

Projecto Faraday

Textos de Apoio

A Revolução Quântica

12^o Ano de Escolaridade



casa das ciências

Porto, Outubro de 2009

Ficha Técnica

Projecto de intervenção no ensino da Física no secundário.

Financiamento

Fundação Calouste Gulbenkian.

Execução

Departamento de Física, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto.

Escolas Participantes

- ES Filipa de Vilhena
- ES Fontes Pereira de Melo
- ES Garcia de Orta
- ES da Maia
- ES de Santa Maria da Feira

Coordenação

- J. M. B. Lopes dos Santos
- Manuel Joaquim Marques

Portal

URL: <http://www.fc.up.pt/faraday>

Texto do 12^o Ano

Redactor Principal

J. M. B. Lopes dos Santos

Colaboração e revisão

- Elisa Arieiro
- Carlos M. Carvalho
- Manuel Joaquim Marques
- Maria de Fátima Mota

Capítulo 13

A revolução quântica

A história da previsão e descoberta do fóton está entre os mais fascinantes episódios da ciência do século XX. Nunca, até hoje, a sugestão de uma nova partícula causou maior e mais duradoura confusão, a razão principal sendo que não se estava confrontado com um novo fenómeno, mas, ao contrário, com um velho fenómeno em novas vestes: radiação electromagnética livre, que se pensava compreendida como ondas, comportava-se em certas circunstâncias como constituída por partículas.

Abraham Pais [3]

Apesar das transformações radicais dos conceitos de espaço e tempo das Teorias da Relatividade Restrita e Geral, os físicos consideram as duas teorias, juntamente com a Física Newtoniana e a Electrodinâmica de Maxwell, como *teorias clássicas*.

Todas as teorias clássicas falam de um mundo de objectos, partículas ou campos, cuja existência independente e autónoma é fielmente representada na teoria; que evoluem sob a acção de leis determinísticas, as quais especificam totalmente o futuro e o passado a partir de um conjunto de dados iniciais. As teorias de Einstein introduziram a relatividade (variação com referencial) inesperada de algumas grandezas, como os intervalos temporais e espaciais, mas não puseram em causa a perspectiva realista da Física Newtoniana: o objecto da Física é aquilo que *é* e a sua essência é fielmente captada pela representação que dela faz a teoria.

O mesmo não se pode dizer em relação à Física Quântica. O corte em relação à tradição clássica é muito mais profundo e está bem

patente na dificuldade, ou mesmo impossibilidade, de formular a teoria sem referência à observação. Mesmo em Física Clássica, qualquer previsão concreta se refere ao resultado de uma experiência ou observação. Mas a representação teórica dos objectos da teoria, partículas ou campos, ignora completamente os processos de observação, cujos resultados podem ser deduzidos, sem ambiguidades, das propriedades objectivas dos campos e partículas. Não é assim em Física Quântica, que é muito mais uma teoria daquilo que se mede, do que uma teoria do que as coisas são em si.

Contudo, não foi uma iluminação filosófica que conduziu à sua formulação, mas sim o resultado de anos de experimentação, observação e reflexão em Física Atômica, que forçaram esta revisão das ideias clássicas.

O nosso objectivo neste capítulo, não é descrever o resultado final desta revolução, algo que exigiria muito mais tempo e preparação, mas sim explorar um pouco alguns dos aspectos da Física Atômica que forçaram esta descontinuidade com as ideias clássicas.

Vamos centrar-nos em três ideias fundamentais:

- a quantificação, natureza discreta de certas grandezas físicas, como a energia;
- a duplo aspecto de onda e partícula, quer do que classicamente se representava com campos (por exemplo a radiação electromagnética), quer do que se representava em termos de partículas, como os átomos e os electrões;
- o acaso, não como expressão da nossa ignorância sobre o comportamento de um sistema, que por si segue leis absolutamente determinadas, mas sim como elemento fundamental e irreduzível do funcionamento do universo.

Como veremos estas três ideias não são independentes e estão intimamente relacionadas. Começemos pela primeira.

13.1 A quantificação de energia

A posição e velocidade de uma partícula determinam a sua energia. No caso de uma onda, em que as diferentes partes de um meio vibram em torno de posições de equilíbrio, a energia será tanto maior quanto mais rápidas forem essas oscilações e maior o afastamento do equilíbrio. As grandezas de que depende a energia

de uma partícula ou onda variam continuamente, sem saltos. Nada na representação clássica do mundo nos prepara para a possibilidade de a energia poder tomar apenas certos valores discretos, estar **quantificada**; poder assumir dois valores E_1 e E_2 e nenhum valor entre estes dois. Como é que Max Planck, um académico respeitado, sem qualquer inclinação revolucionária, foi levado a propor isso mesmo?

13.1.1 Radiação electromagnética

Frequência e comprimento de onda

Cargas eléctricas aceleradas produzem campos eléctricos e magnéticos variáveis no tempo e no espaço: radiação electromagnética. Assim uma carga acelerada origina forças eléctricas sobre outra carga colocada a uma certa distância, r , mas não instantaneamente. Como vimos no último capítulo, só passado um tempo r/c é que a perturbação electromagnética, criada pela primeira carga, actua sobre a segunda; a lei de Coulomb só é válida para cargas em repouso e tem que ser modificada para cargas movimento.

Quando o movimento da carga que cria a radiação é harmónico,

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t + \varphi),$$

o campo eléctrico criado num ponto de vector de posição \vec{r} relativamente à posição de equilíbrio da carga é também harmónico¹

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{e}}{r} \cos \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) + \varphi \right] \quad (r = |\vec{r}|). \quad (13.1)$$

Repare-se no seguinte:

- A frequência angular de variação no tempo é a mesma da carga que cria o campo;
- o valor do campo no instante t é determinado pelo movimento da carga no instante anterior $t - r/c$, em que r é a distância à carga; r/c é o tempo que a perturbação electromagnética demora a percorrer a distância r .

¹A fórmula seguinte só é válida se $x_0 \ll |\vec{r}|$, isto é, para distâncias à carga muito superiores à sua amplitude de oscilação. Se assim não fosse, o tempo de propagação da radiação, r/c , seria diferente para diferentes posições da carga na sua oscilação. Por outro lado, a amplitude de oscilação, $|\vec{e}|$, depende do ângulo entre o vector \vec{r} e a direcção de oscilação da carga.

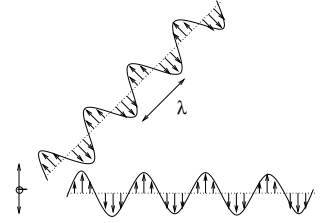


Figura 13.1: Uma carga oscilante emite radiação electromagnética em todas as direcções. O campo eléctrico oscila no tempo com a mesma frequência que a carga; o comprimento de onda é a distância percorrida pela radiação durante um período de oscilação.

- O ângulo de fase da função cosseno, a parte oscilante do campo, tem uma variação de 2π , correspondente a um período do cosseno, numa distância Δr dada por:

$$\omega \frac{\Delta r}{c} = 2\pi.$$

Esta distância é o **comprimento de onda da radiação**, λ :

$$\lambda = 2\pi \frac{c}{\omega} = cT = c/\nu.$$

em que

- $T = 2\pi/\omega$ é o período da radiação;
- $\nu = 1/T$ é a sua frequência, o número de oscilações completas por segundo.

Uma carga acelerada perde energia devido à radiação que emite. Se estiver a oscilar, a sua amplitude diminui gradualmente, tal como se estivesse sujeita a uma força de atrito: esse mecanismo chama-se **amortecimento radiativo**. A energia perdida pela carga pode, eventualmente ser absorvida *mais tarde* por outra carga, distante da primeira; o campo eléctrico da radiação ao actuar nessa carga acelera-a e aumenta a respectiva energia cinética. Contudo, a conservação de energia aplica-se em todos os instantes. Por isso, os campos oscilantes da radiação tem uma certa quantidade de energia.

Distribuição espectral

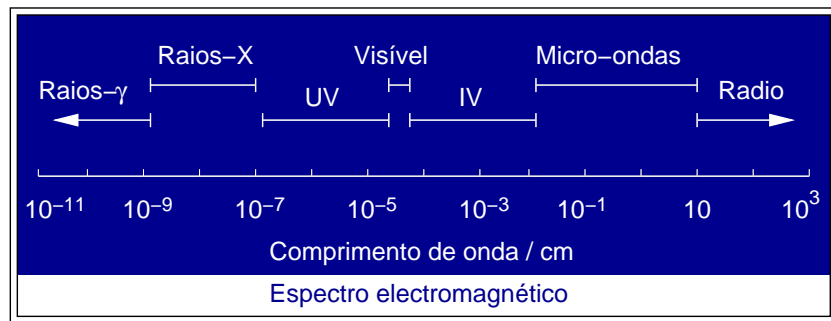


Figura 13.2: Espectro electromagnético; embora a radiação electromagnética seja o mesmo fenómeno em todos os comprimentos de onda, a variedade de aplicações e de instrumentos apropriados à detecção nas diferentes gamas do espectro, conduziu a diferentes designações.

Quando fazemos passar a luz do Sol por um prisma, ou simplesmente, vemos a imagem do Sol reflectida/refractada em pequenas gotas de água suspensas na atmosfera—o arco-íris—verificamos que a radiação Solar é composta de várias **cores**. Os nossos sentidos diferenciam deste modo a radiação de acordo com a respectiva frequência ou comprimento de onda. A radiação que percebemos como vermelha tem uma frequência mais baixa (comprimento de onda maior) que a que percebemos como violeta. Num corpo macroscópico a uma temperatura finita, como o Sol, existem muitas frequências possíveis de oscilação das cargas e o campo de radiação emitido é uma sobreposição (soma) de campos com variações temporais semelhantes à da equação 13.1 na página 7, mas com frequências muito variadas; uma certa gama de frequências é percebida pelo nosso sentido visual, frequências mais baixas (infra-vermelhos) são detectadas na nossa pele, na forma de uma sensação de calor. A cada intervalo de frequências corresponde uma certa energia e a energia total da radiação é a soma das energias associadas a cada intervalo de frequências.

A potência incidente numa pequena área ΔA de um corpo exposto a um campo de radiação estacionário é

$$\frac{dE}{dt} = I\Delta A,$$

em que I é a intensidade de radiação, a potência incidente por unidade de área. Se contarmos apenas a radiação cuja frequência está numa banda $[\nu, \nu + \Delta\nu]$ ($\Delta\nu \ll \nu$) podemos definir a intensidade espectral de radiação, $I(\nu)$

$$\left. \frac{dE}{dt} \right|_{\nu, \nu + \Delta\nu} = I(\nu)\Delta\nu\Delta A.$$

Com a frequência e o comprimento de onda estão relacionados, $\lambda = c/\nu$, a intensidade espectral também pode ser definida por gama de comprimentos de onda:

$$\left. \frac{dE}{dt} \right|_{\lambda, \lambda + \Delta\lambda} = J(\lambda)\Delta\lambda\Delta A.$$

sendo a relação entre as duas densidades

$$J(\lambda) = \frac{c}{\lambda^2} I\left(\frac{c}{\lambda}\right).$$

\mathcal{ETV}_1 : Atendendo às respectivas definições, quais são as unidades SI das densidades espectrais, $I(\nu)$ e $J(\lambda)$?

