



Desafios Matemáticos!

8º ano

Manual electrónico de Matemática gratuito

Autor: Paulo Ferro

2009 – Desafios Matemáticos! - <http://matematica.over-blog.com>

Introdução



Olá! Eu chamo-me Jagaretê e sou uma onça. Eu vivo na Amazônia e tenho uma paixão: a Matemática. Neste manual irei ajudar-te a compreender e a admirar esse maravilhoso mundo de descobertas e aventuras!

Junta-te à mim!

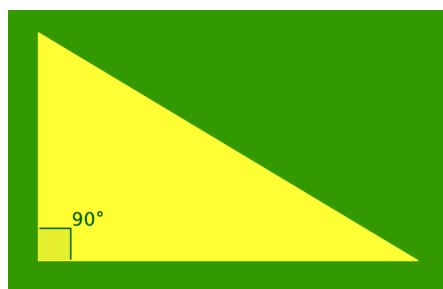
Índice

- *Capítulo 1: Teorema de Pitágoras. Áreas. Semelhança de triângulos - página 3*
- *Capítulo 2: Ainda os números – brevemente*
- *Capítulo 3: Equações – brevemente*
- *Capítulo 4: Lugares Geométricos – brevemente*
- *Capítulo 5: Funções – brevemente*
- *Capítulo 6: Translações – brevemente*
- *Capítulo 7: Estatística – brevemente*

A descoberta do triângulo retângulo!

O triângulo retângulo é uma figura plana com diversas particularidades. A característica principal que o distingue dos demais triângulos é o facto de ter um ângulo interno reto, ou seja, um ângulo cuja amplitude seja de 90° .

Observa-o:



Lembras de um objecto que utilizes e que tenha essa forma?

O esquadro que utilizas nas aulas de E.V.T. tem a forma de um triângulo retângulo! Como te deves lembrar, a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° . Assim, existem dois tipos de esquadros: um com ângulos de amplitude 30° , 60° e 90° ; outro com ângulos de amplitude 45° , 45° e 90° .

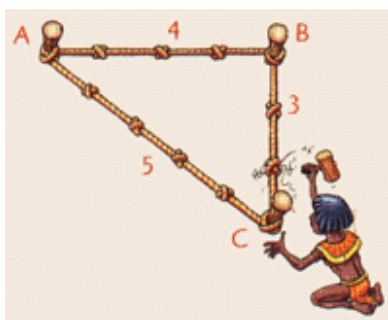
Quando um triângulo é retângulo, os seus lados têm nomes especiais. Assim, aos lados adjacentes ao ângulo reto, chamamos catetos. Ao terceiro lado chamamos hipotenusa.

O Teorema de Pitágoras

Pitágoras foi um matemático, filósofo e astrónomo da Grécia antiga. Pitágoras conseguiu demonstrar um resultado muito importante. Ele demonstrou que o quadrado da hipotenusa era igual à soma dos quadrados dos catetos.

Essa relação já era muito conhecida por Egípcios e Babilónios que utilizavam a corda com treze nós equidistantes e a igualdade $3^2 + 4^2 = 5^2$, entre outros casos particulares do teorema, mas sempre do ponto de vista da sua utilização prática, nunca o tendo demonstrado.

Surgiu então um dos problemas que mais intrigaram os matemáticos da época. A existência de um número que eles desconheciam o significado e que não pertencia aos conjuntos conhecidos até então: um número que multiplicado por si mesmo é igual à 2.



Corda com treze nós equidistantes

Esse número apareceu como consequência do seguinte problema após a aplicação do Teorema de Pitágoras: dado um triângulo retângulo cujos catetos medem 1 unidade, qual é a medida da sua hipotenusa?

