligned} f(\mu) \, . \, v &= (A\mu) \, . \, v \\ &= (A\mu)^t \, v \\ &= \mu^t A^t \, . \, v \\ &= \mu \, . \, Av = \mu \, . \, f(v) \end{aligned}$$

Exemplo

Sejam o operador simétrico $f : IR^2 \to IR^2$, *f* (x, y) = (x + 3y, 3x – 4y) e os vetores μ = (2,3) e *v* = (4, 2). A definição do operador permite escrever

$f(\mu) = (11,-6)$

$f(v) = (10, 4)$

mas,

$f(\mu) \, . \, v = (11, -6) \, . \, (4, 2) = 44 - 12 = 32$

$\mu \, . \, f(v) = (2, 3) \, . \, (10, 4) = 20 + 12 = 32$

e, portanto,

$f(\mu) \, . \, v = \mu \, . \, f(v)$.

Capítulo 5

VETORES PRÓPRIOS E VALORES PRÓPRIOS

5.1– VETOR PRÓPRIO E VALOR PRÓPRIO DE UM OPERADOR LINEAR

Seja $f : V \rightarrow V$ um operador linear. Um vetor $v \in V$, $v \neq 0$, é *vetor próprio* do operador f se existe $\lambda \in IR$ tal que

$$f(v) = \lambda v$$

O número real λ tal que $f(v) = \lambda v$ é denominado *valor próprio* de f associado ao vetor próprio v.

Como se vê pela definição, um vetor $v \neq 0$ é vetor próprio se a imagem $f(v)$ for um múltiplo escalar de v. No IR^2 e no IR^3, diz-se que v e $f(v)$ têm a mesma direção. Na figura 5.1, o vetor $v \in IR^2$ é um vetor próprio de um operador f : dependendo de valor de λ, o operador f dilata v (Fig. 5.1.a), contrai v (Fig. 5.1.b), inverte o sentido de v (Fig. 5.1.c) ou o anula no caso de $\lambda = 0$.

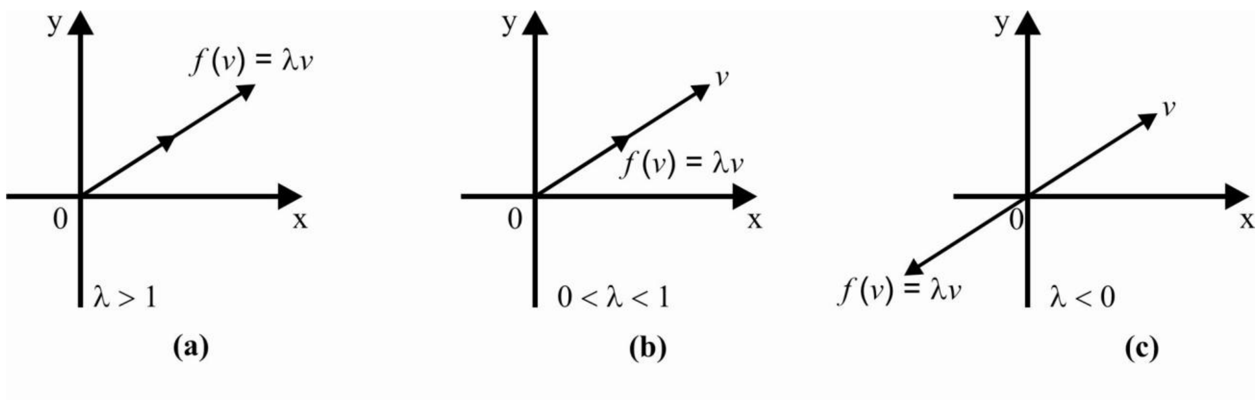


Figura 5.1

A Figura 5.1.d mostra um vetor $v \in IR^2$ que não é vetor próprio de um operador *f* .

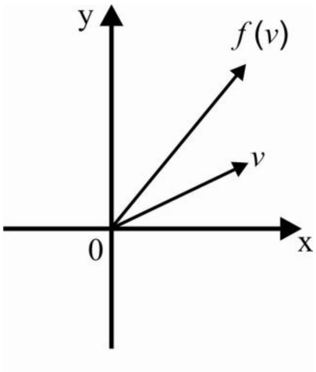


Figura 5.1.d

- Os vetores próprios são também denominados *autovetores* ou *vetores característicos.*
- Os valores próprios são também denominados *autovalores* ou *valores característicos.*
- O vetor $v = 0$ sempre satisfaz à equação $f(v) = \lambda\, v$ para qualquer valor de λ. Entretanto, o vetor próprio é sempre um vetor não nulo.

Exemplo

1) O vetor $v = (5,2)$ é vetor próprio do operador linear

$$f : IR^2 \to IR^2,\ f(x, y) = (4x + 5y, 2x + y),$$

associado ao valor próprio $\lambda = 6$, pois:

$$f(v) = f(5, 2) = (30, 12) = 6\,(5, 2) = 6\,v$$

- A matriz canônica de *f* é

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Considerando os produtos

$$\lambda\, v = 6 \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$A\, v = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 12 \end{bmatrix}$$

verifica-se que multi plicar o vetor próprio v = (5, 2) pelo valor próprio associado λ = 6 é o mesmo que multiplicá-lo pela matriz canônica de f:

$\lambda\, v = Av$,

Isto é,

$6\, v = Av$

Em outras palavras, a multiplicação do vetor próprio v pelo valor próprio associado λ ou pela matriz canônica A de f, tem como resultado o mesmo vetor, múltiplo escalar de v. Assim, a matriz A atua na multiplicação por v como se fosse o número real λ.

2) O vetor v = (2, 1) não é vetor próprio deste operador f do exemplo 1, pois

$f\,(2, 1) = (13,\ 5) \neq \lambda\,(2, 1)$, para todo $\lambda \in$ R

3) Sempre que um vetor v é vetor próprio de um operador linear f associado ao valor próprio λ, isto é, $f\,(v) = \lambda\, v$, o vetor $\alpha\, v$, para qualquer real $\alpha \neq 0$, é também vetor próprio de f associado ao mesmo λ. De fato:

$f\,(\alpha\, v) = \alpha\, f\,(v) = \alpha\,(\lambda\, v) = \lambda\,(\alpha v)$

Para o exemplo 1, se se fizer $\alpha = 2$, vem:

$2\, v = 2(5, 2) = (10, 4)$ e

$f\,(10, 4) = (60, 24) = 6\,(10, 4)$,

Isto é, o vetor (10,4) é também vetor próprio associado ao mesmo valor próprio λ = 6.

Se se desejasse saber qual o vetor próprio unitário μ associado a λ = 6, bastaria fazer

$$\alpha = \frac{1}{|v|} = \frac{1}{|(5,2)|} = \frac{1}{\sqrt{5^2+2^2}} = \frac{1}{\sqrt{29}}$$

obtendo-se

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{29}}(5, 2) = \left(\frac{5}{\sqrt{29}}, \frac{2}{\sqrt{29}}\right)$$

Assim

$$f\,(\mu) = 6\mu = 6\left(\frac{5}{\sqrt{29}}, \frac{2}{\sqrt{29}}\right) = \left(\frac{30}{\sqrt{29}}, \frac{12}{\sqrt{29}}\right)$$

4) Na simetria definida no IR^3 por $f\,(v) = -v$, qualquer vetor $v \neq 0$ é vetor próprio associado ao valor próprio λ = -1.

5) O vetor v = (0,1) $\in$ IR^2 é vetor próprio do operador linear definido por f (x, y) = (x, 0) associado a λ = 0. De fato:
f (0,1) = (0, 0) = 0(0, 1)

Por este exemplo fica evidente que o fato de o vetor zero não poder ser, por definbição, vetor próprio não impede que o número zero seja valor próprio.

5.2 – DETERMINAÇÃO DOS VALORES PRÓPRIOS E DOS VETORES PRÓPRIOS

5.2.1 – Determinação dos valores próprios

Sem prejuízo da generalização, consere-se um operador linear f : IR^2 $\rightarrow$ IR^2 cuja matriz canônica é

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

O fato de ser A a matriz canônica de f permite escrever:

$f(v) = A\,v$

Se v é um vetor próprio de f e λ o correspondente valor próprio, isto é:

$f(v) = \lambda\, v$,

então,

$Av = \lambda v$ (v é matriz-coluna de ordem 2 x 1)

ou

$Av - \lambda v = 0$

Tendo em vista que v = Iv (I é a matriz identidade), pode-se escrever:

$Av – \lambda\, I\, v = 0$

ou

$$(A – \lambda\, I)\, v = 0 \qquad (1)$$

Fazendo v = (x, y), a equação (1) fica :

$$\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ou

$$\begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (2)$$

A igualdade (2) representa um sistema homogêneo de 2 equações lineares com 2 variáveis (x e y). Se o determinante da matriz dos coeficientes das variáveis for diferente de zero, a única solução do sistema é a trivial, isto é, x = y = 0. Como se deseja vetores $v \neq 0$, deve-se obrigatoriamente ter

$$\det \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ou} \quad \det(\mathrm{A}-\lambda\mathrm{I}) = 0 \qquad (3)$$

A equação (3) é denominada *equação característica* do operador *f* ou da matriz A. O det (A - λ I), que é um polinômio um λ, é denominado *polinômio característico* de *f* ou de A.

5.2.2 – Determinação dos Vetores Próprios

Os vetores próprios correspondentes aos valores próprios encontrados serão obtidos substituindo cada valor de λ na igualdade (2) e resolvendo o respectivo sistema homogêneo de equações lineares.

5.2.3 – Problemas Resolvidos

1) Determinar os valores próprios e os vetores próprios do operdor linear

$f: \mathrm{IR}^2 \to \mathrm{IR}^2$, $f(x, y) = (4x + 5y, 2x + y)$

Solução

I) A matriz canônica do operador *f* é

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

e, portanto, a equação característica de *f* é

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 5 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

isto é,

$(4 - \lambda)(1 - \lambda) - 10 = 0$

$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$,

Equação do 2º grau cujas raízes são $\lambda_1 = 6$ e $\lambda_2 = -1$.

II) O sistema homogêneo que permite a determinação dos vetores próprios é (A - λ I) v = 0. Considerando $v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, o sistema fica:

$$\begin{bmatrix} 4-\lambda & 5 \\ 2 & 1-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

i) Substituindo, em (1), λ por 6, obtém-se o sistema linear homogêneo cuja solução é constituída por todos os vetores próprios associados ao valor próprio λ_1 = 6:

$$\begin{bmatrix} 4-6 & 5 \\ 2 & 1-6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ou

$$\begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ou, ainda

$$\begin{cases} -2x + 5y = 0 \\ 2x - 5y = 0 \end{cases}$$

Esse sistema admite uma infinidade de soluções próprias:

$y = \frac{2}{5}x$

e, portanto, os vetores do tipo $v_1 = \left(x, \frac{2}{5}\,x\right)$ ou v_1 = x $\left(1, \frac{2}{5}\right)$, x ≠ 0, ou, ainda, v_1 = x (5, 2) são os vetores próprios associados ao valor próprio λ_1 = 6.

ii) Substituindo, em (1), λ por –1, obtém-se o sistema linear homogêneo cuja solução é constituída por todos os vetores próprios associados ao valor próprio λ_2 = -1:

$$\begin{bmatrix} 4+1 & 5 \\ 2 & 1+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ou

$$\begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ou, ainda

$$\begin{cases} 5x + 5y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases}$$

Esse sistema admite uma infinidade de soluções próprias:

y = -x

e, portanto, os vetores do tipo v_2 = (x, -x) ou v_2 = x (1, -1), x ≠ 0, são os vetores próprios associados ao valor próprio λ_2 = -1.

2) Calcular os valores próprios e os vetores próprios da transformação linear *f* representada pela matriz

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

Solução

I) A equação característica de A é

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 7-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 6-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (1)$$

isto é,

$$(7-\lambda)\begin{vmatrix} 6-\lambda & -2 \\ -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} -2 & 6-\lambda \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$(7 - \lambda)\,[(6 - \lambda)(5 - \lambda) - 4] + 2\,[-2(5 - \lambda) + 0] + 0 = 0$

$(7 - \lambda)(6 - \lambda)(5 - \lambda) - 4(7 - \lambda) - 4(5 - \lambda) = 0$

$(7 - \lambda)(6 - \lambda)(5 - \lambda) - 28 + 4\lambda - 20 + 4\lambda = 0$

$(7 - \lambda)(6 - \lambda)(5 - \lambda) - 48 + 8\lambda = 0$

$(7 - \lambda)(6 - \lambda)(5 - \lambda) - 8(6 - \lambda) = 0$

$(6 - \lambda)\,[(7 - \lambda)(5 - \lambda) - 8] = 0$

$(6 - \lambda)(35 - 7\lambda - 5\lambda + \lambda^2 - 8) = 0$

$(6 - \lambda)(\lambda^2 - 12\lambda + 27) = 0$

$(6 - \lambda)(\lambda - 3)(\lambda - 9) = 0$

As raízes dessa equção são $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 6$ e $\lambda_3 = 9$ e, por conseguinte, são os valores próprios de *f*, ou da matriz A.

A equação (1) pode ser resolvida, de modo geral, pelo processo apresentado na solução do problema 2, item A. 19.1, Apêndice.

II) O sistema homogêneo de equações lineares que permite a determinação dos vetores próprios associados é $(A - \lambda I)\,v = 0$. Considerando

$$v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

o sistema fica

$$\begin{bmatrix} 7-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 6-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 5-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(2)

i) Substituindo em (2) λ por 3, obtém-se o sistema

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

isto é

$$\begin{cases} 4x - 2y + 0z = 0 \\ -2x + 3y - 2z = 0 \\ 0x - 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

Esse sistema admite uma infinidade de soluções próprias: y = z = 2x e, portanto, os vetores v_1 = (x, 2x, 2x) = x (1, 2, 2), x ≠ 0, são os vetores próprios associados ao valor próprio $\lambda_1 = 3$.

ii) Substituindo em (2) λ por 6, obtém-se o sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

isto é

$$\begin{cases} 1x - 2y + 0z = 0 \\ -2x + 0y - 2z = 0 \\ 0x - 2y - 1z = 0 \end{cases}$$

Esse sistema admite uma infinidade de soluções próprias: y = -x e z = $\frac{1}{2}$x. Portanto, os vetores v_3 = $\left(x, -x, \frac{1}{2}x\right) = x\left(1, -1, \frac{1}{2}\right)$ ou v_3 = x (2, -2, 1), x ≠ 0, são os vetores próprios associados ao valor próprio $\lambda_3 = 9$.

3) Determinar os valores próprios e os vetores próprios da matriz

A = $\begin{bmatrix} -16 & 10 \\ -16 & 8 \end{bmatrix}$

Solução

I) A equação característica de A é

det (A - λ I) = $\begin{vmatrix} -16 - \lambda & 10 \\ -16 & 8 - \lambda \end{vmatrix} = 0,$

Isto é,

$(-16 - \lambda)(8 - \lambda) + 160 = 0$

$-128 + 16\lambda - 8\lambda + \lambda^2 + 160 = 0$

$\lambda^2 + 8\lambda + 32 = 0,$

Equação do 2º grau cujas raízes são λ = -4 ± 4 i, isto é, λ_1 = 4 + 4i e λ_2 = 4 – 4 i, e, por conseguinte, a matriz A não possui valores próprios nem vetores próprios.

- Se na definição de valor próprio de um operador linear f se admitisse λ qualquer, real ou complexo, se poderia dizer que a matriz A possui valores próprios complexos e, em conseqüência, vetores próprios de componentes complexas. Neste texto se consideram, apenas, valores próprios reais.

5.3 – PROPRIEDADES DOS VALORES PRÓPRIOS E DOS VETORES PRÓPRIOS

I) Se λ é um valor próprio de um operador linear $f : V \rightarrow V$, o conjunto S_λ de todos os vetores $v \in V$, inclusive o vetor $v = 0$, tais que $f(v) = \lambda v$, é um subespaço vetorial de V ($S_\lambda = \{v \,/\, f(v) = \lambda v\}$). De fato, se v_1 e $v_2 \in S_\lambda$:

$$f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) = \lambda v_1 + \lambda v_2 = \lambda (v_1 + v_2),$$

e, portanto, $(v_1 + v_2) \in S_\lambda$.

