

## O Átomo de Bohr (um pouco de história)

*Michael Fowler*

*Universidade de Virgínia*

### Bohr chega a Cambridge

Em 1911 Niels Bohr, com 26 anos de idade, concluiu o doutoramento na Universidade de Copenhaga; com uma tese intitulada “Estudos sobre a Teoria Eletrónica dos Metais”. Financiado pela Carlsberg Brewery Foundation, Bohr teve a possibilidade de concluir um pós-doutoramento, o que lhe permitiu ir para Cambridge em Setembro e estudar com J.J. Thomson. Bohr era um grande admirador dos muitos avanços feitos por Thomson, tanto experimentais como teóricos. Na sua tese, estudou atentamente alguns dos problemas levantados por Thomson no livro *Condução de Eletricidade através de Gases*. Encontrou alguns erros evidentes no trabalho de Thomson, e procurou discutir esses erros com o grande homem. Infelizmente, na altura em que Bohr chegou a Cambridge, o Laboratório Cavendish tinha crescido ao ponto de Thomson, o diretor, ter de fazer um grande esforço para o gerir. Não tinha tempo livre para pensar em eletrões, e não ficava contente ao ouvir de Bohr que algum do seu trabalho anterior poderia estar incorreto. De facto, Thomson saiu do seu caminho para evitar discussões teóricas com Bohr. Atribuiu a Bohr uma experiência sobre raios de carga positiva, mas Bohr não mostrou entusiasmo. Bohr manteve-se ocupado a escrever sobre os eletrões dos metais, a ler Dickens para melhorar o seu inglês, e a jogar futebol.

Em Dezembro, Rutherford veio de Manchester para o jantar anual do Laboratório Cavendish. Bohr afirmou mais tarde que ficou profundamente impressionado com o charme de Rutherford, a sua forte personalidade, e a sua paciência para ouvir todos os jovens que pudessem ter uma ideia – certamente uma grande mudança face a J. J. Thomson! Um pouco mais tarde, Bohr encontrou-se com Rutherford novamente quando visitou o pai de um amigo em Manchester, alguém que também conhecia Rutherford. Apesar de Rutherford se mostrar sempre cético com os teóricos, gostou de Bohr. Por um motivo: Rutherford era um fã de futebol, e o irmão de Bohr, Harald (apenas dezanove meses mais novo que Bohr) era famoso - tinha participado na equipa dinamarquesa que havia conquistado a medalha de prata nos Jogos Olímpicos de Londres, em 1908.

Após ter falado com Harald, que visitou Cambridge em Janeiro, Bohr mudou-se para Manchester em Março, e frequentou um curso de laboratório de seis semanas, ministrado por Geiger, Marsden e outros. Contudo, na realidade os seus interesses eram teóricos, tendo conversado bastante com Charles Galton Darwin – “neto do verdadeiro Darwin”, tal como contou a Harald quando lhe escreveu sobre o assunto. Darwin tinha acabado de completar a análise teórica da perda de energia de uma partícula alfa - de baixo poder penetrante – isto é, uma partícula que não se aproxima o suficiente de um núcleo para que seja dispersa. Tais partículas perdem gradualmente a sua energia ao chocarem com os eletrões, e esta perda é proporcional ao número de eletrões que encontram. Em particular, e após ter revisto e melhorado o trabalho de Darwin, Bohr concluiu que parecia óbvio que o átomo de Hidrogénio quase de certeza tivesse apenas *um* eletrão à volta do núcleo.

### O que Determina o Tamanho do Átomo?

O grande problema com o átomo de hidrogénio era: *o que determina o seu tamanho?* A mecânica clássica fornece uma simples equação de movimento para as órbitas circulares:

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r^2}.$$

Esta equação é satisfeita por *qualquer* órbita circular centrada no núcleo, seja grande ou pequena. (Note, já agora, que ao multiplicar os dois lados da equação por  $r/2$  se conclui que a magnitude da energia cinética em órbitas circulares é apenas metade da magnitude da energia potencial negativa. Precisaremos disto já de seguida). Não há aqui nada que indique que o átomo no seu estado “natural” tenha algum raio em particular. Mas tem! Isso significa que nos está a *escapar* algo. Mas o quê?

