As Transformações de Lorentz

Michael Fowler
Universidade de Virgínia, Departamento de Física

Problemas com as transformações de Galileu

A mecânica Newtoniana não se altera perante as transformações de Galileu, no que diz respeito a dois referenciais inerciais em movimento e com velocidade relativa *v* na direção *x*,

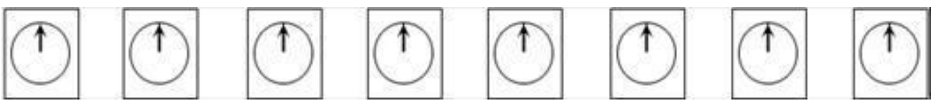
$$
\begin{aligned}
&x = x' + vt' \\
&y = y' \\
&z = z' \\
&t = t'
\end{aligned}
$$

Contudo, nestas transformações assume-se que o *tempo* é um conceito universal e bem definido, ou seja, é o mesmo em todo o lado, e todos os observadores estão de acordo quanto à contagem do tempo. Contudo, e uma vez aceite o postulado básico da relatividade restrita, que refere que as leis da física, incluindo as equações de Maxwell, são as mesmas em qualquer referencial inercial, e consequentemente a velocidade da luz tem o mesmo valor em qualquer referencial inercial, os observadores colocados em diferentes referenciais não estarão de acordo quanto à sincronia dos relógios, sempre que estes se encontrem a determinada distância um do outro. Para além disso, as dimensões dos objetos em movimento são comprimidas na direção do movimento pelo efeito da contração de Lorentz-Fitzgerald. É óbvio que as equações anteriores são demasiado simples! Devemos pensar cuidadosamente sobre a medição do tempo e do espaço, e construir novas equações de transformação que estejam de acordo com a relatividade restrita.

O objetivo deste texto é levar-nos a encontrar um conjunto de equações análogas às anteriores, onde, num dado referencial *S*, as coordenadas (*x*, *y*, *z*, *t*) de determinado evento, como por exemplo a explosão de uma bomba, sejam função das coordenadas (*x'*, *y'*, *z'*, *t'*) do mesmo evento mas medidas num referencial paralelo S' que se encontra em movimento, com velocidade *v*, ao longo do eixo *x* do referencial *S*. Os observadores *O*, na origem do referencial *S*, e *O'*, na origem do referencial *S'*, sincronizam os seus relógios a *t = t' = 0* no momento em que passam um pelo outro, ou seja, quando os dois referenciais coincidem.

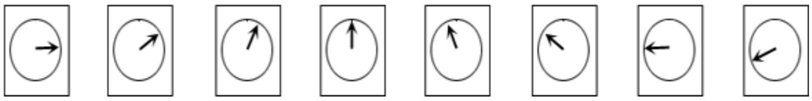
Para determinar o instante de tempo *t'* em que ocorre a explosão da bomba no referencial *S'*, o observador *O'* pode determinar a distância do ponto (*x'*, *y'*, *z'*) à origem, e seguidamente determinar quanto tempo levaria a luz da explosão a chegar à origem do referencial *S'* e, portanto, ao observador *O'*. Uma abordagem mais direta (e que pode ser útil quando temos em consideração transformações entre diferentes referenciais) é imaginar que o observador *O'* possui uma enorme quantidade de ajudantes, todos munidos de relógios sincronizados utilizando para isso lâmpadas flash e relógios munidos de fotocélulas[1]. Assim, o evento – a explosão da bomba – ocorrerá próximo de um dos relógios, e esse relógio determinará o tempo *t'* em que o evento ocorre, para evitar ter que determinar o tempo que a luz demora desde o local da explosão até ao observador.

No referencial *S'*, o observador *O'* e a sua equipa de ajudantes possuem relógios ao longo do eixo *x*, todos sincronizados:



Pense agora como este conjunto de relógios será visto pelo observador *O* que se encontra no referencial *S*. Em primeiro lugar, e uma vez que se movem com velocidade *v*, os relógios medirão a passagem do tempo mais lentamente devido à dilatação do tempo, de acordo com o fator de $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$, em comparação com os relógios idênticos do observador *O*. Em segundo lugar, os relógios não estarão sincronizados entre si. Se os relógios se encontrarem a uma distância *L* uns dos outros, distância essa determinada pelo observador *O'*, em dois relógios sucessivos, o da direita (tendo em conta que o movimento ocorre no sentido da esquerda para a direita) estará *atrasado* $\frac{Lv}{c^2}$, tal como observado por *O*.

