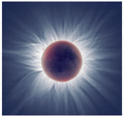
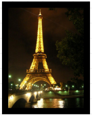
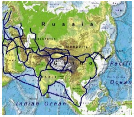
Trigonometria do triângulo rectângulo

Alguma História . . .

- A palavra trigonometria resulta da composição de três termos gregos:

  TRI (três) - GONO (ângulo) - METRIEN (medida)

- Etimologicamente significa medida de triângulos.
- A Trigonometria estuda as relações entre os lados e os ângulos de um triângulo rectângulo.

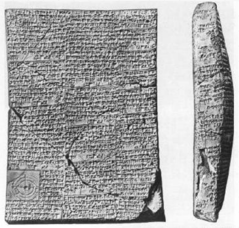
      

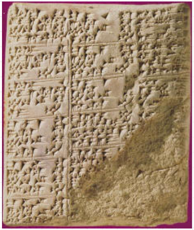
Os **babilónios** e os antigos **egípcios** utilizavam conceitos trigonométricos no estudo de alguns fenómenos astronómicos e geográficos, como por exemplo:

- a determinação de eclipses;
- as fases da lua;
- cálculo de distâncias inacessíveis;
- determinação de rotas de navegação.



Apesar dos Egípcios e dos Babilónios terem já utilizado as relações existentes entre lados e ângulos dos triângulos, para resolver problemas, foi o fascínio pelo movimento dos astros que impulsionou a evolução da Trigonometria. Daí que, historicamente a Trigonometria apareça bastante cedo associada à Astronomia.





As medições e os resultados dos cálculos efectuados pelos astrónomos eram registados em tábuas. As tábuas babilónicas revelam algumas semelhanças com as tábuas trigonométricas. Acredita-se que a primeira tabela trigonométrica foi construída por Hiparco de Nicéia.

Hiparco de Nicéia (190–126 a.C): foi astrónomo, construtor, cartógrafo e matemático grego da escola de Alexandria.
Influenciado pela Matemática babilónica, desenvolveu métodos para a determinação de locais na superfície terrestre e introduziu o sistema de localização por latitude e longitude.
É considerado "o pai da Trigonometria" pois fez um tratado em doze livros que se ocupa da construção do que deve ter sido a primeira tabela trigonométrica, uma tábua de cordas.

Cláudio Ptolomeu (85 a 165 d.C): nasceu no início do século II da era cristã e viveu provavelmente em Alexandria. Com base em certas observações astronómicas por ele anotadas, sabe-se que trabalhou em Alexandria, no Egipto, entre os anos 120 e 145 da era cristã. Ampliou o trabalho de Hiparco com sua obra *Sintaxe Matemática*, na qual apresenta um tratado sobre Trigonometria.

Eratóstenes (séc. III a.C): conseguiu calcular a medida do raio da Terra.

Aristarco (sec. II a.C): determinou a distância relativa da Terra ao Sol e da Terra à Lua.

Bhaskara (séc. XII): nasceu na Índia. A sua maior contribuição para a Trigonometria foi *Siddhantasiromani*, dividido em duas partes: uma sobre matemática astronómica e outra sobre a esfera. Determinou um método detalhado para construir uma tabela de senos para qualquer ângulo.

Aplicações

Actualmente a Trigonometria não se limita a estudar os triângulos. Encontramos aplicações na mecânica, electricidade, acústica, música, astronomia, engenharia, medicina, desporto de alta competição, enfim, em muitos outros campos da actividade humana. Essas aplicações envolvem conceitos que dificilmente lembram os triângulos que deram origem à Trigonometria.

A necessidade e o interesse de resolver diversos problemas levou à invenção de instrumentos famosos.

Astrolábio

O astrolábio é um antigo instrumento para medir a altura dos astros acima do horizonte. Atribui-se a Hiparco a sua invenção.

Quadrante

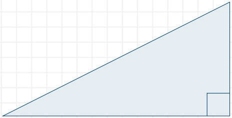
Usado pelos navegadores portugueses pelo menos desde o séc.XV, o quadrante, de origem mais remota que o astrolábio, era um instrumento de madeira ou latão empregado para determinar alturas de astros. Para permitir uma leitura mais rigorosa do quadrante, o matemático português Pedro Nunes criou um dispositivo com o nome de nónio para ser aplicado ao quadrante.