Bohr (e outros) pensou que a constante de Planck devia, de algum modo, ter um papel na determinação do tamanho da órbita. Afinal de contas, *tinha* um papel na restrição de mudanças orbitais permitidas aos osciladores (átomos à superfície) na radiação do corpo negro – e estes osciladores, apesar de não estarem totalmente compreendidos, eram do tamanho de átomos. Portanto era evidente que a ideia formada sobre o modo como era emitida radiação pela carga de um oscilador não podia estar correta a nível atómico. Bohr concluiu que num átomo no seu estado natural de repouso, os eletrões devem estar numa órbita especial, a que ele chamou de “estado estacionário”, para o qual as regras habituais da radiação eletromagnética não se aplicam. Na sua órbita, que determina o tamanho do átomo, o eletrão, misteriosamente, não emitia radiação.

Contudo, trazer a constante de Planck para a discussão do átomo de Hidrogénio não era assim tão simples. Para os osciladores do corpo negro, relacionou a frequência  $f$  do oscilador com a alteração de energia permitida  $E$  na expressão  $E=hf$ . A abordagem óbvia para o átomo de Hidrogénio era relacionar a frequência  $f$  com a frequência do eletrão na sua órbita circular. Contudo, em contraste com o oscilador harmónico simples, a frequência do átomo de Hidrogénio *varia* com o tamanho da órbita. Ainda assim, era a única frequência possível de considerar e, multiplicando-a por  $h$  permite obter uma energia. A que corresponderia essa energia? Uma vez mais, a escolha era limitada – o eletrão possuía energia cinética  $E$ , energia potencial  $-2E$  e energia total  $-E$ . Se um núcleo de Hidrogénio capturar um eletrão no seu estado fundamental, e emitir um *quantum* de radiação eletromagnética, esse *quantum* terá energia  $E$ , a mesma que a energia cinética do eletrão no seu estado natural estacionário (designado de *estado fundamental*). Bohr sugeriu, numa nota a Rutherford durante o Verão de 1912, que considerar esta energia constante (assumindo que teria magnitude de ordem 1) e multiplicá-la por  $hf$  permitiria resolver a questão sobre o tamanho do átomo. Na realidade a sua argumentação era um pouco mais complexa, ele considerou um átomo com vários eletrões, e representou os eletrões formando anéis. Contudo, assenta no mesmo ponto – uma condição assim limita o tamanho do átomo, que seria resolvido apenas no caso de conhecermos a constante. Se assumirmos que a constante é 1, por exemplo, temos

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{h\nu}{2\pi}$$

Se conciliarmos isto com a equação do movimento circular descrita acima, obtemos o raio atómico  $r$ . É fácil de verificar que assim se prevê um raio atómico de  $\frac{4\pi\epsilon_0 h^2}{e^2 \pi^2 m}$  <sup>†</sup>, que é apenas quatro vezes maior

<sup>†</sup>

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r^2} \quad (1)$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{h\nu}{2\pi} \Rightarrow v = \frac{h}{\pi r m} \quad (2)$$

Substituindo o valor da velocidade em (1) obtém-se para o raio atómico:

$$r = \frac{4\pi\epsilon_0 h^2}{e^2 \pi^2 m}$$

que a “resposta certa” definida como o raio de Bohr (ver abaixo). O raio de Bohr correto surge se considerarmos a constante como metade,  $E = 1/2hf$ , tal como fez Bohr mais tarde.

A partir daqui o tamanho aproximado para o átomo é obtido apenas por argumentos *dimensionais*, já que se assume que a constante de Planck desempenha um papel nesta determinação. É claro que o núcleo é irrelevante para determinar o tamanho do átomo – fornece apenas um centro fixo de atração eletrostática.

Os parâmetros relevantes no caso do eletrão são a massa  $m$  e a força de atração  $\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ . Juntamente com  $h$ , estes parâmetros determinam um comprimento.