Analogamente, verifica-se que $\alpha v \in S_\lambda$ para todo $\alpha \in$ IR.

O subespaço S_λ é denominado *subespaço associado* ao valor próprio λ.

No problema 1, por exemplo, viu-se que ao valor próprio $\lambda = 6$ correspondem os vetores próprios do tipo $v = x\,(5,2)$. Assim o subespaço associado a $\lambda = 6$ é.

$$S_6 = \{x\,(5, 2) \,/\, x \in \text{IR}\} = [(5, 2)]$$

que representa uma reta que passa pela origem do sistema x Ou (Fig. 5.3).

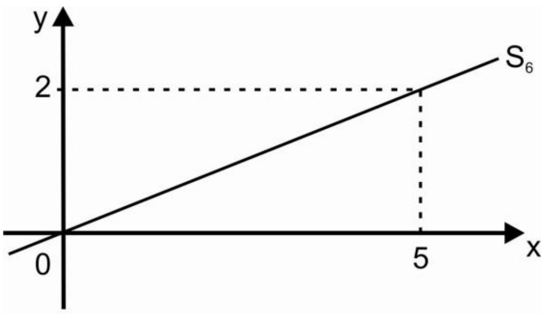


Figura 5.3

II) Matrizes semelhantes têm o mesmo polinômio característico e, por isso, os mesmos valores próprios. De fato, sejam $f : V \rightarrow V$ um operador linear e A e B bases de V. Tendo em vista que a relação entre matrizes semelhantes é

$$T_B = Q^{-1} T_A\, Q,$$

Conforme foi visto em 4.3, vem:

$$\begin{aligned}\det(T_B - \lambda I) &= \det(Q^{-1}\, T_A\, Q - \lambda\, I)\\ &= \det(Q^{-1}\, T_A\, Q - \lambda\, Q^{-1}\, I\, Q)\\ &= \det(Q^{-1}\,(T_A - \lambda\, I)\, Q)\\ &= \det Q^{-1} \times \det(T_A - \lambda\, I) \times \det Q\\ &= \det Q^{-1} \times \det Q \times \det(T_A - \lambda\, I)\\ &= \det(Q^{-1}\, Q) \times \det(T_A - \lambda\, I)\\ &= \det I \times \det(T_A - \lambda\, I)\\ &= \det(T_A - \lambda\, I)\end{aligned}$$

5.4 – DIAGONALIZAÇÃO DE OPERADORES

Sabe-se que, dado um operador linear $f : V \to V$, a cada base B de V corresponde uma matriz T_B que representa f na base B. Prestende-se obter uma base do espaço vetorial V de modo que a matriz de f, nessa base, seja a mais simples possível. A seguir se verá que essa matriz é uma matriz diagonal.

5.4.1 – Propriedades

I) Vetores próprios associados a valores próprios distintos de um operador linear $f : V \to V$ são linearmente independentes.

A demonstração será feita para o caso de $f : IR^2 \to IR^2$ em que λ_1 e λ_2 são distintos. Sejam $f(v_1) = \lambda_1 v_1$ e $f(v_2) = \lambda_2 v_2$, com $\lambda_1 \neq \lambda_2$ e considere-se a igualdade

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 = 0 \qquad (1)$$

Pela linearidade de f, tem-se:

$$a_1 f(v_1) + a_2 f(v_2) = 0$$

ou

$$a_1 \lambda_1 v_1 + a_2 \lambda_2 v_2 = 0 \qquad (2)$$

Multiplicando ambos os membros da igualdade (1) por λ_1, vem

$$a_1\lambda_1 v_1 + a_2\lambda_1 v_2 = 0 \qquad (3)$$

Subtraindo (3) de (2), tem-se

$a_2 (\lambda_2 - \lambda_1) v_2 = 0,$

mas,

$\lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$ e $v_2 \neq 0,$

logo, $a_2 = 0$.

Substituindo a_2 por seu valor em (1) e tendo em vista que $v_1 \neq 0$, tem-se

$a_1 = 0$

Portanto, o conjunto $\{v_1, v_2\}$ é LI, pois (1) só admite a solução trivial $a_1 = a_2 = 0$

II) Se $f : V \to V$ é um operador linear, dim V = n e f possui n valores próprios distintos, o conjunto $\{v_1, v_2 ..., v_n\}$, formado pelos correspondentes vetores próprios, é uma base de V.

Esta propriedade é conseqüência imediata da propriedade anterior.

Exemplo

Dado o operador linear $\boldsymbol{f : IR^2 \to IR^2, f (x, y) = (-3x - 5y, 2y)}$, os valores próprios de f são $\boldsymbol{\lambda_1 = 2}$ **e** $\boldsymbol{\lambda_2 = -3}$ (a cargo do leitor). Calculando os vetores próprios, obtém-se:

a) Para $\lambda_1 = 2$, os vetores $v_1 = (1, -1)$, $x \neq 0$;

b) Para $\lambda_2 = -3$, os vetores $v_2 = x (1, 0)$, $x \neq 0$.

Tendo em vista que $\lambda_1 \neq \lambda_2$, o conjunto $\{(1, -1), (1, 0)\}$ é uma base IR^2.

III) Se um operador linear $f : IR^3 \to IR^3$ admite valores próprios λ_1, λ_2 e λ_3 distintos, associados av_1, v_2 e v_3, respectivamente, a propriedade II) assegura que o conjunto $P = \{v_1, v_2, v_3\}$ é uma base do IR^3.

Tendo em vista que

$$\begin{aligned} &f(v_1) + \lambda 1\, v_1 + 0\, v_2 + 0\, v_3 \\ &f(v_2) = 0\, v_1 + \lambda_2 v_2 + 0\, v_3 \\ &f(v_3) = 0\, v_1 + 0 v_2 + \lambda_3 v_3, \end{aligned} \qquad 3$$

o operador f é representado na base **P** dos vetores próprios pela matriz diagonal

$$T_P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = D,$$

cujos elementos da diagonal principal são os valores próprios de *f*. A matriz diagonal **D** é a mais simples representante do operador linear *f*.

5.4.2 – Matriz Diagonalizável

Sendo A a matriz canônica do operador *f*, as matrizes A e D são semelhantes por representarem o mesmo operador em bases diferentes. Logo, a relação entre matrizes semelhantes (ver item 4.3) permite escrever

$$D\ Q^{-1}\ A\ Q \qquad (1)$$

sendo Q a matriz de mudança de base de P para a matriz canônica

$$C = \{\ e_1 = (1,0,0),\ e_2 = (0,\ 1,\ 0),\ e_3 = (0,\ 0,1)\ \}.$$

Tendo em vista que

$$Q = C^{-1}\ P = I^{-1}\ P = P,$$

a igualdade (1) escreve-se:

$$D = P^{-1}\ A\ P, \qquad (2)$$

sendo **P** a matriz cujas colunas são os vetores próprios do operador *f* (P está designando tanto a base dos vetores próprios de *f* quanto a matriz ora descrita; no contexto, identifica-se quando se trata de uma ou de outra).

A igualdade (2) dá motivo à definição a seguir:
A *matriz quadrada A é diagonizável* se existe uma matriz inversível P tal que $P^{-1}\ A\ P$ seja matriz diagonal.

Diz-se, nesse caso, que a matriz P diagonaliza A ou que P é a matriz diagonalizadora.

A definição acima pode ser expressa de modo equivalente: um operador linear $f : V \to V$ *é diagonalizável* se existe uma base de V formada por vetores próprios de *f*.

5.4.3 – Problemas Resolvidos

1) Determinar uma matriz P que diagonaliza a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

e calcular P^{-1} A P.

Solução

Os valores próprios e os correspondentes vetores próprios de A são $\lambda_1 = 2$ e $v_1 = (1,0,-1)$, $\lambda_2 = 3$e $v_2 = (1,1,1)$, $\lambda_3 = 6$ e $v_3 = (1, -2,1)$ (Ver Apêndice, A.19.1 - Prob. 2).

Corno os λ_i são distintos, o conjunto P = { v_1, v_2, v_3 } forma uma base do IR^3 e, portanto, a matriz

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

diagonaliza A

Calculando P^1 A P, obtém-se:

$$P^{-1}\,AP = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} = \mathrm{D}$$

2) Dado o operador linear $f : IR^2 \rightarrow IR^2$ definido por

f (x, y) = (4x + 5y, 2x + y),

determinar uma base do IR^2 em relação à qual a matriz de f é diagonal.

Solução

A matriz canônica de *f* é

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

No problema 1 de 5.2.3, viu-se que os valores próprios de *f* (ou de A) são λ_1, = 6 e λ_2 = -1 e os correspondentes vetores próprios são v_1 = x (5, 2) e v_2 = x (1, -1).

A base em relação à qual a matriz de *f* é diagonal é P = {v_1 = (5, 2), v_2 = (1, -1)}, base formada pelos vetores próprios de *f* e, portanto, a matriz

$$P = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix},$$

diagonaliza A.

$$P^{-1}\,AP = \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{2}{7} & -\frac{5}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = D$$

- Se na matriz P for trocada a ordem dos vetores coluna, isto é, se se fizer

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

a matriz D = P^{-1} A P será

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

3) Determinar uma matriz **P** que diagonaliza a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Solução

Os valores próprios e os correspondentes vetores próprios de A são $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ e v_1 = (1, 0, 0), $\lambda_3 = 3$ e v_3 = (1, 1, -2), sendo v_1 e v_3 LI (propriedade I, item 5.4.1) (a cargo do leitor).

Como só existem dois vetores LI do IR^3, não existe uma base P desse espaço constituída de vetores próprios. Logo, *a matriz* A *não é diagonalizável*.

- O problema 2 de 5.5.1 mostrará um exemplo de matriz A que, também como a deste problema, só possui dois valores próprios mas, em correspondência, existe uma base P de vetores próprios e, conseqüentemente, A é diagonalizável.

5.5 - DIAGONALIZAÇÃO DE MATRIZES SIMÉTRICAS - PROPRIEDADES

I) A equação característica de uma *matriz simétrica tem apenas raízes reais*.

A demonstração será feita somente para o caso de uma matriz simétrica A de ordem 2. Seja a matriz simétrica

$$A = \begin{bmatrix} p & r \\ r & q \end{bmatrix}$$

cuja equação característica é

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} p-\lambda & r \\ r & q-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

isto é,

$$(p - \lambda)(q - \lambda) - r^2 = 0$$

$$pq - \lambda p - \lambda q + \lambda^2 - r^2 = 0$$

$$\lambda^2 - (p + q)\lambda + (pq - r^2) = 0$$

O discriminante dessa equação do 2º grau em λ é

$$(p + q)^2 - 4(1)(pq - r^2) = p^2 + 2pq + q^2 - 4pq + 4r^2 = (p-q)^2 + 4r^2$$

Tendo em vista que esse discriminante é uma soma de quadrados (não-negativa), as raízes da equação característica são reais e, por conseguinte, a matriz A possui dois valores próprios.

II) Se $f : V \to V$ é um operador linear simétrico com valores próprios distintos, os vetores próprios correspondentes são ortogonais. De fato, sejam λ_1 e λ_2 dois valores próprios de um operador linear simétrico f com $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Sejam, ainda, $f(v_1) = \lambda_1 v_1$ e $f(v_2) = \lambda_2 v_2$, isto é, sejam v_1 e v_2 vetores próprios associados, respectivamente, a λ_1 e λ_2. Pretende-se mostrar que $v_1 \,.\, v_2 = 0$.

Sendo f um operador simétrico, pela propriedade 4.5.1, vem

$$f(v_1) \,.\, v_2 = v_1 \,.\, f(v_2)$$

ou

$\lambda_1 v_1 .\, v_2 = v_1 \,.\, \lambda_2 v_2$

$\lambda_1(v_1 \,.\, v_2) - \lambda_2 (v_1 \,.\, v_2) = 0$

$(\lambda_1 - \lambda_2)\,(v_1 \,.\, v_2) = 0$

Como $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$, segue-se que $v_1 \,.\, v_2 = 0$, ou seja, $v_1 \perp v_2$.

- Em 5.4.2 viu-se que uma matriz A é diagonalizada pela matriz P da base dos vetores próprios por meio de

$$D = P^{-1}\, A\, P \qquad (1)$$

No caso particular de A ser simétrica, P será uma matriz de uma base ortogonal, de acordo com a propriedade II. Às vezes, por conveniência, há interesse que a base P, além de ortogonal, seja ortonormal, o que se obtém normalizando cada vetor.

Assim, nessa condição, de acordo com a propriedade II de 4.4.1, por ser a matriz P ortogonal, tem-se:

$P^{-1} = P^t$ e a relação (1) fica

$$D = P^t\, A\, P,$$

dizendo-se, nesse caso, que P *diagonatiza* A *ortogonalmente*.

5.5.1 – Problemas Resolvidos

1) Determinar uma matriz ortogonal P que diagonaliza a matriz simétrica

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

Solução

Conforme se viu no problema 2 de 5.2.3:

a) os valores próprios de A são $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 6$ e $\lambda_3 = 9$;
b) os vetores próprios correspondentes são $v_1 = (1, 2, 2)$, $v_2 = (2, 1,-2)$ e $v_3 = (2,-2, 1)$.

Normalizando os vetores v_1, v_2 e v_3, obtêm-se os vetores próprios unitários associados, respectivamente, aos valores próprios $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 6$ e $\lambda_3 = 9$:

$$\mu_1 = \frac{v_1}{|v_1|} \frac{(1,2,2)}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}} = \frac{(1,2,2)}{\sqrt{9}} = \frac{(1,2,2)}{3} = \left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$$

$$\mu_1 = \frac{v_2}{|v_2|} = \frac{(2,1,-2)}{\sqrt{9}} = \left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$$

$$\mu_1 = \frac{v_3}{|v_3|} = \frac{(2,-2,1)}{\sqrt{9}} = \left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$$

A matriz

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

cujas colunas são as componentes dos vetores próprios ortonormais μ_1, μ_2 e μ_3 é ortogonal:

$\mu_1 \,.\, \mu_1 = \mu_2 \,.\, \mu_2 = \mu_3 \,.\, \mu_3 = 1$

$\mu_1 \,.\, \mu_2 = \mu_1 \,.\, \mu_3 = \mu_2 \,.\, \mu_3 = 0$

A matriz P diagonaliza A ortogonalmente uma vez que

$D = P^{-1} A P = P^t A P$:

$$D = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

2) Dado o operador linear simétrico $f : IR^3 \rightarrow IR^3$ definido pela matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix},$$

determinar uma matriz ortogonai P que diagonaliza A.

Solução

a) Os valores próprios e os correspondentes vetores próprios de A são $\lambda_1 = 5$ e $v_1 = (1, 0, -2)$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ e $v = (2z, y, z)$ com y e z não simultaneamente nulos.

Quando v depende de mais de uma variável ($v = (2z, y, z)$) como acontece neste caso, pode-se associar a ele mais de um vetor próprio, entre si

LI, e correspondentes ao mesmo valor próprio, contrariamente ao que sucedeu no problema 3, item 5.4.3. De fato:

Fazendo, y = 0 e z = 1, por exemplo, obtém–se um vetor $v_2 = (2, 0,1)$; e para y = 1 e z = 0, por exemplo, obtém-se outro vetor $v_3= (0, 1,0)$, vetores estes que são vetores próprios linearmente independentes e ortogonais, associados ao mesmo valor próprio $\lambda_2 = \lambda_3. = 0$

b) Normalizando v_1, v_2 e v_3, obtêm-se os vetores próprios ortonormais de A:

$$\mu_1 = \frac{v_1}{|v_1|} = \frac{(1,0,-\,2)}{\sqrt{1^2+0^2+(-2)^2}} = \frac{(1,0,-2)}{\sqrt{5}} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

$$\mu_2 = \frac{v_2}{|v_2|} = \frac{(2,0,1)}{\sqrt{2^2+0^2+1^2}} = \frac{(2,0,1)}{\sqrt{5}} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

$$\mu_3 = \frac{v_3}{|v_3|} = \frac{(0,1,0)}{\sqrt{0^2+1^2+0^2}} = \frac{(0,1,0)}{\sqrt{1}} = (0,1,0)$$

c) Como o conjunto P = {μ_1, μ_2, μ_3} é uma base ortonormal do IR^3, formada por vetores próprios ortonormais de A, a matriz

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \end{bmatrix}$$

diagonaliza A ortogonalmente.