Teodolito

O teodolito é um instrumento óptico de medição de posições relativas. É vulgarmente utilizado em topografia, navegação e em meteorologia; mede distâncias relativas entre pontos determinados, em escala métrica decimal (múltiplos e sub-múltiplos).

Triângulo Rectângulo

Num triângulo rectângulo, o lado maior (oposto ao ângulo recto) chama-se hipotenusa e os lados que formam o ângulo recto, chamam-se catetos.

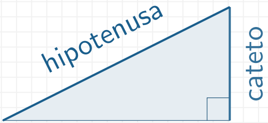


Triângulo Rectângulo

Num triângulo rectângulo, o lado maior (oposto ao ângulo recto) chama-se hipotenusa e os lados que formam o ângulo recto, chamam-se catetos.

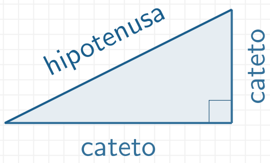
Triângulo Rectângulo

Num triângulo rectângulo, o lado maior (oposto ao ângulo recto) chama-se hipotenusa e os lados que formam o ângulo recto, chamam-se catetos.



Triângulo Rectângulo

Num triângulo rectângulo, o lado maior (oposto ao ângulo recto) chama-se hipotenusa e os lados que formam o ângulo recto, chamam-se catetos.



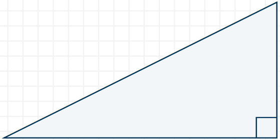
Algumas letras do alfabeto grego (minúsculas) . . .

alfa	beta	gama	delta	épsilon	zeta	eta	teta	iota
α	β	γ	δ	ϵ	ζ	η	θ	ι

lambda	miu	niu	csi	pi	ro	sigma	fi	chi	psi	omega
λ	μ	ν	ξ	π	ρ	σ	ϕ	χ	ψ	ω

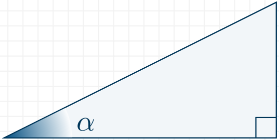
Triângulo Rectângulo

Para cada ângulo agudo há um cateto adjacente e um cateto oposto.



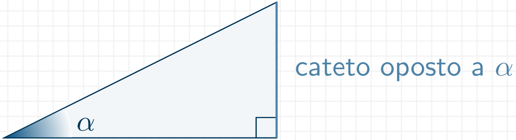
Triângulo Rectângulo

Para cada ângulo agudo há um cateto adjacente e um cateto oposto.



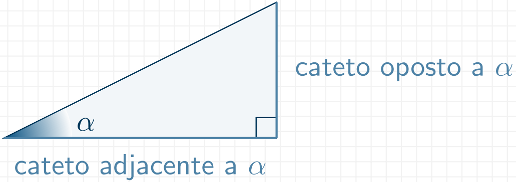
Triângulo Rectângulo

Para cada ângulo agudo há um cateto adjacente e um cateto oposto.



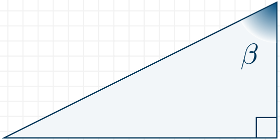
Triângulo Rectângulo

Para cada ângulo agudo há um cateto adjacente e um cateto oposto.



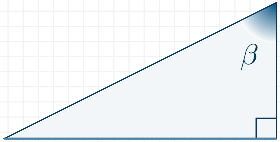
Triângulo Rectângulo

Para cada ângulo agudo há um cateto adjacente e um cateto oposto.



Triângulo Rectângulo

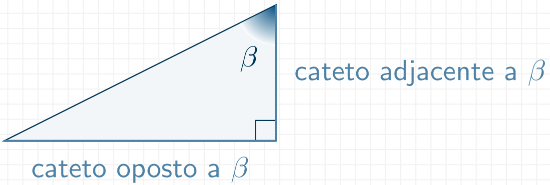
Para cada ângulo agudo há um cateto adjacente e um cateto oposto.



cateto oposto a β

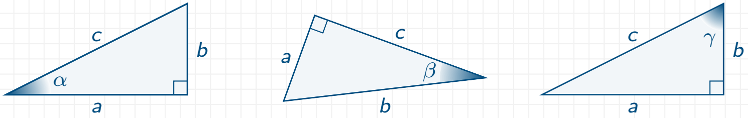
Triângulo Rectângulo

Para cada ângulo agudo há um cateto adjacente e um cateto oposto.