Equilíbrio térmico radiação-matéria

Imaginemos agora um sistema isolado, limitado por paredes perfeitamente reflectoras, que não deixam a radiação escapar. Um tal sistema acabará por atingir o equilíbrio térmico, em que deixa de haver transferências de energia entre as suas diferentes partes.

Não é difícil ver que a energia do sistema ficará dividida entre a matéria e a radiação. Se toda a energia ficasse na matéria, na forma de movimento desordenado das suas partículas, estas, como estão carregadas, emitiriam radiação e perderiam energia. Se toda a energia estivesse na radiação electromagnética, as cargas materiais ficariam expostas a campos eléctricos oscilantes que as colocariam em movimento, havendo transferência de energia da radiação para a matéria.

Planck, em 1900, determinou a forma como a distribuição espectral da radiação em equilíbrio térmico com a matéria varia com a temperatura, $I_{\text{cn}}(\nu, T)$. Considerou cargas sujeitas a oscilações harmónicas com uma dada frequência ν e expostas a um campo de radiação e mostrou que a situação de equilíbrio, em que deixa de haver fluxo de energia entre matéria e radiação, é determinada pela condição:

$$I_{\text{cn}}(\nu, T) \propto \nu^2 \epsilon_\nu(T), \quad (13.2)$$

em $\epsilon_\nu(T)$ é a energia média de cada carga em oscilação com frequência ν .

Como vimos no 10^o ano, no caso de um líquido ou gás, a temperatura absoluta, T , é uma medida da energia cinética média de translação por partícula,

$$\epsilon_c = \frac{3}{2} k_B T, \quad (13.3)$$

em que k_B é a constante de Boltzmann. Para osciladores harmónicos com movimento numa direcção, considerados por Planck, a física clássica previa a mesma energia média independentemente da respectiva frequência,²

²Planck considerou osciladores com movimento segundo uma só direcção.

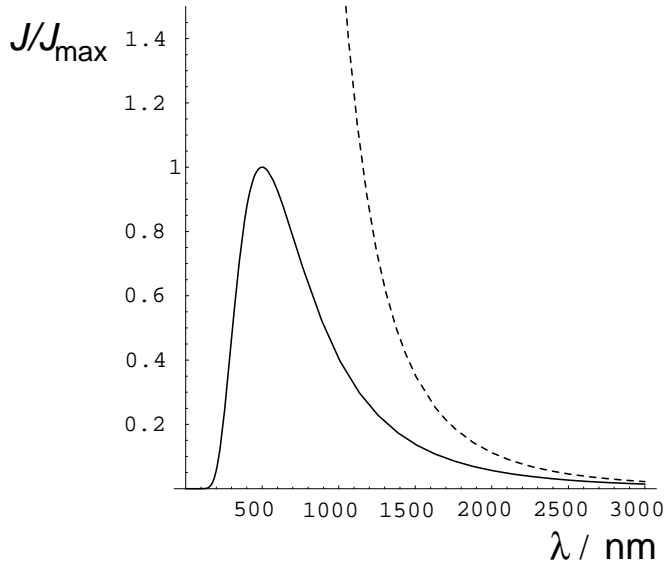


Figura 13.3: A distribuição de Planck para $T = 5780\text{ K}$ normalizada pelo valor do seu máximo (a cheio); se a relação da eq. 13.4 fosse válida, a distribuição espectral seria a da curva tracejada.

$$\epsilon_{\nu}^{(\text{cl})}(T) = k_B T, \quad (13.4)$$

o que implicava que a densidade espectral aumentasse com a frequência (Lei de Rayleigh-Jeans),

$$I_{\text{cn}}(\nu, T) \propto \nu^2 k_B T,$$

ou, em termos do comprimento de onda, crescesse quando $\lambda \rightarrow 0$:

$$J_{\text{cn}}(\lambda, T) \propto \frac{c^3}{\lambda^4} k_B T.$$

As medições experimentais de Wien mostravam que para $\nu \rightarrow \infty$ ($\lambda \rightarrow 0$) a densidade espectral tornava-se nula:

$$\begin{aligned} I_{\text{cn}}(\nu \rightarrow \infty, T) &\propto \nu^3 e^{-a\nu/T} \rightarrow 0 \\ J_{\text{cn}}(\lambda \rightarrow 0, T) &\propto \lambda^{-5} e^{-ac/\lambda T} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

No seu primeiro trabalho, Max Planck **adivinhou** a forma da distribuição espectral do corpo negro. Não há outra maneira de descrever a sua descoberta. Conhecendo o comportamento em

A respectiva energia cinética média é $k_B T/2$, um terço do resultado da equação 13.3, pois só há movimento segundo um eixo. Mas a energia potencial média do oscilador é também $k_B T/2$ o que dá uma energia total igual a $k_B T$.

dois limites, baixas e altas frequências, Planck propôs uma única fórmula que reproduzia muito fielmente as curvas experimentais em todas as frequências.

A sua contribuição revolucionária foi a hipótese que fez para obter este resultado. Planck assumiu que uma carga em oscilação só poderia trocar energia com a radiação em múltiplos inteiros de um valor proporcional à respectiva frequência de oscilação

$$E = h\nu,$$

em que h é uma nova constante, que ficou conhecida por **constante de Planck**. De acordo com esta hipótese, excitar oscilações de frequência ν elevada requer muita energia (pelo menos $h\nu$) e essa energia pode distribuir-se de muitas maneiras diferentes por osciladores de frequência mais baixa. Por isso é muito mais frequente observar essa energia distribuída por osciladores de baixa frequência, do que concentrada numa única oscilação. Planck concluiu que a energia média de osciladores de elevada frequência é fortemente suprimida relativamente a osciladores de frequência mais baixa. O resultado que obteve foi, em vez do da equação 13.4 na página precedente,

$$\epsilon_\nu(T) = \frac{h\nu}{e^{h\nu/k_B T} - 1} \quad (13.5)$$

que, substituído na equação 13.2 deu, para a distribuição espectral de radiação térmica,

$$I_{\text{cn}}(\nu, T) = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \frac{h\nu}{e^{h\nu/k_B T} - 1}. \quad (13.6)$$

$$J_{\text{cn}}(\lambda, T) = \frac{2\pi c}{\lambda^4} \frac{hc/\lambda}{e^{hc/\lambda k_B T} - 1}. \quad (13.7)$$

A verificação experimental mais precisa de sempre da fórmula de Planck teve uma origem algo inesperada.

■ **Lei de Kirchhoff e o corpo negro** ■

Já vimos no 10^o ano, que a radiação incidente na superfície de um corpo, pode ser absorvida ou reflectida. A fracção absorvida depende da frequência da radiação:

$$I_{\text{abs}}(\nu) = e(\nu)I_{\text{inc}}(\nu) \quad 0 \leq e(\nu) \leq 1.$$

Quando o corpo está em equilíbrio com a radiação emitirá a mesma quantidade de radiação que absorve:

$$I_{\text{em}}(\nu) = e(\nu)I_{\text{inc}}(\nu)$$

e, por esta razão, $e(\nu)$ é a **emissividade** do corpo. Kirchhoff mostrou que, quando existe equilíbrio térmico completo entre radiação e matéria, se obtém

$$I_{\text{em}}(\nu) = e(\nu)I_{\text{cn}}(\nu, T)$$

em que a função $I_{\text{cn}}(\nu, T)$ é uma função universal da frequência e temperatura, que Kirchhoff desconhecia. Foi esta função que Planck determinou. Repare-se que a radiação emitida por um corpo a temperatura T tem a distribuição espectral da radiação térmica, $I_{\text{cn}}(\nu, T)$, se $e(\nu) = 1$, ou seja, se o corpo absorver toda a radiação que nele incide. Por isso se chama radiação do corpo negro.

Caixa 13.1: Lei de Kirchhoff.

\mathcal{ETV}_2 : De acordo com o resultado de Planck a energia média de um oscilador de frequência ν dividida pelo correspondente resultado clássico é

$$\frac{\epsilon_\nu(T)}{k_B T} = \frac{h\nu/k_B T}{e^{h\nu/k_B T} - 1},$$

ou seja é apenas função da variável $x = h\nu/k_B T$, que não é mais que a razão entre a mínima energia possível para o oscilador (acima de 0) e a energia clássica, de acordo com a proposta de Planck.

- a) Usando uma calculadora gráfica estudar esta função de x ,

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$$

e verificar os seguintes limites:

- i. $f(x) \approx 1$, $x \ll 1$;
- ii. $f(x) \ll x$, $x \gg 1$.

- b) Como podemos interpretar estes limites, referindo-nos à energia média de um oscilador? Em que situação é que o resultado de Planck é totalmente distinto do resultado clássico?

A radiação cósmica de fundo

Como realizar experimentalmente radiação em equilíbrio térmico com a matéria? Kirchhoff tinha sugerido, antes de Planck, que uma cavidade com paredes que absorvessem radiação de todas as frequências, acabaria por estar preenchida por radiação em equilíbrio térmico com a matéria. Um pequeno orifício nessa cavidade emitiria radiação com a distribuição espectral da radiação em equilíbrio térmico, com a mesma temperatura das paredes do corpo. Kirchhoff chamou a essa radiação **radiação de um corpo negro**. Mas o melhor corpo negro que conhecemos é o universo nos primeiros tempos da sua existência.

Em 1965 dois cientistas dos Laboratórios Bell no Estados Unidos,

conseguiram permissão para usar uma antena de radar, de comunicação com satélites, já fora de uso, para procurar emissões de rádio vindas das estrelas. Arno Penzias e Robert Wilson, viram os seus esforços frustrados, por não conseguirem ver-se livre de um ruído persistente (estática) captado pela antena, qualquer que fosse a direcção do céu para onde estivesse apontada. Ainda pensaram que fosse devido aos “presentes” deixados por pombos que se aninhavam na antena. Mas após uma limpeza paciente da mesma, o ruído continuava.

Felizmente, em conversa com outros colegas, souberam que alguns físicos da vizinha Universidade de Princeton, que trabalhavam num modelo de criação do Universo em que este tinha sido muito mais pequeno e muito mais quente no passado, tinham previsto que o Universo deveria estar hoje permeado por radiação electro-magnética, com energia apreciável precisamente na gama de comprimentos de onda que Penzias e Wilson tinham medido. Penzias e Wilson tinham de facto descoberto a radiação cósmica de fundo, um vestígio do Big Bang.

Satélite COBE

Em 1966 Penzias e Wilson mediram a intensidade espectral de radiação apenas a uma frequência determinada. Em 1992, o satélite COBE, **CO**smic **B**ackground **E**xplorer, completou uma série de medidas do modo como a energia da radiação cósmica de fundo se distribui pelos diferentes comprimentos de onda; verificou-se um excelente acordo destes resultados com a lei proposta por Planck em 1900, com uma temperatura $T = 2,725\text{ K}$. A Fig. 13.4 na página seguinte ilustra a qualidade desse acordo.