Deve ser mencionado que esta hipótese explica mais do que o tamanho do átomo de Hidrogénio. Acreditou-se, a determinada altura, que nos átomos com mais eletrões, estes formavam anéis, que se dispunham uns dentro dos outros, e vários argumentos relacionados com a estabilidade indicavam que não podiam existir mais de sete eletrões por anel. A escala de tamanho descrita anteriormente,  $\frac{4\pi\epsilon_0 h^2}{2\pi^2 e^2 m}$ , diminuiria para átomos maiores, com  $e^2$  substituído por  $Ze^2$ , para uma carga nuclear  $Z$ . Assim, à medida que o número de anéis aumenta, o tamanho dos anéis diminui, explicando as observações da periodicidade (aproximada) da variação do volume atómico com o número atómico.

Também em 1911, Richard Whiddington, em Cambridge, descobriu que para provocar a emissão de raios-X característica de uma substância de número atómico  $A$ , ao bombardeá-la com eletrões, era necessário que a velocidade dos eletrões fosse de aproximadamente  $A \times 10^6$  metros por segundo. Qualquer substância ao ser bombardeada com eletrões de velocidade suficiente emite um conjunto contínuo de frequências de raio-X, até um determinado valor máximo de frequência  $f$  dado por  $hf$ =energia cinética do eletrão, mais alguns parâmetros bem definidos – raios-X a determinada frequência, que não se altera com o aumento da velocidade dos eletrões. Descobriu-se que a frequência que corresponde a estes parâmetros aumenta com o número atómico. Aplicando as suas conclusões sobre o tamanho dos anéis referidas anteriormente, ao anel mais interior (mais próximo do núcleo), Bohr descobriu que um eletrão nesse anel teria uma velocidade proporcional à carga nuclear  $e$ , por isso, pelo menos aproximadamente, ao número atómico. Para além disso, a previsão de velocidade do eletrão na órbita era da mesma ordem da dos eletrões de Whiddington.

### **Nicolson: uma Ideia Inteligente sobre um Modelo Errado**

Entretanto, em Cambridge, J. W. Nicolson esforçava-se por incorporar as ideias de Planck num modelo do átomo, na tentativa de compreender alguns grupos estranhos de linhas espectrais observados em nebulosas e na coroa do Sol. Ele concebeu um modelo bastante exótico (e muito errado!), no qual um anel de eletrões, como um colar, orbita o núcleo. (Na realidade, muitos investigadores, incluindo o próprio Bohr, estudaram modelos como este. O motivo era a radiação de um anel de eletrões ser muito menor que a de um único eletrão em órbita, os campos tendem a cancelar-se uns aos outros.) As oscilações dos eletrões nestes anéis forneceram os espectros. Nicolson previu quais as frequências emitidas através de uma análise clássica das frequências de oscilação, no mesmo espírito de trabalhos anteriores sobre o modelo do pudim de passas. Apesar disso, ele conseguiu incluir a constante de Planck. Ele sabia que dimensionalmente representaria uma unidade de momento angular, e sugeriu que o átomo pudesse perder momento angular em valores discretos (bem definidos) – presumivelmente múltiplos de  $h$ . Nicolson sentiu que, dada a dimensionalidade da constante de Planck, a quantização do momento angular era mais

plausível do que a quantização da energia. É claro, para o oscilador harmónico simples teriam o mesmo valor, mas não para os restantes sistemas.

### Bohr Regressa à Dinamarca

Bohr deixou Manchester em Julho de 1912 e casou-se no primeiro dia de Agosto. No Outono, começou a trabalhar na universidade de Copenhaga, tendo dado um ciclo de conferências. Ao mesmo tempo, começou a anotar algumas das ideias que teve em Manchester acerca dos átomos. Bohr leu o trabalho de Nicolson. Como ele descreveu a Rutherford no final de Janeiro de 1913, ele e Nicolson estavam realmente à procura de coisas diferentes – Nicolson considerava apenas átomos em ambientes de elevadas temperaturas (como a coroa do Sol, ou num tubo de descarga elétrica) e os espectros forneciam informação sobre como a energia era emitida à medida que o átomo atingia o estado fundamental. Bohr estava apenas interessado no estado em que o sistema tivesse a menor quantidade de energia possível. Escreveu a Rutherford: “não lido, de todo, com a questão do cálculo das frequências correspondentes à parte visível do espectro”. Nessa altura, Bohr considerava os espectros bonitos mas pouco importantes, tendo pouco que ver com a física básica, tal como as cores de uma borboleta tinham que ver com a biologia básica.