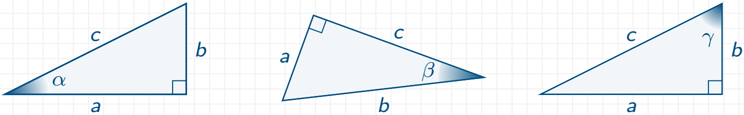
Exercício:

Para cada um dos triângulos seguintes identifica o cateto oposto e o cateto adjacente ao ângulo assinalado.



Exercício:

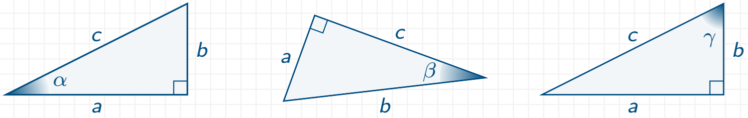
Para cada um dos triângulos seguintes identifica o cateto oposto e o cateto adjacente ao ângulo assinalado.



cateto oposto: b
cateto adjacente: a

Exercício:

Para cada um dos triângulos seguintes identifica o cateto oposto e o cateto adjacente ao ângulo assinalado.

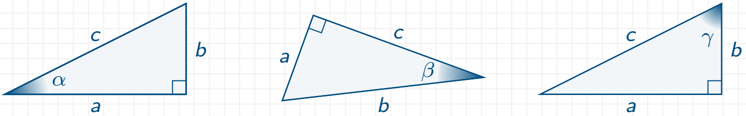


cateto oposto: b
cateto adjacente: a

cateto oposto: a
cateto adjacente: c

Exercício:

Para cada um dos triângulos seguintes identifica o cateto oposto e o cateto adjacente ao ângulo assinalado.



cateto oposto: b	cateto oposto: a	cateto oposto: a
cateto adjacente: a	cateto adjacente: c	cateto adjacente: b

Razões trigonométricas de ângulos agudos

Seno $\longrightarrow$ sin

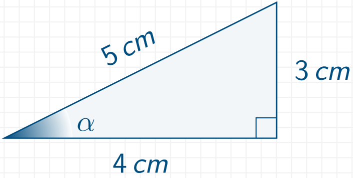
$$\sin(\alpha) = \frac{\text{comprimento do cateto oposto a } \alpha}{\text{comprimento da hipotenusa}}$$

Razões trigonométricas de ângulos agudos

Seno $\longrightarrow$ sin

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{comprimento do cateto oposto a } \alpha}{\text{comprimento da hipotenusa}}$$

Exemplo:

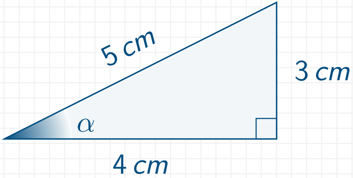


Razões trigonométricas de ângulos agudos

Seno $\longrightarrow$ sin

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{comprimento do cateto oposto a } \alpha}{\text{comprimento da hipotenusa}}$$

Exemplo:



$$\sin(\alpha) = \frac{3}{5} = 0.6$$

Razões trigonométricas de ângulos agudos (continuação)

Co-seno $\longrightarrow$ cos

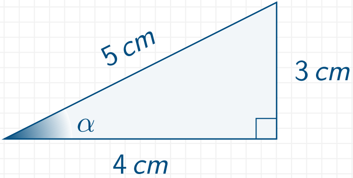
$$\cos(\alpha) = \frac{\text{comprimento do cateto adjacente a } \alpha}{\text{comprimento da hipotenusa}}$$

Razões trigonométricas de ângulos agudos (continuação)

Co-seno $\longrightarrow$ cos

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{comprimento do cateto adjacente a } \alpha}{\text{comprimento da hipotenusa}}$$

Exemplo:

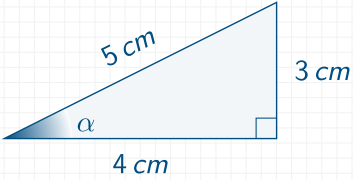


Razões trigonométricas de ângulos agudos (continuação)

Co-seno $\rightarrow$ cos

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{comprimento do cateto adjacente a } \alpha}{\text{comprimento da hipotenusa}}$$

Exemplo:



$$\cos(\alpha) = \frac{4}{5} = 0.8$$

Razões trigonométricas de ângulos agudos (continuação)