Esta radiação é um vestígio do tempo em que toda a matéria do universo estava ionizada. A existência de cargas livres mantinha a radiação e matéria em equilíbrio térmico. Com a expansão do universo e seu conseqüentemente arrefecimento, formaram-se os primeiros átomos neutros de hidrogénio e passou a haver muito menos emissão e absorção de radiação. Isso aconteceu na altura em que a temperatura do universo era cerca de $T \approx 3000\text{ K}$. A radiação cósmica de fundo que observamos hoje é a que existia nessa altura. O seu comprimento de onda aumentou na mesma proporção que as distâncias entre galáxias no Universo em expansão e isso correspondeu a uma diminuição de temperatura da distribuição espectral de radiação.

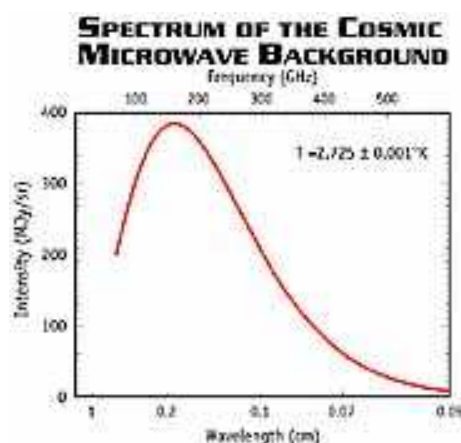


Figura 13.4: Os dados da medição da radiação cósmica de fundo pelo satélite COBE não se conseguem distinguir da curva teórica da lei de Planck (vermelho *online*).[2]

Leis de Wien e Stefan Boltzmann

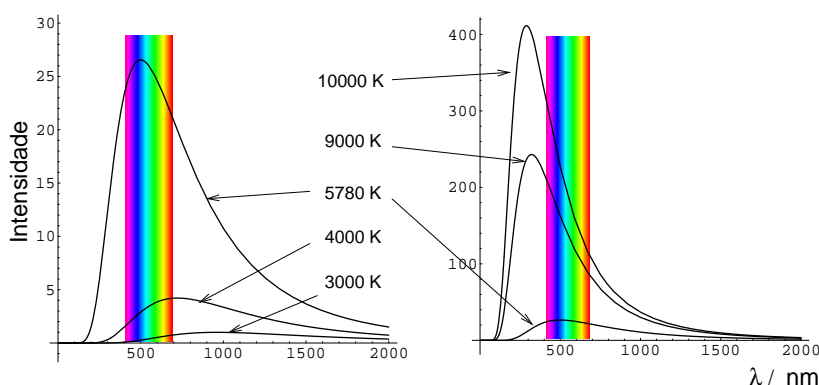


Figura 13.5: Intensidade espectral, $J_{\text{cn}}(\lambda)$ da radiação do corpo negro para várias temperaturas (lei de Planck). A banda colorida mostra, aproximadamente, a gama de radiação visível. As curvas de intensidade foram divididas pelo valor do máximo da curva de $T = 3000$ K.

Nos textos do 10^o ano (Capítulo VI) apresentamos dois resultados que são consequência da Lei de Planck:

Lei de Stefan-Boltzmann: A intensidade total da radiação térmica, isto é, somada sobre todas as gamas de frequência, é proporcional à quarta potência da temperatura em **kelvin**:

$$I_{\text{cn}} = \sigma T^4 \quad (\text{lei de Stefan – Boltzmann})$$

A constante σ é designada por constante de Stefan-Boltzmann e o seu valor pode deduzir-se da lei de Planck:

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15 h^3 c^2} = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}.$$

Lei de deslocamento de Wien: A uma dada temperatura, T , a intensidade $J_{\text{cn}}(\lambda)$ tem um máximo a um comprimento de onda λ_T , dado por

$$\lambda_T = \frac{b}{T}$$

em que

$$b = \frac{hc}{4,965k_B} \approx 2,9 \times 10^{-3} \text{ m K}.$$

Assim, quanto mais alta for a temperatura de um corpo negro:

- i) mais energia radia. Repare-se que entre uma temperatura de 300 K (temperatura ambiente) e 3000 K (o filamento de uma lâmpada de halogéneo) a temperatura aumenta 10 vezes, mas a potência radiada aumenta 10^4 vezes (10 000 vezes mais energia radiada no mesmo tempo). Na figura 13.5 é visível o aumento da intensidade a todos os comprimentos de onda, quando a temperatura aumenta.
- ii) Mais pequenos são os comprimentos de onda onde a maior parte da energia radiada é emitida. Como se vê na fig. 13.5, a distribuição espectral desloca-se para comprimentos de onda mais pequenos com o aumento de temperatura.

Contudo, temos que ter em atenção que estes resultados só são aplicáveis à radiação do corpo negro. A radiação emitida por um corpo de emissividade $e(\nu)$ tem uma distribuição espectral diferente (ver caixa 13.1 na página 13),

$$I_{\text{em}}(\nu, T) = e(\nu) I_{\text{cn}}(\nu, T).$$

ETV₃: Se olharmos para uma fotografia da Terra tirada por uma nave ou satélite, vemos que parte da Terra tem uma bela cor azul, permeada de branco, e a parte onde é noite aparece preta. Quer isso dizer que as temperaturas superficiais são tão diferentes que uma parte da Terra radia no visível e outra não?

13.1.2 O efeito fotoeléctrico

No seu artigo de 1905 sobre o efeito fotoeléctrico, Einstein levou a ideia de quantificação de energia para a radiação electromagnética.

Einstein mostrou que, em certas circunstâncias, a radiação electromagnética se comportava como um gás de partículas independentes cuja energia era dada pela fórmula de Planck:

$$E = h\nu.$$

Um dos fenómenos que invocou para justificar esta afirmação foi o efeito fotoeléctrico. Este efeito fora descoberto por Hertz, e consiste na emissão de electrões por superfícies metálicas nas quais incide radiação.

Se a radiação electromagnética consiste em campos eléctricos oscilantes, não surpreende que possa acelerar electrões e comunicar-lhes energia suficiente para que saiam de um metal. Era de esperar que, aumentando a amplitude do campo eléctrico e portanto a intensidade da radiação, a energia comunicada aos electrões fosse maior. O que se observava, contudo, era que a energia dos electrões emitidos era determinada exclusivamente pela frequência da radiação:

- se esta fosse inferior a um certo valor, dependente do metal, não havia emissão de electrões;
- acima desse valor, a energia cinética dos electrões aumentava com o valor de ν , não com a intensidade da radiação. Esta só fazia variar o **número** de electrões emitidos, ou seja a corrente eléctrica (ver caixa 13.2 na página ao lado).

Einstein pode explicar estas observações assumindo que a emissão de um electrão resultava da absorção de **uma** das partículas, ou **quanta**, de luz. A variação de energia do electrão seria

$$\Delta E = h\nu.$$

Supondo que, para sair do metal um electrão precisa, **pelo menos**, de uma energia, W , a sua energia cinética será, no máximo,

$$E_c^{\max} = h\nu - W.$$

Se $h\nu < W$, não haverá efeito fotoeléctrico. Esta relação previa que a energia cinética dos electrões emitidos teria uma dependência linear na frequência da radiação, um resultado que viria a ser verificado, com grande precisão, por Robert Millikan, seis anos mais tarde (fig. 13.6).

■ Medição do efeito fotoelétrico ■

Um célula fotoelétrica é constituída por dois eléctrodos mantidos em vácuo. Na ausência de irradiação, mesmo com uma diferença de potencial entre os eléctrodos não há corrente, pois as cargas não podem passar entre eles. Se um dos eléctrodos for irradiado e emitir electrões por efeito fotoelétrico, estes podem viajar até ao outro e, pelo circuito externo, repor a neutralidade de carga voltando ao emissor: isto corresponde à existência de uma corrente eléctrica.

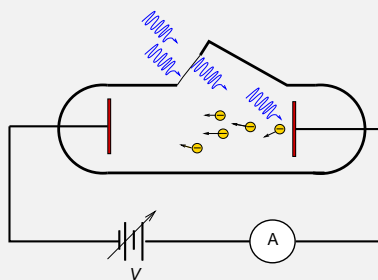
A energia cinética máxima dos electrões emitidos pode ser medida com facilidade mantendo o eléctrodo emissor a um potencial positivo relativamente ao colector. Nesse caso, a energia potencial eléctrica dos electrões aumenta de eV entre emissor e receptor, em que V é a diferença de potencial entre emissor e receptor. Se $eV > E_c^{\max}$ nenhum electrão atingirá o receptor e a corrente pára. Assim a energia cinética máxima é

$$E_c^{\max} = eV_p$$

em que V_p é a diferença de potencial para a qual a corrente se anula. Usando a relação de Einstein:

$$eV_p = h\nu - W.$$

O trabalho de Millikan consistiu precisamente numa medição cuidadosa dos potenciais de paragem para diferentes frequências da radiação.



Caixa 13.2: Uma célula fotoelétrica.

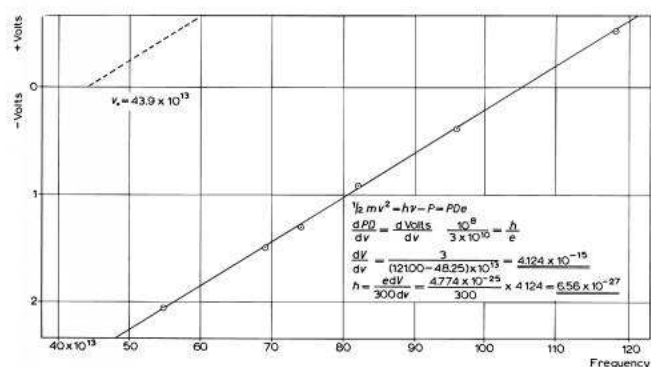


Fig. 4.

Figura 13.6: O estudo de Millikan do efeito fotoelétrico, reproduzido da sua lição de prémio Nobel. Millikan confessa nessa palestra que tudo tentou para mostrar que Einstein estava errado ao propor a existência de quanta de radiação.

13.1.3 A constante de Planck no átomo: Niels Bohr

Quando Planck em 1900 estudou o equilíbrio entre matéria e radiação, imaginou a matéria constituída por cargas com oscilações harmónicas em torno de posições de equilíbrio. Nem Planck, nem nenhum dos seus contemporâneos conheciam a estrutura do átomo.

O espectro de um átomo podia observado estudando a absorção e emissão de radiação da matéria no estado gasoso. As distâncias entre os átomos são grandes e estes quase não interagem uns com os outros. Ao contrário do caso dos sólidos ou líquidos, os espectros atómicos, quer de emissão, quer de absorção são **espectros de riscas**. A energia da radiação emitida ou absorvida está concentrada num conjunto discreto de frequências; não está distribuída continuamente por todas as frequências como num sólido. Isto é, num átomo as cargas eléctricas oscilam apenas com certas frequências ($\nu_1, \nu_2, \nu_3 \dots$) e só absorvem ou emitem radiação com essas frequências. Os estudos dos espectros de diferentes substâncias na fase gasosa permitem ver que cada elemento tem um conjunto único de frequências, que permitem distingui-lo de todos os outros.