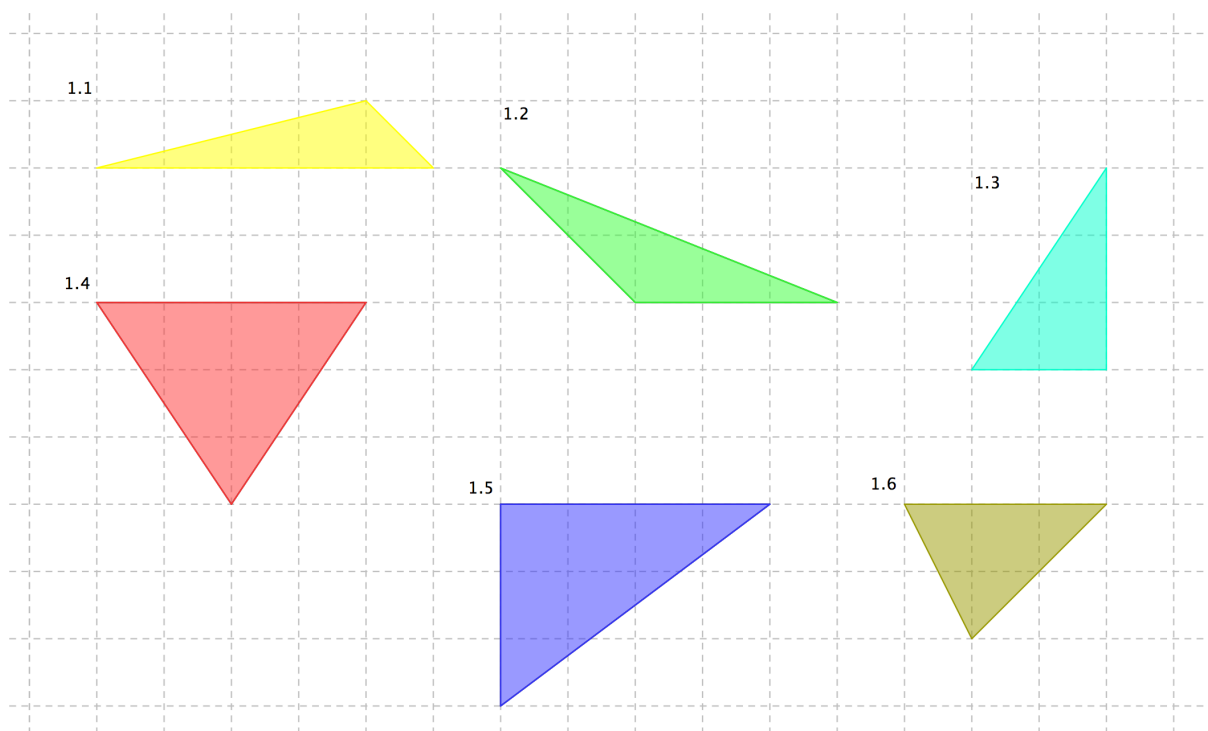
Teorema de Pitágoras

Num triângulo retângulo o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.

Demonstração: [Ver online no site Desafios Matemáticos!](#)

Ao praticar estou a aprender!

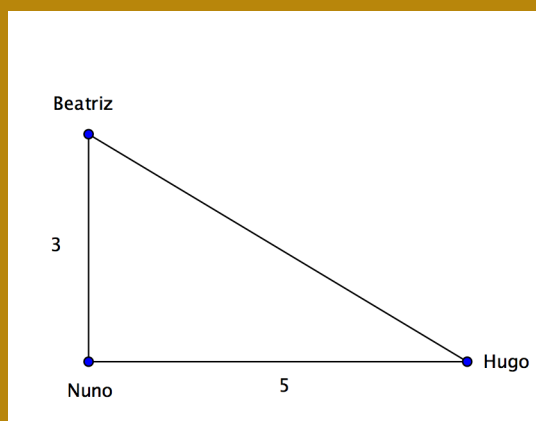
Exercício 1: Identifica qual dos seguintes triângulos são retângulos:



Como determinar a hipotenusa?

Iremos ver que, com o auxílio do Teorema de Pitágoras, é simples determinar a hipotenusa de um triângulo.

Exemplo: A Beatriz, o Hugo e o Nuno estavam a jogar futebol no parque. Eles estavam dispostos na forma de um triângulo retângulo como mostra a figura abaixo:



A Beatriz estava à 3 metros de distância do Nuno e o Nuno à 5 metros de distância do Hugo. Qual era a distância entre a Beatriz e o Hugo?

Resolução: Temos os 3 amigos dispostos na forma de um triângulo retângulo. Sabemos as medidas dos dois catetos e procuramos encontrar a medida da hipotenusa. Como se trata de um triângulo retângulo, podemos aplicar o Teorema de Pitágoras.

O teorema diz-nos que o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos. Representemos por h a hipotenusa do nosso triângulo.

