Projecto Faraday

Textos de Apoio

Soluções e Anexos

11º Ano de Escolaridade

Projecto Faraday

casa das ciências

Porto, Outubro de 2009

Ficha Técnica

Projecto Faraday

Projecto de intervenção no ensino da Física no secundário.

Financiamento

Fundação Calouste Gulbenkian.

Execução

Departamento de Física, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto.

Escolas Participantes

- ES Filipa de Vilhena
- ES Fontes Pereira de Melo
- ES Garcia de Orta
- ES da Maia
- ES de Santa Maria da Feira

Coordenação

- J. M. B. Lopes dos Santos
- Manuel Joaquim Marques

Portal

URL: http://www.fc.up.pt/faraday

Texto do 11º Ano

Redactor Principal

J. M. B. Lopes dos Santos

Colaboração e revisão

- Elisa Arieiro
- Carlos M. Carvalho
- Manuel Joaquim Marques

Conteúdo

Ficha Técnica i

III Soluções e Anexos 7

A Soluções do Capítulo 2 9

A.1 Soluções 9

A.1.1 Actividades 9

A.1.2 Questões 9

A.1.3 Problemas 10

A.1.4 Desafios 14

B Soluções do Capítulo 4 15

B.1 Soluções 15

B.1.1 Actividades 15

B.1.2 Questões 15

B.1.3 Problemas 16

B.1.4 Desafios 17

C Soluções do Capítulo 5 19

C.1 Soluções 19

C.1.1 Actividades 19

C.1.2 Questões 19

C.1.3 Problemas 20

D Anexo Matemático: vectores **23**

D.1 Definição de Vector 23

D.2 Operações sobre vectores 26

D.2.1 Soma de vectores 26

D.2.1.1 Componentes da soma de vectores 27

D.2.2 Produto por um escalar 28

D.2.2.1 Propriedades 29

D.3 Decomposição de um vector segundo os eixos coordenados 31

D.4 Exercícios 32

E Anexo sobre gráficos **35**

E.1 Para que serve um gráfico 35

E.1.1 Vantagens 36

E.2 Escolha de escalas 37

Lista de Figuras

A.1 Que movimento é este? 13

A.2 Trajectória de uma bola de futebol 14

C.1 Qual das trajectórias segue o automóvel ao despistar-se? 19

D.1 Os segmentos orientados AB e CD representam o mesmo **vector** 24

D.2 O módulo de $\vec{a}$ é dado pelo Teorema de Pitágoras, $\|\vec{a}\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2}$. . . . 26

D.3 Para somar o vector $\vec{b}$ ao vector $\vec{a}$ podemos usar o método de (a): representar $\vec{b}$ por um segmento colocado na extremidade de $\vec{a}$; ou (b): a regra do paralelogramo. 27

D.4 As componentes do vector soma $\vec{a} + \vec{b}$ são as somas das componentes respectivas de $\vec{a}$ e $\vec{b}$. 28

D.5 O vector $2\vec{a} = \vec{a} + \vec{a}$ tem a direcção e sentido de $\vec{a}$ e o dobro do módulo. 29

D.6 Decomposição de um vector segundo os eixos coordenados. 31

D.7 Se o quadriculado tiver lado unitário, quais são as componentes destes vectores? 32

E.1 Para que serve um gráfico? 35

E.2 Escalas num gráfico. 37

E.3 Gráfico dos resultados da Tabela E.1. Num papel milimétrico cada uma das menores divisões aqui indicadas corresponderia a $1\,\mathtt{cm}$, equivalente a $0,2\,\mathtt{s}$ no eixo das abcissas e a $0,2\,\mathtt{m}$ no eixo das ordenadas. 39

E.4 Este gráfico tem uma escala de ordenadas mal escolhida. 40

E.5 Escolha aceitável de escalas não tem que incluir a origem dos eixos coordenados. 41

Lista de Tabelas

E.1 Tabela de valores de tempo e comprimento. 38

E.2 Tabela de valores de temperatura e resistência . . . 39

Parte III

Soluções e Anexos

Apêndice A

Soluções do Capítulo 2

A.1 Soluções

A.1.1 Actividades

—

A.1.2 Questões

A.1.

(a) Falso.
(b) Falso.
(c) Verdadeiro.
(d) Falso.
(e) Verdadeiro.

A.2. Velocidade média

A.3. —

A.4.

(a) A direcção não, o sentido sim.
(b) Não.

A.5. Não.

A.6.

(a) (d).
(b) —
(c) —

A.7.

(b) $20/7\,\mathtt{m\,s}^{-1}$;

A.8.

(a) A; $v_x = 0$, $v_y > 0$.
B; $v_x < 0$, $v_y = 0$.
C; $v_x = 0$, $v_y < 0$.
D; $v_x > 0$, $v_y = 0$.

(b)

i. Entre A e B: $(a_m)_x < 0$, $(a_m)_y < 0$.
ii. Entre A e C: $(a_m)_x = 0$, $(a_m)_y < 0$.

(c) Nula.

A.9.

(a)

i. (b).
ii. (c).
iii. (d).
iv. (a).

(b) —

A.1.3 Problemas

A.1.

(a) $500\sqrt{3}\,\mathtt{m}$.
(b) $-500\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\hat{\mathbf{i}} - 500\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\hat{\mathbf{j}}$.

A.2.

(a) $x = 0,725\,\mathtt{m}$.
(b) $v_m = 0,07\,\mathtt{m\,s}^{-1}$.

A.3.

(a) Celeridade: módulo do vector velocidade instantânea.

(b) $2{,}14\,\mathtt{h} = 129\,\mathtt{min}$.

A.4.

(a) $80\,\mathtt{km\ \ h}^{-1}$.

(b) O primeiro. O segundo automóvel demorou $2{,}08\,\mathtt{h}$, ou seja 2 horas e 5 minutos, mais 5 minutos que o primeiro.

A.5.

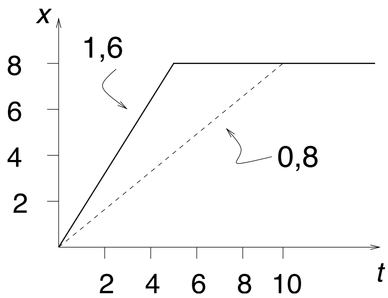
(a) $x(t) = -0{,}373t + 1{,}15\,(\mathtt{m})$;

(b) $x(2) = 0,40\,\mathtt{m}$.

A.6.

(a) $1{,}6\,\mathtt{m\,s}^{-1}$.

(b) $0{,}8\,\mathtt{m\,s}^{-1}$.

(c) 

A.7. Um automóvel acelera de 0 a $100\,\mathtt{km\,h}^{-1}$ em $6\,\mathtt{s}$ em linha recta.

(a) $4{,}63\,\mathtt{m\,s}^{-2}$

(b) $\Delta x = 83{,}3\,\mathtt{m}$; $v_m = 13{,}9\,\mathtt{m\,s}^{-1}$.

(c) $v_x(3) = 13{,}9\,\mathtt{m\,s}^{-1}$.