O átomo planetário clássico

Mas em 1913, quando Niels Bohr, um jovem Dinamarquês, tentou explicar a origem dos espectros atómicos, já existia um modelo detalhado do átomo. Ernest Rutherford, que chefiava o Laboratório de Física da Universidade de Manchester, Hans Geiger e

Ernest Marsden (um estudante de 20 anos), tinham realizado, em 1911, um conjunto de experiências que estabeleceram a existência no núcleo atómico. Bohr sabia, então, que a quase totalidade da massa do átomo e toda a sua carga positiva estava concentrada num região de dimensões muito inferiores ao tamanho do átomo e que os electrões interagiam com o núcleo positivo por forças de Coulomb. O modelo de Rutherford era o de um pequeno sistema planetário, com o núcleo no lugar do Sol, os electrões no lugar de planetas e as forças de Coulomb em vez das forças gravitacionais.

As leis da atracção gravitacional e de Coulomb

$$\begin{aligned}\vec{F}_g &= -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{e}_r \\ \vec{F}_e &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{e}_r,\end{aligned}$$

obtêm-se uma da outra com as substituições:

$$\begin{aligned}m_1 &\leftrightarrow q_1 \\ m_2 &\leftrightarrow q_2 \\ -G &\leftrightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0}.\end{aligned}$$

No caso do átomo mais simples, o de hidrogénio, com uma carga $+e$ no núcleo e um único electrão, a força sobre o electrão seria:

$$\vec{F}_e = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} \hat{e}_r. \quad (13.8)$$

Este modelo colocava um dilema. O electrão só poderia manter-se a uma certa distância do núcleo se estivesse em movimento numa órbita fechada semelhante à de um planeta. Contudo, a física clássica previa que uma carga acelerada emitisse radiação; o electrão deveria perder gradualmente energia e, tal como no caso de órbitas gravíticas, o raio e o período da sua órbita deveriam diminuir continuamente. Mas no electromagnetismo de Maxwell o período da órbita e o período da radiação emitida são idênticos. Ora o átomo tem um espectro de riscas: só emite radiação num conjunto discreto de frequências.

Postulados de Bohr

Bohr conseguiu “explicar” o espectro do átomo de hidrogénio com duas propostas radicais. Na primeira introduziu a quantificação de energia na estrutura atómica:

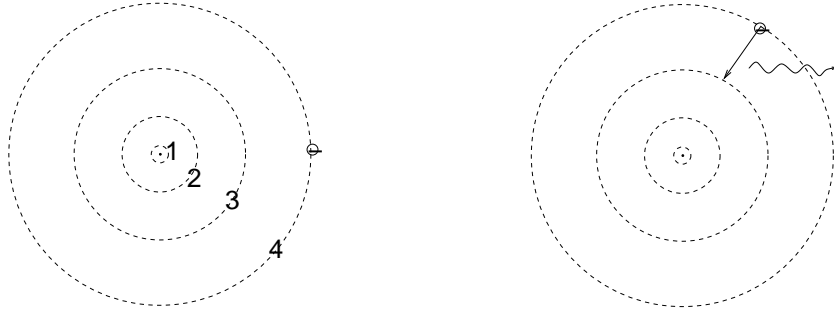


Figura 13.7: As quatro primeiras órbitas do átomo de Bohr $r_1 = a_0$, $r_2 = 4a_0$, $r_3 = 9a_0$ e $r_4 = 16a_0$. Nesta escala o núcleo é demasiado pequeno para ser representado. O átomo só emite radiação quando o electrão transita entre duas órbitas estacionárias.

Postulado das órbitas estacionárias: existem determinadas órbitas nas quais o electrão não emite radiação electromagnética. No caso de órbitas circulares, as órbitas estacionárias são determinadas pela condição

$$mvr = n \frac{h}{2\pi} = n\hbar \quad (n = 1, 2, \dots)$$

em que r é o raio da órbita e v o módulo da sua velocidade. A constante $\hbar = h/2\pi$, designa-se por constante de Planck reduzida, ou, mais frequentemente, “h cortado”.

Usando a segunda Lei de Newton para relacionar v e r numa órbita circular, com a força centrípeta determinada pela Lei de Coulomb (eq. 13.8), Bohr pode mostrar que a energia, o raio e o período das órbitas estacionárias estavam quantificados, isto é assumiam apenas um conjunto discreto de valores, E_n , r_n e T_n com $n = 1, 2, \dots$ (ver \mathcal{ETV}_4).

Com o seu segundo postulado Bohr introduz o quantum de luz de Einstein na teoria do átomo.

Postulado da transição entre órbitas estacionárias: o átomo só emite ou absorve radiação quando o electrão transita entre duas órbitas estacionárias. Num transição em que a energia do átomo diminui, $E_n \rightarrow E_{n'}$, com $E_{n'} < E_n$, é emitido um quantum de frequência:

$$E_n - E_{n'} = h\nu;$$

se a energia do electrão aumentar, $E_{n'} > E_n$, é absorvido um quantum de frequência dada por

$$E_{n'} - E_n = h\nu.$$

A partir destas duas ideias Bohr obteve as frequências dos quanta emitidos pelo átomo de hidrogénio:

$$\nu_{i \rightarrow f} = R \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right) \quad n_i = 2, 3, \dots; n_f = 1, 2, \dots \quad (13.9)$$

com

$$R = \frac{m_e}{4\pi\hbar^3} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 = 2,3 \times 10^{15} \text{ Hz.} \quad (13.10)$$

As frequências obtidas por Bohr, usando os resultados destas equações 13.9 e 13.10, coincidiam com as observadas no espectro do hidrogénio. Bohr tinha encontrado uma expressão para o espectro de um átomo em termos de constantes fundamentais incluindo a constante de Planck. A “impressão digital” do átomo de Hidrogénio tinha sido decifrada!

Apesar deste triunfo, a teoria de Bohr era profundamente insatisfatória. Usava elementos da Física Clássica, órbitas newtonianas, mas introduzia ideias que não tinham qualquer cabimento na Física Clássica: certas órbitas eram seleccionadas (porquê? Com que mecanismo?) e, em total contradição com a teoria clássica da radiação, postulava-se que nessas órbitas o electrão não radiava. E como e quando é que um electrão “decidia” transitar de órbita? Contudo, a teoria funcionava! Ninguém mais do que Bohr tinha consciência do carácter paradoxal e provisório das suas propostas, a que se referiu nos seguintes termos já em 1913:

Espero ter-me exprimido de modo suficientemente claro, para que possam apreciar até que ponto estas considerações estão em conflito com o conjunto de conceitos, admiravelmente consistente, a que, justamente, chamamos teoria clássica da electrodinâmica. Por outro lado, tentei transmitir a impressão que—precisamente dando forte ênfase a este mesmo conflito—será possível com o tempo estabelecer uma certa coerência nas novas ideias.

Niels Bohr

13.1.4 Sumário

Vimos três momentos em que a ideia de quantificação da energia foi introduzida na Física:

- Em 1900, Planck deduziu a forma da densidade espectral da radiação térmica, supondo que a emissão ou absorção de radiação por um oscilador de frequência ν ocorria em múltiplos inteiros de $h\nu$.
- Em 1905, Einstein mostrou que fórmula de Planck sugere que a radiação térmica é um gás de partículas em que cada partícula (quantum) de radiação de frequência ν tem uma energia $E = h\nu$. Propõe que o efeito fotoelétrico resulta da absorção de um só quantum de radiação pelo electrão.
- Em 1913, Bohr sugeriu que os valores possíveis de energia das órbitas de um electrão no átomo de Hidrogénio são discretos e deduziu a respectiva fórmula.

Os anos seguintes iriam assistir à introdução de conceitos ainda mais inesperados!

\mathcal{ETV}_4 : No modelo atómico de Niels Bohr as órbitas estacionárias satisfazem as leis clássicas de movimento.

- a) Usando a segunda lei de Newton, demonstrar a seguinte relação para uma órbita circular de um electrão em torno e um protão:

$$m_e v^2 r = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}.$$

- b) Mostrar que os postulados de Bohr conduzem aos seguintes resultados para a velocidade, raio e energia de uma órbita estacionária ($n = 1, 2, \dots$),

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{1}{n} v_0 \\ r_n &= n^2 a_0 \\ E_n &= -\frac{1}{n^2} E_0, \end{aligned}$$

e determinar os valores de v_0 , a_0 (Raio de Bohr) e E_0 .

- c) Mostrar que a frequência de um quantum de radiação emitido numa transição de uma órbita $n_i \rightarrow n_f$, é

$$\nu_{i \rightarrow f} = \frac{E_0}{h} \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right)$$

13.2 Dualidade onda-corpúsculo

13.2.1 O fóton

O momento linear da radiação

Em Física Newtoniana uma partícula de velocidade \vec{v} tem energia cinética

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2$$

e momento linear

$$\vec{p} = m \vec{v}$$

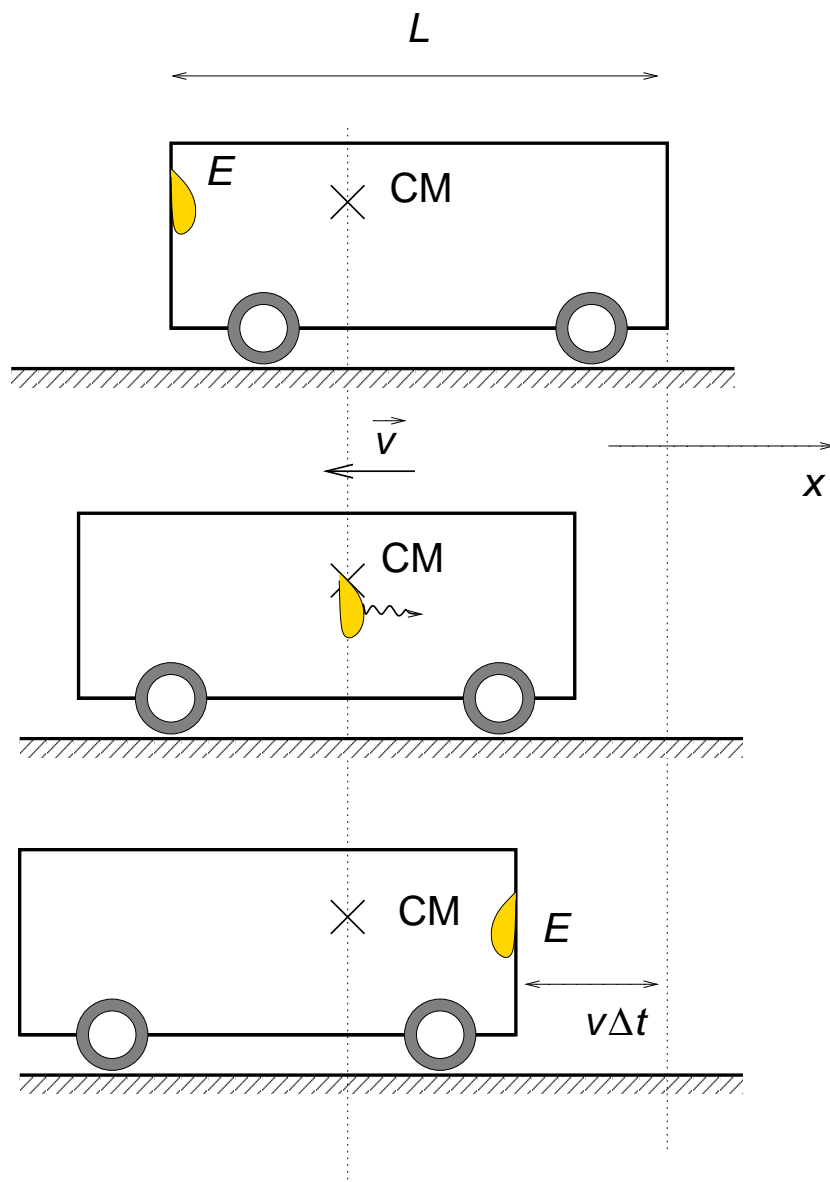


Figura 13.8: Para que a posição do centro de massa do conjunto não varie, o carro tem de adquirir uma velocidade $v_x = -E/Mc$ em que E é a energia transferida de uma extremo ao outro.

o que permite escrever a seguinte relação entre momento e energia

$$E = \frac{1}{2} \frac{(mv)^2}{m} = \frac{p^2}{2m}.$$

Einstein propusera que a fórmula de Planck e o efeito fotoelétrico podiam ser interpretados considerando a radiação constituída por partículas de energia

$$E = h\nu.$$

Qual seria o momento linear de uma tal partícula?

