Ondas em duas e três dimensões

Michael Fowler

Introdução

Até agora, estivemos a ver ondas a uma dimensão, viajando ao longo de uma corda ou ondas sonoras propagando-se num tubo. Mas ondas em dimensões superiores a um são muito familiares – ondas de água na superfície de um lago, ou ondas sonoras emitidas a três dimensões por uma fonte.

É agradável descobrir que estas ondas em dimensões superiores satisfazem equações de ondas que são a extensão natural da que encontrámos para a corda, e – muito importante – também satisfazem o *Princípio da Sobreposição*, por outras palavras, se as ondas se encontrarem, tu apenas de somar as contribuições de cada uma. Nos próximos dois parágrafos, entraremos em maior detalhe, mas este Princípio da Sobreposição é a lição crucial.

A equação de onda e a sobreposição a uma dimensão

Para ondas numa corda, vimos que a aplicação das leis de Newton a um pequeno segmento de corda dava a equação diferencial da onda,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

e vimos também que *ondas sonoras num tubo satisfazem a mesma equação.* Antes de entrarmos em dimensões superiores, quero apenas focar um ponto crucial desta equação de onda: é *linear*, o que significa que se tiveres duas soluções diferentes $y_1(x,t)$ e $y_2(x,t)$ então $y_1(x,t) + y_2(x,t)$ também é solução, como provámos anteriormente.

Esta importante propriedade é fácil de interpretar *visualmente*: se puderes desenhar duas soluções da onda, então em cada ponto da corda simplesmente soma o deslocamento $y_1(x,t)$ de uma das ondas como o $y_2(x,t)$ da outra – soma as duas ondas – e obtens uma outra solução. Portanto, por exemplo, assim que duas ondas que viajam em sentidos contrários numa corda se encontram, o deslocamento da corda em qualquer ponto e em qualquer instante é simplesmente a soma dos deslocamentos devidos a cada uma das ondas isoladas. Esta simples adição dos deslocamentos é chamada "interferência", sem dúvida porque se as ondas tiveres deslocamentos em sentidos opostos, a corda terá um deslocamento resultante inferior ao de cada uma das ondas isolada. Também é chamado o ***Princípio da Sobreposição***.

A equação de onda e a sobreposição em mais dimensões

O que acontece em dimensões superiores? Consideremos duas dimensões, por exemplo ondas numa membrana elástica de um tambor. A posição de repouso da membrana elástica é o plano (x,y), portanto quando está a vibrar move-se para cima e para baixo na direcção z, sendo a sua configuração em cada instante dada por uma função $z(x,y,t)$.

De facto, poderíamos fazer o mesmo que fizemos para a corda, analisando a força resultante num bocadinho da membrana e aplicando a segunda lei de Newton. Neste caso em vez de a corda esticar devido à tensão aplicada em ambos os lados, teríamos um pequeno *quadrado* da membrana elástica, com tensão aplicada em todo o bordo. Recorda que a força resultante no segmento da corda era não nula porque a corda estava curvada, de modo que as tensões em lados opostos tinham direcções ligeiramente diferentes e não se cancelavam. O termo $\partial^2 y/\partial x^2$ media essa curvatura, a taxa de variação do declive. A duas dimensões, pensando em termos desse pequeno quadrado da membrana elástica, as coisas são mais complicadas. Visualiza esse bocadinho como se fosse momentaneamente a superfície de um balão, e verás que se curva em dois sentidos, pelo que as forças de tensão se distribuem em todas as arestas. A força resultante surge porque as forças de tensão em arestas opostas não estão alinhadas se a superfície for curva, e temos agora que adicionar *dois* conjuntos de forças quase-opostas dos dois pares de lados. Não vou trabalhar toda essa matemática aqui, mas espero ter tornado plausível que a equação de onda é:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}.$$

A física desta equação é que a aceleração do bocadinho da membrana resulta do não cancelamento das forças de tensão, que por sua vez se deve à curvatura da membrana em ambas as direcções x e y - é por isso que há dois termos no lado esquerdo da equação.

Espantosamente, esta mesma equação surge para as ondas de água (pelo menos para pequenas amplitudes), ondas sonoras, e mesmo ondas electromagnéticas como as ondas rádio, microondas, luz, raios X: por isso se chama a **Equação de Onda**.