Assim,

$$h^2 = 3^2 + 5^2$$

$$\Leftrightarrow h^2 = 9 + 25$$

$$\Leftrightarrow h^2 = 34$$

$$\Leftrightarrow h = \sqrt{34}$$

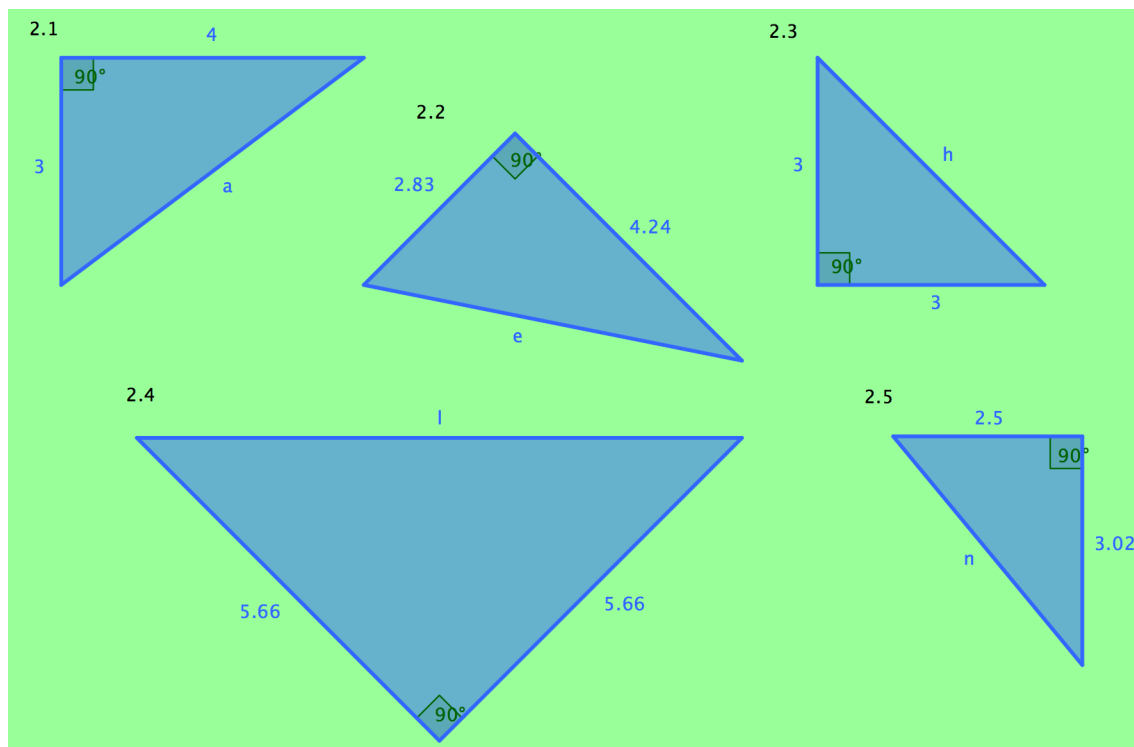
$$\Leftrightarrow h \approx 5,8$$

Logo a Beatriz está à aproximadamente 5,8 metros do Hugo.



Ao praticar estou a aprender!

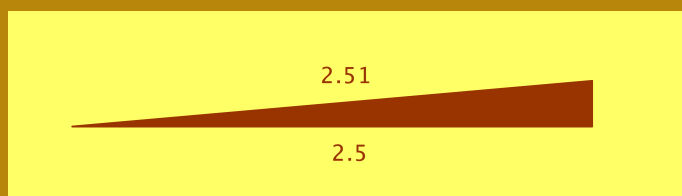
Exercício 2: Calcule o valor da hipotenusa de cada um dos triângulos.



Como determinar um cateto?

E se quisermos determinar um dos catetos? Como devemos proceder? Irás ver que também é muito simples.

Exemplo: No prédio da Sandra existe uma rampa para facilitar o acesso à pessoas com mobilidade reduzida. A rampa tem a forma de um triângulo retângulo e tem as dimensões, em metros, indicadas na figura abaixo:



Qual é a altura, em centímetros, da rampa de acesso?

Resolução: Como se trata de um triângulo retângulo, podemos aplicar o Teorema de Pitágoras.

Assim,

$$2,51^2 = 2,5^2 + altura^2$$

$$\Leftrightarrow 6,3001 = 6,25 + altura^2$$

$$\Leftrightarrow altura^2 = 0,0501$$

$$\Leftrightarrow altura = \sqrt{0,0501}$$

$$\Leftrightarrow altura \approx 0,2238$$

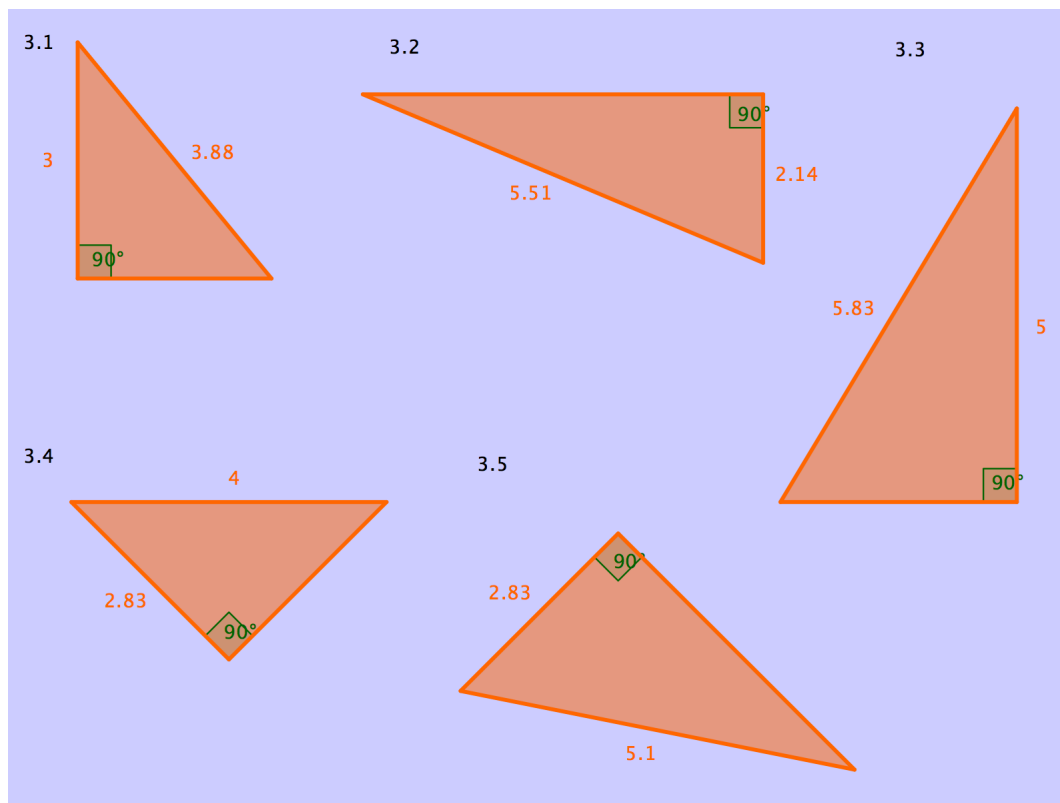
A rampa de acesso tem aproximadamente 0,22 metros de altura, isto é, cerca de 22 centímetros.