Einstein apresentou um argumento muito bonito (vintage Einstein), baseado na equivalência massa-energia, que permitia obter o momento linear da radiação (fig 13.8).

Considerou uma carruagem que radia uma quantidade de energia E de uma extremidade à outra. De acordo com a Relatividade Restrita, isso corresponde a transferir uma massa $m = E/c^2$ de um lado ao outro da carruagem. Contudo, não havendo forças exteriores, o centro de massa do conjunto, radiação e carro, não pode deslocar-se; logo o carro tem que avançar no sentido oposto ao da radiação. Como,

$$Mx_c + \frac{E}{c^2}x_r = \left(M + \frac{E}{c^2}\right)x_{\text{cm}}$$

temos,

$$M\Delta x_c + \frac{E}{c^2}\Delta x_r = \left(M + \frac{E}{c^2}\right)\Delta x_{\text{cm}} = 0 \quad (13.11)$$

em que:

- Δx_c é o deslocamento da carruagem segundo Ox ;
- Δx_r é o deslocamento da radiação na mesma direcção;
- $\Delta x_{\text{cm}} = 0$ é o deslocamento do centro de massa do conjunto, também segundo Ox .

Se for Δt o intervalo de tempo entre a emissão e absorção da radiação,

$$\begin{aligned} \Delta x_r &= c\Delta t \\ \Delta x_c &= v_x\Delta t \end{aligned}$$

Substituindo na equação 13.11, obtemos

$$\Delta x_c = -\frac{E}{Mc^2}\Delta x_r \Rightarrow v_x\Delta t = -\frac{E}{Mc^2}c\Delta t$$

ou

$$Mv_x = -\frac{E}{c}.$$

Esta equação exprime a conservação de momento linear na emissão de radiação; o momento total após a emissão deve continuar a ser nulo, pelo que o momento da radiação emitida na direcção Ox é

$$p_x = \frac{E}{c}.$$

Suponhamos que foi emitido um único quantum de radiação com

$$E = h\nu :$$

o respectivo momento será

$$p = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}.$$

em que $\lambda = c/\nu$ é o comprimento de onda da radiação emitida.

A confirmação inequívoca da existência de quanta de radiação, **fotões**, com energia e momento dados pelas relações de Planck-Einstein,

$$\begin{aligned} E &= h\nu \\ p &= \frac{h}{\lambda}, \end{aligned}$$

foi obtida por Arthur Holly Compton, um físico inglês, quando estudou a difusão de raios-X pela matéria.

Raios-X

Raios-X são radiação com comprimentos de onda $\lambda \sim 0,1 - 100 \text{ \AA}$, muito menores que os da luz visível, ou mesmo do ultra-violeta (UV). São hoje em dia muito utilizados em diagnóstico médico e terapêutica. Um electrão acelerado por uma diferença de potencial de alguns dezenas de milhar de Volt têm uma energia cinética da ordem das dezenas de keV ($1 \text{ keV} = 10^3 \text{ eV}$). Se chegar próximo de um átomo com muitos electrões (Z , número atómico elevado) pode ionizar o átomo excitando um dos electrões mais fortemente ligados do átomo (com energias de ionização na gama dos keV). A transição de um electrão dos níveis de energia menos ligados (energia de ionização de alguns eV) para um nível profundo é acompanhada, segundo Bohr, pela emissão de um fotão com frequência

$$\nu = \frac{E_i - E_f}{h};$$

■ Röntgen e os raios-X ■

A descoberta dos raios-X é atribuída a Wilhelm Conrad Röntgen (27 de Março, 1845–10 de Fevereiro 1923) um físico alemão da Universidade de OWürzburg. Röntgen foi o primeiro galardoado com o prémio Nobel da Física (1901) por esta descoberta.

Röntgen fazia experiências com descargas eléctricas em tubos de vácuo, e, em Novembro de 1895, reparou que um tubo completamente tapado, de modo a não deixar passar luz, mesmo assim causava uma ténue luminosidade num écran a cerca de um metro de distância. Foi no curso de uma dessas experiência que um dia viu a sombra do esqueleto da sua mão projectada num écran revestido de um composto de bário carbonato, azoto e platina.

Os raios-X são radiação electromagnética de frequência mais elevada que a luz visível ou ultravioleta. Os electrões, que são as cargas materiais de menor massa, são mais fortemente acelerados pelos campos eléctricos da radiação. Por essa razão, os elementos de número atómico Z elevado, com Z electrões por átomo, absorvem e difundem mais intensamente os raios-X. Por isso, o esqueleto, que tem Cálcio, absorve e difunde mais os raios-X que os tecidos moles que são sobretudo compostos por elementos leves como Oxigénio e Hidrogénio e, por isso, mais transparentes a raios-X.



Imagem da mão de esposa de Röntgen.

Caixa 13.3: A descoberta dos raios-X.

quando $E_i - E_f \sim 1 \text{ keV}$, o comprimento de onda está fora da gama do visível, na região dos raios-X. Electrões livres de alta energia que passem muito próximos de núcleos de número atómico elevado tem acelerações muito elevadas também e emitem raios-X com um espectro contínuo, que têm o nome de radiação *bremsstrahlung* (do alemão, radiação de travagem).

Uma ampola de produção de raios-X contém um filamento de tungsténio (que pode atingir temperaturas elevadas sem fundir) que emite electrões se estiver a uma temperatura elevada (a energia de agitação térmica é suficiente para que os electrões saiam do metal, um processo semelhante à evaporação). Esses electrões são acelerados, em vácuo, por campos eléctricos, até energias cinéticas de alguns milhares de electrões-Volt e dirigidos contra um alvo metálico (em geral Cobre ou Molibdénio) de onde emergem os raios-X.

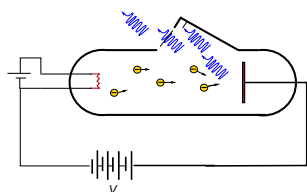


Figura 13.9: Esquema de uma ampola de raios-X.

\mathcal{ETV}_5 : Numa transição entre níveis de energia em que $E_i - E_f = 1 \text{ keV}$, quais são a frequência e comprimento de onda da radiação emitida?

A experiência de Compton

Se a radiação não fosse difundida pela matéria (desviada da sua direcção de propagação) o mundo ser-nos-ia invisível. A luz do Sol só chegaria a nós directamente do Sol; não a receberíamos difundida pela atmosfera, pelas árvores, montanhas, casas, etc. Acender uma luz num quarto escuro de nada serviria: só veríamos a lâmpada se olhássemos para ela; se os objectos não desviassem a luz que lhes chega da lâmpada em direcção ao nossos olhos, não os veríamos.

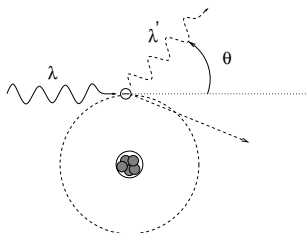


Figura 13.10: A difusão de raios-X pode ser vista como uma colisão entre duas partículas, um fóton e um electrão. Quando a velocidade inicial do electrão é pequena, verifica-se a relação de Compton, eq. 13.12, para a variação de comprimento de onda do fóton.

Classicamente, a radiação são campos eléctricos e magnéticos oscilantes, que põem cargas em movimento. Cargas aceleradas emitem radiação em todas as direcções. Por isso parte da radiação incidente na matéria é re-emitada em direcções diferentes. Os electrões, que são as cargas de menor massa e, por isso, com maiores acelerações, são também as que difundem mais a radiação.

Compton estudou, precisamente, a difusão de raios-X pela matéria. As suas experiências mostraram que parte da radiação difundida

de um ângulo θ em relação à direcção original tinha um comprimento de onda λ' maior que o da radiação incidente, λ (fig. 13.10):

$$\lambda'(\theta) - \lambda_{\text{inc}} = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta) \quad (13.12)$$

Este resultado é o que se obtém se a difusão for o resultado de uma colisão entre um electrão de baixa energia inicial e uma partícula cujo momento e energia são dadas exactamente pelas relações de Planck-Einstein: o fóton. Na colisão o electrão adquire parte da energia e do momento do fóton e por essa razão a energia do fóton diminui. Como $E \propto \nu$ e $\nu \propto 1/\lambda$ o comprimento de onda do fóton aumenta.

13.2.2 Partículas ou ondas?

Uma leitura atenta das secções anteriores mostra que temos vindo a usar para o mesmo fenómeno, a radiação, duas representações incompatíveis.

De um lado a representação ondulatória: a radiação são campos eléctricos que oscilam no tempo e no espaço. O número de oscilações do campo num dado ponto por unidade de tempo é frequência ν ; a distância que contém uma oscilação espacial completa é o comprimento de onda λ . A amplitude de oscilação do campo pode variar de um modo contínuo; um campo eléctrico origina uma força sobre as cargas materiais e pode, por isso, transferir quer energia quer momento para a matéria de um modo contínuo.

Por outro lado, a fórmula de Planck, o efeito fotoeléctrico e o efeito de Compton revelam que a radiação é constituída por partículas; os eventos de transferência de energia entre radiação e matéria são descontínuos e correspondem à emissão/absorção/colisão de partículas de energia e momento dados pelas relações de Planck e Einstein:

$$E = h\nu \quad (13.13)$$

$$p = \frac{h}{\lambda}. \quad (13.14)$$

A associação de energia ou momento a um fenómeno ondulatório, por si só, não é supreeendente. Mas, nestas equações, E e p referem-se à energia e momento de uma partícula, num evento discreto de absorção, emissão ou colisão. Aqui reside o busílis: o que é a frequência ou o comprimento de onda de uma partícula? Estes

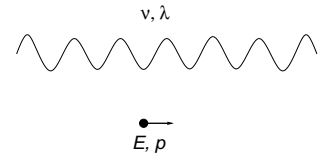


Figura 13.11: Partículas ou ondas?

conceitos referem-se a uma perturbação de um campo definido em todo o espaço e variando no tempo.