[1] N. do T.: Sobre o método para sincronizar relógios referido, ver o texto *Relatividade Restrita – Sincronizar Relógios*, também publicado no portal Casa das Ciências.



Devemos ter em conta que esta dessincronização, observada a partir de outro referencial, ocorre apenas se houver *afastamento entre os relógios na direção em que ocorre o movimento*. Considere dois relógios a determinada distância um do outro, ao longo do **eixo *z'*** do referencial *S'*. Se ambos forem sincronizados pelo mesmo método utilizado anteriormente, torna-se claro que quando observados a partir do referencial *S* a luz percorre a mesma distância para chegar a cada um dos dois relógios, e por isso estes continuarão sincronizados (embora dessincronizados com os restantes relógios dispostos ao longo da direção do movimento devido ao fator de dilatação do tempo).

Derivar as Transformações de Lorentz

Suponhamos que o observador *O'* e a sua equipa observam a pequena bomba a explodir em *S'* nas coordenadas (*x'*, *0*, *0*, *t'*). Vamos agora encontrar as coordenadas (*x*, *y*, *z*, *t*) do evento, tal como observadas por *O* no referencial *S* (tal como anteriormente, *S'* move-se em relação a *S* com velocidade *v* constante e ao longo da direção *x*). Por outras palavras, devemos proceder à derivação das transformações de Lorentz – que são apenas as equações das quatro coordenadas do evento num referencial inercial em função das coordenadas do mesmo evento noutro referencial inercial diferente do primeiro. Consideremos que y' e z' têm valor zero, uma vez que não ocorre contração de Lorentz-Fitzgerald perpendicular à direção do movimento, e por isso y = y' e z = z'.

Em primeiro lugar, consideremos o instante em que a bomba explode tal como determinado pelo observador *O*. O observador *O'* e a sua equipa determinaram que a explosão ocorreu no instante *t'*, tal como medido pelo relógio que se encontrava no local da explosão, em *x'*. Em seguida, e tal como observado por *O* a partir do referencial *S*, o relógio de *O'* que se encontra na posição *x'* não se encontra sincronizado com o relógio na origem do referencial *S'*. Quando a bomba explode e o relógio na posição *x'* marca o instante *t'*, para o observador *O* o relógio de *O'* que se encontra na origem do referencial *S'* marca o instante $t' + \frac{vx'}{c^2}$. Que instante marcará o relógio do observador *O*? Lembre-se que os observadores *O* e *O'* sincronizaram os relógios que se encontram sobre a origem dos referenciais no momento em que os referenciais coincidiram, sendo esse o instante *t = t' = 0*. Consequentemente, e devido ao fator de dilatação do tempo, *O* observou o relógio de *O'* a contar mais lentamente o tempo. Assim sendo, quando no instante da explosão, *O* observa que o relógio de *O'* na origem do referencial *S'* marca o instante $t' + \frac{vx'}{c^2}$, notará que no seu referencial, o tempo apresentado pelo seu relógio é dado por:

$$t = \frac{t' + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

pois deve ser tido em conta o fator de dilatação temporal. Esta é a primeira das transformações de Lorentz.