Agora és capaz de resolvê-lo sozinho?

Ao praticar estou a aprender!

Exercício 3: Calcule o valor do cateto de cada um dos triângulos.



Onde está o Teorema de Pitágoras?

Agora iremos ver um exemplo de aplicação do Teorema de Pitágoras no nosso dia-a-dia.

Exemplo: A família Sousa foi acampar no Verão. No parque de campismo eles armaram uma tenda com algumas das dimensões, em metros, descritas na figura abaixo. A entrada da tenda está representada por dois triângulos retângulos congruentes entre si.



Qual é a altura, em metros, da tenda da família Sousa?

Resolução: Como os triângulos retângulos são congruentes, a base de cada um deles mede 1,9 metros. Já sabemos o valor de um dos catetos e também sabemos o valor da hipotenusa, que é 2,9 metros.

Como vimos nas páginas 6 e 7, podemos aplicar o Teorema de Pitágoras para determinar o valor do outro cateto, que nada mais é do que a altura da tenda.

Assim,

$$2,9^2 = 1,9^2 + altura^2$$

$$\Leftrightarrow 8,41 = 3,61 + altura^2$$

$$\Leftrightarrow altura^2 = 4,8$$

$$\Leftrightarrow altura = \sqrt{4,8}$$

$$\Leftrightarrow altura \approx 2,2$$

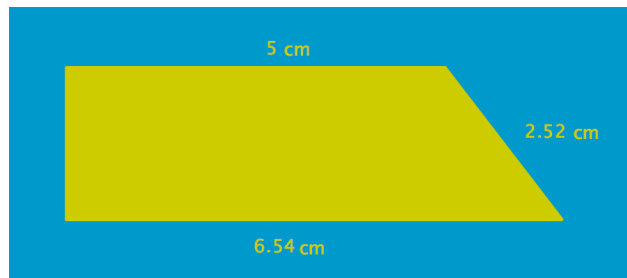
Logo a altura da tenda da família Sousa é de aproximadamente 2,2 metros.



Observa os objetos à tua volta
e experimenta criar o teu próprio exercício.
É uma boa forma de aprenderes a matéria!

Ao praticar estou a aprender!

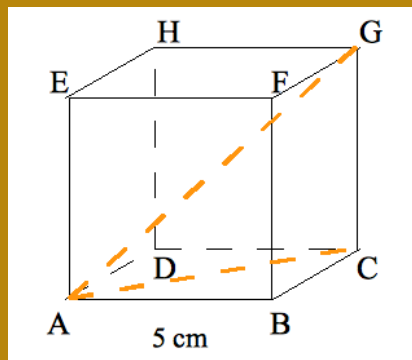
Exercício 4: Calcula o perímetro do trapézio retângulo representado na figura abaixo. Apresenta o resultado com uma casa decimal.



Os sólidos e o Teorema de Pitágoras

Agora iremos ver uma aplicação do Teorema de Pitágoras com um sólido geométrico, nomeadamente o cubo.

Exemplo: Considera um cubo com 5 cm de aresta, como o da figura abaixo:



Iremos determinar o comprimento da diagonal espacial deste cubo, isto é, \overline{AG} , com uma casa decimal.

Resolução: Para isso iremos utilizar o Teorema de Pitágoras duas vezes.

Para calcularmos \overline{AG} , primeiro teremos de calcular \overline{AC} . Assim, aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo $[ABC]$ temos:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 5^2 + 5^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 25 + 25$$

$$\Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 50$$

$$\Leftrightarrow \overline{AC} = \sqrt{50}$$

$$\Leftrightarrow \overline{AC} \approx 7,07$$

Agora que já calculamos o valor de \overline{AC} , iremos calcular o valor de \overline{AG} , aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo $[ACG]$. Assim,

$$\overline{AG}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CG}^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{AG}^2 = 7,07^2 + 5^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{AG}^2 = 49,98 + 25$$

$$\Leftrightarrow \overline{AG}^2 = 74,98$$

$$\Leftrightarrow \overline{AG}^2 = 49,98 + 25$$

$$\Leftrightarrow \overline{AG} = \sqrt{74,98}$$

$$\Leftrightarrow \overline{AG} \approx 8,7$$

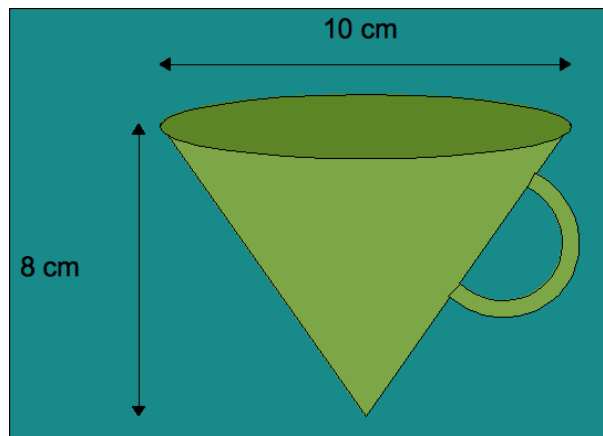
Logo a diagonal espacial do cubo mede aproximadamente 8,7 cm.