- É importante observar que se $v_2 \,.\, v_3 \neq 0$, seria necessário utilizar o processo de Gram-Schmidt para se obter os vetores próprios ortogonais, isto é, para que $v_2 \,.\, v_3 = 0$ e, em conseqüência, os vetores μ_1, μ_2 e μ_3 serem ortonormais.

Capítulo 6

SIMPLIFICAÇÃO DA EQUAÇÃO GERAL DAS CÔNICAS

6.1 – CÔNICAS

Chama-se *cônica* ao lugar geométrico dos pontos do IR^2 cujas coordenadas (x, y), em relação à base canônica, satisfazem à equação do 2º grau

$$ax^2 + by^2 + 2cxy + dx + ey + f = 0 \qquad (6.1)$$

na qual a, b e c não são todos nulos.

Sendo S = {$e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0, 1)$} a base canônica do R^2 e M (x, y) um ponto qualquer pertencente a uma cônica (uma elipse, por exemplo – Figura 6.1), pode-se escrever

$$v_s = \overrightarrow{0M} = (x, y)$$

6.2 – SIMPLIFICAÇÃO DA EQUAÇÃO GERAL DAS CÔNICAS

Com o propósito de reconhecer uma cônica e simplificar a equação geral que a representa, a equação (6.1) será, a seguir, minuciosamente analisada.

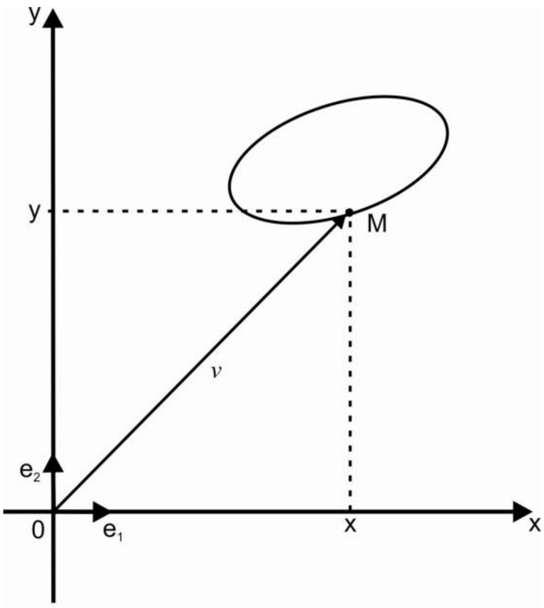


Figura 6.1

a) O polinômio $ax^2 + by^2 + 2\ cxy$, conhecido como *forma quadrática no plano*, pode ser representado por

$$v_s^t\ A\ v_s = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad (1)$$

se se considerar

$$v_s = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ e } A = \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix}$$

Observe-se que à forma quadrática $ax^2 + by^2 + 2cxy$ está sendo associada uma matriz simétrica A.

b) Em 5.5, viu-se que a matriz simétrica A é diagonalizada pela matriz ortogonal P dos vetores próprios ortonormais:

$$P^t\ A\ P = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \qquad (2)$$

sendo λ_1 e λ_2 os valores próprios de A.

Chamando de x' e y' as componentes do vetor v na base ortonormal P = {$\mu_1 = (x_{11}, x_{12})$, $\mu_2 = (x_{21}, x_{22})$, isto é, v_p = (x', y''), tem—se:

$$v_s = P\ v_p \qquad (3)$$

sendo P a matriz de mudança de base de P para S.

A igualdade (3) pode ser escrita na forma matricial

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} \\ x_{12} & x_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \qquad (4)$$

Tendo em vista a igualdade (3), a expressão $v_s^t\ A\ v_s$ pode ser escrita assim:

$$v_s^t\ A\ v_s = (P\ v_P)^t\ A\ (P\ v_P)$$

ou

$$v_s^t\ A\ v_s = (v_s^t\ P^t)\ A\ (P\ v_P)$$

$$v_s^t\ A\ v_s = v_p^t\ = (P^t\ A\ P)\ v_P$$

$$P^t\ A\ P = D$$

$$v_s^t\ A\ v_s = v_p^t\ D\ v_P \qquad (5)$$

Considerando

$v_P = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$

e as igualdades (1) e (2), a igualdade (5) fica:

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \tag{6}$$

ou

$ax^2 + by^2 + 2cxy = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2$

Assim, a forma quadrática $ax^2 + by^2 + 2cxy$ pode ser sempre substituída pela sua equivalente $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2$, chamada *forma canônica* da forma quadrútica no plano ou *forma quadrática diagonalizada*.

c) A equação (6.1), item 6.1, na forma matricial é

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + f = 0 \tag{7}$$

e levando em consideração as igualdades (6) e (4), a igualdade (7) passa a ser

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} \\ x_{12} & x_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + f = 0$$

ou

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + px' + qy' + f = 0, \tag{8}$$

na qual λ_1 e λ_2 são os valores próprios da matriz simétrica A, x' e y' as componentes do vetor v na base $P = \{\mu_1 = (x_{11}, x_{12}), \mu_2 = (x_{21}, x_{22})\}$, $p = d\,x_{11} + e\,x_{12}$ e $q = d\,x_{21} + e\,x_{22}$.

A equação (8) é a equação da cônica dada em (6.1), porém referida ao sistema x' 0 y' cujos eixos são determinados pela base $P = \{\mu_1, \mu_2\}$ (Fig. 6.2.a).

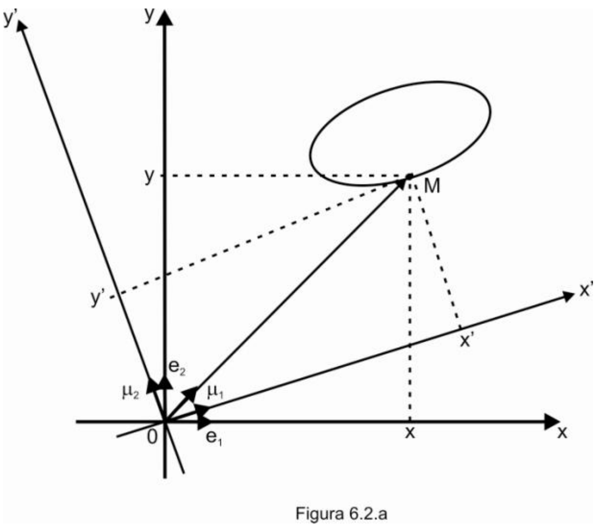


Figura 6.2.a

Não é demais insistir: a equação (6.1), item 6.1, representa a cônica referida ao sistema x 0 y enquanto a equação (8) representa a mesma cônica, referida, porém, ao sistema x’0 y’. Assim, a passagem da equação (6.1) para a (8) ocorreu por uma mudança de referencial, isto é, por uma mudança de base. Assinale-se que esta passagem implicou uma simplificação: enquanto a equação (6.1) apresenta o termo misto emxy, a equação (8) é desprovida dele.

d) A equação (8) pode ainda ser simplificada com o objetivo de obter a *equação reduzida* da cônica. Para tanto, efetua-se uma nova mudança de coordenadas por meio de uma translação do referencial x’0 y’ para um novo X 0’Y (Fig. 6.2 b). Esta mudança de referencial é chamada *translação de eixos*.

A translação de eixos, já estudada em Geometria Analítica[2], será vista apenas na prática por ocasião da solução de problemas.

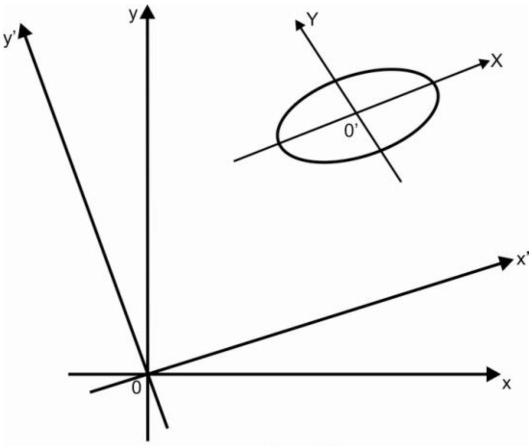


Figura 6.2.b

6. 3 – CLASSIFICAÇÃO DAS CÔNICAS

Antecipando o que a prática vai mostrar, a equação reduzida da cônica, obtida por meio de uma translação de eixos, terá uma forma que dependerá dos valores próprios λ_1 e λ_2 que constam da equação (8). Uma das duas situações seguintes, como se verá nos problemas resolvidos, poderá ocorrer:

1) λ_1 e λ_2 são diferentes de zero.

   Nesse caso, a equação reduzida da cônica será da forma

   $\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 = F$

e representa uma *cônica de centro*. Esta cônica será:

2Ver Geometria Analítica - Alfredo Steinbruch e Paulo Winterle - Editora McGraw-Hill Ltda.

i) do *gênero elipse*, se λ_1 e λ_2 forem de mesmo sinal;

ii) do *gênero hipérbole*, se λ_1 e λ_2 forem de sinais contrários.

2) λ_1 ou λ_2 é igual a zero.

Se $\lambda_1 = 0$, a equação reduzida da cônica será da forma

$\lambda_2 Y^2 + p X = 0$ (2)

Se $\lambda_2 = 0$, ter-se-á

$\lambda_1 X^2 + q Y = 0$

As equações (2) e (3) representam uma *cônica sem centro do gênero parábola.*

6. 4 – PROBLEMAS

Antes de enunciar problemas, um resumo dos itens 6.2 e 6.3 será útil para facilitar a obtenção da equação reduzida de uma cônica e sua classificação:

1º) A equação geral da cônica

$ax^2 + by^2 + 2\,cxy + dx + ey + f = 0$

é representada matricialmente por

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + f = 0$$

que, por *mudança de base*, é tranformada na equação

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} \\ x_{12} & x_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + f = 0$$

ou

$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + p\,x' + f = 0$

2º) Esta última equação, por *translação de eixos*, é transformada numa das equações reduzidas

(1): $\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 = F$

(2): $\lambda_2 Y^2 + p X = 0$

(3): $\lambda_1 X^2 + q Y = 0$

A (1) representa uma cônica de centro (gênero elipse ou hipérbole, conforme λ_1 e λ_2 sejam de mesmo sinal ou de sinais contrários); a (2) e a (3) representam (conforme seja $\lambda_1 = 0$ ou $\lambda_2 = 0$) uma cônica sem centro, gênero parábola.

6.4.1 – Problemas Resolvidos

1) Determinar a equação reduzida e o gênero da cônica representada pela equação

$$2x^2 + 2y^2 + 2xy + 7\sqrt{2}\,x + 5\sqrt{2}\,y + 10 = 0 \qquad (1)$$

Solução

a) 1º) Mudança de base

A equação (1) na forma matricial é

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7\sqrt{2} & 5\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 10 = 0$$

que, por uma mudança de base (mudança de referencial), é transformada na equação

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7\sqrt{2} & 5\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} \\ x_{12} & x_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + 10 = 0 \qquad (2)$$

na qual λ_1 e λ_2 são os valores próprios da matriz simétrica

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

e as colunas

$$\mu_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mu_2 = \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{bmatrix}$$

são os vetores próprios unitários de A, associados a λ_1 e λ_2, respectivamente. Os valores próprios de A são

$$\lambda_1 = 3 \text{ e } \lambda_2 = 1$$

e os vetores próprios de A são $v_1 = (1, 1)$ e $v_2 = (-1, 1)$, sendo os seus respectivos vetores unitários

$$\mu_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad \text{ou} \quad \mu_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$\mu_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad \text{ou} \quad \mu_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

(Os cálculos ficam a cargo do leitor). Logo, a equação (2) fica:

$$[x' \quad y'] \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + [7\sqrt{2} \quad 5\sqrt{2}] \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + 10 = 0$$

ou

$$3x'^2 + y'^2 + 12x' - 2y' + 10 = 0, \qquad (3)$$

que é a equação da cônica (1), referida ao sistema x' 0 y' cujos eixos são suportes de v_1 e v_2 (ou de μ_1 e μ_2) - (Fig. 6.4.1.a).

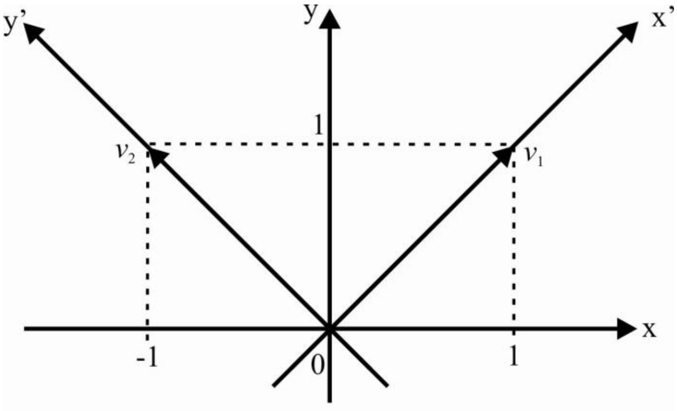


Figura 6.4.1.a

• Os eixos do sistema x' 0 y' tanto podem ser suportes de v_1 ou μ_1 e de v_2 ou μ_2, porque esses vetores têm, respectivamente, a mesma direção e o mesmo sentido.

2º) Translação de eixos

A equação (3), por meio de uma translação de eixos, pode ser simplificada. De fato:

$$3x'^2 + y'^2 + 12x' - 2y' + 10 = 0$$

$$(3x'^2 + 12x') + (y'^2 - 2y') = -10$$

$$3(x'^2 + 4x') + (y'^2 - 2y') = -10$$

$$3(x'^2 + 4x' + 4) + (y'^2 - 2y' + 1) = -10 + 3(4) + 1$$

$$3(x' + 2)^2 + (y' - 1)^2 = 3 \qquad (4)$$

Pelas fórmulas de translação de eixos, fazendo

X = (x’ + 2)

Y = (y’ - 1),

a equação (4) fica

$3X^2 + Y^2 = 3$

ou

$$\frac{X^2}{1} + \frac{Y^2}{3} = 1$$

que é a equação reduzida da cônica (1), referida ao sistema X 0’ Y no qual 0’ (-2, 1), sendo as coordenadas de 0’ medidas no sistema x’ 0 y’.

b) A cônica, representada pela equação (1), é uma elipse cujos semieixos medem 1 e $\sqrt{3}$, estando o eixo maior sobre o eixo dos Y (Fig. 6.4.1.b).

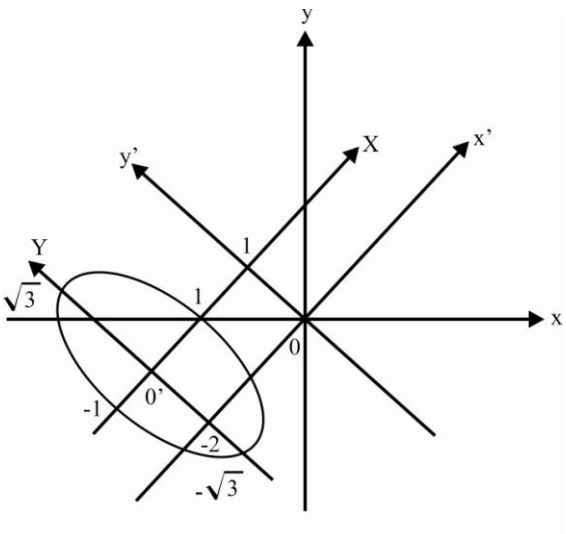


Figura 6.4.1.b

2) Determinar a equação reduzida e o gênero da cônica representada pela equação

$16x^2 - 24\,xy + 9\,y^2 - 15x - 20y + 50 = 0$

Solução

a) 1º) Mudança de base

A equação (1) na forma matricial é

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16 & -12 \\ -12 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -15 & -20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 50 = 0$$

que, por uma mudança de base, é transformada na equação

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -15 & -20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} \\ x_{12} & x_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + 50 = 0 \qquad (2)$$

na qual λ_1 e λ_2 são os valores próprios da matriz simétrica

$$A = \begin{bmatrix} 16 & -12 \\ -12 & 9 \end{bmatrix}$$

e as colunas

$$\mu_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mu_2 = \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{bmatrix}$$

são os vetores próprios unitários de A, associados a λ_1 e λ_2, respectívamente.