(d) Nos últimos três.

A.8.

(a)

$\Delta t/\mathtt{s}$	$v_m/\mathtt{m\,s}^{-1}$
1	6
0,1	4,2
0,01	4,02
0,001	4,0002

$v_m \to 4\,\mathtt{m\,s}^{-1}$

(b) $a = 4\,\mathtt{m\,s}^{-2}$, $v_0 = 0\,\mathtt{m\,s}^{-1}$, $x_0 = 0\,\mathtt{m}$; $v(1) = 4\,\mathtt{m\,s}^{-1}$.

(c) /home/jlsantos/trabalhos/cursos/faraday/figs/cap2_11_sol_2_8.e

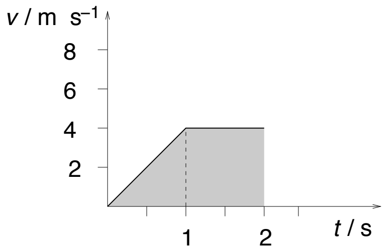
A.9.

(a) $v_x = 4\,\mathtt{m\,s}^{-1}$.

(b) veículo 1: $v_x(t) = \begin{cases} 4t & \text{se} \quad 0 \le t \le 1 \\ 4 & \text{se} \quad t > 1; \end{cases}$;

veículo 2: $v_x(t) = 4t \qquad \text{se} \quad t \ge 0.$

(c)



área$=2 + 4 = 6\,\mathtt{m}$.

(d) $2\,\mathtt{m}$.

A.10.

(a)

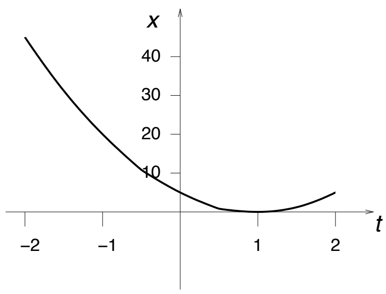
i. $v_m = -5\,\mathtt{m\,s}^{-1}$; $\vec{v}_m = -5\hat{\mathbf{\imath}}\ \mathtt{m\,s}^{-1}$.

ii. $v_m = 5\,\mathtt{m\,s}^{-1}$; $\vec{v}_m = 5\hat{\mathbf{\imath}}\ \mathtt{m\,s}^{-1}$.

iii. $\Delta x = 20\,\mathtt{m}.$; $\vec{\Delta x} = 20\hat{\mathbf{\imath}}\ \mathtt{m}$.

(b) $x(t) = 5(t-1)^2 = 5\left(t^2 - 2t + 1\right) = 5t^2 - 10t + 5$;
$a_x = 10\,\mathtt{m\,s}^{-2}$; $v_0 = -10\,\mathtt{m\,s}^{-1}$; $x_0 = 5\,\mathtt{m}$.

(c)



$-2 < t < 1$, $v_x(t) < 0$;
$t > 1$, $v_x(t) > 0$;
$v_x(1) = 0$.

A.11.

(a)

$$v_x(t) = 4t + 5$$
$$v_y(t) = -4t$$

(b) Direcção e sentido de $\hat{\mathbf{i}}$.

(c) Direcção e sentido de $\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}}$; norma $= 4\sqrt{2}\,\mathtt{m\,s}^{-2}$.

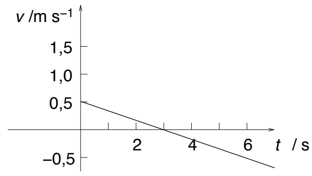


Figura A.1: Que movimento é este?

A.12. (a) $t = 3\,\mathtt{s}$.

(b) $t = 6\,\mathtt{s}$. Nulo.

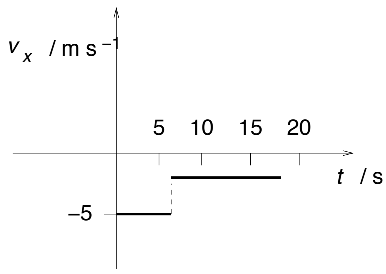
(c) $a_x = \frac{1}{6}\,\mathtt{m\,s}^{-2}$.

(d) A massa sobe até $t = 3\,\mathtt{s}$ e depois desce.

A.13.

(a) Não. A velocidade varia.

(b)



(c) $a_x = 0{,}19\,\mathtt{m\,s}^{-2}$.

(d) $x = -40\,\mathtt{m}$; $t = 10\,\mathtt{s}$.

A.14.

(a) 5,76 $\mathtt{s}$.

(b) $v_x = 18{,}2\,\mathtt{m\,s}^{-1} = 65{,}6\,\mathtt{km\,h}^{-1}$ 1 $\mathtt{s}$ após iniciar a travagem efectiva; $v_x = 19{,}0\,\mathtt{m\,s}^{-1} = 68{,}5\,\mathtt{km\,h}^{-1}$ após avistar obstáculo.

(c) $\Delta x = 66\,\mathtt{m}$.

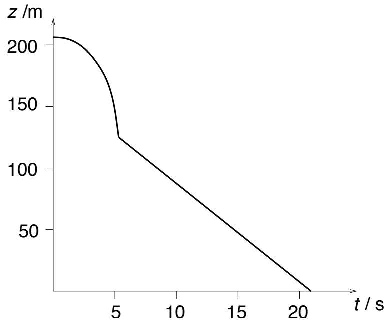
A.15.

(a) $-10\,\mathtt{m\,s}^{-2}$.

(b) $v = -10t$ (v em $\mathtt{m\,s}^{-1}$ e t em $\mathtt{s}$).

(c) $a = -5/21 = -0{,}24\,\mathtt{m\,s}^{-2}$.

(d) $h = (5 \times 50)/2 + (21 - 5) \times 5 = 205\,\mathtt{m}$

(e) 

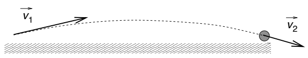


Figura A.2: Trajectória de uma bola de futebol

A.16. (a) $\|\vec{v}_0\| = 109\,\mathtt{km\,h}^{-1}$.

(b) $\vec{v}_f = 30\hat{\mathbf{i}} - 5\hat{\mathbf{j}}\,\mathtt{m\,s}^{-1}.\|\vec{v}_f\| = 109\,\mathtt{km\,h}^{-1}$.

(c) Negativo. A força de resistência do ar deve ser oposta em sentido à velocidade. Logo, tem uma componente horizontal com sentido e direcção de $-\hat{\mathbf{i}}$.

A.1.4 Desafios

—

Apêndice B

Soluções do Capítulo 4

B.1 Soluções

B.1.1 Actividades

—

B.1.2 Questões

B.1. Le Galle orientou o telescópio segundo as indicações de Le Verrier.

B.2. Adimensional. É uma razão entre duas forças.

B.3. —

(c).

Em B.

B.4. Sim.

B.5. A. As forças exercidas em cada carro são iguais (terceira lei); a aceleração de A foi menor em módulo, pois a variação de velocidade foi menor: logo, a sua massa é maior.

