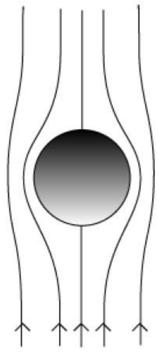
Deixando cair a bola (Lentamente)

Michael Fowler, Uva 6/12/06

Lei de Stoke

Noutro documento vimos que a viscosidade atua como um travão de fricção na quantidade de água que flui através de um tubo, vamos agora examinar o efeito de fricção num objeto que cai através de um meio viscoso. Para simplificar, consideremos uma esfera. Se utilizarmos um líquido muito viscoso, como a glicerina, e uma esfera pequena, por exemplo um rolamento com um raio na ordem de 1 milímetro, verifica-se que o líquido flui suavemente à volta da bola à medida que cai, de acordo com um padrão como o da imagem seguinte:



(As setas mostram o fluir do líquido tal como é visto pela bola. Este suave fluir tem lugar apenas para movimentos bastante lentos, como vamos ver em seguida.)

Se soubermos, com precisão matemática, como varia a velocidade do fluido próximo da bola, podemos determinar a força de viscosidade total sofrida pela bola, encontrando o gradiente de velocidade próximo de cada pequena área da superfície da bola, e proceder ao cálculo integral. Mas na realidade isto é bastante difícil. Foi realizado em 1840 por Sir George Gabriel Stokes. Ele descobriu o que ficou conhecido como a Lei de Stokes: a força de atrito (ou força de arrasto) F numa esfera de raio a que se move através de um fluido de viscosidade η a velocidade v é dada por:

$$F = 6\pi a\eta v.$$

Repare que esta força de atrito é *diretamente proporcional ao raio*. Isso não é óbvio, pois podemos ser levados a pensar que pode ser proporcional à área da secção transversal da esfera, que seria dada pelo quadrado do raio, o que não acontece.

Compreender a Lei de Stoke através da Análise Dimensional

Há alguma forma de exprimir a força de atrito como proporcional ao raio da esfera, e à velocidade, sem mergulhar em toda a matemática de Sir George Stoke? A resposta é *sim* - ao utilizar as **dimensões.**

Primeiro devemos perguntar: de que depende esta força de atrito?

Obviamente, depende do *tamanho* da bola: digamos que o raio é *a*, com dimensão L.

Depende também da *velocidade v*, cuja dimensão éLT^{-1}.

Finalmente, depende do *coeficiente de viscosidade* η cuja dimensão é $ML^{-1}T^{-1}$.

A força de atrito, *F*, tem uma dimensão $F = MLT^{-2}$: que combinação de $a = L$, $v = LT^{-1}$ e $\eta = ML^{-1}T^{-1}$ permite obter $F = MLT^{-2}$?

É fácil de perceber que F depende linearmente de η, é a única possibilidade de equilibrar o termo M.

Vejamos agora F/η, que pode depender apenas de a e v. $F/\eta = L^2T^{-1}$. A única possibilidade de escrever F/η em função de a e v, tendo dimensão L^2T^{-1} é tomar o produto av.

Portanto, a análise dimensional mostra que a força de atrito é dada por:

$$F = Ca\eta v$$

onde C é uma constante que não pode ser determinada pela análise dimensional.

Verificação Experimental

Pode-se verificar este resultado ao largar pequenas bolas de aço através de glicerina. Escolheu-se glicerina pois tem uma elevada viscosidade, e por isso o movimento de queda da bola é suficientemente lento para que sejamos capazes de o cronometrar.

Um problema é o fato de a viscosidade da glicerina estar *bastante* dependente da glicerina, sendo de 1.49 Pa.s a 20 ºC, e 0.95 Pa.s a 25 ºC. Determinamos a temperatura da glicerina, 23 ºC, e assumimos que a sua viscosidade era de 1.17 Pa.s,, por interpolação linear. Utilizou-se uma bola de raio 1.2mm e massa 0.05 gramas. Ao largá-la sobre a glicerina, contida num recipiente grande o suficiente para que a bola atingisse uma velocidade constante, descobriu-se que esta caiu 25 cm em 11.1 segundos, a velocidade 0.022 m s^{-1}. (Obtive estes valores durante a experiência de preparação para a aula.) Portanto a força de atrito deverá ser:

$$F = 6\pi a\eta v \cong 18.8 \times 1.2 \times 10^{-3} \times 1.17 \times 2.2 \times 10^{-2} \cong 6 \times 10^{-4} N.$$

Se a bola cai a velocidade constante, esta força equilibra o Peso da bola. A massa é de 0.05 gramas, o que resulta em 5x10^{-4} N. Mas devemos também subtrair a força de impulsão, que deverá ser muito próxima de 4x10^{-4} N. Uma vez que as nossas medidas do raio, massa e velocidade foram bastante precisas, a viscosidade foi evidentemente menor do que se esperava. Tendo em conta que a viscosidade diminui cerca de 10% sempre que a temperatura aumenta 1 ºC, provavelmente a glicerina não tinha uma temperatura uniforme, ou então a nossa medição de temperatura foi pouco precisa.

Verificou-se a previsão dada pela análise dimensional, largando uma bola com exatamente o *dobro* do raio. Caiu em exatamente *um-quarto* (1/4) do tempo.

Estes dados confirmam a correção da análise dimensional, já que uma vez que a bola atingiu a velocidade terminal v_{term}, e já não se encontra em aceleração, a resultante das forças que nela atuam será nula. Nesse momento, a força de atrito e o peso estarão em equilíbrio:

$$Ca\eta v_{term} = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho g.$$

Para duas bolas com a mesma densidade ρ, depois de cortar os a possíveis em cada lado da expressão, a velocidade terminal depende do quadrado do quociente entre os raios das esferas, e portanto uma bola de raio 2a cairá com velocidade 4 vezes maior que uma bola de raio a. Este foi o resultado da experiência realizada.

Exercício: Assumindo que o padrão do fluido em torno da esfera no diagrama acima tem a mesma proporção para raios diferentes (portanto para uma bola com maior raio, temos o mesmo padrão, mas ampliado), como varia o gradiente de velocidade do fluido nas proximidades do "equador" da bola, ao substituir a bola de raio a por uma de raio 2a? (Assuma que as duas bolas atravessam o fluido à mesma velocidade). Considere que grande parte da força de atrito devida à viscosidade do fluido ocorre ao longo de uma banda junto ao equador (uma banda semelhante à que delimita as zonas tropicais da Terra). A partir daqui, considere que a força de atrito devida à viscosidade do líquido será proporcional ao raio da esfera, e não ao quadrado do raio.

Casa das Ciências 2012

Tradução/adaptação de Nuno Machado e Manuel Silva Pinto