Ir para três dimensões é fácil: adiciona mais um termo para dar

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}.$$

Esta soma de derivadas parciais é tão comum em física que há uma notação especial:

$$\nabla^2 f = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}.$$

Assim como encontrámos a uma dimensão ondas harmónicas $f(x - vt) = A\sin(kx - \omega t)$, com $\omega = vk$, podes verificar que a equação tridimensional tem soluções harmónicas

$$f(x, y, z, t) = A\sin(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)$$

onde agora

$$\omega = v|k|, \;\; |k| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}.$$

De facto, $\vec{k}$ é um vector na direcção em que a onda se está a mover. Os campos eléctrico e magnético numa onda rádio ou onde de luz têm precisamente esta forme (ou, mais perto da fonte, uma forma similar equivalente para ondas esféricas, em vez de ondas planas).

É importante notar que esta equação mais complicada é ainda uma equação ***linear – o princípio da sobreposição ainda se aplica***. Se duas ondas numa membrana elástica, ou na superfície de um lago, se encontrarem, o resultado em qualquer ponto é dado pela simples soma dos deslocamentos individuais de cada onda. (Assumindo como sempre pequenas amplitudes, para que as ondas de água não se desfaçam em espuma.)

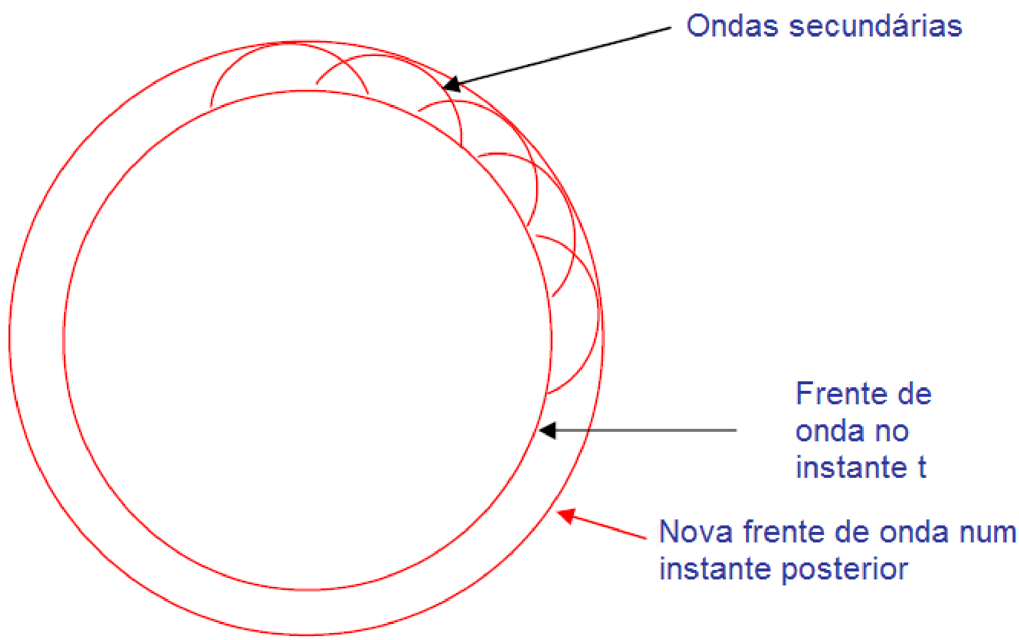
Começaremos por pensar em ondas propagando-se livremente em duas e três dimensões, e mais tarde consideraremos ondas em domínios restritos, como um tambor.

Como é que uma onda se propaga em duas e três dimensões?

Uma onda unidimensional não tem escolha: move-se simplesmente em linha recta (bom, poderia ser parcialmente reflectida por uma perturbação na corda e parte dela voltar para trás). Mas quando vamos para dimensões mais altas, o modo como uma perturbação localizada se propaga está longe de ser óbvio. Mas podemos começar por recordar alguns casos simples: se atirarmos uma pedra para uma superfície de água parada formam-se ondas circulares concêntricas que se propagam radialmente. Um raio de luz muda de direcção quando passa do ar para o vidro. Claro que não é imediatamente evidente que a luz *é* uma onda: falaremos disso mais tarde.