B.6.

(a) Supondo a mesma força e massas $2m$ e $3m$.

(b) Não. A variação da força de atrito da mesa.

B.7. Porque a bola teve aceleração não nula de sentido oposto ao do peso.

B.8. O tempo que a velocidade demora a reduzir a zero é tanto menor quanto mais dura for a superfície. As forças têm intensidades tanto maiores quanto menor for o tempo de paragem, pois $F\Delta t$ tem sempre o mesmo valor, $F\Delta t = m(0-v_i)$ em que v_i é a velocidade quando se inicia o contacto.

B.1.3 Problemas

B.1. Carro com mola, $N = 7{,}45\,\mathtt{N}$; carro pousado, $N = 2{,}45\,\mathtt{N}$; carro com massa, $N = 1{,}47\,\mathtt{N}$;($g = 9{,}8\,\mathtt{m\,s^{-2}}$).

B.2. $3{,}9 \times 10^{-3}\,\mathtt{m} = 3{,}9\,\mathtt{mm}$.

B.3. $490\,\mathtt{N}$. São iguais.

B.4.

(a) $8{,}54 \times 10^4\,\mathtt{N}$.

(b) $6{,}83 \times 10^4\,\mathtt{N}$;$5{,}12 \times 10^4\,\mathtt{N}$;$3{,}42 \times 10^4\,\mathtt{N}$;$1{,}70 \times 10^4\,\mathtt{N}$; ($g = 9{,}8\,\mathtt{m\,s^{-2}}$).

B.5.

(a) $0{,}32\,g = 2\,\mathtt{m\,s^{-2}}$.

(b) É directamente proporcional à massa do passageiro. $219\,\mathtt{N}$.

(c) $95\,\mathtt{m\,s^{-1}} = 340\,\mathtt{km\,h^{-1}}$.

B.6.

(a) $3{,}57\,\mathtt{m\,s^{-1}}$.

(b) $0,73\,\mathtt{s}$.

B.7. $2{,}2 \times 10^3\,\mathtt{N}$.

B.8.

(a) $40{,}6\,\mathtt{km\,h^{-1}}$.

(b) $17{,}8\,\mathtt{N}$.

B.9.

(a) —

(b) $v_0 = L\sqrt{g/2h}$.

(c) $90{,}4\,\mathtt{m\,s}^{-1} = 325\,\mathtt{km\,h}^{-1}$.

B.10.

(a) $0{,}45\,\mathtt{s}$.

(b) $6,78\,\mathtt{m}$.

B.11.

(a) Esfera: $F = 2 \times 10^{-3}\,\mathtt{N}$. Bola: $2 \times 10^{-2}\,\mathtt{N}$.

(b) Esfera: $F/P = 6 \times 10^{-3}$. Bola; $F/P = 3{,}6 \times 10^{-2}\,\mathtt{N}$.

B.12.

(a) $6{,}6 \times 10^{-4}\,\mathtt{s}$.

(b) $3{,}4 \times 10^{3}\,\mathtt{N}$.

(c) Uma força de módulo $3{,}4 \times 10^{3}\,\mathtt{N}$.

B.13.

(a) $60{,}5\,\mathtt{m\,s}^{-1}$.

(b) $I = 1{,}2\,\mathtt{N\,s}$.

(c) $\Delta t = 14,2 \times 10^{-3}\,\mathtt{s} = 14{,}3\,\mathtt{ms}$.

B.1.4 Desafios

—

Apêndice C

Soluções do Capítulo 5

C.1 Soluções

C.1.1 Actividades

—

C.1.2 Questões

C.1.

(a) O movimento rectilíneo e uniforme.

(b) Não. Em órbitas circulares o movimento é acelerado.

(c) Sim. Para haver aceleração tem que exisitir um força externa. As órbitas observadas exigiam que existissem forças exercidas sobre os planetas.

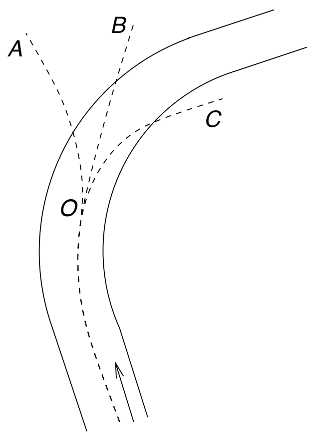


Figura C.1: Qual das trajectórias segue o automóvel ao despistar-se?

C.2. Negativa. Para transferir um satélite para uma distância infinita da Terra com velocidade nula (energia total nula) é necessário realizar trabalho externo sobre ele. Logo a energia numa órbita geoestacionária é negativa.

C.3. **B**. Ao perder a aderência, o automóvel deixa de estar sujeito à força de atrito com o solo e passa a deslocar-se em trajectória rectilínea na direcção tangente à trajectória anterior, no ponto onde a força passou a ser nula.

C.4. $\sqrt{8} \approx 2,83\,\texttt{anos}$.

C.1.3 Problemas

C.1. A Lei da Gravitação Universal permite-nos calcular o peso de um corpo à superfície da Terra, em termos da massa e do raio da Terra.

(a) —

(b)

$$\begin{aligned} g_{\texttt{Lua}} &= 1{,}62\,\texttt{m}\,\texttt{s}^{-2} \\ g_{\texttt{Marte}} &= 3{,}80\,\texttt{m}\,\texttt{s}^{-2} \\ g_{\texttt{jupiter}} &= 24{,}9\,\texttt{m}\,\texttt{s}^{-2} \end{aligned}$$

C.2.

(a) Força exercida pelo Sol. $F_s = 5{,}9 \times 10^{-3}\,\texttt{N}$; Força exercida pela Terra: $P = 9,8\,\texttt{N}$; $F_s/P = 0{,}6 \times 10^{-3}$.

C.3.

(a) $1{,}68 \times 10^3\,\texttt{m}\,\texttt{s}^{-1} = 1{,}68\,\texttt{Km}\,\texttt{s}^{-1}$.

(b) $7{,}91 \times 10^3\,\texttt{m}\,\texttt{s}^{-1} = 7{,}91\,\texttt{Km}\,\texttt{s}^{-1}$.

(c) Lua: $E_p = -2{,}82 \times 10^6\,\texttt{J}$; $E_{\texttt{total}} = -1{,}41 \times 10^6\,\texttt{J}$; Terra: $E_p = -6{,}25 \times 10^7\,\texttt{J}$; $E_{\texttt{total}} = -3{,}12 \times 10^7\,\texttt{J}$.

C.4. $6{,}25 \times 10^7\,\texttt{J}$.

C.5. $R_f = 4R_T/3$, ou $h = R_T/3 \approx 19\,110\,\texttt{km}$.

C.6.

(a) $20{,}2 \times 10^3\,\texttt{Km}$.

(b) $3{,}87\,\texttt{Km}\,\texttt{s}^{-1}$.

C.7. $2{,}38\,\texttt{Km}\,\texttt{s}^{-1}$.

C.8. $-2{,}65 \times 10^{33}\,\texttt{J}$.