Os valores próprios de A são $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 25$ e os vetores próprios de A são $v_1 = (3,4)$ e $v_2 = (4, -3)$, sendo os seus respectivos vetores unitários

$$\mu_1 = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) \;\; ou \;\; \mu_1 = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

$$\mu_2 = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right) \;\; ou \;\; \mu_2 = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} \\ -\frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

(Os cálculos ficam a cargo do leitor). Logo, a equação (2) fica

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -15 & -20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + 50 = 0$$

ou

$$25\, y'^2 - 25x' + 50 = 0$$

ou ainda

$$y'^2 - x' + 2 = 0 \qquad (3)$$

que é a equação da cônica (1), referida ao sistema x' 0 y' cujos eixos são suportes de v_1 e v_2 (ou de μ_1 e μ_2).

2º) Translação de eixos

A equação (3), por meio de uma translação de eixos, pode ser simplificada. De fato:

$$y'^2 - x' + 2 = 0$$

$$y'^2 = x - 2$$

$(y' - 0)^2 = x' - 2$ (4)

Pelas fórmulas de translação de eixos, fazendo

$X = (x' - 2)$

$Y = (y' - 0)$,

a equação (4) fica

$Y^2 = X$

que é a equação reduzida da cônica (1), referida ao sistema X 0' Y no qual 0' (2, 0), sendo as coordenadas de 0' medidas no sistema x' 0 y'.

b) A cônica representada pela equação (1) é uma parábola de parámetro igual a $\frac{1}{2}$, sendo o seu eixo o eixo dos X (Fig. 6.4.1.c).

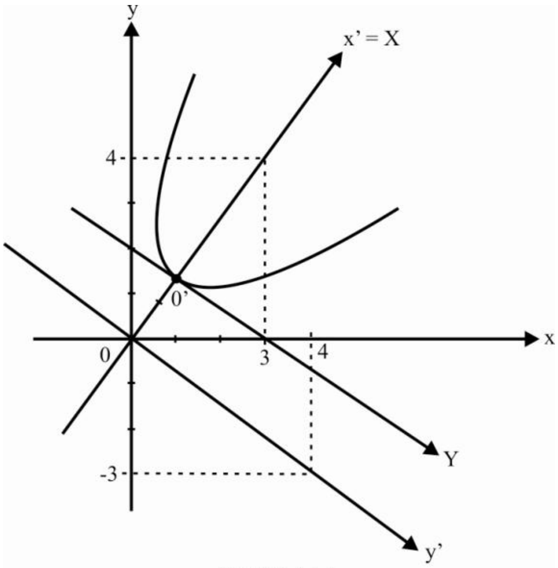


Figura 6.4.1.c

3) Determinar a equação reduzida e o gênero da cônica representada pela equação

$4x^2 - 3y^2 + 24xy - 156 = 0$ (1)

Solução

a) Tendo em vista que essa equação não apresenta os termos de 1º grau em x e y (d = e = 0 na equação (6.1), item 6.1), a solução dependerá somente da mudança de base. A equação (1) na forma matricial é

$$[x \quad y] \begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 12 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - 156 = 0$$

que, por uma mudança de base, se transforma na equação

$$[x' \quad y'] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} - 156 = 0 \qquad (2)$$

na qual λ_1 e λ_2 são os valores próprios da matriz simétrica

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 12 & -3 \end{bmatrix}$$

O cálculo dos vetores próprios (ou dos seus correspondentes vetores unitáríos), como se vê na equação (2), é dispensável para a obtenção da equação reduzida, a não ser que se deseje construir o gráfico da cónica (que é o caso presente, por razões de ordem didática), pois são esses vetores que determinam o novo referencial x’ 0 y’.

Os valores próprios de A são $\lambda_1 = -12$ e $\lambda_2 = 13$, sendo $v_1 = (3, -4)$ e $v_2 = (4,3)$ os vetores próprios associados, respectivamente a λ_1 e λ_2. (Cálculos a cargo do leitor). Logo, a equação (2) fica

$$[x' \quad y'] \begin{bmatrix} -12 & 0 \\ 0 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} - 156 = 0$$

ou

$$-12x'^2 + 13y'^2 = 156$$

ou ainda

$$\frac{y'^2}{12} - \frac{x'^2}{13} = 1$$

que é a equação reduzida da cônica (1) referida ao sistema x’ 0 y’.

b) A cônica representada pela equação é uma hipérbole com eixo real sobre o eixo dos y’ (Fig. 6.4.1.d), sendo o semi-eixo real igual a $\sqrt{12}$.

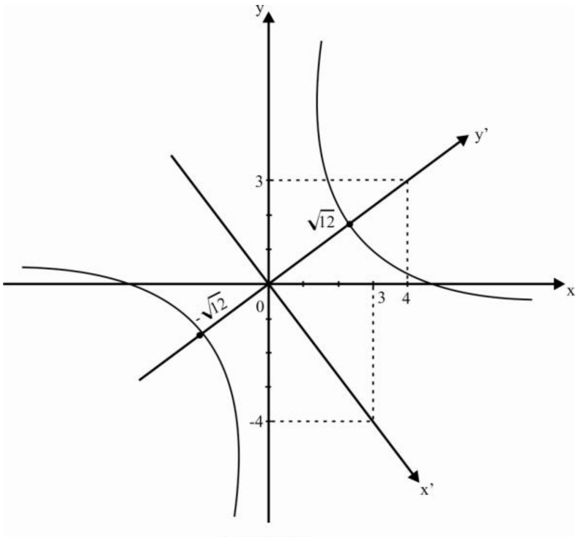


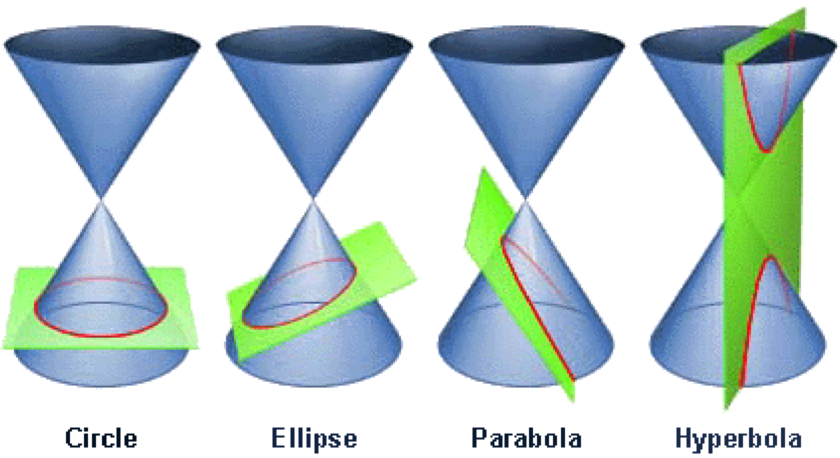
Figura 6.4.1.d

Leitura: A Ocorrência das Cônicas

Extraído do site: http://ccins.camosun.bc.ca/~jbritton/jbconics.htm

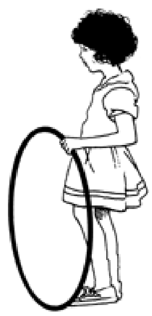
Matemáticos têm o hábito de estudar, apenas por diversão, coisas que parecem não ter utilidade então séculos mais tarde seus estudos adquirem enorme valor científico.

Não há melhor exemplo disso que o trabalho feito pelos gregos nas curvas conhecidas como cônicas: a elipse, a parábola e a hipérbole. Elas foram estudadas primeiramente pelos discípulos de Platão. Não houve aplicação científica importante para as cônicas até o século 17 quando Kepler descobriu que os planetas se movem em trajetória elíptica e Galileu provou que projéteis viajam em trajetórias parabólicas. Apolônio de Perga, geômetra grego do século 3 A.C., escreveu o maior tratado sobre essas curvas. No seu trabalho intitulado “Cônicas” foi o primeiro a mostrar como todas as três curvas, juntamente com o círculo, poderiam ser obtidas através da interseção de um plano com dois cones conforme a figura abaixo.



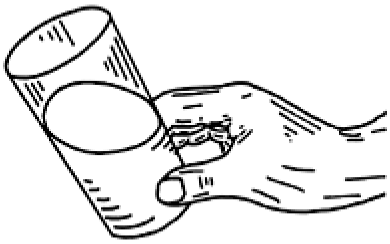
A elipse

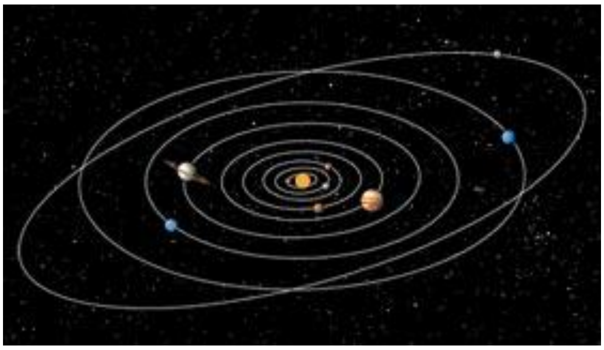
Embora não tão simples quanto o círculo, a elipse é sem dúvida a curva mais vista no dia-a-dia. O motivo é que todo círculo visto obliquamente parece elíptico.



Qualquer cilindro cortado inclinadamente revelará uma elipse na seção transversal (como visto no Planetário Tycho Brahe em Copenhagen).

Se você inclinar um copo de água, a superfície vai adquirir um contorno elíptico.





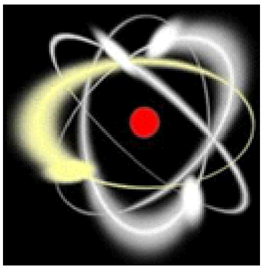
Os primeiros astrônomos gregos achavam que os planetas se moviam em órbitas circulares em torno da Terra (que era considerada estática).

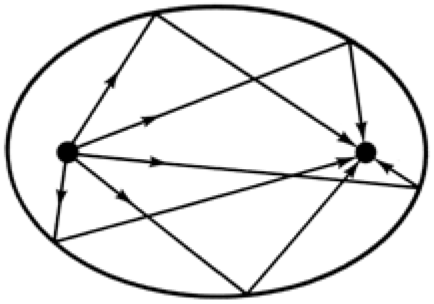
No século 17, Johannes Kepler descobriu que cada planeta viaja ao redor do sol em uma órbita elíptica. Nesse caso, o sol está em um dos seus focos.

As órbitas da lua e dos satélites artificiais da Terra são também elípticas como também são as trajetórias dos cometas em órbita permanente ao redor do sol.

O cometa Halley leva aproximadamente 76 anos para viajar ao redor do sol. Edmund Halley viu o cometa em 1682 e previu corretamente o seu retorno em 1759. Embora ele não tivesse tido oportunidade de viver para ver sua previsão se realizar, o cometa recebeu o seu nome.

Numa escala muito menor, os elétrons de um átomo se movem em órbitas aproximadamente elípticas com o núcleo num dos seus focos.

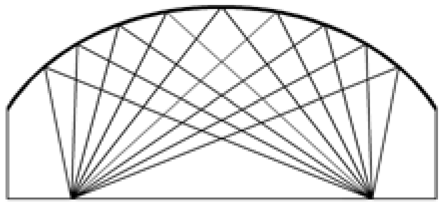




A elipse tem uma propriedade importante que é usada na reflexão da luz e de ondas sonoras. Qualquer luz ou sinal que é emitido num dos focos será refletido para o outro foco.

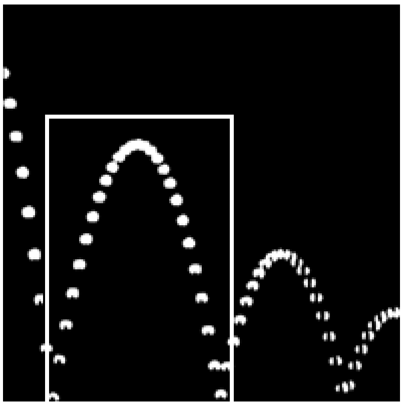
Esse princípio é usado em litotripsia, um procedimento médico para tratar pedra nos rins. O paciente é colocado num tanque de água elíptico de forma a posicionar a pedra num dos focos. Então, ondas de choque de alta freqüência geradas no outro foco são concentradas na pedra pulverizando-a.

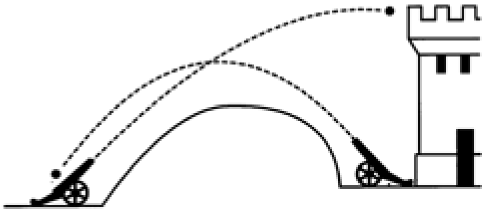
O princípio é também usado na construção de edificações como a Catedral de São Paulo em Londres. Se uma pessoa sussurra perto de um dos seus focos ela poderá ser ouvida no outro foco, embora não possa ser ouvida nas suas proximidades.



A Parábola

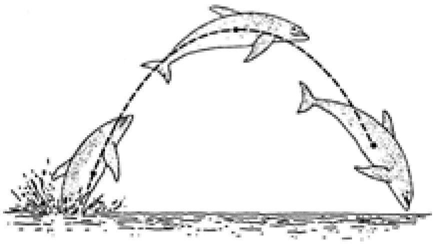
Uma das mais conhecidas ocorrências da parábola é a trajetória de uma bola de golfe sujeita à gravidade quando se despreza o atrito com o ar.

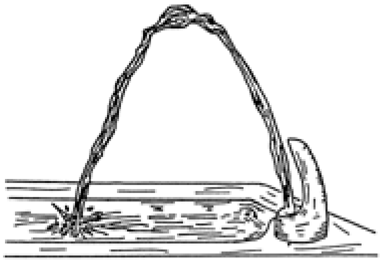




A descoberta, por Galileu no século 17, que a trajetória de projéteis é parabólica tornou possível a determinação da trajetória das balas de canhão quando lançadas num determinado ângulo.

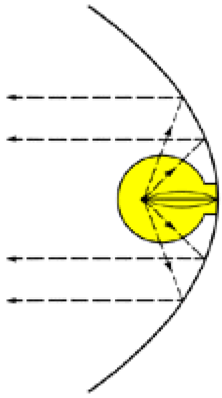
O movimento do centro de gravidade dos corpos como no salto dos golfinhos é descrito por uma parábola.





A maneira mais simples de visualizar a trajetória parabólica de um projétil é observar o esguicho de água de um bebedouro.

Parábolas exibem propriedades refletivas interessantes. Se uma fonte de luz é posicionada no foco de um espelho parabólico, a luz será refletida em raios paralelos ao seu eixo formando um feixe de luz. Por causa dessa propriedade, superfícies parabólicas são geralmente usadas nos faróis de carros e motos.

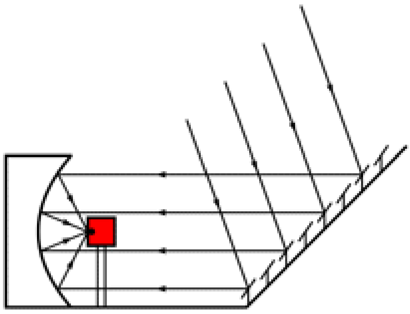


O princípio oposto é usado nos telescópios e em antenas que recebem ondas de rádio e televisão vindas do espaço. O feixe vem na direção da superfície parabólica e é enviado para o ponto focal.

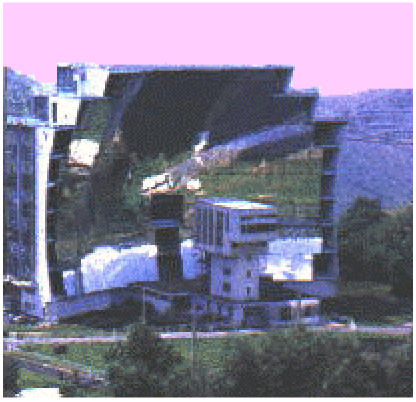
Ondas de calor, assim como a luz e ondas sonoras, podem ser refletidas para o ponto focal de uma superfície parabólica.