Propagação de ondas segundo Huygens

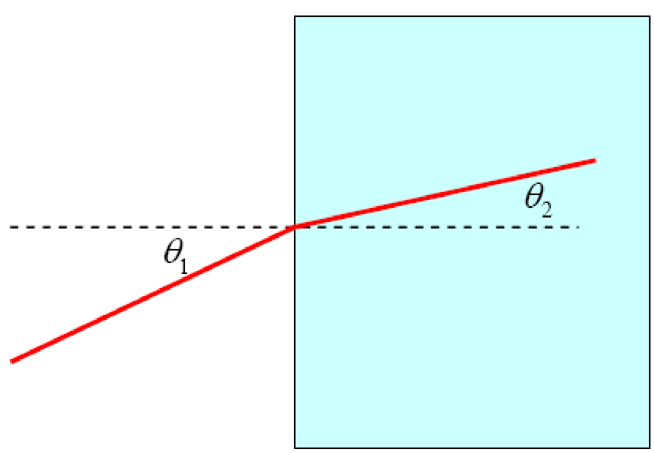
Se uma fonte pontual de luz for ligada, a frente de onda é uma esfera em expansão centrada na fonte. Huygens sugeriu que isto poderia ser compreendido se em qualquer instante cada ponto da frente de onda fosse visto como uma fonte secundária, e que a frente de onda num instante posterior seria o resultado da sobreposição de todas essas ondas secundárias. Para uma luz a brilhar continuamente, este processo repete-se uma e outra vez.



Modelo de Huygens para a propagação de onda onda esférica: cada ponto da frente de onda é uma fonte secundária de ondas cuja interferência resulta na frente de onda do instante seguinte.

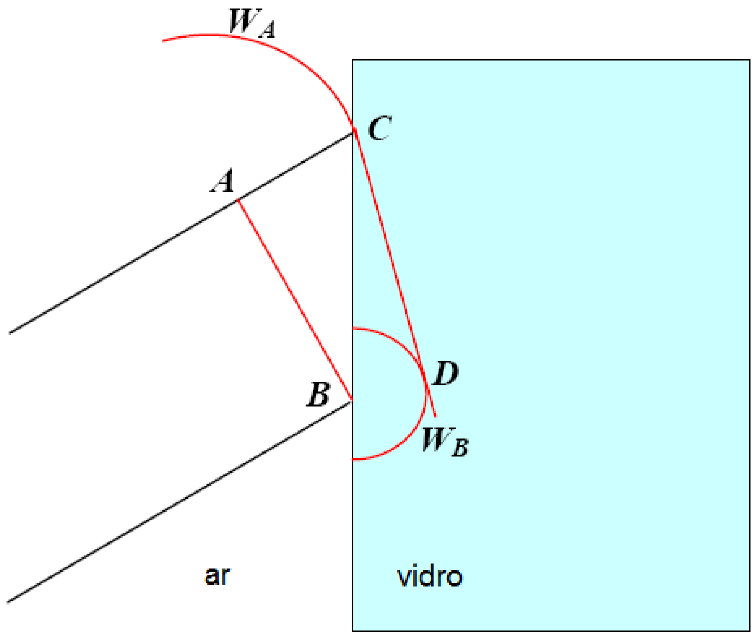
Qual é a utilidade desta ideia? Por um lado, explica a refracção – a mudança de direcção da frente de onda na fronteira entre diferentes meios, como um raio de luz do ar para o vidro.

Se a luz viaja mais lentamente no vidro, com velocidade v em vez de c ($v < c$), então o modelo de Huygens explica a Lei de Snell, que a razão dos senos dos ângulos com a normal dos raios incidente e transmitido é uma constante, de facto essa razão é c/v.



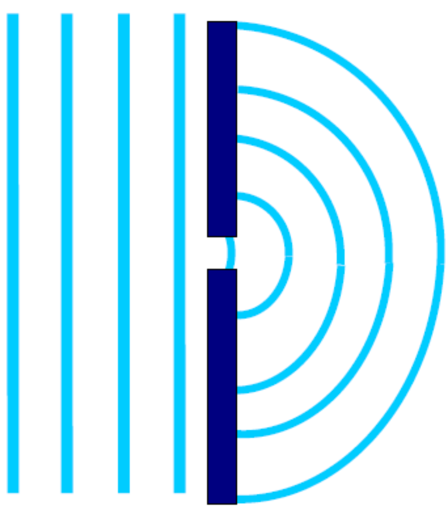
Lei de Snell: um raio de luz passando do ar para o vidro é curvado em direcção à normal, e $\sin\theta_1 / \sin\theta_2$ é o mesmo para qualquer ângulo de entrada.