Em segundo lugar, onde se encontra *O* quando observa a explosão? Uma vez que a explosão ocorre no instante t após *O'* passar por *O*, *O'* está *vt* metros à frente de *O* no instante *t*. A explosão ocorre *x'* metros à frente de *O'*, tal como determinado por *O'*, mas é claro que para *O* essa distância surge contraída para $x'\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, uma vez que se encontra sobre um referencial em movimento. Assim, *O* observa a ocorrência da explosão no ponto *x*, dado por

$$x = vt + x'\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Podemos reescrever a equação anterior para obter o valor de *x* como função de *x'* e *t'*, ao substituir *t* pela primeira transformação de Lorentz:

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Encontramos assim as transformações de Lorentz que expressam as coordenadas (*x*, *y*, *z*, *t*) de um evento num referencial *S* em função das coordenadas (*x'*, *y'*, *z'*, *t'*) do mesmo evento num referencial *S'*:

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$y = y'$$
$$z = z'$$

$$t = \frac{t' + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Repare que na derivação anterior nada depende do sentido do movimento do referencial *S'* em relação a *S* e por isso, na transformação inversa (de (*x*, *y*, *z*, *t*) para (*x'*, *y'*, *z'*, *t'*)) utilizam-se exatamente as mesmas equações anteriores, com *v* substituído por –*v*.

Esferas de luz

Considere agora o seguinte cenário: suponha que quando *O'* passa por *O* (o instante em que ambos concordam quanto à sincronia dos relógios e em que *t = t' = 0*), *O'* emite um *flash* de luz brilhante que, segundo observa, ilumina uma zona esférica em expansão e com centro no próprio observador *O'* (imagine que é um dia de algum nevoeiro, e que *O'* consegue observar a propagação da luz a partir da fonte luminosa). No instante de tempo *t'*, *O'* (ou, para ser mais preciso, os ajudantes que constituem a sua equipa e que se encontram no mesmo referencial inercial) observa uma esfera de luz de raio *ct'*, ou seja, observa iluminados todos os pontos (*x'*, *y'*, *z'*, *t'*) da superfície

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2t^2 \,.$$

Questão: como será que *O* e a sua equipa de ajudantes que se encontra em repouso e distribuída ao logo do referencial *S* observam a propagação e "expansão" desta luz?

Para responder a esta questão, repare que a equação anterior e que diz respeito aos pontos de máximo afastamento da luz em relação à fonte em determinado instante *t'*, tal como observada no referencial *S'* pode ser escrita da seguinte forma:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t^2 = 0 \,,$$

e pode ser imaginada como *uma superfície num espaço a quatro dimensões (x', y', z', t')*, e que contém todos os "eventos" de luz emitidos. Para encontrar a superfície correspondente a estes "eventos" de luz no espaço a quatro dimensões (*x*, *y*, *z*, *t*), é necessário utilizar as transformações de Lorentz para passar de um conjunto de variáveis, (*x'*, *y'*, *z'*, *t'*), para o outro, (*x*, *y*, *z*, *t*): [2]

$$x = \frac{x' - vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$y = y'$$
$$z = z'$$

$$t = \frac{t' - \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

[2] N. do T.: Repare que nestas equações a velocidade surge como –*v*, uma vez que a transformação é a inversa da considerada anteriormente, ou seja, neste caso a transformação é de (*x'*, *y'*, *z'*, *t'*) para (*x*, *y*, *z*, *t*).

Ao substituir (*x'*, *y'*, *z'*, *t'*) por (*x*, *y*, *z*, *t*) na equação $x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t^2 = 0$, a superfície resultante em (*x*, *y*, *z*, *t*) é:

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0\,.$$

Isto significa que no instante de tempo *t*, *O* e a sua equipa de ajudantes no referencial *S* dirão que a luz se "expandiu" até originar uma superfície esférica de centro em *O*.

Como podem *O'* e *O*, que se afastam um do outro, estar ambos possivelmente corretos ao afirmar que em dado instante a luz emitida se "expandiu" até originar uma superfície esférica, tendo essa superfície centro em *O'*, segundo o ponto de vista de *O'*, e centro em *O*, segundo o ponto de vista de *O*?