C.9.

(a) $3{,}11 \times 10^{41}\,\texttt{kg}$.

(b) $1{,}6 \times 10^{11}\,M_\odot$.

C.10.

(a) Horizontal dirigida para o centro de trajectória, de módulo 807 N.

C.11.

(a) 42,3 rpm (rotações por minuto).

Apêndice D

Anexo Matemático: vectores

Neste anexo vamos recordar algumas propriedades importantes do conceito de **vector,** que foi introduzido na disciplina de Matemática no 10º ano. Estas notas só pretendem ser um breve resumo de algumas propriedades mais importantes. O livro de texto de Matemática do 10º ano poderá ser um recurso útil para quem estiver mais esquecido.

Os objectivos deste capítulo são:

- recordar e compreender a noção de vector;
- saber determinar as componentes de um vector; saber calcular o respectivo módulo.
- saber realizar operações de soma e produto por escalar, em termos geométricos e em termos de componentes; compreender a relação entre as duas representações.
- saber escrever um vector usando os versores dos eixos coordenados;

D.1 Definição de Vector

Tomemos como exemplo dois pontos no plano, com um referencial cartesiano, $A \mapsto (2,1)$ e $B \mapsto (6,3)$ (Fig. D.1). Desenhemos o segmento de recta que une A e B. Ordenando os dois pontos (primeiro A e segundo B, AB) podemos ***orientar*** **o segmento**

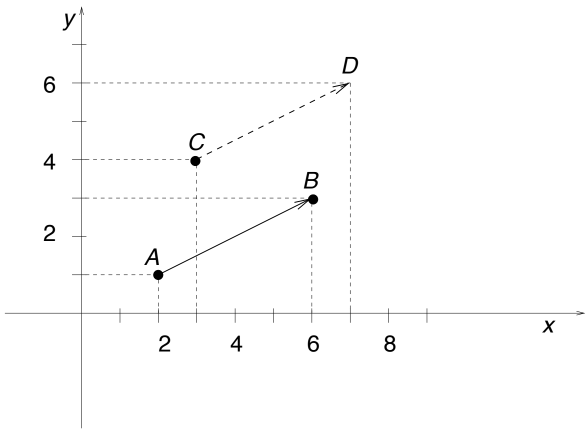


Figura D.1: Os segmentos orientados AB e CD representam o mesmo **vector**

juntando uma seta em B. O segmento orientado corresponde ao par ordenado de pontos AB, a seta apontando do primeiro ponto, A, para o segundo, B. O segmento orientado BA difere de AB apenas pela orientação da seta.

Consideremos um terceiro ponto $C \mapsto (3, 4)$ e a seguinte questão:

> Se representarmos um segmento orientado CD, paralelo a AB, com o mesmo sentido e comprimento, isto é, um segmento *equipolente* a AB, quais serão as coordenadas do ponto final D?

Notemos que, se projectarmos perpendicularmente o segmento AB no eixo dos xx, as coordenadas dos extremos da projecção são as coordenadas x de A e de B, $x_A = 2$ e $x_B = 6$. Por isso o comprimento da projecção é

$$\Delta x = x_B - x_A = 6 - 2 = 4.$$

De igual modo, no eixo dos yy,

$$\Delta y = y_B - y_C = 3 - 1 = 2.$$

Para conseguirmos que o segmento CD seja paralelo a AB e tenha o mesmo comprimento e sentido, basta garantir que tenha as mesmas projecções nos dois eixos. Se marcarmos as coordenadas de D de modo a que

$$\begin{aligned} x_D - x_C &= x_B - x_A = \Delta x = 4 \\ y_D - y_C &= y_B - y_C = \Delta y = 2 \end{aligned} \qquad \text{(D.1)}$$

obtemos, claramente, o que nos propusemos: um segmento orientado CD paralelo a AB (mesma direcção) com o mesmo comprimento e sentido. Assim, as coordenadas de D são:

$$\begin{aligned} x_D &= x_C + \Delta x = 3 + 4 = 7 \\ y_D &= y_C + \Delta y = 4 + 2 = 6. \end{aligned}$$

Recordemos então as seguintes definições:

Vector Os dois segmentos AB e CD dizem-se *equipolentes* e são representações do mesmo **vector**. Por outras palavras, para identificar um vector não nos interessa saber qual é o ponto inicial. Qualquer um dos segmentos equipolentes a AB representa o mesmo vector. Podemos até identificar o vector com o *conjunto* dos segmentos equipolentes a AB. A notação convencional para vector é usar uma seta por cima de um símbolo que o represente, por exemplo $\vec{a}$. Por vezes usa-se a designação **vector livre** para salientar que quaisquer segmentos equipolentes representam o mesmo vector. Em Matemática só há vectores livres e podemos usar, sem confusões, a designação simples, **vector**, sem o adjectivo.

Componentes As *componentes* do vector $\vec{a}$, representado pelo segmento AB, neste sistema de coordenadas, são $(4, 2)$, ou seja, as diferenças das coordenadas dos pontos B e A,

$$\vec{a} = (a_x, a_y) = (x_B - x_A, y_B - y_A) = (4, 2) \tag{D.2}$$

Podíamos, igualmente, usar os pontos D e C, ou de qualquer outro par de pontos que defina um segmento orientado equipolente a AB, porque *segmentos orientados equipolentes têm as mesmas projecções nos eixos coordenados* (ver Eq. D.1). Já que as *componentes* de $\vec{a}$ são iguais às diferenças de *coordenadas* dos pontos B e A podemos também definir este vector como sendo a *diferença entre os dois pontos,* $B - A$ (igual a $D - C$).

$$\vec{a} = B - A = D - C \tag{D.3}$$

Módulo ou norma O comprimento de qualquer segmento orientado que represente o vector é o **módulo** ou **norma** do vector, designado por $\|\vec{a}\|$. Pode ser calculado a partir das suas componentes usando o teorema de Pitágoras.

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}. \tag{D.4}$$

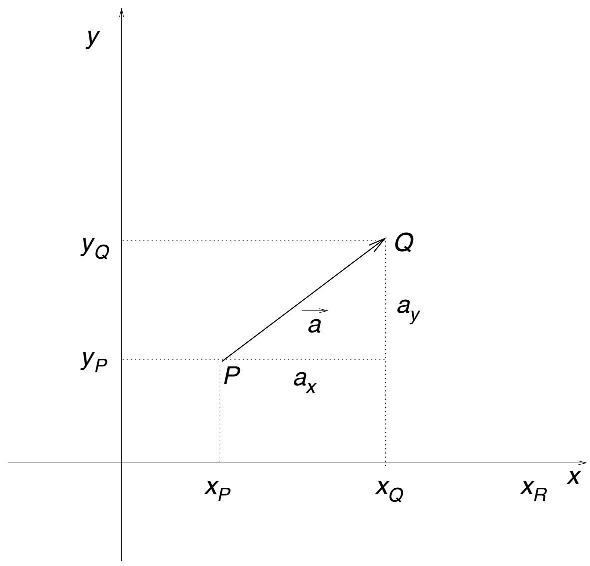


Figura D.2: O módulo de $\vec{a}$ é dado pelo Teorema de Pitágoras, $\|\vec{a}\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2}$.