Isto é evidente a partir do diagrama abaixo: no tempo em que a onda centrada em ***A*** se propaga até ***C***, a onda centrada em ***B*** atinge ***D***, sendo a razão dos comprimentos ***AC/BD*** igual a c/v. Mas os ângulos da Lei de Snell são de facto os ângulos ***ABC***, ***BCD***, e esses triângulos rectângulos têm uma hipotenusa comum ***BC***, e daí decorre a lei.



Explicação de Huygens da refracção: duas ondas secundárias da frente de onda AB; W_B é mais lenta que W_A, porque se está a propagar no vidro. Isto faz com que a onda mude de ângulo.

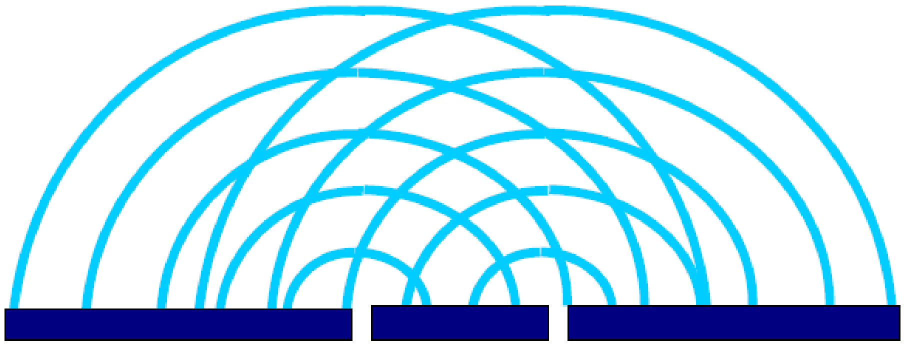
O modelo de Huygens também fornece uma explicação rápida do que acontece quando uma frente de onda plana encontra uma barreira com uma abertura estreita: e por estreita, quero dizer pequena quando comparada com o comprimento de onda da onda. É fácil adaptar esta interpretação a ondas de água: do outro lado da barreira, as ondas espalham-se circularmente a partir do buraco.



Uma onda plana encontra uma barreira com uma abertura mais pequena que o comprimento de onda: a onda espalha-se circularmente do outro lado.

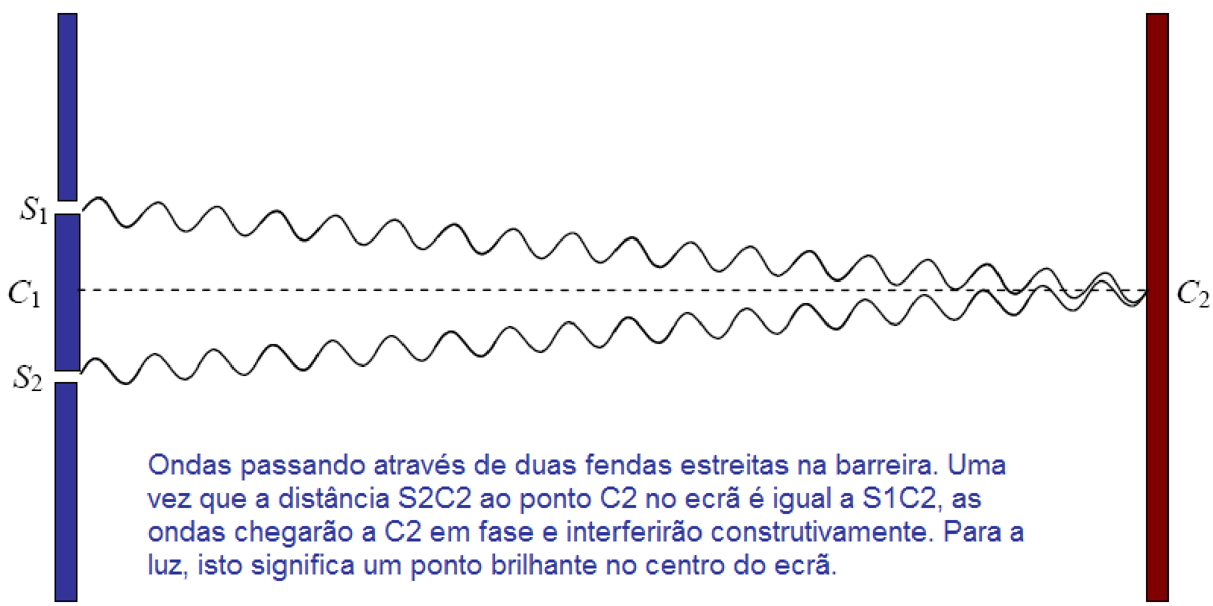
Interferência da dupla fenda: como Young mediu o comprimento de onda da luz