Enquanto fazes as contas, deixa sempre mais uma casa decimal do que aquela que é pedida. Assim evitas grandes diferenças no resultado final.

Ao praticar estou a aprender!

Exercício 5: Um suporte de filtro de café tem a forma de um cone e tem as dimensões representadas na figura abaixo:



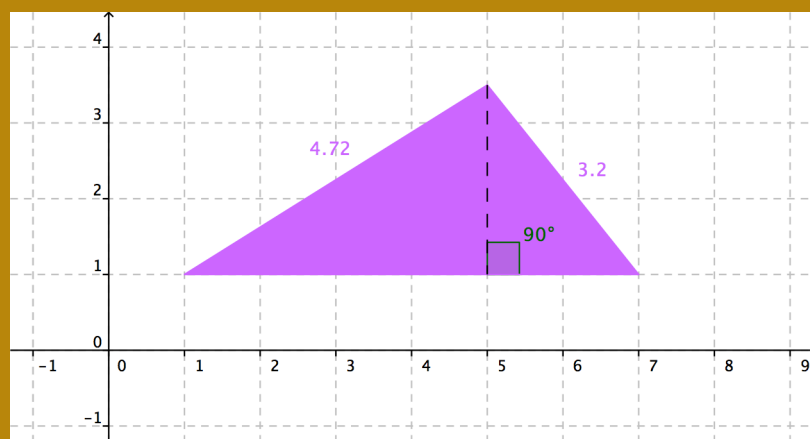
Calcula o volume, em litros, do suporte sabendo que $1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ l}$.

As figuras planas e o Teorema de Pitágoras

Agora iremos ver como poderemos utilizar o Teorema de Pitágoras para calcular a área de figuras planas, sendo estas simples ou compostas.

Começemos por um exemplo com uma figura plana simples, o triângulo.

Exemplo 1: Calcule a área do triângulo representado no referencial ortonormado abaixo:



Resolução: Sabemos que a área de um triângulo é o produto da medida da base pela altura a dividir por dois.

Pela figura, podemos ver que a base mede 6 cm mas não temos informação sobre a altura do triângulo. No entanto, podemos dividir o triângulo original em dois triângulos retângulos. Isso irá permitir calcular a altura através da aplicação do Teorema de Pitágoras em apenas um dos triângulos retângulos.

Por exemplo, calculemos a altura do triângulo retângulo situado do lado direito:

$$3,2^2 = 2^2 + altura^2$$

$$\Leftrightarrow 10,24 = 4 + altura^2$$

$$\Leftrightarrow altura^2 = 6,24$$

$$\Leftrightarrow altura = \sqrt{6,24}$$

$$\Leftrightarrow altura \approx 2,5$$

Já temos a altura do triângulo. Agora é só calcular a sua área:

$$A_{\Delta} = \frac{6 \times 2,5}{2}$$

$$\Leftrightarrow A_{\Delta} = \frac{6^3 \times 2,5}{2}$$

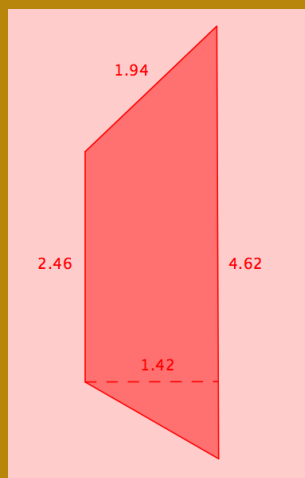
$$\Leftrightarrow A_{\Delta} \approx 7,5 \text{ u.m.}^2$$



Repara que dividimos logo o 6 por 2 e assim evitamos de realizar a divisão depois. Como não é especificada a unidade de medida, no resultado colocamos o u.m..

Agora iremos ver como poderemos calcular a área de um trapézio pela aplicação da fórmula da área. Depois iremos calcular a área desse trapézio com o auxílio do Teorema de Pitágoras.

Exemplo 2: Determine a área do trapézio representado na figura abaxo utilizando a fórmula da área do trapézio $A = \frac{B+b}{2} \times h$. Os valores estão em centímetros.



Resolução: Para utilizarmos a fórmula, temos de ter conhecimento das medidas da base menor e da base maior e da altura do trapézio. Ora, esses três valores são dados na figura. Assim é só aplicar a fórmula da área:

$$A = \frac{B+b}{2} \times h$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{4,62 + 2,46}{2} \times 1,42$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{7,08}{2} \times 1,42$$

$$\Leftrightarrow A = 3,54 \times 1,42$$

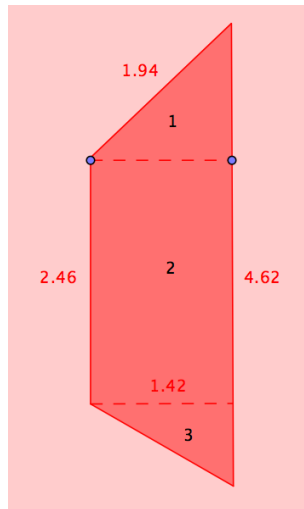
$$\Leftrightarrow A \approx 5,03 \text{ cm}^2$$



É muito simples! Quero fazer mais um exemplo!

Exemplo 3: Calcule a área do trapézio do exemplo anterior utilizando agora o Teorema de Pitágoras.

Resolução: Para resolvermos este exercício, iremos decompor o trapézio em 3 figuras planas: dois triângulos retângulos e um retângulo.