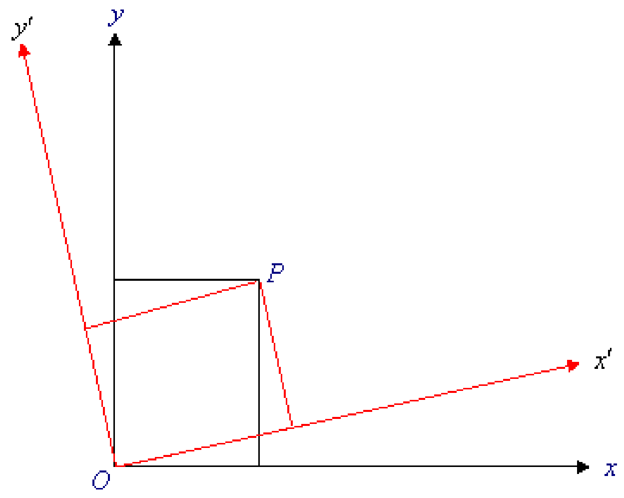
Imagine a esfera de luz tal como *O'* a vê – no instante *t'*, *O'* observa uma esfera de raio *r'*, em particular vê a luz atingir os pontos *+r'* e *–r'* no eixo *x*. Mas do ponto de vista de *O'*, a esfera de luz em expansão não chega a *+r'* ao mesmo tempo que chega a *–r'*! (É novamente a mesma questão já levantada anteriormente sobre a sincronia do conjunto de relógios dispostos ao longo da direção do movimento.) É por isso que *O* não consegue observar a superfície esférica observada por *O'*: *a chegada da luz à superfície esférica de raio r' e centrada em O' no instante de tempo t' corresponde, no referencial S, a um contínuo de diferentes eventos que ocorrem em instantes de tempo diferentes.*

Invariância de Lorentz

Para um evento (*x'*, *y'*, *z'*, *t'*) e para o qual $x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t^2 = 0$, as coordenadas do mesmo evento (*x*, *y*, *z*, *t*) medidas no referencial *S* satisfazem também $x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t^2 = 0$. Diz-se que a quantidade $x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t^2$ é uma invariância de Lorentz: não varia de um referencial para outro.

Podemos ter em conta um analogia simples e bidimensional a esta invariância, ao considerar dois conjuntos de eixos, *Oxy* e *Ox'y'*, ambos com a mesma origem, mas sendo *Ox'* inclinado face a *Ox*, de modo que os eixos são semelhantes, mas o segundo resulta da rotação do primeiro. O ponto *P*, de coordenadas (*x*, *y*) no eixo *Oxy*, tem coordenadas (*x'*, *y'*) no eixo *Ox'y'*. O quadrado da distância de *P* à origem comum *O* é dado por $x^2 + y^2$ e também por $x'^2 + y'^2$, e por isso para a transformação das coordenadas (*x*, *y*) em (*x'*, *y'*), $x^2 + y^2$ é invariante. De modo semelhante, se um ponto P_1 tem de coordenadas (x_1, y_1) e (x_1', y_1') e outro ponto, P_2, tem de coordenadas (x_2, y_2) e (x_2', y_2'), então ambos os pontos estão à mesma distância um do outro, qualquer que seja o referencial considerado, e por isso:

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = (x'_1 - x'_2)^2 + (y'_1 - y'_2)^2\,.$$



Este ponto é particularmente óbvio: a distância entre dois pontos sobre um plano não pode depender da inclinação do sistema de eixos.

A analogia de Lorentz, ignorando as coordenadas *y* e *z*, pode ser escrita da seguinte forma:

$$c^2(t_1 - t_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 = c^2(t'_1 - t'_2)^2 - (x'_1 - x'_2)^2 = s^2\,,$$

onde s corresponde a uma medida da “distância” entre os dois eventos (x_1, t_1) e (x_2, t_2). A este *s* dá-se por vezes o nome de “intervalo espaço-tempo”. *A grande diferença face ao exemplo bidimensional está no facto de s^2 poder ser positivo ou negativo.* Para s^2 negativo, se considerarmos *s* como a raiz quadrada de s^2, a “distância” obtida terá valor imaginário – e por isso devemos analisar cuidadosamente o caso. Tal como veremos adiante, é muito claro o que deve ser feito em qualquer caso particular – casos em que os eventos ocorram em posições diferentes (separação espacial) e instantes diferentes (separação temporal) são mais facilmente analisados quando separados, pelo menos numa primeira abordagem.