### Bohr Muda de Ideias em Relação aos Espectros

Em Fevereiro de 1913, Bohr ficou surpreendido ao descobrir, numa conversa casual com o espectroscopista H. R. Hansen, que se distinguiam alguns padrões no aparente caos de linhas espectrais. Em particular, Hansen (colega e ex-companheiro de escola de Bohr) mostrou a Bohr a fórmula de Balmer para o Hidrogénio. Eles tinham visto isto nas mesmas aulas, contudo, dada a opinião de Bohr sobre a importância dos espectros, provavelmente não prestou muita atenção.

A fórmula de Balmer é:

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{n^2} \right)$$

para a sequência de comprimentos de onda de luz emitidos, com  $n = 3, 4, 5, \dots$ , sendo emissões no visível as linhas utilizadas por Balmer para encontrar a fórmula. Hansen certamente informou Bohr que  $\frac{1}{4}$  podia ser substituído por  $1/m^2$ , sendo  $m$  um número inteiro. A constante que aparece do lado direito é a chamada *constante de Rydberg*,  $R_H = 1,09737 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$ . (Este é o valor atual – Balmer apresentou o resultado com um erro associado na ordem de 1 em 10.000, aproximadamente o limite das medidas espectrais na altura.)

Bohr afirmou mais tarde: “Assim que vi a fórmula de Balmer, tudo começou a fazer sentido.” O que ele viu foi que o conjunto de *frequências* permitidas (proporcionais ao inverso do comprimento de onda) emitidas pelo átomo de Hidrogénio podiam todas ser expressas como *diferenças*. Isto imediatamente lhe sugeriu uma generalização da ideia de um “estado estacionário” de energia mínima, no qual o eletrão não emite radiação. Deve então existir uma *sequência* destes estados estacionários, com a emissão de radiação a ter lugar apenas quando o átomo salta de um nível para outro de menor energia, emitindo um quantum de frequência  $f$  tal que

$$hf = E_n - E_m,$$

que corresponde à diferença entre as energias dos dois estados. Evidentemente, a fórmula de Balmer e respetiva extensão para os números inteiros  $m, n$ , permitiu a existência de órbitas sem emissão de radiação, os estados estacionários, designados como 1, 2, 3, ...,  $n$ , ... e de **energias -1, -1/4, -1/9, ..., -1/n<sup>2</sup>**, ... múltiplas de  $hcR_H$  (utilizando  $\lambda f = c$  e a equação de Balmer acima). As energias são, obviamente,

negativas, porque estes são estados bem definidos, e a energia toma valor zero quando as duas partículas estão infinitamente afastadas.

Bohr estava familiarizado com o movimento em órbitas circulares simples. Ele sabia que se a energia da órbita era  $-hcR_H/n^2$ , isso significava que a energia cinética do electrão era  $\frac{1}{2}mv^2 = hcR_H/n^2$ , e a energia potencial seria

$$\frac{-(1/4)\pi\epsilon_0 e^2}{r} = \frac{-2hcR_H}{n^2}$$

Segue-se que o *raio* da órbita  $n$  é proporcional a  $n^2$ , e a velocidade nessa órbita é proporcional a  $1/n$ . **Em seguida, o momento angular da órbita  $n$  é proporcional a  $n$ .**

É evidente que então o momento angular na órbita  $n$  é  $nKh$ , onde  $h$  é a constante de Planck e  $K$  um fator multiplicador, o mesmo para todas as órbitas, ainda a ser determinado.

De fato, o valor de  $K$  vem dos resultados acima.  $R_H$ ,  $m$ ,  $h$ , e  $c$  têm todos valor conhecido ( $R_H$  foi medido experimentalmente ao observar as riscas da série de Balmer) por isso as fórmulas acima imediatamente dão a velocidade dos eletrões e a distância ao núcleo para a órbita  $n$ , e por isso o seu momento angular. Portanto, ao substituir na fórmula estas quantidades determinadas, obtém-se  $K$ .