Calculemos a área do triângulo retângulo (figura 1):

$$A_1 = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$$

A base mede 1,42 cm. Para calcularmos a área, precisamos de saber o valor da altura do triângulo. Para isso, iremos utilizar o Teorema de Pitágoras.

Assim,

$$1,94^2 = 1,42^2 + \text{altura}^2$$

$$\Leftrightarrow 3,764 = 2,016 + \text{altura}^2$$

$$\Leftrightarrow \text{altura}^2 = 1,748$$

$$\Leftrightarrow \text{altura} = \sqrt{1,748}$$

$$\Leftrightarrow \text{altura} = 1,322$$

Agora já podemos calcular a área do triângulo:

$$A_1 = \frac{1,42 \times 1,322}{2}$$

$$\Leftrightarrow A_1 = 0,94 \text{ cm}^2$$

Calculemos agora a área do retângulo (figura 2):

$$A_2 = 1,42 \times 2,46$$

$$\Leftrightarrow A_2 = 3,49 \text{ cm}^2$$

Falta-nos apenas a área do triângulo retângulo (figura 3). Para isso teremos que determinar a altura do triângulo que é $4,62 - (2,46 + 1,322) = 4,62 - 3,782 = 0,838$.

Agora já podemos utilizar a fórmula da área do triângulo:

$$A_3 = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$$

$$\Leftrightarrow A_3 = \frac{1,42 \times 0,838}{2}$$

$$\Leftrightarrow A_3 \approx 0,6 \text{ cm}^2$$

A área total da figura é a soma das três áreas calculadas anteriormente:

$$A_{\text{figura}} = A_1 + A_2 + A_3$$

$$\Leftrightarrow A_{\text{figura}} = 0,94 + 3,49 + 0,6$$

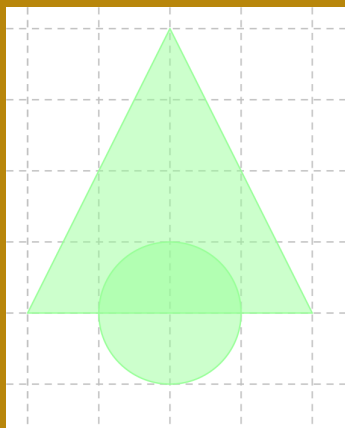
$$\Leftrightarrow A_{\text{figura}} = 5,03 \text{ cm}^2$$



Como viste, a fórmula da área do trapézio é muito útil pois nos facilita muito as contas!

No entanto, nem sempre existe uma fórmula para calcularmos a área de uma figura plana.

Exemplo 4: Calcule a área da seguinte figura plana:



Resolução: A figura plana é composta por um triângulo isósceles e por um semi-círculo.

Assim, vamos calcular as áreas dessas duas figuras planas:

$$A_{\text{triângulo}} = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$$

$$\Leftrightarrow A_{\text{triângulo}} = \frac{4 \times 4}{2}$$

$$\Leftrightarrow A_{\text{triângulo}} = 8 \text{ u.m.}^2$$

e

$$A_{\text{semi-círculo}} = \frac{\pi \times \text{raio}^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow A_{\text{semi-círculo}} = \frac{\pi \times 1}{2}$$

$$\Leftrightarrow A_{\text{semi-círculo}} \approx 1,57 \text{ u.m.}^2$$

Agora basta-nos calcular a área total da figura:

$$A_{\text{total}} = 8 + 1,57$$

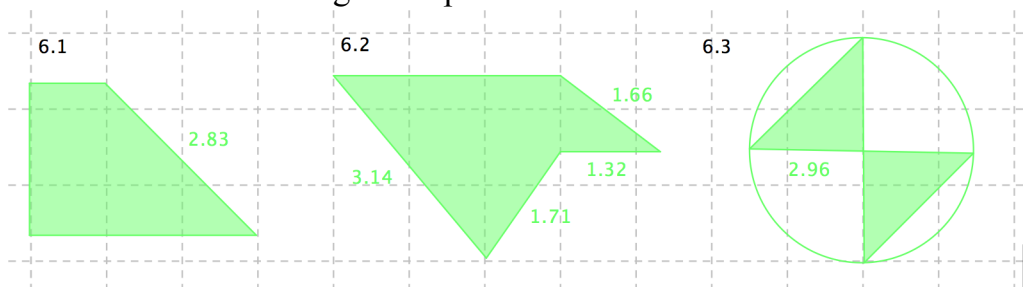
$$\Leftrightarrow A_{\text{total}} \approx 9,57 \text{ u.m.}^2$$



Vamos fazer mais uns exercícios?

Ao praticar estou a aprender!

Exercício 6: Calcule a área das figuras representadas abaixo.



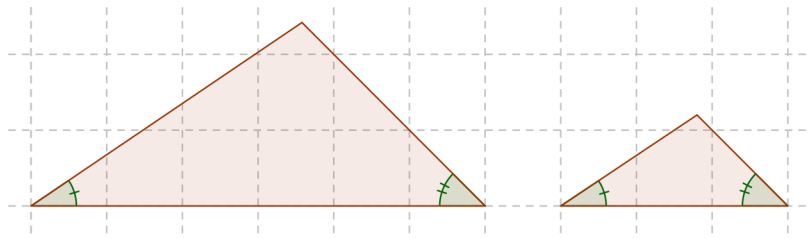
Semelhança de triângulos

Lembras-te quando dois triângulos são semelhantes?