Assim, o primeiro membro destas equações refere-se a entidades discretas, partículas, e o segundo a campos distribuídos no espaço e tempo. A constante de Planck (a natureza quântica da matéria) aparece a ligar estes dois conceitos!

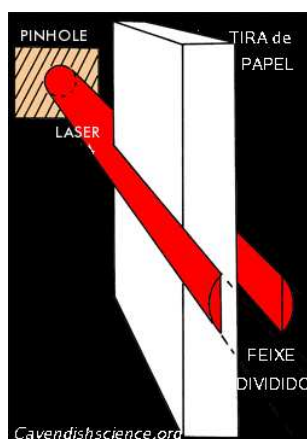


Figura 13.12: A experiência de Young pode ser facilmente realizada com um laser.[4]

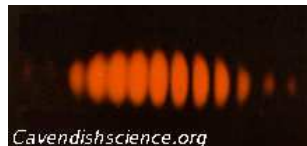


Figura 13.13: Franjas observadas na experiência de Young com laser de He-Ne.[4]

▷ Actividade 13.2

13.2.3 A experiência de Young

Na realidade a natureza ondulatória da luz tinha sido estabelecida por Thomas Young, muito antes da teoria do Electromagnetismo de Maxwell, numa experiência que muitos contam entre as mais belas de sempre na História da Física.

Young fez a sua experiência em público, em 24 de Novembro de 1803 na Real Sociedade em Londres. Com um espelho desviou a luz do sol para um trajecto horizontal e fê-la passar por um pequeno orifício de modo a criar um feixe de luz de pequeno diâmetro. No caminho desse feixe colocou, longitudinalmente uma pequena tira de papel de modo a dividir o feixe em duas partes. Num alvo, em vez de duas manchas luminosas correspondentes aos dois feixes, os assistentes viram franjas alternadamente claras e escuras. Esta experiência pode ser facilmente reproduzida na sala de aula substituindo a luz do Sol por um laser.

A origem das franjas claras e escuras está descrita na figura 13.14. A experiência de Young é quase sempre descrita usando duas fendas para proporcionar dois caminhos de propagação da radiação, da fonte ao alvo, embora Young tenha usado os dois lados de uma tira de papel. Seja como for, no alvo temos que somar os campos eléctricos correspondentes à radiação de cada fenda, de acordo com o princípio de sobreposição. Sabemos que o campo eléctrico tem uma oscilação completa numa distância correspondente a um comprimento de onda. Na figura 13.14, os dois caminhos da fonte F ao ponto P têm o mesmo comprimento. Por essa razão os campos eléctricos correspondentes à radiação que se propaga por cada uma das fendas estão em fase e somam-se. Ao contrário, no ponto Q o caminho pela fenda I tem meio comprimento de onda a mais que o da fenda II. O resultado é que os campos eléctricos da radiação que se propaga por cada fenda, oscilam, em Q , em oposição de fase: quando um é positivo o outro é negativo (sentido oposto) e a intensidade é muito baixa ou quase nula em Q . Assim, à medida que nos afastamos do ponto P , a intensidade vai oscilando entre máximos e mínimos: as franjas de interferência de Young.

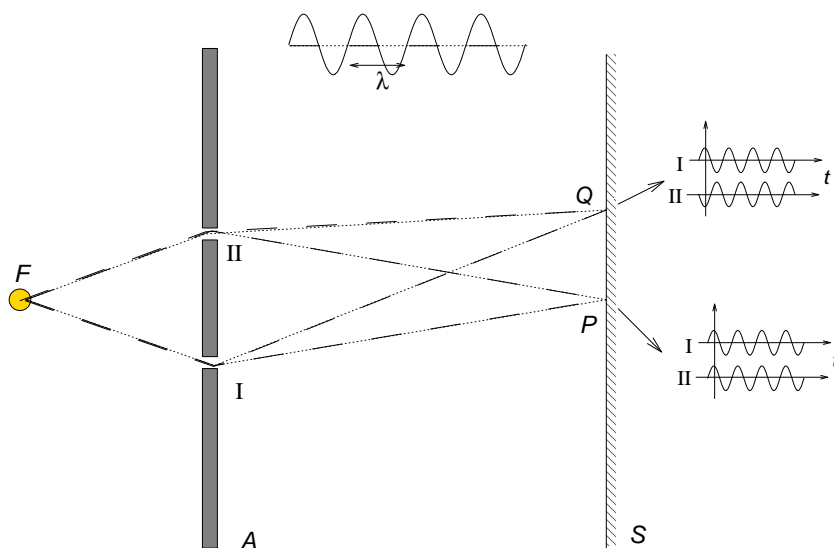


Figura 13.14: A experiência de Young. Neste caso são usadas duas fendas para proporcionar dois caminhos de propagação da radiação da fonte F ao alvo; originalmente, Young usou uma tira de papel. Os dois caminhos de propagação das ondas da fonte F ao ponto P têm o mesmo comprimento, 10λ . Os campos eléctricos da radiação que se propaga por cada fenda estão em fase e somam-se: a intensidade luminosa é alta em P . Mas em Q a radiação que se propaga pela fenda I percorre uma distância de $10,5\lambda$ enquanto que a que se propaga pela fenda II percorre apenas 10λ . Os campos eléctricos respectivos cancelam-se pois têm sinais opostos: a intensidade luminosa é baixa em Q . P está num máximo de intensidade e Q num mínimo.

Note-se que, quando existem duas fendas, há zonas do alvo, onde os campos se cancelam, **que recebem menos luz do que com uma só fenda**. Este fenómeno de sobreposição de duas ondas chama-se **interferência**.

\mathcal{ETV}_6 : Na figura 13.14 na página precedente, o ponto Q é o mínimo de intensidade mais próximo de P . A distância PQ é metade da distância inter-franjas. Se o comprimento de onda diminuir, a distância entre franjas aumenta ou diminui?

Interferência de partículas

Feynman, no primeiro capítulo do terceiro volume das *Feynman Lectures on Physics* [1], imagina a experiência de Young feita com balas, disparadas em todas as direcções por uma arma colocada no lugar da fonte de luz. A intensidade pode ser medida contando o número de balas que chegam por unidade de tempo a cada ponto do alvo. Naturalmente, cada bala detectada no alvo passou por um das das duas fendas e o número total de balas em cada ponto do alvo é apenas a soma das balas que passam por cada fenda. O número de balas que atingem um dado ponto do alvo é **sempre maior com duas fendas do que com uma**: não há interferências.

Se tomarmos as balas como modelo para partículas, deveríamos esperar o mesmo para electrões ou neutrões, por exemplo.

Na realidade, esta experiência já foi feita com muitos tipos de partículas (electrões, átomos e até moléculas) sempre com o mesmo resultado: observam-se franjas de interferência, tal como com radiação electromagnética³ (fig. 13.15). Para além disso, é possível obter desta experiência o comprimento de onda a partir da separação entre as franjas de interferência; verifica-se que, para qualquer tipo de partículas, é sempre dado pela relação

$$p = \frac{h}{\lambda},$$

tal como para os fotões.

³Naturalmente, a observação de franjas exige certas condições. Por exemplo, a distância entre franjas pode ser demasiado pequena, para ser observável; se houver variação temporal rápida das franjas, podemos observar apenas uma média sobre várias posições, com intensidade uniforme, sem contraste.

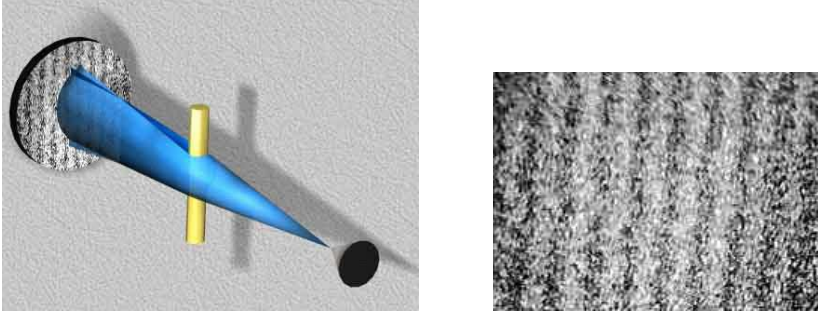


Figura 13.15: Uma experiência de Young com electrões. À esquerda: um feixe de electrões, emitido por uma fina ponta de tungsténio, tem no seu caminho um fio metálico; quando o fio é carregado positivamente, cada electrão pode atingir um ponto do alvo por dois caminhos e estes interferem: à direita, franjas de interferência de electrões de energia cinética de 400 eV. [5]

De Broglie e o átomo de Bohr

Esta relação, $p = h/\lambda$, foi proposta para electrões por Louis De Broglie, um físico aristocrata francês, no contexto da teoria de Bohr. De Broglie imaginou que ao electrão estava associada uma onda nas suas órbitas em torno do núcleo. Como as órbitas são fechadas, o perímetro de cada órbita deve corresponder a um número inteiro de oscilações completas dessa onda, ou seja a um número inteiro de comprimentos de onda (ver fig. 13.16)

$$2\pi r = n\lambda \quad (n \text{ inteiro}) \quad (13.15)$$

Usando a relação $p = h/\lambda$, de Broglie obteve:

$$2\pi r = n \frac{h}{p} \Rightarrow pr = n \frac{h}{2\pi} = n\hbar$$

ou seja,

$$mvr = n\hbar \quad (n \text{ inteiro})$$

que é precisamente a condição de quantificação de Bohr.

Hoje em dia, a natureza ondulatória de qualquer feixe de partículas é verificada a toda a hora em centenas de laboratórios em todo o mundo. Métodos correntes de caracterização de estruturas, quer com feixes de neutrões, quer com feixes de electrões, quer com feixes de fótons (raios-X) são essencialmente experiências de interferências de feixes destas partículas. Seja qual for a partícula, a relação entre o momento e o comprimento de onda é a mesma que

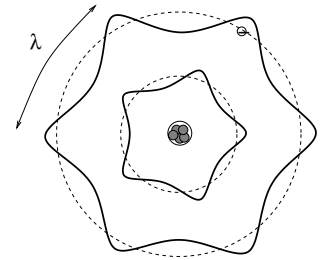


Figura 13.16: Duas órbitas possíveis, de acordo com a ideia de De Broglie: a onda associada ao electrão está esquematicamente representada a cheio, usando a direcção radial para representar a amplitude da onda, seja ela o que for. A órbita mais interior tem um perímetro 5λ e a exterior 6λ . Não existe nenhuma órbita entre estas duas e isso explicaria a hipótese de quantificação de Bohr.

Einstein obteve para o fóton

$$p = \frac{h}{\lambda}.$$

A primeira experiência de interferência de fótons foi feita por Thomas Young, antes da natureza corpuscular da radiação ter sido descoberta por Einstein e Planck. A primeira experiência de interferência de electrões foi feita em 1927 por Clinton Davisson e Lester Germer e, independentemente, por George P. Thompson, que partilharam o prémio Nobel por este trabalho. A descoberta do electrão foi anterior⁴: ou seja, ao contrário do fóton, a natureza corpuscular do electrão foi estabelecida antes da sua natureza ondulatória.