Se um material inflamável for posicionado no foco de um refletor parabólico direcionado para o sol, então o material pode pegar fogo (*a palavra foco vem do latim focus e significa local de fogo*).

Um forno solar produz calor focando a luz do sol através de um arranjo como mostrado na figura ao lado. O movimento do conjunto de espelhos é computadorizado e permite seguir a posição do sol durante o dia.

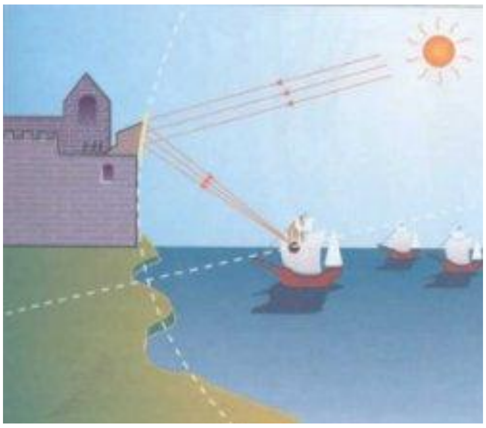


A figura ao lado mostra um concentrador parabólico de raios solares para altas temperaturas (80^o a 250^oC) usado para fins de secagem, pasteurização, produção de vapor, etc.



Existe um enorme concentrador solar na França (nos Montes Pirineus) com 54 m de comprimento por 40 m de altura constituído por 9500 espelhos de 45cm de lado.

No foco do espelho atinge-se uma temperatura de aproximadamente 3800^oC. Estas temperaturas são aproveitadas para conversões de energia, fusão, etc.



Existe uma história que Arquimedes, durante o cerco de Siracusa, conseguiu incendiar navios romanos usando espelhos que enchiam de pavor os invasores.

Arquimedes, que já conhecia as propriedades das cônicas, recorreu a um espelho parabólico colocado de modo a concentrar os raios de sol num só ponto, desviando-o depois para uma embarcação romana que começava a pegar fogo.

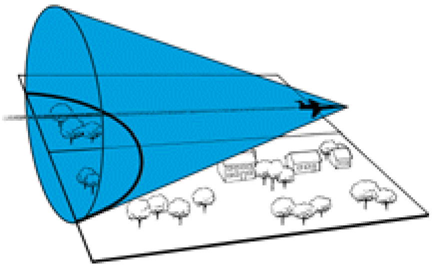
Os vôos parabólicos são praticamente o único meio na Terra capaz de reproduzir o efeito da gravidade zero, com tripulantes humanos a bordo.

Durante um destes vôos, o Airbus “Zero-G” efetua primeiro uma subida vertiginosa de 7600m, o que gera uma aceleração de 1.8g (ou seja, 1.8 vezes a aceleração da gravidade no solo) durante 20 segundos.

O piloto reduz então o impulso do motor a praticamente zero, fazendo com que o avião descreva uma parábola. O avião continua a subir até atingir o ponto de inflexão da parábola, a 8500 metros, e logo depois começa a descer.

A descida demora cerca de 20 segundos, durante os quais os passageiros flutuam, devido à queda-livre do avião. Quando o ângulo com a horizontal atinge os 45°, o piloto acelera de novo e o avião retoma o vôo horizontal estável. Estas manobras são repetidas 30 vezes por vôo.

A Hipérbole



A onda de choque de uma explosão à velocidade do som tem a forma de um cone e a interseção com o solo tem a forma de parte de uma hipérbole. A onda de choque atinge todos os pontos da hipérbole ao mesmo tempo de forma que todas as pessoas em diferentes locais ao longo da curva escutam ao mesmo tempo.

A revolução de uma hipérbole em torno do seu eixo forma uma superfície chamada hiperbolóide. A enorme chaminé de uma usina nuclear tem a forma de um hiperbolóide assim como a arquitetura do planetário James McDonnell.

Seção 1 – Espaços Vetoriais

Definição 1. Um espaço vetorial E é um conjunto cujos elementos (denominados vetores) podem ser somados ou multiplicados por escalares (números reais).Estas operações de adição e multiplicação devem satisfazer:

comutatividade: $v_1 + v_2 = v_2 + v_1$

Associatividade: $(v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3)\, e\, (c_1 c_2)v_1 = c_1(c_1 v_1)$

Distributividade: $c(v_1 + v_2) = cv_1 + cv_2\, e\, (c_1 + c_2)v = c_1 v + c_2 v$

Vetor nulo: $v + \vec{0} = v$ (para um vetor $\vec{0}$ independente de v)

Inverso aditivo: $v + (-v) = \vec{0}$ (para um vetor –vque depende de v)

Multiplicação por 1:*1v=v*

Para quais quer vetores $v, v_1, v_2, v_3 \in E$ e qualquer escalares $c, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Exemplo 2. Os conjuntos $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \ldots \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^\infty$ (o conjunto de todas as seqüências infinitas
de números reais), F $(\mathbb{R};\mathbb{R})$ (o conjunto de todas as funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, isto é, funções de uma variável)são espaços vetoriais.

Propriedade 3. Se E é um espaço vetorial, para quais quer $u, v, w \in E\, e\, \alpha \in R$,valem

$$0.v = \vec{0}; \alpha.\vec{0} = \vec{0}; (-1).v = -v$$
$$u + v = u + w \Rightarrow v = w(\text{"}lei\, do\, coret\text{"})$$

Exercícios da seção 1

1.1 Dada as matrizes

$$a = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$
$$c = \begin{bmatrix} -4 & -8 & 4 \\ 12 & 13 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) calcule a matriz 3a -2b+c
(b) Ache números α e β , ambos diferentes de zero, tais que $\alpha a + \beta b + c$ tenha a primeira coluna nula.

1.2. Mostre que as operações definidas no texto fazem realmente dos conjuntos

$\mathbb{R}^n$,M$(m\,x\,n)$ e $F(X;\mathbb{R})$ espaços vetoriais.

1.3. Ache o valor de t que torna a matriz abaixo igual a matriz nula:

$$\begin{bmatrix} t^2-1 & t^2-t \\ t^3-1 & t^2-3t+2 \end{bmatrix}$$

1.4.determine os vetores $u,v \in R^4$ sabendo que as coordenadas de u são todas iguais, a ultima coordenada de v *é* igual a *3 e u+v=(1,2,3,4).*

1.5. Dados *u=(1,2,3), v=(3,2,0) e w=(2,0,0),*ache números α , β

1.6. Dados os vetores $v_1=(1,2,1), v_2=(2,1,2), v_3=(3,3,2)\, e\, v_4$ $=(1,5,-1)\, em\, \mathbb{R}^3$,
determine os vetores
$u=v_1-3v_2+2v_3-v_4, v$
$=v_1+v_2-v_3-v_4\, e\, w$.
$=v_3-\frac{1}{3}v_2-\frac{4}{3}v_1$

1.7.Considere a seguinte afirmação: "Num espaço vetorial E existe um único vetor nulo e cada elemento de E possui um único universo". Qual fato demostrado nessa seção assegura que esta afirmação e verdadeira?

1.8. Use os axiomas do espaço vetorial E para provar que, se $v \in E\, e\, n$ é um numero natural então *n.v = v+...+v(n parcelas).*

1.9 Sejam *u.v* vetores não nulos do espaço vetorial E. Prove que *v* é múltiplo de u se , e somente se, u é múltiplo de v. Que se pode dizer caso não suponhamos $u\, e\, v$ ambos diferentes de zero ?

1.10.Sejam $u=(x_1,...,x_n)\, e\ v=(y_1,...,y_n)$ vetores em $\mathbb{R}^n$. Prove que um deles é múltiplo do outro se, e somente se, $x_i y_i = x_i y_i$ para quaisquer $i, j=1,...,n.$

1.11.Use as relações $2(u+v)=2u+2v, 2w=w+w$ para prover que a comutatividade $u+v=v+u$ pode ser demonstrada a partir dos demais axiomas de espaço vetorial.

1.12. Em $\mathbb{R}^2$,mantenhamos a definição do produto αv de um numero por um vetor modifiquemos, de 3 maneiras diferentes, a definição da soma $u+v$ dos vetores $u=(x,y)\, e\, v=(x',y')$. Em cada tentativa, dizer quais axiomas de espaço vetorial continuam sólidos e quais são violados:

(1) $u+v=(x+y', x'+y)$

(2) $u+v=(xx', yy');$

(3) $u+y=(3x+3x', 5x+5x')$

1.13. Defina a media $u*v$ entre dois vetores u,v no espaço vetorial E pondo $u*v=\frac{1}{2}u+\frac{1}{2}v$ .Prove que $(u*v)*w=$ $u*(u*w)$ se, e somente se, u = w.

1.14.Dados os espaços vetoriais $E_1\, e\, E_2$,considere o conjunto E= $E_1\, x\, E_2$ (Produto cartesiano de $E_1\, por\, E_2$), cujos elementos são os pares ordenados $v=(v_1,v_2)$ com $v_1 \in E_1\, e\, v_2 \in E_2$ .Defina a operação que tornem E um espaço vetorial. Verifique a validez de cada um dos axiomas e mostre que sua definição se estende para o caso de n espaços vetoriais $E_1...E_n$, ou mesmo de uma freqüência infinita $E_1, E_2..., E_n, ...$

1.15.Sejam X um conjunto qualquer e E um espaço vetorial. Mostre que, com as definições naturais, o conjunto

F(X;E)das funções $f : X \to E$ se torna um espaço vetorial. Indentifique os casos particulares em que $X = \{1,...,n\}, X = \mathbb{N}, X = A \times B,$ onde $A = \{1,...,m\}\ e\ B = \{1,...,n\}$.

1.16. Dados os vetores $u = (1,2,3), v = (3,2,1)$ $e\, w = (-3,2,7)\ em\,\mathbb{R}^3$, obtenha números $\alpha, \beta\ tais\, que\ w = \alpha u + \beta v$. Quantas soluções admite este problema?

1.17. Sejam $u = (1,1), v = (1,2)\, e\ w = (2,1)$. Ache números $a, b, c,\ a', b', c'$, todos não-nulos ,tais que $au + bv + cw = a'u + b'v + c'w,\ com$ $a' \neq a', b' \neq, c' \neq c.$

1.18.Sejam E uma espaço vetorial e $u, v \in E$. O segmento de reta de extremidades u, v é, por definição , o conjunto $[u, v] = \{(1-t)u + tv; 0 \le t \le 1\}$.

Um conjunto $X \subset E$ chama-se convexo quando $u, v \in X \Rightarrow [u, v] \subset X$. (Ou seja: o segmento de reta que liga dois pontos quaisquer de X está contido em X .) prove :

(a) A interseção $X_1 \cap .... \cap X_m$ de conjuntos convexos $X_1, ..., X_m \subset E$ É um conjunto convexo.

(b) Dados $a, b, c \in \mathbb{R}$ o conjunto X= $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; ax + by \le c\}$ é convexo em $\mathbb{R}^2$.

(c) O conjunto Y $= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; a \le x \le b, c < y < d\}$ é convexo em $\mathbb{R}^3$.

(d) Seja $X \subset E$ convexo . Se *r,s,t* são números reais ≥ 0 tais que $r+s+t = 1$ então $u, v, w \in X \Rightarrow ru + sv + ... + t_k v_k$,onde $t_1, ..., t_k\, são \ge 0\, e\, t_1 + ... + t_k = 1$ chama se uma combinação convexa dos vetores $v_1, ..., v_k \in X$ ainda pertence a X.

1.19. Prove que disco $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \le 1\}$ é um conjunto convexo.

1.20. um subconjunto C do espaço vetorial E chama-se um cone quando, para todo $v \in C\, e\, todo\, t > 0, tem\, se\, tv \in C$. Prove

(a) O conjunto dos vetores $v \in \mathbb{R}^n$ que tem exatamente k *coordenadas positivas* $(0 \le k \le n)$ é um cone.

(b) O o conjunto das funções $f : X \to \mathbb{R}^n$ que assumem valores negativos em todos os pontos de um subconjunto fixado $Y \subset X$ e um cone em *F(X;* $\mathbb{R}$).

(c) Um cone $C \subset E$ e um conjunto convexo se, e somente se, $u, v, \in C \Rightarrow u + v \in C$.

(d) A interseção e a reunião de uma família qualquer de cones são ainda cones.

1.21. Dado um subconjunto X no espaço vetorial E,seja C(X) o conjunto das combinações convexas $t_1 v_1 + ... + t_k v_k\ (t_1 \ge 0, \sum ti = 1)$ dos elementos de X. Prove que C(X) é um conjunto convexo, que $X \subset C(X)$ e que se C' é qualquer subconjunto convexo de E contendo X então $C' \supset C(X)$. (Por esse motivo, diz se que C(X) é o menor subconjunto convexo de E que contem X. C(X) chama se a envoltório convexa do conjunto X.)

Seção 2 Subespaços

Subespaço e subespaço gerado
Definição 4. Um subespaço vetorial F de um espaço vetorial E é um subconjunto não-vazio de E que também é um espaço vetorial.

Comentário 5. seja F $\subseteq$ E não-vazio. Então F e um subespaço de E se, e somente se F for fechado com a relação da adição de vetores e multiplicação por escalares. Em outras palavras, mostrar que um subconjunto

F é subespaço de E é equivalente a mostrar que

$$\vec{0} \in F$$
$$v, w \in F \Rightarrow v + w \in F$$
$$v \in F, \alpha v \in F$$

Exemplo 6. Os únicos subespaços de $\mathbb{R}^2$ são $\{0\}$, retas passando pela origem e o $\mathbb{R}^2$ todos. Os únicos subespaços de $\mathbb{R}^3$ são$\{0\}$, retas passando pela origem, planos passando pela origem e o $\mathbb{R}^3$ todo.

Exemplo 7. O primeiro quadrante em $\mathbb{R}^2$ não e um subespaço pois não é fechado em relação com a adição.

Definição 8. dado X$\subseteq$E, o conjunto S(X) das combinações lineares dos vetores de X, isto é,

$$S(X)\left\{\sum_{i=1}^{n} civi \text{ I } ci \in \mathbb{R}, vi \in X\right\}$$

é um sub espaço de E, denominado o subespaço gerado por X.

Soma:

Definição 9. dados X,Y$\subseteq$E, definimos a soma de X e Y por

$$X + Y = \{v + w I v \in X, w \in Y\}$$

Propriedade 10. Se F^1 e F^2 são sub espaço de E, então

$$S(F^1 \cup F^2) = F^1 + F^2$$

Definição 11. Dizemos que a soma de dois subespaço vetoriais F^1 e F^2 e direta quando $F^1 \cap F^2 = \{0\}$.Neste caso, escrevemos $F^1 \oplus F^2$ ao invés de $F^1 + F^2$.

Variedade Afim

Definição 12. Dizemos que V $\subseteq$ E é uma variedade afim quando a Reta unindo quaisquer dois pontos de V está em V , isto é

$$\chi , y \in V ; t \in \mathbb{R} \Rightarrow t\chi + (1-t)y \in V$$

Propriedade 13. Todos variedade afim V $\subseteq$ E não-vazia é um sub-Espaço F transladado, isto é

$$V = v_0 + F = \{v_0 + v \,|\, v \in F\}$$

onde v_0 é um vetor fixo qualquer de V .

Exercícios da seção 2

2.1. Seja $\mathbb{R}^{(00)}$ o subconjunto de $\mathbb{R}^{(00)}$ formado pelas seqüências $v = (x_1, x_2, ...x_n, ...)$ que têm apenas um número finito de termos x_n diferentes de zero. Mostre que $\mathbb{R}^{(00)}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^{(00)}$ e que as seqüências que têm um único termo não-nulo constituem um conjunto de geradores para $\mathbb{R}^{(00)}$.

2.2. Use o índice deste livro para localizar a definição de matriz triangular. Mostre que o conjunto F_1 das matrizes triangulares inferiores e o conjunto F_2 das matrizes triangulares superiores são subespaço vetoriais de $M(n\text{X}n)$,que $M(n\text{X}n) = F_1 + F_2$ e que não se tem $M(n\text{X}n) = F_1 \oplus F_2$.