Quando representamos geometricamente um vector, estamos sempre a escolher, de uma infinidade possível (todos os pontos iniciais), um segmento orientado que o representa. É frequente abusarmos da linguagem e chamarmos vector a um destes segmentos. Daí não vem mal ao mundo, se nos lembrarmos que qualquer outro segmento equipolente, isto é, com o mesmo comprimento, direcção e sentido, representa o mesmo **vector**.

D.2 Operações sobre vectores

D.2.1 Soma de vectores

Recordemos como se *somam* dois vectores quaisquer $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

Representemos $\vec{a}$ por um segmento orientado com início num ponto qualquer P (ver Fig. D.3a) . Sendo Q o ponto final do segmento, e recordando a definição de vector como diferença de dois pontos (Eq. D.3) temos,

$$\vec{a} = Q - P. \tag{D.5}$$

Se representarmos o segundo vector, $\vec{b}$, por um segmento com início em Q, e extremidade em R temos:

$$\vec{b} = R - Q. \tag{D.6}$$

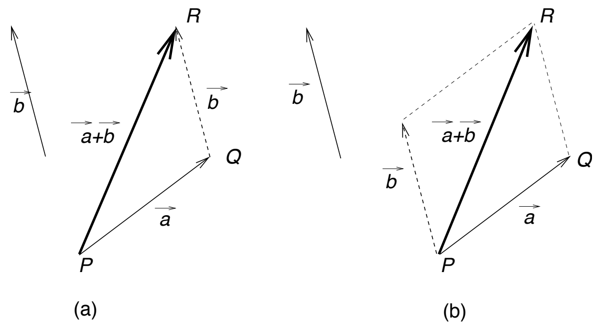


Figura D.3: Para somar o vector $\vec{b}$ ao vector $\vec{a}$ podemos usar o método de (a): representar $\vec{b}$ por um segmento colocado na extremidade de $\vec{a}$; ou (b): a regra do paralelogramo.

Parece óbvio que o vector soma de $\vec{a}$ com $\vec{b}$ deve ser

$$\vec{a} + \vec{b} = Q - P + R - Q = R - P. \tag{D.7}$$

Ou seja, $\vec{a} + \vec{b}$ é representado pelo segmento orientado que une o primeiro ponto de $\vec{a}$, P, com a extremidade de $\vec{b}$, R. [1].

A chamada **regra do paralelogramo** corresponde a representar os dois vectores por segmentos com início no mesmo ponto (Fig. D.3b). O vector soma corresponde à diagonal do paralelogramo definido por $\vec{a}$ e $\vec{b}$. É fácil ver que estas duas maneiras de somar vectores são equipolentes: o lado do paralelogramo oposto a $\vec{b}$, QR, é um segmento orientado que também representa $\vec{b}$.

D.2.1.1 Componentes da soma de vectores

Para calcularmos as componentes do vector soma temos que projectar os vectores num sistema de eixos (Fig D.4). As componentes de $\vec{a}$, (a_x, a_y), são

$$\begin{aligned} a_x &= x_Q - x_P \\ a_y &= y_Q - y_P \end{aligned} \tag{D.8}$$

e as de $\vec{b}$

$$\begin{aligned} b_x &= x_R - x_Q \\ b_y &= y_R - y_Q \end{aligned} \tag{D.9}$$

[1]Mais correcto seria dizer: " ... que une o primeiro ponto do *segmento orientado* que representa $\vec{a}$ à extremidade do *segmento orientado* que representa $\vec{b}$".

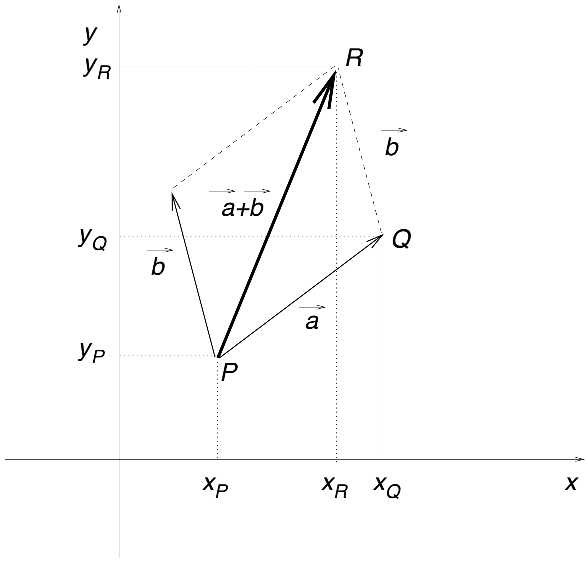


Figura D.4: As componentes do vector soma $\vec{a}+\vec{b}$ são as somas das componentes respectivas de $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

(note-se que $b_x < 0$ pois $x_R < x_Q$).

As componentes do vector soma, $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, são

$$\begin{aligned} c_x &= x_R - x_P = (x_Q - x_P) + (x_R - x_Q) = a_x + b_x \\ c_y &= y_R - y_P = (y_Q - y_P) + (y_R - y_Q) = a_y + b_y \end{aligned}$$

Em resumo:

As componentes (c_x, c_y) de um vector $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ são as somas das componentes respectivas de $\vec{a}$ e $\vec{b}$,

$$\begin{aligned} c_x &= a_x + b_x \\ c_y &= a_y + b_y \end{aligned} \tag{D.10}$$

D.2.2 Produto por um escalar

Se somarmos um vector $\vec{a}$ com ele próprio obtemos, naturalmente,

$$\vec{a} + \vec{a} = 2\vec{a}.$$

A definição de soma implica que o vector $2\vec{a}$ tem a mesma direcção e sentido que $\vec{a}$ e o dobro do comprimento, como se vê na Fig. D.5. As componentes de $2\vec{a}$ são $(a_x + a_x, a_y + a_y) = (2a_x, 2a_y)$.

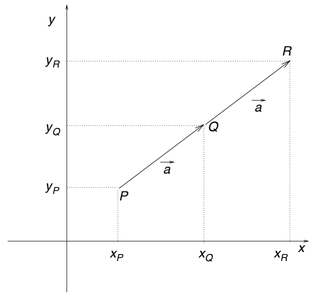


Figura D.5: O vector $2\vec{a} = \vec{a} + \vec{a}$ tem a direcção e sentido de $\vec{a}$ e o dobro do módulo.

Somos então levados a definir o produto de um vector por um número real (designado neste contexto por *escalar*, para os distinguir dos vectores e suas componentes) da seguinte maneira:

Produto por um escalar O produto de um número real r (escalar) por um vector $\vec{a}$

$$\vec{c} = r\vec{a}$$

é um vector com as seguintes características:

- tem a mesma direcção que $\vec{a}$;
- tem um módulo $\|\vec{c}\| = |r| \times \|\vec{a}\|$; se $r = 0$, o vector $\vec{c}$ tem módulo nulo;
- tem o mesmo sentido de $\vec{a}$ se $r > 0$ e o sentido oposto ao de $\vec{a}$ se $r < 0$; (ver Caixa D.1).