### Bohr Determina a Constante de Rydberg sem realizar Experiências

A fórmula de Balmer deu a Bohr a pista essencial que conduziu à descoberta de que o momento angular podia ser quantizado:  $L = Kh, 2Kh, 3Kh, \dots$  onde  $h$  é a constante de Planck, como habitualmente, e  $K$  um fator numérico constante, presumivelmente 1.

Bohr deu um argumento muito inteligente para encontrar  $K$  *sem realizar nenhuma experiência*. Primeiro, pense como o tamanho de  $K$  afeta as propriedades físicas do átomo de Hidrogénio. Que diferenças teria o átomo se  $K = 10$ , em comparação com  $K = 1$ ? Para  $K = 1$ , as órbitas possíveis seriam as que têm momento angular  $h, 2h, 3h, 4h, \dots$  Para  $K = 10$ , teremos muito menos riscas espetrais, e o espaço médio entre elas seria maior.

Em seguida, Bohr imaginou um átomo de Hidrogénio enorme, um electrão orbitando um protão num círculo de um metro de raio. Esta experiência teria que ser realizada nas profundezas do espaço, mas é apenas uma experiência imaginada, ao espírito de Einstein. A questão é que para átomos muito grandes, o electrão move-se bastante lentamente ao longo de uma escala de distância que nos é familiar. Sabemos de muitas experiências que as cargas que se movem a velocidades baixas ao longo de distâncias normais (normais para nós, seres humanos), emitem radiação de acordo com a equação de Maxwell. Ou, simplificando, se a carga se move ao longo do círculo com frequência  $f$  ( $f$  revoluções por segundo), irá emitir radiação de frequência  $f$  - porque o seu campo eléctrico, tal como visto de um ponto fixo, a um metro de distância por exemplo, irá girar  $f$  vezes por segundo.

*Por outro lado, a condição de quantização do momento angular deve ser verdadeira para todas as órbitas circulares do electrão em torno do protão, até para este átomo de grande tamanho.*

Para além disso, a radiação emitida deve continuar a ser obtida pela diferença de energias de órbitas vizinhas,

$$hf = E_{n+1} - E_n.$$

Mas  $E_{n+1} - E_n$ , a diferença de energia entre órbitas vizinhas, *depende de K*, discutido anteriormente.

Assim sendo, Bohr concluiu que *K é definido* ao considerar que a frequência de radiação emitida por um átomo muito grande seja corretamente dada pelo senso comum – isto é, a frequência da radiação deve ser a mesma que a frequência orbital do elétron (o número de ciclos por segundo). Por outras palavras, para uma órbita com um grande raio, temos:

$$E_{n+1} - E_n = hf = \frac{h\nu}{2\pi r}$$

Nesta expressão,  $\nu$  é a velocidade do elétron numa órbita de raio  $r$ .

**A estratégia é depois a seguinte:** Assume-se que as únicas órbitas possíveis são aquelas cujo momento angular seja um múltiplo inteiro de  $Kh$ , onde  $K$  é uma constante, de modo que a órbita  $n$  tenha momento angular  $nKh$ . Pode-se depois utilizar a equação do movimento para determinar o raio  $r_n$ , a velocidade do elétron  $v_n$  e a energia  $E_n$  da órbita  $n$ . Obviamente que todas estas variáveis dependem de  $K$ .

*Agora concentre-se em órbitas de um metro de raio, aproximadamente.* Os elétrons emitem radiação de frequência dada pela equação do movimento para um elétron que orbita um próton a um metro de distância. Mas este resultado deve ser *idêntico* ao da frequência obtida pela diferença de energias entre órbitas vizinhas, dividida por  $h$ .

Se  $K$  for muito pequeno, esta diferença de energia é pequena, e não obteremos valores *idênticos*. Se  $K$  for muito grande, ocorre o mesmo. Devemos encontrar o valor de  $K$  para o qual estas duas frequências são *idênticas*, o que faremos já de seguida.

Estabelece-se na equação seguinte que apenas se pode conciliar a frequência de radiação clássica para um átomo do tamanho de um ser humano e as previsões de Bohr se  $K = 1/2\pi$ . Assim, devemos assumir que o momento angular está sempre quantizado em *blocos* de tamanho  $h/2\pi$ .