Tangente $\longrightarrow$ tan

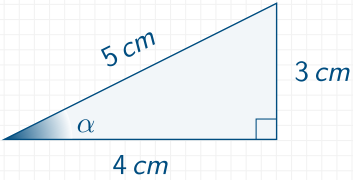
$$\tan(\alpha) = \frac{\text{comprimento do cateto oposto a } \alpha}{\text{comprimento do cateto adjacente a } \alpha}$$

Razões trigonométricas de ângulos agudos (continuação)

Tangente $\longrightarrow$ tan

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{comprimento do cateto oposto a } \alpha}{\text{comprimento do cateto adjacente a } \alpha}$$

Exemplo:

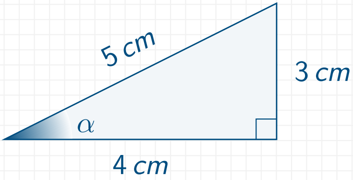


Razões trigonométricas de ângulos agudos (continuação)

Tangente $\longrightarrow$ tan

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{comprimento do cateto oposto a } \alpha}{\text{comprimento do cateto adjacente a } \alpha}$$

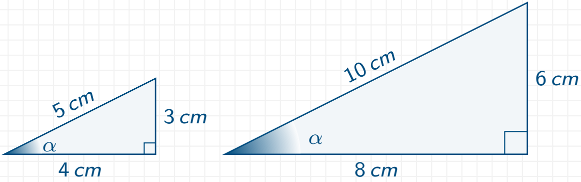
Exemplo:



$$\tan(\alpha) = \frac{3}{4} = 0.75$$

Exercício:

Considera os triângulos seguintes. Para cada um deles determina o seno, o co-seno e a tangente do ângulo assinalado.



Os valores do seno, co-seno e tangente dependem dos comprimentos dos lados dos triângulos?

Importante:
Os valores das razões trigonométricas de um ângulo agudo dependem apenas da amplitude do ângulo.

Enquadramento das razões trigonométricas de um ângulo agudo

Será que o seno, o co-seno e a tangente de um ângulo agudo podem tomar qualquer valor?

Enquadramento das razões trigonométricas de um ângulo agudo

Será que o seno, o co-seno e a tangente de um ângulo agudo podem tomar qualquer valor?

$$0 < \sin(\alpha) < 1$$

Enquadramento das razões trigonométricas de um ângulo agudo

Será que o seno, o co-seno e a tangente de um ângulo agudo podem tomar qualquer valor?

$$0 < \sin(\alpha) < 1$$

$$0 < \cos(\alpha) < 1$$

Enquadramento das razões trigonométricas de um ângulo agudo

Será que o seno, o co-seno e a tangente de um ângulo agudo podem tomar qualquer valor?

$$0 < \sin(\alpha) < 1$$

$$0 < \cos(\alpha) < 1$$

$$\tan(\alpha) > 0$$

- O seno de um ângulo agudo é igual à razão entre o comprimento do cateto oposto e o comprimento da hipotenusa.

- O seno de um ângulo agudo é igual à razão entre o comprimento do cateto oposto e o comprimento da hipotenusa.
- Sendo uma razão entre comprimentos só pode tomar valores positivos.

- O seno de um ângulo agudo é igual à razão entre o comprimento do cateto oposto e o comprimento da hipotenusa.
- Sendo uma razão entre comprimentos só pode tomar valores positivos.
- Sendo o comprimento da hipotenusa maior do que o comprimento de qualquer um dos catetos, o seno de um ângulo agudo é inferior a 1.

- O seno de um ângulo agudo é igual à razão entre o comprimento do cateto oposto e o comprimento da hipotenusa.
- Sendo uma razão entre comprimentos só pode tomar valores positivos.
- Sendo o comprimento da hipotenusa maior do que o comprimento de qualquer um dos catetos, o seno de um ângulo agudo é inferior a 1.

Assim,

$$\boxed{0 < \sin(\alpha) < 1}$$

De modo análogo podemos concluir que

$$\boxed{0 < \cos(\alpha) < 1}$$

De modo análogo podemos concluir que

$$\boxed{0 < \cos(\alpha) < 1}$$

- A tangente de um ângulo agudo é igual à razão entre o comprimento do cateto oposto e o comprimento do cateto adjacente.

De modo análogo podemos concluir que

$$\boxed{0 < \cos(\alpha) < 1}$$

- A tangente de um ângulo agudo é igual à razão entre o comprimento do cateto oposto e o comprimento do cateto adjacente.
- Sendo uma razão entre comprimentos só pode tomar valores positivos.