Considere em primeiro lugar dois eventos simultâneos no referencial *S'* de modo que $t_1' = t_2'$. Estes eventos não ocorrerão simultaneamente no referencial S, mas satisfazem a condição:

$$(x_1 - x_2)^2 - c^2(t_1 - t_2)^2 > 0\,.$$

Neste caso os eventos ocorrem com separação espacial. Isso significa que ocorrem suficientemente afastados para que um feixe de luz não tenha tempo para chegar de um a outro, e portanto nenhum destes eventos é a causa do outro. A sequência de eventos pode ser diferente para diferentes referenciais quando estes ocorrem com separação espacial. Considere o exemplo de dois relógios colocados na primeira e na última carruagem de um comboio em movimento com velocidade *v* e ativados por um *flash* de luz que parte de uma lâmpada localizada exatamente no meio dos relógios. Analisada a cena a partir do solo, o relógio da última carruagem inicia a contagem do tempo antes do relógio da primeira carruagem. Agora imagine que observa toda a cena a partir de um comboio ainda mais rápido e que ultrapassa o anterior – o relógio na primeira carruagem será o primeiro a iniciar a contagem do tempo. O importante neste exemplo é saber que apesar de ambos os eventos ocorrerem numa ordem diferente quando vistos de diferentes referenciais, nenhum deles está dependente do outro, não são a causa um do outro.

Considere agora dois eventos que ocorrem no mesmo local no referencial *S'*, mas em diferentes instantes de tempo, (x_1, t_1) e (x_2, t_2). Assim, no referencial *S*:

$$c^2(t_1 - t_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 = c^2(t'_1 - t'_2)^2 > 0\,.$$

Estes eventos ocorrem com separação temporal. Não há nenhum referencial para o qual os eventos ocorram simultaneamente. Eventos de “causa e efeito” ocorrem com separação temporal.

O cone de luz

Vamos tentar visualizar, no espaço a quatro dimensões, a superfície esférica descrita pela luz proveniente de um único *flash*,

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0\,.$$

Pode ajudar pensar numa situação mais simples, como por exemplo uma onda que se propaga à superfície de um lago, quando deixamos cair uma pedra. Se considerarmos *c* como a velocidade de propagação da onda, é fácil concluir que no instante *t* após o início da propagação a frente de onda é dada por

$$x^2 + y^2 - c^2t^2 = 0\,.$$

Pense agora na expansão da frente de onda como se fosse uma superfície no espaço tridimensional (*x*, *y*, *t*). O plano correspondente ao tempo, *t*, corta esta superfície originando um círculo de raio *ct*. Isso significa que a superfície é um cone com o vértice na origem. A superfície resultante do *flash* de luz no espaço a quatro dimensões (*x*, *y*, *z*, *t*) não é tão fácil de visualizar, mas a situação é análoga à anterior: o plano correspondente ao tempo, *t*, corta a superfície numa esfera e não num círculo como anteriormente. Esta superfície é designada de *cone de luz*.

Foi dito anteriormente que a separação do ponto P (*x*, *y*, *z*, *t*) da origem é uma separação espacial se $x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 > 0$ e temporal se $x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 < 0$. Diz-se que é uma separação do tipo luz se $x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0$. A separação entre pontos no cone de luz e a origem é do tipo luz. Para ser mais preciso, os pontos correspondentes ao *flash* de luz emitido a partir da origem no instante $t = 0$ correspondem ao *cone de luz do futuro*. Uma vez que a equação depende de t^2, há uma solução para *t* negativo, o *cone de luz do passado*, que corresponde à reflexão do cone de luz do futuro no plano $t = 0$.

Possíveis ligações causais são como se segue: um evento que ocorra na origem (0, 0, 0, 0) pode provocar um evento no cone de luz do futuro: o “futuro” tal como é visto a partir da origem. Eventos que ocorram no cone de luz do passado –

no “passado” – podem provocar eventos na origem. Não há nenhuma ligação causal entre um evento na origem e um evento fora dos cones de luz, já que nesse caso a separação será espacial: fora do cone de luz, o evento ocorre noutro “local” tal como visto da origem.

Casa das Ciências 2013

Tradução/Adaptação de Nuno Machado e Manuel Silva Pinto