Se a fenda for maior ou igual ao comprimento de onda, o padrão torna-se mais complicado, como seria de esperar à luz das ideias de Huygens, porque agora as ondas do outro lado surgem a partir de uma linha de fontes, e não do equivalente a um ponto. Para investigarmos mais, considera o caso mais simples seguinte: uma barreira com *dois* pequenos buracos, de modo que do outro lado vemos a radiação equivalente a duas fontes pontuais.



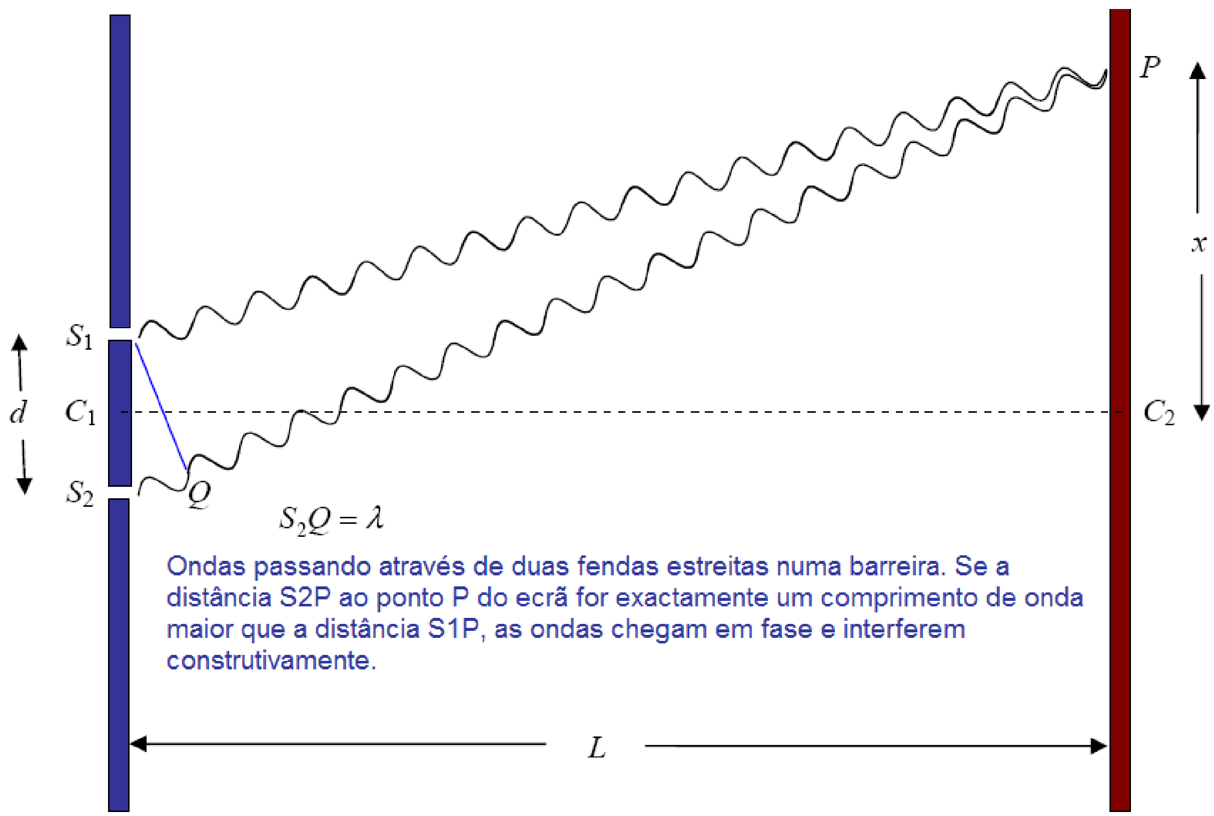
Ondas espalhando-se a partir de duas pequenas fendas na barreira: os círculas azuis representam cristas de onda, onde duas se cruzam a onda tem um valor máximo positivo, por exemplo ao longo da linha central.