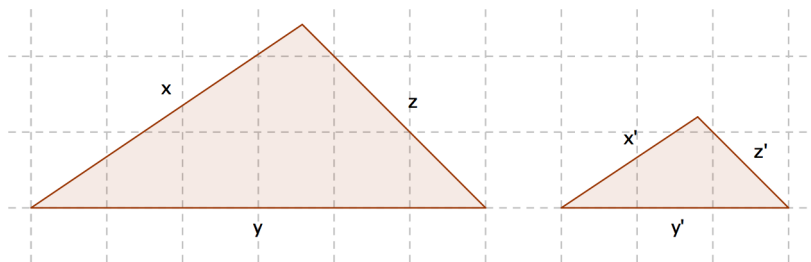
No 7º ano aprendeste três critérios que nos permitem afirmar se dois triângulos são semelhantes ou não.

Relembremos:

Critério ALA (Ângulo Lado Ângulo): Dois triângulos são semelhantes quando dois dos seus ângulos são iguais dois a dois.

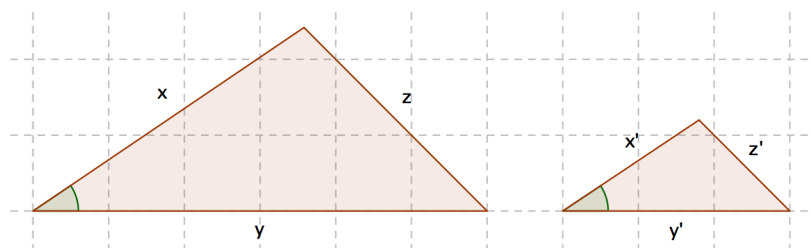


Critério LLL (Lado Lado Lado): Dois triângulos são semelhantes quando os três lados respectivos são proporcionais.



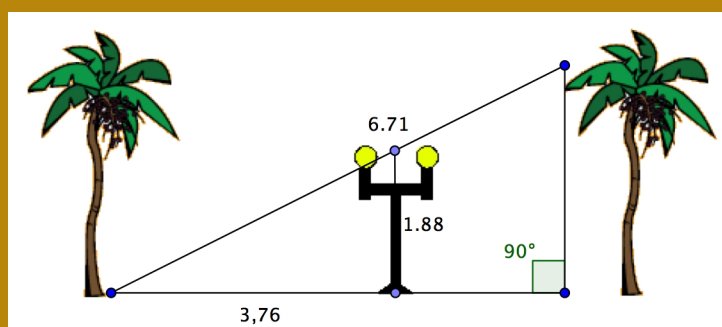
$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'}$$

Critério LAL (Lado Ângulo Lado): Dois triângulos são semelhantes se têm um ângulo igual e os lados adjacentes à esse ângulo proporcionais.



$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'}$$

Exemplo: Entre duas palmeiras, existe um poste de luz com 1,88 metros de altura. Determine a altura, em metros, da palmeira.



Resolução: Os dois triângulos são semelhantes pois possuem dois ângulos iguais entre si (critério ALA).

Determinemos primeiro a distância da base da primeira palmeira até ao topo do poste de luz, que nada mais é do que a hipotenusa do triângulo retângulo menor:

$$h^2 = 3,76^2 + 1,88^2$$

$$\Leftrightarrow h^2 = 14,14 + 3,53$$

$$\Leftrightarrow h^2 = 17,67$$

$$\Leftrightarrow h \approx 4,2$$

Como os dois triângulos são semelhantes, os seus lados são proporcionais. Assim, designando por x a altura da palmeira, temos:

$$\frac{x}{1,88} = \frac{6,71}{4,2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{1,88} = 1,6$$

$$\Leftrightarrow x \approx 3,01$$

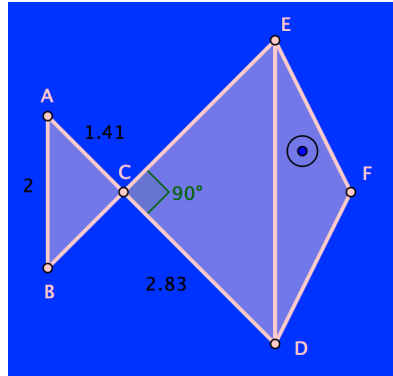
Logo a palmeira mede aproximadamente 3,01 metros.



Deve ser bom estar na sombra dessa palmeira!

Ao praticar estou a aprender!

Exercício 7: Observe a figura abaixo que representa um peixe. Os segmentos de reta $[AB]$ e $[ED]$ são paralelos.