De modo análogo podemos concluir que

$$0 < \cos(\alpha) < 1$$

- A tangente de um ângulo agudo é igual à razão entre o comprimento do cateto oposto e o comprimento do cateto adjacente.
- Sendo uma razão entre comprimentos só pode tomar valores positivos.

Assim,

$$\tan(\alpha) > 0$$

Tabelas trigonométricas

As primeiras tabelas trigonométricas – tabelas de senos – assim como muitas fórmulas trigonométricas, aparecem pela primeira vez na obra *Almagesto* (título arabizado) de Ptolomeu, no séc. II d.C. Muitas das ideias contidas no *Almagesto* podem ter sido baseadas nas de Hiparco que viveu três séculos antes.

Tabelas de valores naturais

São tabelas onde se encontram valores aproximados do seno, co-seno e tangente de ângulos agudos, cujas amplitudes são números naturais.

Consultando uma tabela de valores naturais podemos:

- a partir da amplitude de um ângulo agudo, saber valores aproximados do seno, co-seno e tangente desse mesmo ângulo.

Tabelas de valores naturais

São tabelas onde se encontram valores aproximados do seno, co-seno e tangente de ângulos agudos, cujas amplitudes são números naturais.

Consultando uma tabela de valores naturais podemos:

- a partir da amplitude de um ângulo agudo, saber valores aproximados do seno, co-seno e tangente desse mesmo ângulo.
- a partir dos valores (aproximados ou não) do seno, co-seno ou tangente de um ângulo agudo descobrir uma aproximação da amplitude desse ângulo.

Indicar valores aproximados do seno, co-seno e tangente de um ângulo agudo de amplitude conhecida

α	$\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha)$	$\tan(\alpha)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
31°	0,515	0,857	0,601
32°	0,530	0,848	0,625
33°	0,545	0,839	0,649

Indicar valores aproximados do seno, co-seno e tangente de um ângulo agudo de amplitude conhecida

α	$\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha)$	$\tan(\alpha)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
31°	0,515	0,857	0,601
32°	0,530	0,848	0,625
33°	0,545	0,839	0,649

$\sin(32°) = ?$

Indicar valores aproximados do seno, co-seno e tangente de um ângulo agudo de amplitude conhecida

α	$\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha)$	$\tan(\alpha)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
31°	0,515	0,857	0,601
32°	0,530	0,848	0,625
33°	0,545	0,839	0,649

$\sin(32°) = ?$

Indicar valores aproximados do seno, co-seno e tangente de um ângulo agudo de amplitude conhecida

α	$\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha)$	$\tan(\alpha)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
31°	0,515	0,857	0,601
32°	0,530	0,848	0,625
33°	0,545	0,839	0,649

$$\sin(32^\circ) \simeq 0,530$$

Indicar valores aproximados do seno, co-seno e tangente de um ângulo agudo de amplitude conhecida

α	$\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha)$	$\tan(\alpha)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
31°	0,515	0,857	0,601
32°	0,530	0,848	0,625
33°	0,545	0,839	0,649

$\sin(32^\circ) \simeq 0,530$

$\cos(31^\circ) = ?$

Indicar valores aproximados do seno, co-seno e tangente de um ângulo agudo de amplitude conhecida

α	$\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha)$	$\tan(\alpha)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
31°	0,515	0,857	0,601
32°	0,530	0,848	0,625
33°	0,545	0,839	0,649

$\sin(32°) \simeq 0,530$

$\cos(31°) = ?$

Indicar valores aproximados do seno, co-seno e tangente de um ângulo agudo de amplitude conhecida

α	$\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha)$	$\tan(\alpha)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
31°	0,515	0,857	0,601
32°	0,530	0,848	0,625
33°	0,545	0,839	0,649

$\sin(32°) \simeq 0,530$

$\cos(31°) \simeq 0,857$

Indicar valores aproximados do seno, co-seno e tangente de um ângulo agudo de amplitude conhecida

α	$\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha)$	$\tan(\alpha)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
31°	0,515	0,857	0,601
32°	0,530	0,848	0,625
33°	0,545	0,839	0,649

$\sin(32^\circ) \simeq 0,530$

$\cos(31^\circ) \simeq 0,857$

$\tan(33^\circ) = ?$

Indicar valores aproximados do seno, co-seno e tangente de um ângulo agudo de amplitude conhecida