13.3 A Mecânica Quântica

13.3.1 O acaso

Partículas que são ondas, ondas que são partículas, energias que só podem tomar certos valores, órbitas estacionárias que de repente deixam de o ser quando o electrão decide transitar de uma para a outra! Tudo isto parece muito confuso. Nada que se pareça com a clareza e transparência da Física Newtoniana!

Era, de facto, muito confuso e na década de 1920 nenhum físico percebia o que se estava a passar. Como vimos, as hipóteses mais arrojadas recebiam plena confirmação experimental. Contudo, misturavam ideias clássicas e quânticas de uma maneira incompreensível:

- A radiação era descrita a partir das equações de Maxwell, como campos eléctricos e magnéticos variáveis no espaço e tempo, mas também era constituída por partículas com energia e momento relacionadas com as frequências temporais e espaciais dos campos.
- Os electrões faziam órbitas clássicas, calculadas de acordo com a lei de Newton, mas, em desacordo com a electrodinâmica clássica, não radiavam quando estavam em certas órbitas. Ainda por cima, de vez em quando (quando? como? porquê?) mudavam de órbita!

⁴Curiosamente a descoberta da partícula *electrão*, também galardeada com o Nobel da Física, é devida a J. J. Thompson, o *pai* de George P. Thomson. Assim, o pai recebeu o Nobel por estabelecer que o electrão era uma partícula e o filho por demonstrar que era uma onda!

■ O argumento de De Broglie ■

De Broglie não tinha qualquer ideia sobre a natureza da onda associada ao electrão. Mas o seu argumento é independente dela. Para um electrão numa órbita circular parece natural assumir uma onda com um alongamento que depende do ângulo θ com um eixo no plano da órbita, $\psi(\theta)$. A oscilação mais simples é harmónica

$$\psi(\theta) = A \cos(k\theta + \varphi)$$

Como $\theta = 0$ e $\theta = 2\pi$ são a mesma direcção, temos que ter $\psi(0) = \psi(2\pi)$ e o parâmetro k tem que ser um inteiro, $k = 0, 1, 2, \dots$. Uma oscilação completa ocorrerá entre duas direcções com uma diferença de ângulos tal que

$$k\Delta\theta = 2\pi.$$

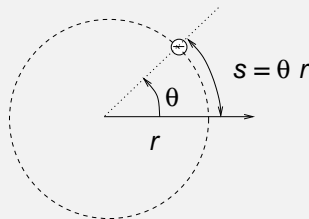
Por outro lado, para um electrão numa órbita de raio r , este ângulo (em radianos) corresponde a uma distância $s = \Delta\theta \times r$. Esta distância entre dois máximos de alongamento da onda é, precisamente, o comprimento de onda. Logo

$$k \frac{\lambda}{r} = 2\pi$$

ou

$$2\pi r = k\lambda \quad (k, \text{ inteiro})$$

Esta é a condição referida no texto (eq. 13.15).



Caixa 13.4: O argumento de De Broglie para a quantificação das órbitas.

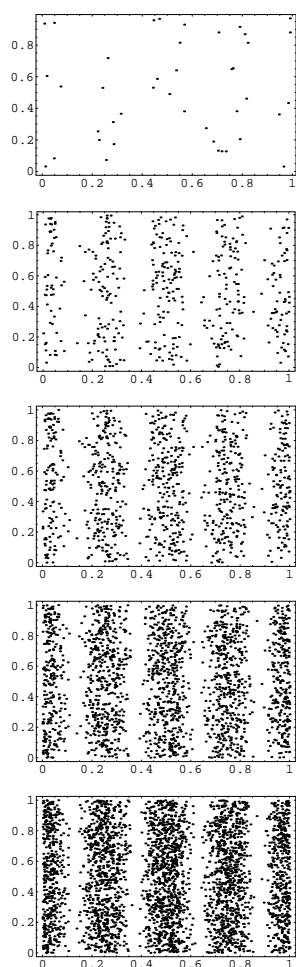


Figura 13.17: Formação de franjas de interferência por acumulação de eventos aleatórios.

- Os electrões também eram ondas, e quando um electrão dispunha de dois caminhos possíveis eles interferiam exactamente como se ele fosse uma onda espalhada no espaço e propagando-se pelos dois caminhos.

A descoberta da Mecânica Quântica entre 1925 e 1927 por Heisenberg, Schrödinger, Born e Bohr, pôs fim a este estado de coisas e integrou todas estas ideias numa teoria consistente, com princípios bem definidos e que está na base de toda a nossa compreensão do comportamento da matéria.

O conceito de probabilidade tem um papel fundamental na formulação da Mecânica Quântica. As suas leis fundamentais estabelecem formas de calcular probabilidades de certos acontecimentos. O acaso é um elemento irreduzível do comportamento da natureza. À medida que a história do mundo se desenrola, acontecem certas coisas e não outras, de modo totalmente aleatório, mesmo para quem tenha a informação mais completa possível sobre o estado do Mundo. Einstein, foi das primeiras pessoas a compreender que o acaso estava ao virar da porta.

Pensemos por exemplo na teoria de Bohr. Átomos excitados radiam em todas as direcções. Quando um electrão transita de órbita, em que direcção é emitido o fóton? Se a órbita é estacionária e o átomo isolado, o que determina quando ocorre a transição? Em 1917, Einstein propôs uma descrição da interacção entre um átomo e a radiação em que introduziu a **probabilidade** de um átomo transitar de estado num dado intervalo de tempo. A sua descrição foi integralmente confirmada pela Mecânica Quântica.

As experiências de interferência são outro exemplo do aparecimento do conceito de probabilidade. Pensemos na formação das franjas de interferência (ver figura 13.17). Seja ela feita com electrões, neutrões ou fótons, sabemos que o processo de detecção é sempre o de uma contagem. É o que aprendemos com o efeito fotoeléctrico, ou que já sabíamos em relação a electrões. Quando detectamos um electrão detectamos uma partícula de carga $-e$. As franjas de interferência formam-se por acumulação de acontecimentos individuais, aleatórios, conforme ilustra a simulação disponível do portal do projecto Faraday (fig. 13.17).

13.3.2 Ondas e probabilidades

A integração dos conceitos de partícula e onda processou-se precisamente usando o conceito de probabilidade. Afinal, o que vibra, qual é a onda associada a um electrão? Na teoria quântica

verifica-se que essa onda determina apenas a **probabilidade de detecção** do electrão num dado ponto. Quanto maior for a amplitude da onda mais provável é a detecção de uma electrão nesse ponto: de facto a probabilidade de detecção é proporcional à **intensidade da onda**, que por sua vez é proporcional ao quadrado da amplitude da onda. No caso do fóton a probabilidade de detecção é proporcional ao quadrado do campo eléctrico.

Se a onda que determina esta probabilidade for uma onda harmónica, com uma oscilação espacial de comprimento de onda λ , e amplitude constante, o momento da partícula é dado pela relação de Einstein-De Broglie,

$$p = \frac{h}{\lambda},$$

mas a sua posição fica totalmente indeterminada, pois, como a amplitude da onda é constante, a probabilidade de detecção é a mesma em todos os pontos.

Princípio de incerteza

A descrição probabilística da Mecânica Quântica tem como consequência uma relação muito peculiar entre certas grandezas físicas como o momento e a posição. Quanto melhor tentamos especificar uma mais incerta fica a outra. Estas relações foram descobertas por Heisenberg e no caso do momento e posição têm a forma

$$\Delta p_x \Delta x \geq \frac{\hbar}{2},$$

em que Δp_x e Δx são as indeterminações da componente x do momento e Δx a indeterminação da coordenada x .

Na situação acima referida, de uma onda harmónica de amplitude constante, $p = h/\lambda$ é perfeitamente determinado, $\Delta p = 0$, o que implica que $\Delta x \rightarrow \infty$, ou seja total indeterminação de posição. Como vimos, a probabilidade de detecção é idêntica em todo o espaço.

Como vemos, tudo o que é quântico têm a constante de Planck! O que explica, em parte que os efeitos quânticos não sejam observados no nosso dia-a-dia é o valor extremamente reduzido desta constante, **quando expressa nas unidades mais adequadas à nossa experiência comum.**

Isto é, quando lidamos com velocidades $v \sim 1 \text{ m s}^{-1}$, massas $m \sim 1 \text{ kg}$ e distâncias de $x \sim 1 \text{ m}$, podemos ter posições e momento

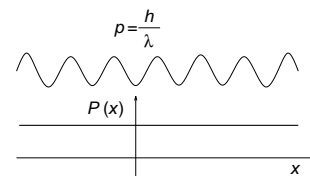


Figura 13.18: Se a amplitude da onda é constante, a probabilidade de detecção é igual em todos os pontos.

muito bem definidos,

$$\begin{aligned}\Delta p_x &\ll p_x \\ \Delta x &\ll x,\end{aligned}$$

e, mesmo assim, como $p_x x \sim 1 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}$, ter

$$\Delta p_x \Delta x \gg \frac{\hbar}{2}$$

já que $\hbar = 1,05 \times 10^{-34} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}$. Nessas circunstâncias, o limite quântico do produto de incertezas não é relevante.

13.4 Conclusões

Neste capítulo demos apenas uma panorâmica muito breve do muito que fica por saber mesmo depois de um ano inteiro com várias horas de aulas por semana.

A revolução quântica permitiu-nos uma capacidade de compreensão e previsão muito detalhada do comportamento da matéria ao nível atómico e molecular. Todos os progressos de tecnologia, seja ao níveis de novos materiais (plásticos, polímeros), da electrónica, dos computadores, das telecomunicações, de novos fármacos, da genética molecular, etc, radicam ao fim ao cabo nesta revolução do pensamento humano que teve lugar no primeiro quarto do século XX.

Para quem queira saber mais, ainda sobra muito para aprender!

13.5 Respostas aos \mathcal{ETV}'_s

13.1. \mathcal{ETV}_1 : Como dE/dt é uma potência temos que $I(\nu)\Delta A\Delta\nu$ tem como unidade SI o W. Logo $I(\nu)$ tem unidade SI $\text{W m}^{-2} \text{ s}$ e $J(\lambda)$ W m^{-3} . Contudo, não é invulgar encontrar o comprimento de onda medido em nm (10^{-9} m) pelo que também se encontra $J(\lambda)$ expresso em $\text{W m}^{-2} \text{ nm}^{-1}$.

13.2. \mathcal{ETV}_2 : o gráfico da função

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$$

tem o aspecto da figura 13.19. O facto de $f(x) \rightarrow 1$ quando $x \rightarrow 0$ significa que

$$\frac{\epsilon_\nu(T)}{\epsilon_\nu^{(c1)}(T)} \approx 1 \Rightarrow \epsilon_\nu(T) \approx \epsilon_\nu^{(c1)}(T) = k_B T,$$

quando $k_B T \gg h\nu$. Neste limite, quando a energia térmica clássica é muito maior que a energia mínima de excitação do oscilador, os resultados quânticos e clássicos coincidem.