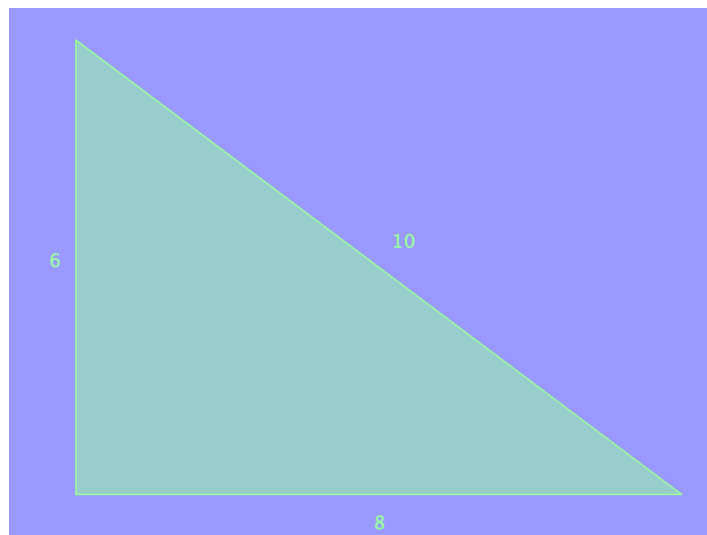


Mostre que os triângulos $[ABC]$ e $[CDE]$ são semelhantes utilizando:

- a(s) propriedade(s) da semelhança de triângulos;
- o Teorema de Pitágoras.

Agora iremos ver a relação entre perímetros e áreas de polígonos semelhantes. Vai nos interessar o caso particular dos triângulos retângulos.

Considere o triângulo representado na figura abaixo:

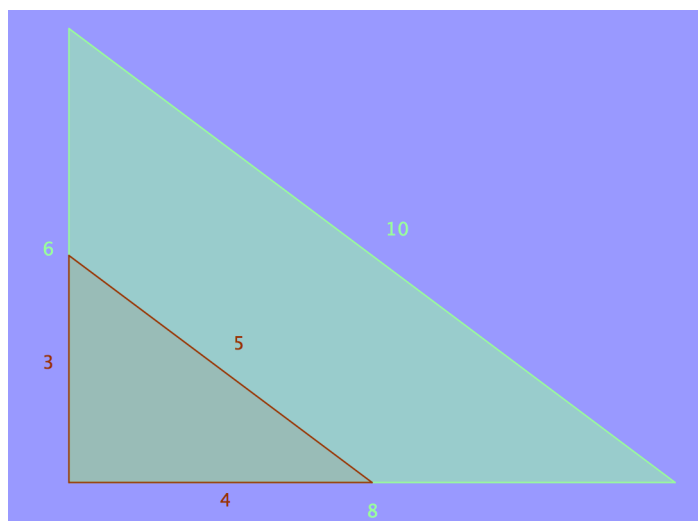


Este triângulo é retângulo? Se o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos podemos concluir que o triângulo é retângulo?

A resposta é positiva. E isso é devido ao Teorema recíproco do Teorema de Pitágoras. Assim, o triângulo da figura é retângulo.

Vamos desenhar um triângulo semelhante ao primeiro em que os seus lados medem metade das medidas do triângulo inicial.

Assim sendo,



Irá interessar-nos o cálculo dos perímetros e das áreas desses dois triângulos.

Para o triângulo verde, o perímetro é igual à 24 e a área é igual à 24, também.

Para o triângulo vermelho, o perímetro é igual à 12 e a área é igual à 6.

A razão de semelhança do triângulo verde para o triângulo vermelho é igual à $\frac{1}{2}$, pois para fazermos a redução, dividimos os lados por 2.

Nota que a razão entre os perímetros dos dois triângulos é igual à $\frac{1}{2}$, que é igual à razão de semelhança.

Nota também que a razão entre as áreas dos dois triângulos é igual à $\frac{1}{4}$, isto é, $\left(\frac{1}{2}\right)^2$, que nada mais é do que o quadrado da razão de semelhança.

Podemos afirmar que:

- a razão entre os perímetros dos triângulos é igual à razão de semelhança.
- a razão entre as áreas dos triângulos é igual ao quadrado da razão de semelhança.

Atenção: As duas afirmações feitas na página anterior são verificadas para qualquer tipo de polígonos.

Exemplo: Em alguns manuscritos e livros antigos é por vezes difícil a leitura de caracteres. Nos dias de hoje existem muitos métodos para facilitar a decifragem de textos antigos. Programas informáticos utilizam algoritmos matemáticos para realizarem a ampliação de páginas previamente digitalizadas e assim facilitar a sua leitura.

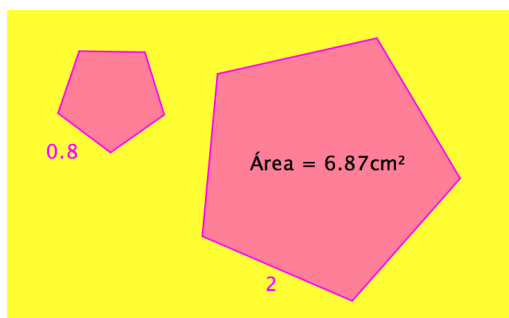
Ver um exemplo interativo no site *Desafios Matemáticos!*



É giro decifrar enígmias com a ajuda da Matemática!

Ao praticar estou a aprender!

Exercício 8: Na figura abaixo estão representados dois pentágonos regulares semelhantes.



- 8.1. Determina a razão de semelhança.
- 8.2. Determina a área do pentágono menor. Escreve o resultado com duas casas decimais.

Interagir para avaliar os meus conhecimentos

[Exercício 1](#)

[Exercício 2](#)

[Exercício 3](#)



E assim terminamos este capítulo.
Adorei conhecer o Teorema de Pítagoras!
Vemo-nos no próximo capítulo, ok?