Estas definições são equivalentes a dizer:

O produto de um escalar r por um vector $\vec{a}$ é um vector $\vec{c}$,

$$\vec{c} = r\vec{a}$$

que tem as componentes (ra_x, ra_y), em que (a_x, a_y) são as componentes de $\vec{a}$.

D.2.2.1 Propriedades

O produto de um vector por um escalar não é o produto de dois números reais. De igual modo, a soma de dois vectores não é a adição de dois números. Mas as definições dadas acima garantem que certas propriedades do produto e da soma de números reais se mantêm para estas novas operações. Duas muito importantes, são as propriedades distributivas:

■ Produto de um vector por um escalar negativo ■

Esta definição de produto por um escalar fará sentido, para um número real negativo?
Recordemos que um vector é uma diferença de dois pontos

$$\vec{a} = Q - P.$$

Faz sentido chamar $-\vec{a}$ à diferença simétrica

$$-\vec{a} = P - Q = -(Q - P)$$

Os segmentos orientados que representam $-\vec{a}$ tem a mesma direcção e comprimento que os de $\vec{a}$ e sentido oposto. Se um segmento correspondente a $\vec{a}$ vai de P para Q, o de $-\vec{a}$ vai de Q para P.
A soma $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{a} - \vec{a} = 0$, vector de módulo nulo.
De acordo com a nossa definição de produto por um escalar, temos então:

$$-\vec{a} = (-1)\vec{a}.$$

pois $(-1)\vec{a}$ é, por definição, um vector com o mesmo módulo e direcção de $\vec{a}$ e sentido oposto. Tal como o simétrico de um número é o produto de -1 por esse número ($-5 = (-1)5$), o simétrico de um vector, $\vec{a}$ (o vector que somado com ele dá vector nulo) é também $(-1)\vec{a}$.

Caixa D.1: O produto de um vector por um escalar negativo fará sentido?

Para quaisquer vectores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ e qualquer par de escalares r e s tem-se

$$\begin{aligned} r(\vec{a}+\vec{b}) &= r\vec{a}+r\vec{b} \\ (r+s)\vec{a} &= r\vec{a}+s\vec{a} \end{aligned} \tag{D.11}$$

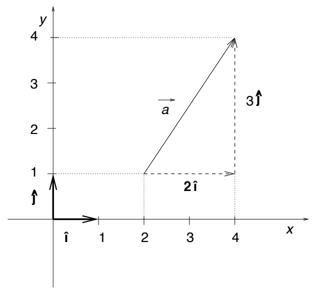


Figura D.6: Decomposição de um vector segundo os eixos coordenados.

D.3 Decomposição de um vector segundo os eixos coordenados

Um vector de módulo unitário é designado por **versor**. É habitual representar um versor como $\hat{\mathbf{a}}$. Podemos associar a cada um dos eixos coordenados um versor, com a direcção e sentido do eixo correspondente:

- versor do eixo do xx , $\hat{\mathbf{i}}$;
- versor do eixo yy, $\hat{\mathbf{j}}$.

As componentes destes versores são muito simples de determinar. Como $\hat{\mathbf{i}}$ tem a direcção xx a sua componente y é nula. Como o módulo é 1 e o sentido do semi-eixo positivo dos xx a sua componente x é 1. Isto é, $\hat{\mathbf{i}} = (1, 0)$. De modo idêntico, $\hat{\mathbf{j}} = (0, 1)$. Um vector qualquer, por exemplo, $\vec{a} = (2, 3)$ pode então escrever-se na forma:

$$\vec{a} = 2\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}}.$$

Com efeito

$$\begin{aligned} 2\hat{\mathbf{i}} &= (2\times 1, 2\times 0) = (2, 0) \\ 3\hat{\mathbf{j}} &= (3\times 0, 3\times 1) = (0, 3) \end{aligned}$$

e portanto o vector $2\hat{\mathbf{i}}+3\hat{\mathbf{j}}$ tem as componentes $(2+0, 0+3) = (2, 3)$ ou seja é o vector $\vec{a}$.

Dado um vector $\vec{a}$ de componentes (a_x, a_y) e os versores $\hat{\mathbf{i}}$ e $\hat{\mathbf{j}}$ dos eixos coordenados, tem-se

$$\vec{a} = a_x\hat{\mathbf{i}} + a_y\hat{\mathbf{j}}$$

D.4 Exercícios

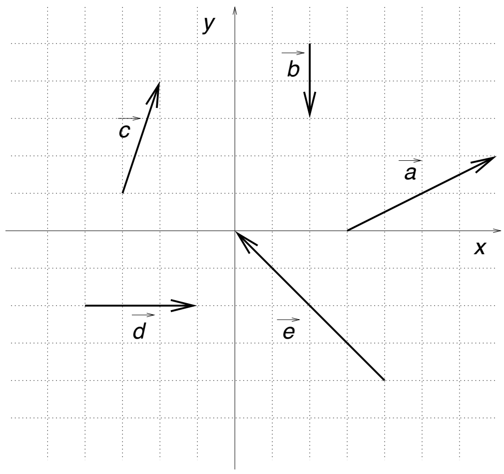


Figura D.7: Se o quadriculado tiver lado unitário, quais são as componentes destes vectores?

D.1. Considere os vectores representados na Fig. D.7. Suponha que o quadriculado tem um lado com comprimento 1. Para resolver estes exercícios é conveniente reproduzir a figura no seu caderno.

(a) Determine as componentes dos vectores da figura.

(b) Represente na figura o vector soma $\vec{a}+\vec{b}$. Determine as respectivas componentes.

(c) Represente, à sua escolha, dois vectores que somados com o vector $\vec{a}$ dêem vectores com a direcção do eixo xx.

(d) Qual dos vectores da figura é igual a $\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}}$?

(e) Represente na figura o vector $\vec{a} + 0,5\vec{e}$.

(f) Calcule o módulo do vector $\vec{e}$.

(g) Determine o escalar r que faz com que

$$\vec{a} + \vec{e} + r\vec{b} = 0$$

Apêndice E

Anexo sobre gráficos

(adaptado de *Guia de Trabalhos Práticos de Laboratório de Física I,* Departamento de Física da Faculdade de Ciências, Universidade do Porto, Porto 2002 [1]).

E.1 Para que serve um gráfico

O gráfico dos pares de valores experimentais de duas grandezas físicas permite visualizar de um modo muito directo e intuitivo alguns aspectos da relação entre essas grandezas.