Tal como mostrado na equação seguinte, os níveis de energia permitidos são:

$$E_n = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{2r_n} = -\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \cdot \frac{me^4}{2K^2h^2} \cdot \frac{1}{n^2} = -\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \cdot \frac{2\pi^2me^4}{h^2} \cdot \frac{1}{n^2}$$

Ao conciliar esta equação com  $E_n - E_m = hf$  obtém-se a fórmula de Balmer:

$$f = \frac{E_n - E_m}{h} = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \cdot \frac{2\pi^2me^4}{h^3} \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2}\right)$$

A novidade é que não há aqui nenhum parâmetro ajustável! A constante de Rydberg que apareceu anteriormente é dada em função de  $h$ ,  $m$  e  $e$ . *O argumento abstrato de que os resultados obtidos pelas previsões quânticas devem ser idênticos aos bem conhecidos resultados clássicos para sistemas grandes e lentos baseia-se no constante de Rydberg.*

É o mesmo que dizer,

$$R_H = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \cdot \frac{2\pi^2me^4}{ch^3}$$

Esta fórmula demonstrou estar correta dentro dos limites dos erros experimentais obtidos ao medir as quantidades apresentadas à direita.

Esta correspondência para sistemas de grande tamanho é designada de **Princípio da Correspondência**: dentro do limite referido, as previsões quânticas devem ser semelhantes aos bem conhecidos resultados da física clássica.

### Quantização do Momento Angular a partir do Princípio da Correspondência

São apresentados em seguida os detalhes discutidos nos parágrafos anteriores.

Vamos assumir que esta órbita muito grande é a órbita  $n$  (onde  $n$  é da ordem de  $10^5$ !), de modo que possui momento angular:

$$mvr = L = nKh.$$

Utilizando

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r^2},$$

encontra-se

$$m \sqrt{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{mr}} \cdot r = nKh$$

a partir do qual descobrimos que o raio das órbitas possíveis é dado por:

$$r_n = \frac{4\pi\epsilon_0}{me^2} \cdot n^2 K^2 h^2.$$

Assim, as energias possíveis são:

$$E_n = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{2r_n} = -\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \cdot \frac{me^4}{2K^2 h^2} \cdot \frac{1}{n^2}$$

Deste modo, para  $n$  muito grande:

$$E_{n+1} - E_n = -\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \cdot \frac{me^4}{2K^2 h^2} \cdot \left(\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n^2}\right) \cong \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \cdot \frac{me^4}{2K^2 h^2} \cdot \frac{2}{n^3}$$

Isto deve ser igual a:

$$hf = \frac{h\nu}{2\pi r}$$

para os respetivos  $\nu$  e  $r$  desta enorme órbita.

Utilizando:

$$mv_n r_n = n\hbar, \quad v_n = n\hbar / mr_n.$$

Assim:

$$\frac{h\nu}{2\pi r} = \frac{n\hbar^2}{2\pi m r_n^2}.$$

Logo:

$$E_{n+1} - E_n = \frac{n\hbar^2}{2\pi m r_n^2}$$

E ao utilizar:

$$r_n = \frac{4\pi\epsilon_0}{me^2} \cdot n^2 K^2 \hbar^2$$

Obtém-se

$$E_{n+1} - E_n \cong \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \cdot \frac{me^4}{2K^2\hbar^2} \cdot \frac{2}{n^3} = \frac{n\hbar^2}{2\pi m r_n^2} = \frac{n\hbar^2}{2\pi} \cdot \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \cdot \frac{me^4}{n^4 K^4 \hbar^4}$$

O segundo e o quarto termos na equação anterior devem ser iguais para um  $n$  muito grande. Ao cortar os fatores comuns dos dois termos, descobre-se que a equação desta igualdade é:

$$K = 1/2\pi.$$

Este foi o argumento que Bohr utilizou para demonstrar que o momento angular para o seu modelo é quantizado em *blocos* de  $\hbar/2\pi$ .

© Michael Fowler, Universidade de Virgínia

**Casa das Ciências 2012**

Tradução e adaptação de Nuno Machado e Manuel Silva Pinto  
Revisão do documento pela Professora Guiomar Evans – Dep. Física – FCUL