Para duas fontes sincronizadas gerando ondas harmónicas, em qualquer ponto do tanque equidistante das duas fontes (a linha central na figura acima), as ondas somar-se-ão, e a água será maximamente deslocada. Para ondas luminosas, haverá um máximo do brilho no centro do ecrã, como se mostra no diagrama seguinte:



Ondas passando através de duas fendas estreitas na barreira. Uma vez que a distância S2C2 ao ponto C2 no ecrã é igual a S1C2, as ondas chegarão a C2 em fase e interferirão construtivamente. Para a luz, isto significa um ponto brilhante no centro do ecrã.

Para ondas de luz passando através de duas fendas estreitas e incidindo num ecrã (do lado direito) haverá um outro ponto brilhante num ponto P longe do centro C_2 do ecrã, *desde que as distâncias de P a ambas as fendas difiram por um número inteiro de comprimentos de onda:*



Por outro lado, num ponto aproximadamente a meio entre o centro do ecrã e o ponto P as ondas de ambas as fendas chegam ao ecrã exactamente *fora* de fase: a crista de uma soma-se ao vale da outra, cancelando-se, e não havendo luz. É evidente, então, que veremos no ecrã *uma série de áreas brilhantes e escuras*, sendo os pontos brilhantes os pontos onde as ondas das duas fendas chegam exactamente em fase.

Há uma animação Flash da formação deste padrão [aqui.]

Este padrão, gerado pelo que se chama ***interferência*** das ondas, também é chamado ***padrão de difracção*** e é historicamente importante, porque foi usado para estabelecer o carácter ondulatório da luz, por Thomas Young em 1807. (Recorda que Newton acreditava que a luz era uma corrente de partículas, e essa era a opinião generalizada na época.)

Young usou o padrão para *calcular os comprimentos de onda* da luz vermelha e violeta. O seu método pode ser compreendido com o diagrama acima. Fizemos a experiência na aula com uma separação de cerca de 0.2 mm entre as fendas, dado pontos brilhantes no ecrã separados por cerca de 3 cm, estando o ecrã a 10 m das fendas.

Isto é o mesmo que dizer que no diagrama acima temos $S_1S_2 = 0.2 \times 10^{-3}$ m, $C_1C_2 = 9.5$ m, e encontrámos que $C_2P = x = 3$ cm (mais ou menos um porcento). Olhando para o diagrama, é claro que o ângulo entre P e as fendas é muito pequeno, de facto é $x/L = 3.15 \times 10^{-3}$ radianos. Portanto o desenho está muito exagerado!

Agora, a recta S_1Q é perpendicular aos raios de luz que vão para P (estão *extremamente* perto de serem paralelos). O ângulo entre S_1Q e S_1S_2 é o mesmo que o ângulo entre C_1P e C_1C_2, isto é, 3.15×10^{-3} radianos. Isto significa que os comprimentos S_1Q e S_1S_2 são efectivamente iguais, e portanto

$$\frac{S_2Q}{S_1S_2} = \frac{\lambda}{d} = \frac{x}{L} = 3.15 \times 10^{-3}.$$

Isto é muito rigoroso para um ângulo tão pequeno, e destes dados concluímos que o comprimento de onda da luz é $\lambda = 3.15 \times 10^{-3} d = 6.3 \times 10^{-7}$m = 630 nm.

Um outro ponto brilhante

Cerca de dez anos após o resultado de Young, um engenheiro francês, Augustin Fresnel, desenvolveu uma teoria ondulatória da luz, e providenciou uma análise matemática mais completa. Esta foi também disputada pelo famoso matemático francês Simeon Poisson, que salientou que se a teoria ondulatória fosse verdadeira, era possível provar matematicamente que na sombra de um pequeno objecto redondo, haveria um ponto brilhante no centro, porque ondas vindas de toda a circunferência se adicionariam ali. Isto parecia ridículo – mas físico francês François Arago fez a experiência, e encontrou o ponto! Tinha chegado a teoria ondulatória da luz.

Tradução/Adaptação **Casa das Ciências 2009**