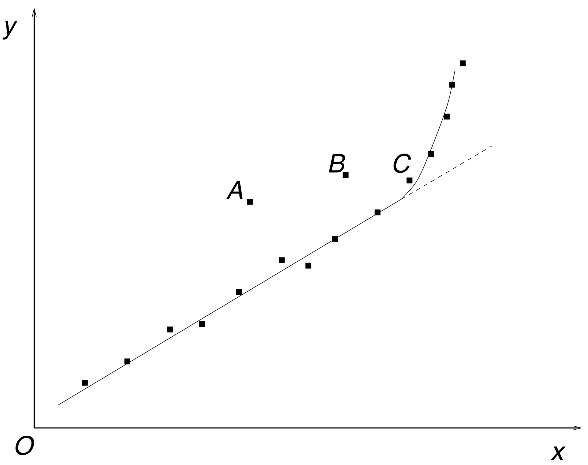


Figura E.1: Para que serve um gráfico?

E.1.1 Vantagens

Algumas das vantagens da representação gráfica dos resultados experimentais são (observe-se a Fig. E.1):

a) Análise simples (visual) da dispersão dos resultados.
Se esperamos que as duas grandezas físicas medidas, x e y, tenham uma relação do tipo

$$y = f(x)$$

poderíamos pensar que os pontos experimentais medidos (x_i, y_i) cairiam sobre um curva contínua, correspondente ao gráfico da função $f(x)$. No entanto, nenhuma medição é isenta de erros, diferenças entre o valor real da grandeza e o valor expresso pela medição. Por isso os resultados experimentais apresentam sempre alguma variação relativamente aos valores de uma função que possa, com alguma credibilidade, representar a relação entre as suas grandezas. Um gráfico permite ter uma ideia da dispersão de resultados relativamente a uma tal curva.

b) Apreciação dos limites da validade de uma determinada relação.
A relação entre as duas grandezas representadas no gráfico da Fig. E.1 parece ser linear (o gráfico é uma linha recta) até valores de abcissas um pouco abaixo da de C . Parece deixar de o ser para valores superiores.

c) Avaliação de pontos duvidosos.
Na Fig. E.1, a observação do gráfico indica que os pontos A e B são pontos que se afastam da linearidade numa zona onde esta parece existir. Se não tivermos razão para esperar um comportamento especial para os valores das abcissas de A e B, podemos questionar se não terá havido um erro de operação ou de registo nas medições de A e B: são pontos duvidosos. Devem repetir-se as medições junto desses pontos, para verificar se não terá havido erro na operação de medida ou no registo desses valores ou se se confirmam os valores previamente encontrados.

d) Interpolação.
É uma operação que permite obter um par de valores (x, y) dentro da gama dos pares de valores (x_i, y_i) obtidos experimentalmente, através do traçado de uma linha que julguemos

possa representar a relação entre x e y e que seja consistente com os resultados experimentais.

e) **Extrapolação.**
Operação semelhante à interpolação com a diferença de que o ponto a determinar tem abcissas fora fora da gama dos pontos experimentalmente determinados. Toda a extrapolação deve ser indicada a tracejado. A extrapolação é uma operação de resultados menos seguros do que a interpolação pois que se admite que a relação entre as grandezas físicas permanece válida mesmo fora da gama dos valores determinados experimentalmente. Contudo, podem existir razões físicas que fundamentem a extrapolação.

E.2 Escolha de escalas

A escolha de escalas num gráfico permite estabelecer uma proporcionalidade entre comprimentos medidos no papel do gráfico (em mm) e os valores das grandezas representadas.

Por exemplo, se escolhermos uma distância de 5 cm no papel milimétrico (distâncias entre os traços mais grossos) para representar uma diferença de tempos de 1 s, cada centímetro corresponderá a 0, 2 s e cada milímetro (menor divisão do papel) a 0, 02 s.

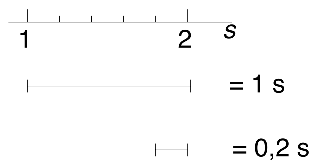


Figura E.2: Escalas num gráfico.

Podemos designar por f_x o valor da grandeza representada em abcissas (eixo dos xx) que corresponde a 1 mm do papel e por f_y o valor correspondente para a grandeza representada em ordenadas (eixo dos yy). No exemplo acima teríamos

$$f_x = 0,02\,\mathrm{s\,mm}^{-1}.$$

Os factores de escala f_x e f_y são escolhidos independentemente.

A escolha mais conveniente tem que ser considerada caso a caso. Podemos enunciar alguns dos critérios gerais a seguir:

E.1. Os pontos que representam as grandezas devem ocupar, em princípio, mais do que 1/4 da folha;

E.2. Os valores representados nas escalas de ordenadas e abcissas devem incluir toda a gama de valores medidos. Mas o mínimo e máximo da escala não têm que coincidir com os valores extremos medidos. Por exemplo, para valores medidos entre 1,1 e 2,7 a escala poderia variar entre 1 e 3. A origem $(0, 0)$ não tem que ser incluída no gráfico a não ser que esteja incluída dentro da gama de valores medidos.

E.3. Os factores de conversão das escalas do papel para as grandezas a representar devem ser números que facilitem a leitura directa das escalas sem necessidade de cálculos complicados: por exemplo, 10, 5, 2, 1, 0,5, 0,2, 0,1 etc.

E.4. As escalas escolhidas para os eixos das abcissas (eixo "horizontal") e das ordenadas (eixo "vertical") devem assegurar a distribuição dos pontos de forma regular no espaço escolhido no papel para a representação do gráfico. As escalas podem obrigar à escolha de uma origem de abcissa e/ou ordenada não nulas (falsa origem). As marcações numéricas nas escalas deverão ser efectuadas com clareza; nunca devem ser inscritos nos eixos os valores das medidas realizadas.

E.5. As grandezas representadas, em cada eixo, devem ser claramente indicadas, com as unidades respectivas.

E.6. Os pontos (x, y) correspondentes às medidas realizadas devem ser marcados de forma não ambígua (usar por exemplo símbolos como $+$, $\diamond$, $\triangle$, $\times$, $\bullet$... *etc.*)

$T/\mathtt{s}$	$L/\mathtt{m}$
0,3	1,1
0,5	1,42
0,7	1,68
0,9	1,90
1,1	2,11
1,3	2,29
1,5	2,46
1,7	2,62

Tabela E.1: Tabela de valores de tempo e comprimento.

Exemplo 1

Consideremos os valores de tempo e comprimento da Tabela E.1.

O gráfico poderá conter uma escala de tempo entre os limites $T = 0\,\mathtt{s}$ e $T = 2\,\mathtt{s}$ e uma escala de comprimentos entre $L = 1$ e $L = 3\,\mathtt{m}$.