2.3. Seja $E = F(\mathbb{R};\mathbb{R})$. Para $X \subset \mathbb{R}$ qualquer, ponhamos $N(X) = \{\varphi \in E; \varphi(x) = 0$ para todo $x \in X\}$. Prove:

(a) para todo $X \subset \mathbb{R}$,N(X) é um subespaço vetorial de E

(b) $X \subset Y \Rightarrow N(Y) \subset N(X)$

(c) $N(X \cup Y) = (N(X) \cap N(Y)$

(d) $N(X) = \{0\} \Leftrightarrow X = \mathbb{R}$

(e) $N(X \cap Y) = N(X) + N(Y)$

(f) $N(X) \oplus N(Y) = E \Leftrightarrow Y = \mathbb{R} - X$.

2.4. No espaço vetorial E = $\mp(\mathbb{R};\mathbb{R})$ sejam:

F^1 = conjunto das funções $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que se anulam em todos os pontos do intervalo [0,1]

F^2 = conjunto das funções g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que se anulam em todos os pontos do intervalo [2,3]

Mostre que F_1 e F_2 são subespaços vetoriais de E, que E = $F_1 + F_2$ e que não tem E = $F_1 \oplus F_2$. $\subset$

2.5 Considere os subespaços F_1, $\subset F_2$ $\mathbb{R}^3$ assim definidos: F_1 é o conjunto de todos os vetores v = (x,x,x)que tem as três coordenadas iguais e F_2 é o conjunto de todos os vetores w =

$(x,y,0)$ que tem a ultima coordenada igual a zero. Mostre que $\mathbb{R}^3 = F_1 \oplus F_2$.

2.6 Dados $u = (1,2)$ e $v = (-1,2)$ sejam F_1 e F_2 respectivamente as retas que passam pela origem em $\mathbb{R}^2$ e contem *u e v. Mostre que* $\mathbb{R}^2 = F_1 \oplus F_2$.

2.7. Sejam $F_1 = S(u_1, v_1)\, e\, F_2 = S(u_2, v_2)$ os subespaços de $\mathbb{R}^3$ gerados pelos vetores $u_1 = (0,1,-2), v_1 = (1,1,1), u_2 = (-1,0,3)\, e\, v_2 = (2,-1,0)$. Ache números $a_1, b_1, c_1\, e\, a_2, b_2, c_2$ tais que se tenha:

$F_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; a_1x + b_1y + c_1z = 0\}$

$F_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; a_2x + b_2y + c_2z = 0\}$

2.8. No exercício anterior, mostre que $u_2 \notin F_1$ e que $F_1 + F_2 = \mathbb{R}^3$. Exiba um vetor não nulo $w \in F_1 \cap F_2$ e conclua que não se tem $\mathbb{R}^3 = F_1 \oplus F_2$.

2.9. Prove que $S(X)$ é a interseção de todos os subespaços vetoriais que contém o conjunto $X \subset E$.

2.10. Exiba três vetores $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ com as seguintes propriedades: nenhum deles é múltiplo do outro, nenhuma das coordenadas é igual a zero e $\mathbb{R}^3$ não é gerado por eles .

2.11. Seja F o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vetores $u = (1,1,1)$ e $v = (1,-1,-1)$. Ache números a,b,c com a seguinte propriedade: um vetor $w = (x,y,z)$ pertence a F se , e somente se, $ax + by + cz = 0$.

2.12. Exprime o vetor (1,-3,10) como combinação linear dos vetores $u = (1,0,0), v = (1,1,0)\, e\, w = (2-3,5)$.

2.13. Mostre que a matriz d = $\begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -6 & 16 \end{bmatrix}$ pode ser escrita como com- binação linear das matrizes

a = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$,

b = $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ e

c = $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$.

2.14. Assinale V(erdadeiro) ou F (also) :

( ) O vetor $w = (1,-1,2)$ pertence ao subespaço gerado por u = (1,2,3) e $v = (3,2,1)$.

( ) Qualquer vetor em $\mathbb{R}^3$ pode ser expresso como combinação linear dos vetores $u = (-5,3,2)\, e\, v = (3,-1,3)$.

( ) Se $X \subset Y$ então $S(X) \subset S(Y)$

( ) Se $S(X) \subset S(Y)$ então $X \subset Y$.

( ) Se uma variedade afim $V \subset E$ contém o vetor zero então V é um subespaço vetorial de E .

2.15. Quais dos seguintes subconjuntos são subespaços vetoriais?

(a) O conjunto $X \subset \mathbb{R}^3$ formado pelos vetores $v = (x,y,z)$ tais que $z = 3x\, e\, x = 2y$.

(b) O conjunto $Y \subset \mathbb{R}^3$ formado pelos vetores $v = (x,y,z)$ tais que $xy = 0$.

(c) Conjunto Z das matrizes 2×3 nas quais alguma coluna é formada Por elementos iguais

(d) O conjunto $F \subset F\,(\mathbb{R};\mathbb{R})$ formado pelas funções $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais Que $F\,(x+1) = f\,(x)$ para todo x ∈ $\mathbb{R}$

(e) O conjunto $L \subset \mathbb{R}^n$ dos vetores $v = (x, 2x, ..., nx)$, onde $x \in \mathbb{R}$ *é* Arbitrário.

(f) O conjunto dos vetores $v \in \mathbb{R}^5$ que têm duas ou mais coordenadas Nulas.

(g) O conjunto dos vetores de $\mathbb{R}^3$ que têm pelo menos uma coordenada ≥ 0.

2.16. Exprime,em termos das operações num espaço vetorial E, uma condição para que $u, v, w \in E$ sejam colineares (isto é, pertençam a uma mesma reta, que pode conter ou não o vetor zero).

2.17. Obtenha números a, b, c, d tais que a variedade afim (plano) de $\mathbb{R}^3$ definida pelo equação $ax + by + cz = d$ contenha os pontos $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ e $e_3 = (0,0,1)$.

2.18. Prove que, na definição de subespaço vetorial,a condição "$0 \in F$"pode ser substituída por "$F \neq \varnothing$".

2.19. Quais dos seguintes conjuntos são subespaços vetoriais ?

(a) o conjunto dos vetores de $\mathbb{R}^n$ cujas coordenadas formam uma pro- gressão aritmética .

(b) Os vetores de $\mathbb{R}^n$ cujas coordenadas formam progressão geométrica .

(c) Os vetores de $\mathbb{R}^n$ cujas coordenadas formam uma progressão geométrica de razão fixada.

(d) Os vetores de $\mathbb{R}^n$ cuja as coordenadas formam uma progressão geométrica de razão fixada.

(e) Os vetores de $\mathbb{R}^n$ cujas primeiras *k* coordenadas são iguais.

(f) Os vetores de $\mathbb{R}^n$ que tem *k* coordenadas iguais.

(g) As seqüências $x_n \in \mathbb{R}^\infty$ tais que $x_n + 2 - 3x_n = x_n + 1$para todo n.

(h) Os vetores *(x,y)* $\in \mathbb{R}^2$ tais que $x^2 + 3x = y^2 + 3y$

(i) As funções $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ tais que $f'' - 2f' + f = 0$

2.20. Sejam v_1, v_2, v_3 os vetores-linha e w_1, w_2, w_3 os vetores colunas da matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Verifique as relações . $v_3 = 2v_2 - v_1, w_3 = 2w_2 - w_1$. Exprima w_1 e w_2 como Combinações lineares de v_1 e v_2 ,e vice versa. Conclua que os vetores linha e os vetores e os vetores-coluna da matriz dada geram o mesmo subespaço de $\mathbb{R}^3$

2.21. Dê exemplo de uma matriz 3x3 cujos vetores-linha geram um subespaço de $\mathbb{R}^3$ diferente daquele gerado pelos vetores-coluna.

2.22. Prove que a reunião de dois subespaços vetoriais de *E* é um subespaço vetorial se, e somente se, um deles estiver contido no outro.

2.23. A partir da definição, prove que, dados os números $a_1,...,a_n,c,$ o conjunto *V* dos vetores *x* = $(x_1,...,x_n,)\in\mathbb{R}^n$ tais que $a_1x_1+...+a_n,x_n=c$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$ se, e somente se, *c=0*. Prove a afirmação feita no texto de que *V ê uma variedade afim.*

2.24 .Seja Fum subespaço vetorial de E. Assinale V(verdadeira) ou F (falso)
( ) *Se* $u\notin F$ *e* $v\notin F$ *então* $u+v\notin F$
( ) Se $u\notin F$ *e* $a\neq 0$ *então* $\alpha u\notin F$

2.25. Diz-se que um subconjunto X de um espaço vetorial E é simétrico quando $v\in X\Rightarrow -v\in X$ .Prove que um cone convexo simétrico e não vazio e um subespaço vetorial de E.

2.26. de exemplo de um cone convexo que não seja simétrico e um cone simétrico que não seja convexo.

2.27. Uma matriz quadrada *a=[aij]*chama se simétrica(respec. Anti-simétrica) quando *aij=aij* (respect. *Aij=-aij)* para todo *i* e todo *j*. Prove que o conjunto S das matrizes simétricas e o conjunto A das matrizes anti-simetricas *n x n* são subespaços vetoriais da M(*n x n)* e que se tem M(*n x n)* = S $\oplus$ A .

2.28. Seja E = F($\mathbb{R}$;$\mathbb{R}$).fixada *q:* $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,mostre que o conjunto F de todas as funções *f*: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tais que *f*(q(*x*)) = *f*(*x*) é um subespaço vetorial de E. para qual função q tem –se F = conjunto das funções periódicas de período a ? E se fosse q(*f(x)) = f(x)?* Ou *f(q(x)) = q(x)?.*

2.29. prove que os subespaços vetoriais gerados por um cone convexo C$\subset$E é o conjunto das diferenças *u – v*, onde *u*,*v* $\in$C. Conclua que o
Conjunto das funções *f:X*$\to\mathbb{R}$ que só assumem valores positivos é um
Conjunto de geradores de $F(X;\mathbb{R})$.

2.30. Diz se que uma função $f:X\to\mathbb{R}$ é limitado quando existe $k>0$ (dependendo de *f*) tal que I *f(x)*I $\leq k$ para todo $x\in X$. Prove que o conjunto das funções limitadas é um subespaço vetorial de $F(X;\mathbb{R})$,o qual é gerado pelas funções limitadas positivas .

2.31. Um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$ gerado por dois vetores não-colinea-res u,v chama-se um plano . Use um argumento geométrico para provar que o vetor $w\in\mathbb{R}^3$ não pertence ao plano gerado por *u e v então u,v e w geram*$\mathbb{R}^3$

2.32. Mostre que o vetor b = (1,2,2) não e combinação linear dos vetores v_1 = *(1,1,2) e* v_2=(1,2,1). A partir daí, formule um sistema linear de 3 equações com 2 incógnitas, que não possui solução e que tem o vetor *b* como o segundo membro.

2.33. Sejam $F_1,...F_k\subset E$ subespaços vetoriais. Prove:
(1) O subespaço gerado pela união
$F_1\cup...\cup F_k$ é o conjunto
$F_1+...+F_k$ das somas
$x_1\cup...\cup x_k$,onde
$x_1\in F_1,...x_k\in F_k$.

(2) As sequintes afirmações são equivalentes:

(a) Cada $x \in F_1 + ... + F_k$ se escreve de modo único como soma $x = x_1 + ... + x_k$

(b) Para cada *j=1,..,k tem se* $Fj \cap (F_1 + ... + F_{j-1} + F_{j+1} + ... + F_k)$ ={0}.

Quando uma das condições (a) ou (b) vale, escreve - se $F_1 \oplus ... \oplus F_k$ em vez de $F_1 + ... + F_k$ e diz se que este subespaço é a soma direta de $F_1 ... F_k$.

2.34. Seja $E = F_1 \oplus F_2 = G_1 \oplus G_2 . Se F_1 \subset G_1 e F_2 \subset G_{2,}$ prove que $F_1 = G_1 \, e \, F_2 = G_2$.

2.35. Sejam E, F espaços vetoriais. Uma função *f:* $E \rightarrow F$ chama se par (respc, impar) quando *f* (-*v*) = *f*(*v*) (respect. *F(-v)* = *-f(v))* para todo $v \in E$ .Prove.

(a) O conjunto A das funções pares e o conjunto B das funções ímpares são sub espaços vetoriais de F(E,F) (vide Exercicio1.15) e vale F(E.F) = A$\oplus$B.

(b) Alem do conjunto A, dos polinômios pares, e B, dos polinômios Impares, considere também o conjunto A' dos polinômios da forma *p(x)*= $\sum a_i x^{2i}$ que só contem expoentes pares e o conjunto B' dos polinômios da forma *q(x)* = $\sum a_i x^{2i+1}$, que só contem expoentes impares. Prove que A' e B' são subespaços vetoriais do espaço ρ de todos os polinômios, que $A' \subset A, B' \subset B e \rho = A' \oplus B'$ .Conclua que A=A'e B = B'.

2.36. Para todo $n \in \mathbb{N}$ seja Q_n o conjunto dos polinômios (de graus arbitrários) que são divisiveis por x^n .prove que Q e um sub espaço vetorial de P.Ache um subespaço F $\subset$P tal que P = $\oplus Q_n$.

2.37. dado X$\subset$E, seja Y o conjunto obtido de X substituindo um dos seus elementos *v* por $v + \alpha u$, onde $u \in X \, e \, \alpha \in \mathbb{R}$.Prove que X e Y geram o mesmo subespaço vetorial do E. conclua daí que os conjuntos $\{v1, ..., v_k\} \subset E e \{v_1, v_2 - v_1, ..., v_k - v_1\} \subset E$ geram o mesmo subespaço vetorial de E .

2.38. Prove que a reunião de três subespaço vetoriais só pode ser um subespaço vetorial quando um deles contém os outros dois .

2.39. Sejam F_1, F_2 subespaços vetoriais de E. Se existir algum $a \in E$ tal que $a + F_1 \subset F_2$, prove que $F_1 \subset F_2$.

2.40. Seja $V \subset E$ uma variedade afim. Dados $v_1, ... v_m \in V e$ $a_1, ..., a_m \in \mathbb{R} \; com \; a_1 + ... + a_m = 1$, prove que $a_1 v_1 + ... + a_m v_m \in V$.

2.41. Para todo subespaço vetorial $F \subset \mathbb{R}^n$, prove que existe um sub-espaço $G \subset \mathbb{R}^n \; tal \, que \, \mathbb{R}^n = F \oplus G$.

2.42. Verdadeiro ou falso? Para quaisquer subconjuntos $X, Y \subset E$ tem-se
$S(X \cup Y) = S(X) + S(Y),$
$S(X \cap Y) = S(X) \cap S(Y).$
(A última das igualdades acima sugere uma pergunta: qual seria o sub-espaço vetorial gerado pelo conjunto vazio ? A convenção mais conve-niente é $S(\emptyset) = \{0\}$.)

2.43. Dado o subconjunto não-vazio X do espaço vetorial E, a variedade afim gerado por X é,por definição , o conjunto V(X) de todos as combinações lineares $a_1v_2 + ... + a_nv_n, com\ v_1 ...,$ $v_n \in X\ e\ a_1 + ... + a_n = 1.$ prove que

(a) V(X) é uma variedade afim;

(b) fixado qualquer $v_0 \in X, tem - se V(X) = v_0 + F, onde\ F\ é\ o$ subespaço vetorial de E gerado pelos vetores $v - v_0, onde\ v \in X.$

Seção 3 Bases

Definição 14. Os vetores $v_1, v_2, ... v_n$ são ditos linearmente independentes (L.I)quando

$$\sum_{i=1}^{n} c_{iv_i} = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = ... = c_n = 0$$

Em outras palavras, nenhum deles pode ser escrito como combinação linear dos outros.

Comentário 15. Portanto, os vetores $v_1, v_2, ... v_n$ são ditos linearmente Dependentes (L.D) se houver uma combinação linear

$$\sum_{i=1}^{n} c_{iv_i} = 0$$

Onde nem todos os coeficientes c_i são nulos; em outras palavras, um Deles é combinação linear dos outros.