α	$\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha)$	$\tan(\alpha)$
⋮	⋮	⋮	⋮
31°	0,515	0,857	0,601
32°	0,530	0,848	0,625
33°	0,545	0,839	0,649

$\sin(32°) \simeq 0,530$

$\cos(31°) \simeq 0,857$

$\tan(33°) = ?$

Indicar valores aproximados do seno, co-seno e tangente de um ângulo agudo de amplitude conhecida

α	$\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha)$	$\tan(\alpha)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
31°	0,515	0,857	0,601
32°	0,530	0,848	0,625
33°	0,545	0,839	0,649

$\sin(32°) \simeq 0,530$

$\cos(31°) \simeq 0,857$

$\tan(33°) \simeq 0,649$

Indicar a amplitude aproximada de um ângulo conhecendo o valor de uma das suas razões trigonométricas

α	$\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha)$	$\tan(\alpha)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
31°	0,515	0,857	0,601
32°	0,530	0,848	0,625
33°	0,545	0,839	0,649

Indicar a amplitude aproximada de um ângulo conhecendo o valor de uma das suas razões trigonométricas

α	$\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha)$	$\tan(\alpha)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
31°	0,515	0,857	0,601
32°	0,530	0,848	0,625
33°	0,545	0,839	0,649

$\cos(\alpha) = 0,85$

$\alpha = ?$

Indicar a amplitude aproximada de um ângulo conhecendo o valor de uma das suas razões trigonométricas

α	$\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha)$	$\tan(\alpha)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
31°	0,515	0,857	0,601
32°	0,530	0,848	0,625
33°	0,545	0,839	0,649

$\cos(\alpha) = 0,85$

$\alpha = ?$

Indicar a amplitude aproximada de um ângulo conhecendo o valor de uma das suas razões trigonométricas

α	$\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha)$	$\tan(\alpha)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
31°	0,515	0,857	0,601
32°	0,530	0,848	0,625
33°	0,545	0,839	0,649

$\cos(\alpha) = 0,85$

$\alpha =?$

Indicar a amplitude aproximada de um ângulo conhecendo o valor de uma das suas razões trigonométricas

α	$\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha)$	$\tan(\alpha)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
31°	0,515	0,857	0,601
32°	0,530	0,848	0,625
33°	0,545	0,839	0,649

$\cos(\alpha) = 0,85$

$\alpha \simeq 32°$

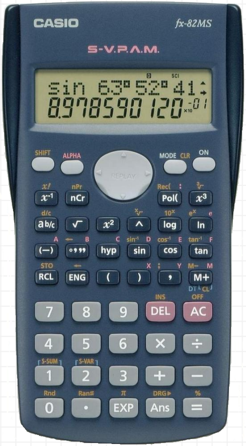
Razões trigonométricas e a calculadora

Através da calculadora é possível determinar:

- valores (exactos ou aproximados) das razões trigonométricas de um determinado ângulo;
- amplitudes de ângulos (aproximadas ou exactas) sabendo o valor de uma das suas razões trigonométricas.

Para isso, recorres às teclas $\boxed{\text{sin}}$, $\boxed{\text{cos}}$ ou $\boxed{\text{tan}}$, de acordo com o enunciado do exercício que pretendes resolver.

Razões trigonométricas e a calculadora



Razões trigonométricas e a calculadora (continuação)

Determinar uma razão trigonométrica de um determinado ângulo

$\sin(50^\circ) = ?$ sin (5 0) =

$\sin(50^\circ) \simeq 0.766$

Razões trigonométricas e a calculadora (continuação)

Determinar uma razão trigonométrica de um determinado ângulo

$\sin(50^\circ) = ?$ sin (5 0) =

$\sin(50^\circ) \simeq 0.766$

Determinar a amplitude de um determinado ângulo conhecendo uma das suas razões trigonométricas

$\cos(\alpha) = 0.695 \qquad \alpha = ?$

shift cos (0 · 6 9 5) =

Razões trigonométricas e a calculadora (continuação)

Determinar uma razão trigonométrica de um determinado ângulo

$\sin(50°) = ?$ sin (5 0) =

$\sin(50°) \simeq 0.766$

Determinar a amplitude de um determinado ângulo conhecendo uma das suas razões trigonométricas

$\cos(\alpha) = 0.695 \qquad \alpha = ?$

shift cos (0 · 6 9 5) =

$\alpha = \cos^{-1}(0.695) \simeq 46°$