A folha de papel milimétrico tem uma área útil de $30 \times 20\,\mathtt{cm}^2$. A escala de ordenadas pode corresponder a representar a gama experimental de $2\,\mathtt{m}$ em $10\,\mathtt{cm}$ do papel. Com esta escolha temos as seguintes correspondências, que facilitam a leitura de valores no gráfico:

$$\begin{aligned} 5\,\mathtt{cm} &\leftrightarrow 1\,\mathtt{m} \\ 1\,\mathtt{cm} &\leftrightarrow 0,2\,\mathtt{m} \\ 5\,\mathtt{mm} &\leftrightarrow 0,1\,\mathtt{m} \\ 1\,\mathtt{mm} &\leftrightarrow 0,02\,\mathtt{m} \end{aligned}$$

O factor de escala é $f_y = 0,02\,\mathtt{m}\ \mathtt{mm}^{-1}$;

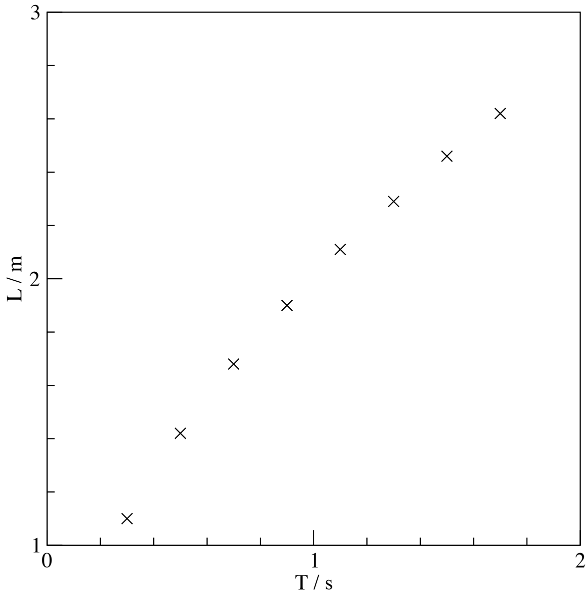


Figura E.3: Gráfico dos resultados da Tabela E.1. Num papel milimétrico cada uma das menores divisões aqui indicadas corresponderia a 1 cm, equivalente a $0,2\,\mathtt{s}$ no eixo das abcissas e a $0,2\,\mathtt{m}$ no eixo das ordenadas.

Para a escala das abcissas podemos fazer corresponder 10 cm do papel aos 2 s de variação total de T; teremos então

$$\begin{array}{lcl} 5\,\mathtt{cm} & \leftrightarrow & 1\,\mathtt{s} \\ 1\,\mathtt{cm} & \leftrightarrow & 0,2\,\mathtt{s} \\ 5\,\mathtt{mm} & \leftrightarrow & 0,1\,\mathtt{s} \\ 1\,\mathtt{mm} & \leftrightarrow & 0,02\,\mathtt{s} \end{array}$$

e um factor de escala $f_x = 0,02\,\mathtt{s}\,\mathtt{mm}^{-1}$.

O gráfico terá o aspecto da figura E.3. Cada uma das marcas menores nos eixos corresponde a 1 cm do papel milimétrico.

Exemplo 2

Na determinação da variação da resistência de um material em função da temperatura obtiveram-se os seguintes valores da Tabela E.2.

Como representá-los graficamente? Notemos que os valores de R apresentam uma variação relativamente pequena em torno de 5,70 ($\Delta R = 6{,}25 - 5{,}10 = 1{,}15\,\Omega$). Isto significa que, se escolhermos

T/ºC	R/Ω
20	5,10
25	5,15
30	5,25
35	5,35
40	5,42
45	5,50
50	5,60
60	5,75
65	5,85
70	5,92
80	6,08
90	6,25

Tabela E.2: Tabela de valores de temperatura e resistência

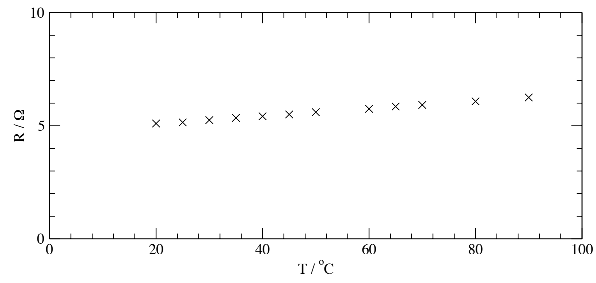


Figura E.4: Este gráfico tem uma escala de ordenadas mal escolhida.

para o eixo das ordenadas (onde vamos marcar os valores de R) uma correspondência como

$$10\,\texttt{cm} \leftrightarrow 5\,\Omega,$$

($f_x = 0,05\,\Omega\,\texttt{mm}^{-1}$) todas as ordenadas vão ficar distribuídas por pouco mais de $2\,\texttt{cm}$. Se escolhermos para o eixo das abcissas uma correspondência

$$5\,\texttt{cm} \leftrightarrow 20\,^{\text{o}}\texttt{C}$$

($f_x = 0{,}4\,^{\text{o}}\texttt{C}$) o gráfico ficará aproximadamente com o aspecto do gráfico 1. Será aceitável?

Os valores apresentados parecem indicar a capacidade de medir até à centésima de `Ohm.` Com esta escolha de escala temos

$$0,01\,\Omega \leftrightarrow 0,2\,\texttt{mm}$$

Dois décimos de milímetro é uma distância menor do que conseguimos ler.

O que está indicado neste caso é escolher para o eixo em que se marca R uma falsa origem, isto é, o ponto de encontro dos eixos não corresponde aos valores $R = 0\,\Omega$ e $T = 0\,^{\text{o}}\texttt{C}$. As escalas seriam:

- abcissas - origem no valor $0\,^{\text{o}}\texttt{C}$ com $5\,\texttt{cm}$ no papel correspondendo a a $20\,^{\text{o}}\texttt{C}$ ($f_x = 0{,}4\,^{\text{o}}\texttt{C}\,\texttt{mm}^{-1}$)
- ordenadas - origem no valor $5\,\Omega$ com $5\,\texttt{cm}$ no papel correspondendo a $0.5\,\Omega$ ($f_y = 0{,}01\,\Omega\,\texttt{mm}^{-1}$)

O gráfico viria, então conforme a Fig. E.5

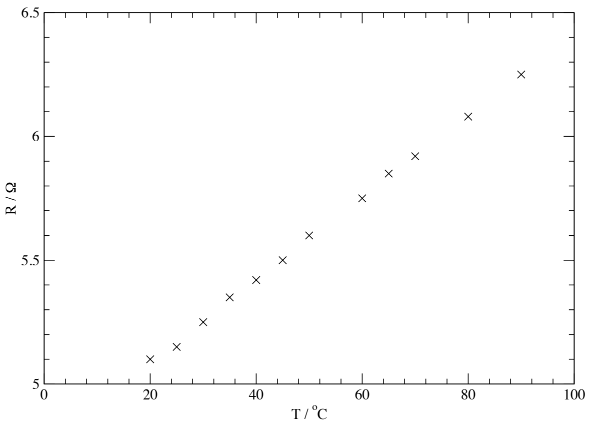


Figura E.5: Escolha aceitável de escalas não tem que incluir a origem dos eixos coordenados.

Bibliografia

[1] António Pereira Leite, Manuel Joaquim Marques, Maria Alegria Feio, and Manuela Lopes dos Santos. Laboratório de Física I - Guia de Trabalhos Práticos. Departamento de Física da Faculdade de Ciências, Universidade do Porto, 2002.