Exemplo 16.Dois vetores quaisquer em $\mathbb{R}^2$ são L.I a menos que sejam Paralelos. Três vetores quaisquer em $\mathbb{R}^3$ são L.I. a menos que sejam Contidos no mesmo plano.

Comentário 17. Se um dos vetores, digamos v_1, e o vetor $\vec{0}$,e nem todos Os coeficientes são nulos.

Proposição 18. Sejam $v_1, v_2, ... v_n \in$ V pode ser escrito como combinação linear dos v_1 (esta e a definição de V). Agora, se *v* pudesse ser escrito de duas maneiras como combinação linear dos v_1, teríamos

$$u = \sum_{i=1}^{n} c_i v_i = \sum_{i=1}^{n} d_i v_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} (c_i - d_i) v_i = \vec{0}$$

No entanto, como os vetores v_i são supostamente L.I., então $c_i - d_i = 0$
Para todo, i, isto é, $c_i = d_i$ e a escolha de coeficientes é única.

Definição 19. Na condição acima, dizemos que os vetores $v_1, v_2, \ldots v_n$
São uma base de V. Em outras palavras, um conjunto de vetores é uma base de um espaço vetorial se (*a*) ele gera o espaço e (*b*) os vetores do conjunto são linearmente independente.

Exemplo 20. considere em $\mathbb{R}^n$ os vetores

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix}, e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Não e difícil mostrar que e_1 e $e_2, \ldots e_n$ são Vetores L.I. que geram todo o espaço $\mathbb{R}^n$
isto é, eles forman uma base de $\mathbb{R}^n$.

Comentário 21. Tipicamente, há varias escolhas possíveis de bases para um espaço
vetorial. Por exemplo, em $\mathbb{R}^2$, quais quer dois vetores não paralelos formam uma base!

Teorema 22. todas as bases de um espaço vetorial V tem o mesmo numero de elementos!

Definição 23.dado um espaço vetorial V, sua dimenção é o numero de vetores em uma
de suas bases.

Exemplo 24. Como o conjunto $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ e uma base de $\mathbb{R}^n = n$.

Exercícios da seção 3

3.1. Dados os vetores $u = (a_1, a_2, a_3), v = (b_1, b_2, b_3), e\ w = (c_1, c_2, c_3)$, escreva $u' = (a_1, a_2,), v' = (b_1, b_2), e\ w' = (c_1, c_2)$. Supondo *u' e v'L.I., existem* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $w' = \alpha u' +, \beta v'$.

Prove que {*u,v,w*} é L.D. se, e somente se, $w = \alpha u' +, \beta v$ (com os mesmos $\alpha\ e\ \beta$). Use esse critério para determinar se os vetores *u, v e w* abaixo são L.I ou L.D.:

$(a)\ u = (1,2,3),\quad v = (1,3,2),\quad w = (-1,2,3)$
$(b)\ u = (1,2,3),\quad v = (1,3,2),\quad w = (1,4,1).$

3.2. que as matrizes **a** , **b** e **c** abaixo são L.I.:

a = $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,

b = $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,

c = $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

3.3. Prove que os polinômios sequintes são linearmente independentes:

$p(x) = x^3 - 5x^2 + 1,\ q(x)$
$= 2x^4 + 5x - 6,\ r(x)$
$= x^2 - 5x + 2$

3.4 Seja X um conjunto de polinômios. .Se dois polinômios quaisquer pertencentes a X tem graus diferentes, prove que X é L.I..

3.5. No espaço p_3 dos polinômios de grau ≤ 3,verifique se os polinômios abaixo são L.I ou L.D.:

$p(x) = x^3 - 3x^3 + 5x + 1$
$q(x) = x^3 - x^2 + 6x + 2$
$r(x) = x^3 - 7x^2 + 4x$

Se uma função em $C^{\infty}(\mathbb{R}^3)$ é combinação linear de outras então suas derivadas sucessivas são combinações lineares (com os mesmos coeficientes) das derivadas dessas outras. Use este fato para mostrar que $\{e^x, e^{2x}, x^3, x^2, x\}$ é um conjunto L.I..

3.7. Seja $E = F_1 \oplus F_2\ Se\, B_1$ é uma base de F_1 e B_2 é uma base de F_2, prove que $B_1 \cup B_2$ é uma base de E.

3.8. Exiba uma base para cada um dos subespaços de $\mathbb{R}^4$ listados a seguir:

$F = \{(x_1, x_2, x_3, x_4); x_1 = x_2 = x_3 = x_4\}$
$G = \{(x_1, x_2, x_3, x_4); x_1 = x_2\ e\ x_3 = x_4\}$
$H = \{(x_1, x_2, x_3, x_4); x_1 = x_2 = x_3\}$
$K = \{(x_1, x_2, x_3, x_4); x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$

3.9. Seja E um espaço vetorial de dimensão finita. Dado um subespaço $F \subset E$, prove que se pode obter um subespaço $G \subset E$ tal que E=$F \oplus G$.

3.10. Seja F o subespaço vetorial (plano) de $\mathbb{R}^3$ formado pelos vetores $v = (x, y, z)$ tais que $x - 2y + 4z = 0$. Obtenha uma base $\{u_1, u_2, u_3\} \subset \mathbb{R}^3$ tal que u_1 e u_2 pertençam a F.

3.11. Mostre que os polinômios $1x - 1 e x^2 - 3x + 1$ forma uma base de P_2.

Exprima o polinômio $2x^2 - 5x + 6$ como combinação linear dos elementos dessa base.

3.12. Mostre que os vetores *u=(1,1) e v=(-1,1)*formam uma base de $\mathbb{R}^2$. Exprima cada um dos vetores $e_1 = (1,0)$ e $e_2 = (0,1)$ como combinação linear dos elementos dessa base

3.13. mostre que os vetores $u = (1,1,1)$, $v = (1,2,1)$, $w = (2,1,2)$ são L.D..

3.14. Assinale V(verdadeiro) ou F(falso) quanto á validez da afirmação:
“A união de dois subconjunto L.I do espaço vetorial E e ainda um conjunto L.I”

( ) Sempre
( ) Nunca
( ) Quando um deles é disjunto do outro

( ) quando um deles e parte do outro.
( ) quando um deles e disjunto do subespaço gerado pelo outro.
( ) Quando o numero de elementos de um deles mais o numero de elementos do outro é igual á dimensão de E.

3.15. Seja S o conjunto das matrizes simétricos *n x n. Para cada par(i,j)*, de números naturais de 1 até *n*, com $i \leq j$, seja S_{ij} a matriz *n x n* cujos elementos nas posições *ij e ji* são iguais a 1 e os demais são zero. Prove que estas matrizes constituem uma base para o subespaço vetorial $S \subset M(n\,x\,n)$. De modo análogo, obtenha uma base do subespaço A das matrizes anti-simetricas *n x n.* Conclua que dim S=*n(n+1)/2* e dim A =*n(n -1)/2*

3.16. As matrizes $t=[t_{ij}]\in M(n\,x\,n)$ tais que t_{ij} =0 quando i<j são chamadas triangulares inferiores. Prove que elas constituem um sub espaço de M(n x n), obtenha uma base para L e determine a sua dimensão.

3.17. Obtenha uma base e conseqüentemente determine a dimensão de cada um dos subespaços de M (n x n) abaixo escritos.
(a) matrizes cuja a soma dos elementos da diagonal (traços) é zero
(b) matrizes que tem a primeira e ultima linhas iguais
(c) matrizes cuja segunda linha e igual a terceira coluna
(d) matrizes nas quais a soma dos elementos da primeira linha é igual á soma dos elementos da segunda coluna.

3.18. Sejam *u,v* $\in$E vetores linearmente independentes. Dado $\alpha \neq 0$, prove que o conjunto de dois elementos{*v,v+* α u} é uma base do subespaço gerado pelos vetores *v,v+u,v+2u,...,v+nu,...*

3.19. Sejam
v_1 =*(1,2,...n),*
u_2 = *(n+1,n+2,...,2n),...,*
$v_n = (n^2-n+1, n^2-n+2, ..., n^2)$.
Prove que estes vetores geram em $\mathbb{R}^n$ o mesmo subespaço F que os vetores
$w_1 = (1, n+1, 2n+1 ... n^2-n+1), w_2$
$= (2, n+2, ... n^2-n+2), ..., w_n$
$= (n, 2n, ..., n^2)$
que dim F=2.

3.20. Ache uma solução não-trivial para o sistema homogêneo:
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0$$
$$3x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0$$
e, a partir daí, obtenha uma combinação linear nula dos vetores $v_1 = (1,2,3)\, v_2 = (2,1,-2), v_3 = (3,1,1), v_4 = (4,-1,-2),$ na qual os coeficientes não são todos iguais a zero.

3.21. Seja $\{v_1,...,v_n\}$ uma base do espaço vetorial E. Se os números $a_1,...,a_n$ não são todos iguais a zero, prove que o conjunto F dos vetores $v = x_1v_1 + ... + x_nv_n$ tais que $a_1x_1 + ... + a_nx_n = 0$ é um subspaço vetorial de E, com dim F= n-1.

3.22. prove que {1, $e^x, e^{2x}, e^{3x}, e^{4x}$ }é um conjunto L.I no espaço $C^\infty(\mathbb{R})$. (Sugestão: dada uma combinação linear nula, derive-a, depois divida por e^x e prossiga.)

3.23. Sejam $X_1,...X_n,...$ subconjuntos L.I no espaço vetorial E.
(a) Se $X_1 \subset X_2 \subset ...X_n \subset X_{n+1} \subset ...$, prove que X=$\cup X_n$ é L.I
(b) Se cada X_n tem n elementos, prove que existe um conjunto linearmente independente X^*= $\{x_1...,x_n,...\}$ com x_n para cada $n \in N$.
(c) Supondo E=$\mathbb{R}^{(\infty)}$ e admitindo as hipóteses dos itens anteriores, e verdade que $X = \bigcup X_n$ seja mais uma base de E?

3.24. Se os vetores v $v_1,...,v_m$ são L.I, Prove que o mesmo se da com os vetores $v_1, v_2 - v_1,...,v_m - v_1$ vale a recíproca?

3.25. dado o conjunto finito $X = \{a_1,....,a_n\}$, obtenha uma base para o espaço vetorial $F(X;\mathbb{R})$.

3.26. Seja X um conjunto infinito. Para cada $a \in X$, seja $f_a : X \to \mathbb{R}$ a função tal que $f_a(a)$=1 e $f_a(x)$= 0 se $x \neq a$. Prove que o conjunto $Y \subset F(X;\mathbb{R})$ formando por estas funções é linearmente independente, logo $F(X;\mathbb{R})$ não tem dimensão finita. Prove ainda que Y não gera $F(X;\mathbb{R})$.

3.27. Sejam $F_1, F_2 \subset E$ subespaços de dimensão finita. Obtenha uma base do subespaço $F_1 + F_2$ que contenha uma base de F_1, uma base de F_2 e uma base de $F_1 \cap F_2$.

3.28. Exiba uma base para cada um dos espaços vetoriais abaixo e daí calcule sua dimensão:
(a) polinômios pares de grau $\leq n$.
(b) polinômios impares de grau $\leq n$
(c) polinômios de grau $\leq n$ que se anulam para $x = 2\, e\, x = 3$.
(d) vetores de nos quais a segunda, a quarta, e a sexta coordenadas são iguais.

3.29. pode se ter uma base de ρ_n formada por n+1 polinômios de grau n?

3.30. Mostre que os vetores u = (1,1,1), *v = (1,2,3) e w = (1,4,9)* formando uma base de $\mathbb{R}^3$. Exprima cada um dos vetores e_1, e_2, e_3 da base canônica de $\mathbb{R}^3$ como combinação linear de *u,v*, e *w*.

3.31. Ache uma seqüência infinita $F_1, F_2,..., F_n,...$ de subespaços de ρ tais que : (a) $\dim F_n = \infty$; (b) $F_m \cap F_n = \{0\} se\, m \neq n$.

3.32. Para $1 \leq i \leq m$ e $\leq j \leq n$,sejam s_i, $t_j : M(mxn) \to \mathbb{R}$ as funções definidas por s_i(a)=soma dos elementos da $i - ésima$ linha de a e t_j(a) = soma dos elementos da $j - ésima$ coluna de a, prove que $s_i,...,s_m,t_1,...,t_n$ são L.D. no espaço vetorial $E = F(M(m \times n);\mathbb{R})$ mas o conjunto { $s_i,...,s_{m-1},t_1,...,t_n$ }é L.I.

3.33. Com a notação dos exercícios anteriores, sejam $r, \sigma : M(n \times n) \to \mathbb{R}$ as funções definidas, para cada a = $[a_{ij}] \in M(n \times n)$ por $r(a) = a_{11} + ... + a_{nn}$ (soma dos termos da diagonal principal) e σ (a) $= a_{1n} + a_{2,n-1} + ...+$

a_{n1} (soma dos termos da outra diagonal). Prove que , para $n \geq 3$, $\{s_1,...,s_{n-1},t_1,...,t_n,\tau,\sigma\}$ são funções linearmente independentes.

3.34. Num espaço vetorial E , diz-se que o vetor v é uma combinação afim dos vetores $v_1,...v_r$ quando se tem $v = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_r v_r$, com $\alpha_1 + ... + \alpha_r = 1$. Diz-se que os vetores $v_1,...,v_r$ são afim-independentes quando nenhum deles é uma combinação afim dos demais . Prove que as seguintes afirmações são equivalentes :

(1) Os vetores $v_1,...,v_r$ são afim-independentes .

(2) Se $\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_r v_r = 0 \, e \, \alpha_1 + ... + \alpha_r = 0 \, então \, \alpha_1 = ... = \alpha_r = 0$.

(3) Se $\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_r v_r = \beta_1 v_1 + ... + \beta_r v_r \; com \; \sum_{i=1}^{r} \alpha_i = \sum_{i=1}^{r} \beta_i \; então$ $\alpha_1 = \beta_1, ..., \alpha_r = \beta_r$. (Em particular , duas combinações afins dos v_i só podem ser iguais quando tiverem os mesmos coeficientes.)

(4) Os vetores $v_2 - v_1, v_3 - v_1, ...v_r - v_1$ são L.I. .

(5) A variedade afim gerada por $v_1,...,v_r$ tem dimensão r-1.

Seção 4 Transformações Lineares

Definição 27. Sejam E e F dois espaços vetoriais . Uma transformação $A: E \to F$ é dita linear sempre que

$$A(v_1 + v_2) = Av_1 + Av_2$$
$$A(cv_1) = cAv_1$$

para quaisquer $v_1, v_2 \in E\, e\, quelquer\, c \in \mathbb{R}$.

Exemplo 28. " Esticamentos " são lineares. Por exemplo:

$$A: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$A(x, y) = (2x, 2y)$$

Exemplo 29. Rotação são lineares. Por exemplo:

$$B: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$B(x, y) = (-y, x)$$

é uma rotação de 90º no sentido anti-horário

Exemplo 30. Reflexões (espelhamento) são lineares. Por exemplo:

$$B: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$B(x, y) = (y, x)$$

é um espelhamento com relação á reta x = y

Exemplo 31. projeções são lineares. Por exemplo:

$$E: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$E(x, y) = (x, 0)$$

é uma projeção ortogonal no eixo Ox.

Exemplo 32. A transformação

$$N: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$N(x, y) = (y^2, x^2)$$

não é linear!

Exemplo 33. Transformações lineares podem ser feitas entre espaços de dimensões diferentes. Por exemplo, a transformação

$$B: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$B(x, y) = (y, x)$$

é linear

Exemplo 34. A derivada e uma transformação linear D que vai do espaço das funções diferenciáveis no espaço das funções ! De fato, basta notar que

$$D:(F_1 \to F_2) = Df_1 + Df_2$$
$$D(cf_1) = cDf_1$$

para quaisquer funções $f_1\ e\ f_2$ e qualquer constante real c.

Exemplo 35. Podemos restringir o exemplo acima ao espaço P_n dos polinômios de grau $\leq n$. Neste caso, $D: P_{n-1}$ é linear. Note que $\dim P_n = n+1 \; pois \{1, x, x^2, \ldots x^n\}$ e uma base de P_n.