Como $f(x) \rightarrow 0$, quando $x \gg 1$,

$$\frac{\epsilon_\nu(T)}{\epsilon_\nu^{(cl)}(T)} \ll 1 \Rightarrow \epsilon_\nu(T) \ll \epsilon_\nu^{(cl)}(T)$$

A energia média do oscilador é muito menor que a energia térmica clássica, $k_B T$, quando a energia mínima de excitação é maior que $k_B T$.

- 13.3. \mathcal{ETV}_3 : Obviamente que não. A Terra tem uma temperatura tal que quase não radia no visível. Como tal é “preta”. Contudo, reflecte uma fracção apreciável da luz que incide do Sol e é essa radiação reflectida que nos permite ver a Terra do espaço. Essa radiação tem uma distribuição espectral característica da temperatura do Sol, não da Terra.

- 13.4. \mathcal{ETV}_4 :

- (a) A segunda lei de Newton implica, para uma órbita circular:

$$m_e \frac{v^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2};$$

ou

$$m_e v^2 r = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}.$$

- (b) Usando a condição de quantificação de Bohr

$$m_e v r = n\hbar$$

vem,

$$\begin{aligned} v &= \frac{1}{n} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar} = \frac{1}{n} v_0. \\ v_0 &= \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar} = 2,2 \times 10^6 \text{ m s}^{-1} \end{aligned}$$

Com este resultado é simples obter os raios das órbitas de Bohr:

$$r_n = \frac{n\hbar}{m_e v_n} = n^2 a_0$$

com

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{m_e (e^2/4\pi\epsilon_0)} = 0,53 \text{ \AA}.$$

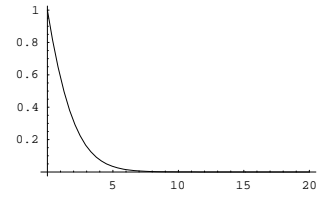


Figura 13.19: Gráfico da função $f(x) = x / (\exp(x) - 1)$.

Finalmente, para calcular a energia:

$$E = \frac{1}{2}m_e v^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = -\frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

em que usamos apenas a segunda lei de Newton. Substituindo os valores de r_n

$$E_n = -\frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_n} = -\frac{1}{n^2} E_0$$

em que

$$E_0 = \frac{m_e}{2\hbar^2} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 = 2,17 \times 10^{-18} \text{ J} = 13,6 \text{ eV}.$$

- (c) Como $E_i = -E_0/n_i^2$ e $E_f = -E_0/n_f^2$ a energia do quantum emitido ($n_i > n_f$) é

$$E = E_i - E_f = E_0 \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right)$$

e, usando a relação de Planck,

$$\nu_{i \rightarrow f} = \frac{E_0}{h} \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right).$$

- 13.5. \mathcal{ETV}_5 : Um eV é a variação de energia de um electrão numa diferença de potencial de 1 V, ou seja:

$$1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19} \times 1 = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}.$$

Então

$$1 \text{ keV} = 1,6 \times 10^{-16} \text{ J}$$

e

$$\nu = \frac{1,6 \times 10^{-16}}{h} = \frac{1,6 \times 10^{-16}}{6,6 \times 10^{-34}} = 2,4 \times 10^{17} \text{ Hz};$$

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{3 \times 10^8}{2,4 \times 10^{17}} = 1,2 \times 10^{-9} \text{ m} = 12 \text{ Å}.$$

- 13.6. \mathcal{ETV}_6 : Se o comprimento de onda diminuir, a diferença entre o comprimento dos dois caminhos $F \rightarrow \text{I} \rightarrow Q$ e $F \rightarrow \text{II} \rightarrow Q$ não se altera. Mas passa a ser **maior** que $\lambda/2$, porque λ diminuiu. Será num ponto mais próximo de P (onde os dois caminhos têm igual comprimento) que os dois caminhos terão uma diferença de $\lambda/2$; logo, a distância entre franjas diminui, se λ diminuir.

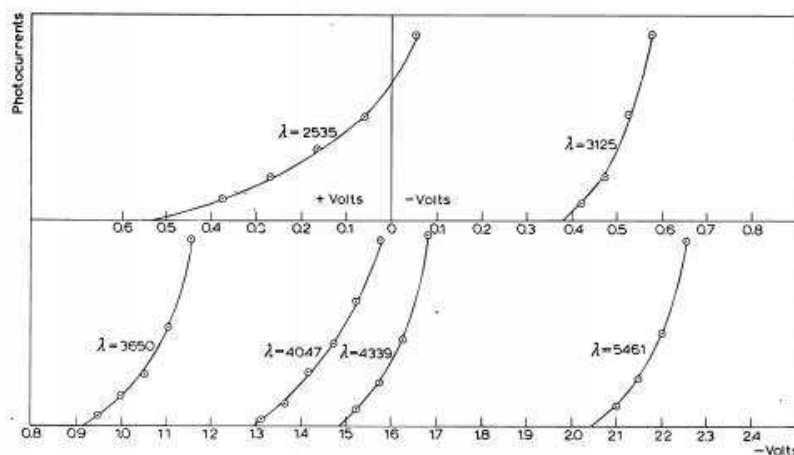


Fig. 3.

Figura 13.20: Resultados das medições de Millikan da corrente fotoelétrica em função da diferença de potencial entre coletor e emissor para vários comprimentos de onda.

13.6 Actividades questões e problemas

13.1. Medições de efeito fotoelétrico de Millikan.

A figura 13.20 mostra os resultados de Millikan para a corrente fotoelétrica em função da diferença de potencial coletor-emissor para vários comprimentos de onda. Fazer uma representação gráfica do potencial de paragem em função da frequência da radiação e obter o valor da constante de Planck que resulta destes dados.

13.2. A experiência de Young

A experiência de Young pode ser facilmente reproduzida usando um laser escolar ou mesmo um apontador laser. Se o feixe laser não tiver um diâmetro superior à espessura de uma folha de papel, pode ser expandido fazendo-o passar por um orifício feito com a ponta de uma agulha num pedaço de cartolina fixado junto da abertura do laser. Uma tira de papel, com $2 \sim 3$ cm de comprimento e cerca de 2 mm de largura é colocada no caminho do feixe com as faces paralelas à direcção do mesmo de modo a dividir o feixe em dois. Numa sala escurecida as franjas de interferência são visíveis numa parede ou num alvo colocado à frente do feixe.

13.6.1 Questões

13.1. Traduzir em equações as seguintes definições:

- (a) o comprimento de onda é a distância percorrida pela radiação durante um período.
- (b) a variação de fase num período de oscilação é 2π .

13.2. Um núcleo de número atómico Z tem carga Ze . Podemos calcular os raios e energias das órbitas de Bohr para uma electrão no potencial de um núcleo de número atómico Z em vez do núcleo de hidrogénio. Repetindo a análise de Bohr mostrar que

$$a_o(Z) = \frac{a_o(Z=1)}{Z} \quad (13.16)$$

$$E_0(Z) = Z^2 \times E_0(Z=1) \quad (13.17)$$

Nota: Num átomo neutro de número atómico Z existem Z electrões e a repulsão eléctrica entre electrões não pode ser ignorada. Por isso os níveis de energia não são dados exactamente pela fórmula da equação 13.17. Contudo, ela dá uma estimativa razoável das energias dos electrões que orbitam mais próximos do núcleo e que estão mais fortemente ligados (maior energia de ionização).

13.3. Duas estrelas tem temperaturas superficiais de $T_1 = 3000\text{ K}$ e $T_2 = 10\,000\text{ K}$. Qual delas radia mais energia por unidade de área na gama do infra-vermelho?

13.6.2 Problemas

13.1. A constante solar (ver texto 10^o ano) é definida com a intensidade total da radiação solar a uma distância do Sol igual ao raio da órbita de Terra e vale

$$I_S = 1,36 \times 10^3 \text{ W m}^{-2}.$$

Usando uma tabela de dados astronómicos para determinar a área do Sol e a distância Terra-Sol,

- (a) calcular a potência total radiada pelo Sol.
- (b) determinar a temperatura superficial do Sol.

- (c) determinar o comprimento de onda onde a densidade espectral radiada pelo Sol é máxima.

Nota: assumir que o Sol é um corpo negro(?), ou seja $e(\nu) = 1$. Será que todos os “corpos negros” são negros?

- 13.2. De acordo com o esquema da figura 13.2 na página 8 o comprimentos de onda dos raios-X estão na gama $10^{-9} \sim 10^{-6}$ cm.

- (a) Qual é a gama de frequências dos raios-X?
 (b) Qual é gama de energia dos fotões de raios-X em eV?

- 13.3. O trabalho de extracção do Cobre (energia mínima para retirar um electrão do metal) é $W = 4,7$ eV. Qual é o comprimento de onda máximo da radiação que pode originar efeito fotoeléctrico no Cobre? Porquê “máximo”?

13.4.

- (a) Usando uma tabela de constantes confirmar o valor numérico de R na equação 13.10 na página 23.
 (b) Mostrar que os comprimentos de onda das riscas do espectro do átomo de Hidrogénio são dados pela expressão:

$$\frac{1}{\lambda_{i \rightarrow f}} = R_H \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right) \quad n_i = 2, 3, \dots; n_f = 1, 2, \dots$$

e calcular o valor da constante de Rydberg, R_H em m^{-1} .

- (c) Calcular os comprimentos de onda da radiação emitida em transições para a órbita estacionária com $n_f = 2$, com $n_i = 3, 4, 5$.

- 13.5. Raios-X de comprimento de onda $\lambda = 0,1 \text{ \AA}$, são difundidos de $\theta = \pi/4$ numa experiência de efeito de Compton. Qual é a variação de energia dos electrões que difundem esta radiação?

Bibliografia

- [1] R. Feynman, R. Leighton, and M. Sands. *The Feynman Lectures on Physics*, chapter 1.
- [2] NASA. Wilkinson microwave anisotropy probe. URL: <http://map.gsfc.nasa.gov>, Abril 2004.
- [3] Abraham Pais. *Inward bound: of matter and forces in the physical world*. Clarendon Press, Oxford, 1986.
- [4] Walter Scheider. Do the "double slit" experiment the way it was originally done. URL: <http://www.cavendishscience.org/phys/tyoung/tyoung.htm>. Original Physics Teacher 24, 217, 1986, 2000.
- [5] J. Summhammer. Interferometry with electrons and ions. URL: <http://www.ati.ac.at/~summweb/ifm/main.html>, 2005.

Conteúdo

Ficha Técnica	2
13 A revolução quântica	5
13.1 A quantificação de energia	6
13.1.1 Radiação electromagnética	7
13.1.2 O efeito fotoeléctrico	18
13.1.3 A constante de Planck no átomo: Niels Bohr	20
13.1.4 Sumário	23
13.2 Dualidade onda-corpúsculo	25
13.2.1 O fóton	25
13.2.2 Partículas ou ondas?	31
13.2.3 A experiência de Young	32
13.3 A Mecânica Quântica	36
13.3.1 O acaso	36
13.3.2 Ondas e probabilidades	38
13.4 Conclusões	40
13.5 Respostas aos $\mathcal{ETV}'s$	40
13.6 Actividades questões e problemas	43
13.6.1 Questões	44
13.6.2 Problemas	44