Comentário 36. Toda transformação linear $A: E \to F$ preserve combinações lineares, isto é,

$$A(c_1v_1 + c_2v_2 + \ldots + c_mv_m) = c_1Av_1 + c_2Av_2 + \ldots + c_mAv_m$$

para quaisquer vetores $v_1, v_2, \ldots v_m$ em E é números $c_1, c_2, \ldots c_m \in \mathbb{R}$.

Comentário 37. Por tanto para definir uma transformação linear $A: E \to F$ qualquer, basta defini La numa base de E! Em outras palavras ,seja $\{v_1, v_2, \ldots v_n\}$ uma base de E. para definir A, basta escolher vetores $w_1, w_2, \ldots w_n$ em F e fazer

$$\begin{aligned} Av_1 &= w_1 \\ Av_2 &= w_2 \\ \ldots &= \ldots \\ Av_n &= w_n \end{aligned}$$

A partir daí, Av estará automaticamente definido para qualquer outro vetor $v \in E$. De fato , v pode ser escrito de maneira única como combinação linear dos v_i

$$v = \sum_{i=1}^{n} c_i v_i$$

e portanto devemos ter

$$Av = \sum_{i=1}^{n} c_i Av_i = \sum_{i=1}^{n} c_i w_i$$

vale a pena observar que os vetores w_i escolhidos em F não tem de ser L.I – no “ pior caso”, eles poderiam ser todos nulos, e então A seria a transformação linear que leva qualquer vetor de E no vetor $\vec{0}$ de F

Comentário 38. Assim, se quisermos analisar uma transformação linear $A: E = \mathbb{R}^n \to F = \mathbb{R}^m$, basta escolher os vetores $w_1, w_2, \ldots, w_n \in \mathbb{R}^m$ (cada um com m componentes) para que $Ae_i = w_i$. A transformação linear A fica perfeitamente determinada a partir da tabela criada pondo os vetores w_i lado a lado, assim

$$Am \times n = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ w_1 & w_2 & w_3 & \ldots & w_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \end{bmatrix}$$

Esta é denominada a matriz associada á transformação A (na base canônica). Note que ela é $m \times n$.

Exemplo 39. As transformações A,B,C,E, e F definidas anteriormente correspondem ás seguintes matrizes

$$A_{2x2} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} B_{2x2} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$c_{2x2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} E_{2x2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F_{1xn} = 111...1$$

Exemplo 40. Se escolhemos a base $\{1, x, x^2, x^3\}$(nessa ordem!) para P_3 então a derivada $D: P_3 \to P_3$ correspondente a matriz

$$D_{4x4} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como vimos acima, a matriz $A_{mxn} = (A_{ij})\ (i = 1, 2, ..., m\, e\ j = 1, 2, ..., n)$ define uma transformação linear de $\mathbb{R}^n em \mathbb{R}^m$. A primeira coluna $A_{i1} =$ $w_1\, de\, F = \mathbb{R}^m$; a segunda coluna $A_{i2} = w_2 = A_{E2} \in F$; e assim por diante : $(A_{ij})_{i=1,...,m} = w_{j.}$

Em suma, cada entrada A_{ij} da matriz é a componente i do vetor w_j ,ou seja , $A_{ij} = (w_j)_j$ (cuidado com essa inversão de índices!).

Como calcular Av para um vetor $v \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$? Bom, sabemos que

$Av = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j w_j$ .A componente i de Av é portanto

$$(Av)_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j (w_j)_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} \alpha_j$$

que corresponde a uma multiplicação de uma matriz $A_{m \times n}$ por um vetor $v_{n \times 1}$ que você conhece.

Exemplo. 41. Experimente com a projeção E definida acima; a partir da matriz

$$E_{2\times2=} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

descobrimos Ev para um vetor qualquer. De fato

$$E\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.x+0.y \\ 0.x+0.y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}$$

recuperando a nossa definição original de E.

Exemplo 42. Enfim, é sempre bom considerar a transformação identidade I_E

$I_v = v \; para \, qualquer \, v \in E$

Quando $E = \mathbb{R}^n$, escrevemos

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

para a matriz desta transformação .

Exercícios da seção 4

4.1. Prove que se A,B: $E \to F$ são transformação lineares e α e um número real então A+B e α A, conforme definias no texto, são transformações lineares.

4.2. Sejam $R, P, S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ respectivamente a rotação de 30º em torno da origem, a projeção ortogonal sobre a reta $y = x/3$ e a reflexão em torno da mesma reta. Dado o vetor $v = (2,5)$, determine os vetores Rv, Pv e Sv.

4.3 Assinale Verdadeiro (V) ou (F) :

( ) Se $v \in E$ é tal que A v = 0 então v = 0

( ) Se $Aw = Au + Av$ então $w = u + v$

( ) Se v é combinação linear de $u_1,...,u_m$ então Av é combinação linear de $Au_1,...,Au_m$.

( ) Se $u, v, w \in E$ são colineares (isto é, pertencentes a uma mesma reta) então $Au, Av \, e \, Aw$ são colineares.

4.4. Seja $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a projeção sobre o eixo x, paralelamente à reta $y = ax \, (a \neq 0)$. Isto significa que , para todo $v = (x, y)$,tem-se $Av = (x', 0)$, tal que $v - Av$ pertence à reta $y = ax$. Exprima x' em função de $x \, e \, y$ e escreva a matriz de A relativamente à base canônica de $\mathbb{R}^2$.

4.5. Dados os vetores $u_1 = (2,-1), u_2 = (1,1), u_3 = (-1,-4), v_1 = (1,3), v_2 = (2,3) \, e \; v_3 = (-5,-6)$, decida se existe ou não um operador linear $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \; tal \; que \; Au_1 = v_1, Au_2 = v_2 \; e \; Au_3 = v_3$. Mesma pergunta com $v_3(5,-6)\, e\, com\; v_3=(5,6)$.

4.6. A expressão geral de um operador linear $A:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2\; é\; A(x,y)=(ax+by,cx+dy)$ .Determine as constantes $a,b,c\; e\, d$ de modo que A transforme os vetores $u=(1,2)\, e\, v=(3,4)$ $nos\; vetores\; Au=(1,1)\, e$ $Av=(2,2)$.

4.7. A expressão geral de uma funcional linear $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}\, é\; f(x,y,z)=ax+by+cz.$ Dados os vetores $u=(-1,2,3)\, e\, w=(1,-2,3)$ determine a,b e c de tal modo que se tenha $f(u)=1,\; f(v)=0$.

4.8. Seja $A:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ o operador linear definido por A($x.y$) = $(5x+4y,-3x-2y)$. Ache vetores não nulos $u=(x,y)$ e $v=(s,t)$ tais que Au = u e Av = 2v. São únicas as soluções ? Será possível achar $w\neq 0\, em\, \mathbb{R}^2$ com $Aw=\alpha w$,onde $\alpha\neq 1\, e\, \alpha\neq 2$.

4.9. Dê as expressões dos funcionais lineares $f,g,h:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ que formam a base dual em $(\mathbb{R}^3)*$ da base $(u,v,w)\subset\mathbb{R}^3$, onde $u=(1,1,1)$, $v=(1,-1,1)$ e $w=(1,1,-1)$.

4.10. Tem se uma transformação linear $A:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$. Sabe se que $A(-1,1)=(1,2,3)\, e\, A(2,3)=(1,1,1)$. Pede se a matriz $a\in M(3\times 2)$ de A relativamente as bases canônicas de $\mathbb{R}^2 e\; \mathbb{R}^3$.

4.11. Prove que uma transformação linear $A:E\to F$ transforma todo conjunto convexo $C\subset E$ num conjunto convexo $A(C)\subset F$.

4.12. determine a expressão do operador linear $A:\mathbb{R}^2 e\; \mathbb{R}^2$, sabendo que , para todo $v=(x,y)$, o segmento de reta que liga $v\, a\, Av=(x',y')$ é horizontal e tem seu ponto médio sobre a reta que liga $y=x$ qual e a imagem do eixo vertical pelo operadorA?

4.13. Prove que os operadores lineares E_{11} , $E_{12}, E_{21}, E_{22}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$,definidos por $E_{11}(x,y)=(x,0)$, $E_{12}(x,y)=(0,x)$, $E_{21}(x,y)=(y,0)$, $E_{22}(x,y)=(0,y)$, constituem uma base do espaço vetorial .Prove ainda que outra base deste espaço pode ser formado com ,os operadores A,B,C,I, onde
$A,(x,y)=(x+3y,y)$,
$B,(x,y)=(x,0)$,
$C,(x,y)=(x+y,x-y)$ e
$I,(x,y)=(x+y)$.

4.14. Verifique que as funções definidas nos exercícios 3.32 e 3.33 são funcionais lineares.

47.15. Seja $A:E\to F$ uma transformação linear

(a) Se o vetores $Av_1,\ldots Av_m\in F$ são L.I, Prove que $v_1,\ldots,v_m\in E$ também são L.I..

(b) Se F=E e os vetores $Av_1,\ldots Av_m$ geram E, Prove que $Av_1,\ldots Av_m$ geram E

(c) Valem as recíprocas de (a) e (b)? seria (b) com $F\neq E$?

4.16. Quais das transformações abaixo são lineares?

(a) $A:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3, A(x,y,z)=(x,2^y,2^z)$

(b)
$A:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, A(x,y,z)$
$= (3x, a, 5z), onde\, a \in \mathbb{R}$

(c)
$A:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, A(x,y,z,w)$
$= (x-w, y-w, x+z)$

(d)
$A: M(n\times n) \to \mathbb{R}^n, A([a_{ij}])$
$= (a_{11}, a_{22}, ..., a_{nm})$

(e)
$A: C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R}), Af$
$= 3f^n - 2f' + 1$

(f)
$A: M(2\times 2) \to \mathbb{R},$
$A\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = ad - bc$

4.17. Sejam $A: E \to F$ uma transformação linear e $E' \subset E, F' \subset F$ subespaços vetoriais. Prove que $A(E') = \{Av; v \in E'\}$ é um subespaço de $F\, e\, A^{-1}(F') = \{v \in E; Av \in F'\}$ e um subespaço de E..Se V$\subset$E e W $\subset$ F são variedades afins, prove que os conjuntos $A(V) \subset F$ e $A^{-1}(W) \subset E$, definido analogamente, são também variedades afins.

4.18. No exercício anterior, prove que se E'tem dimensão finita então $\dim A(E') \le \dim E'$.Dê um exemplo de um operador não identicamente nulo $A:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$e um subespaço $E' \subset \mathbb{R}^2$tal que $\dim A(E') < \dim E'$ .Prove que se E e F'tem dimensão finita e A e sobrejetiva então $\dim A^{-1}(F') > \dim F'$. De também um exemplo (com $\dim E = \infty$), onde $\dim F'$e finita mas $\dim A^{-1}(F') = \infty$.

4.19. Dados os espaços vetoriais E,F prove que ...

4.20. Seja $V = \{v_1, ... v_n\}$uma base do espaço vetorial E. para cada $i = 1, 2, ... n$, seja $f_i : E \to \mathbb{R}$ o funcional linear determinado (conforme o teorema 4.1) pelas condições $f_i(v_i) = 0\ se\ j \ne i$ .Prove que $\{f_1, ..., f_n\}$e uma base de E*= $L(E;\mathbb{R})$(chamada de base dual da base V). Mostre que se tem $f_i(v) = x_i$, para todo $x_1v_1 + ... + x_nv_n \in E$.

4.21. Seja $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$um funcional linear. Sabemos que $f(1,1) = 3\, e\, f(2,3) = 1$,calcule $f(1,0)\, e\, f(0,1)$.

4.22. Seja $A:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$o operador linear dado por $A:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\ A(x,y) = (ax+by, cx+dy)$, com $ad - bc \ne 0$.Prove:
(1) Para todo $v \ne 0$ em $\mathbb{R}^2$, tem se $Av \ne 0$.
(2) Toda reta $R \subset \mathbb{R}^2$(variedade afim de dimensão 1) é transformada por A numa reta.
(3) A transforma retas paralelas em retas paralelas.

4.23. Determine α de modo que as retas perpendiculares em $\mathbb{R}^2$, de equações $y = \alpha x\ e\ y = -x/\alpha$ sejam transformadas em retas perpendiculares pelo operador linear $A:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dado por $A(x,y) = (2x+3y, x-2y)$.

4.24. Sejam E,F espaços vetoriais de dimensão finita. Dados os vetores $v_1,...,v_m \in E$ e $w_1,...,w_m \in F$,afim de que exista uma transformação linear $A: E \rightarrow F$ com $Av_1 = w_1,...,Av_m = w_m$, e necessário e sufuciente que, para toda combinação linear nula $\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_m v_m = 0$, se tenha também $\alpha_1 w_1 + ... + \alpha_m w_m = 0$.

4.25. Seja v um vetor não – nulo de um espaço vetorial E, de dimensão finita. Dado qualquer espaço vetorial F$\neq\{0\}$, mostre que existe uma trasformação linear $A: E \rightarrow F$ tal que $Av \neq 0$.

4.26. Seja E um espaço vetorial de dimensão finita. Dada uma base F= $\{f_1,..., f_n\}$ $\subset$E*, mostre que existe uma base $\{v_1,...,v_n\} \subset E$ da qual F é dual.

4.27. Seja Y um conjunto de geradores do espaço vetorial E. Se as transformações lineares A,B: $E \rightarrow F$ são tais que $Aw = Bw$ para todo $w \in Y$,prove que $Av = Bv$ para todo $v \in E$.

4.28. Seja $X = \{v_1,...v_m\}$ um conjunto L.I no espaço vetorial E, de dimensão finita. Dados arbitrariamente os vetores $w_1,..., w_m$ no espaço vetorial F, prove que existe uma transformação linear $A: E \rightarrow F$ tal que $Av_1 = w_1,..., Av_m = w_m$. A e a única se, e somente se, X é uma base de E.

4.29. Uma transformação $T: E \rightarrow F$, entre espaços vetoriais , chama se afim quando se tem $T((1-t)u + tv) = (1-t)Tu + tTv$, para quais quer $u, v \in E$ e $\mathbb{R}$. Dada a transformação afim $T: E \rightarrow F$, Prove:

(a) Toda a variedade afim $V \subset E$ e transformada por T numa variedade afim $V' \subset F$.

(b) Se T.0 = 0 , então escrevendo $\alpha v = (1-\alpha)0 + \alpha v$, resulta que $\mathrm{T}(\alpha v) = \alpha.Tv$ para quais quer $\alpha \in \mathbb{R}, v \in E$.

(c) Supondo ainda T.0 = 0, a relação $T(\frac{1}{2}(u+v)) = \frac{1}{2}(Tu+Tv)$,implica que $T(u+v) = Tu + Tv$ para quais quer $u, v \in E$.

Seção 5 produto de transformação lineares

Definição 43. dadas duas transformações lineares $B:E \to F$ e $A:E \to G$, definimos o produto AB como

$$AB: E \to G$$
$$(AB)(v) = A(Bv) \in G$$

isto é, o produto AB e simplesmente a composta de A com B. Note que AB e uma transformação linear .

Note que se $C: H \to E$ e outra terceira transformação linear, claramente tem se

$$(AB)C = A(BC): H \to G$$

De fato, a transformação linear ABC é simplesmente a transformação que toma um vetor em H e “passa-o” por C,B e A, respectivamente, chegando em fim a um vetor em G. A associatividade da composição não altera este processo.
Note também que:

- Se $C: E \to F$ e $AB: E \to G$ então (A+B) C = AB+AC por definição de A+B.
- $B, C: E \to F$ e $A: F \to G$ então A(B+C) = AB+ AC por que A e linear.
- Se $B: E \to F$ e $A: F \to G$ então $A(\alpha B) = \alpha(AB)$ por que A é linear.

Proposição 44. Sejam $B:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ *e* $A:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ correspondentes as matrizes $A_{p\times n}$ e $B_{n\times m}$ .Seja C = AB: $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ .então a matriz $C_{p\times m}$ é dada por

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{kj}$$

onde i = 1,2,...p e j = 1,...,m.

Demonstração: Seja

UEPA
UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