Alguns integrais úteis de funções exponenciais

Michael Fowler

Mostrámos que a derivação da função exponencial simplesmente a multiplica por uma constante do expoente, isto é,

$$\frac{d}{dx}e^{ax} = ae^{ax}.$$

A integração da exponencial tem, obviamente, o efeito inverso: *divide-a* pela constante do expoente:

$$\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax},$$

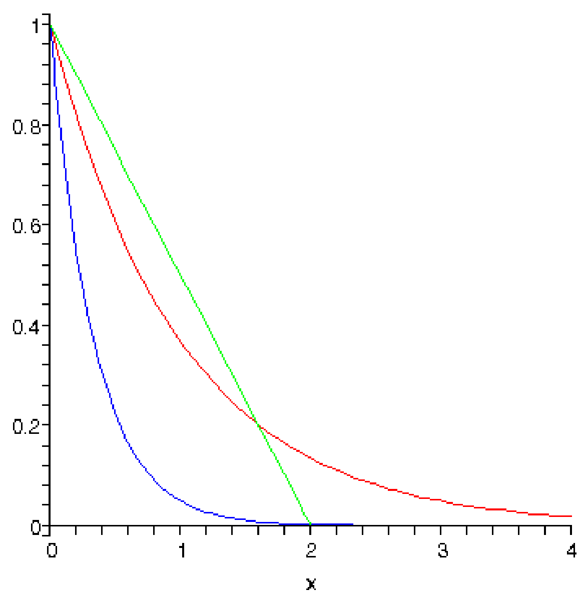
tal como podes verificar facilmente por derivação.

Um integral *definido* (com limites) muito importante é

$$\int_0^\infty e^{-ax}\,dx = \frac{1}{a}.$$

Repara no sinal menos no expoente: é necessário que o integrando diminua com x quando x vai para infinito, caso contrário o próprio integral seria infinito.

Para visualizar este resultado, representamos graficamente $\boldsymbol{e^{-x}}$ e $\boldsymbol{e^{-3x}}$. Repara que a linha verde forma a hipotenusa de um triângulo rectângulo de área 1, e parece bastante plausível que a área total abaixo da curva $\boldsymbol{e^{-x}}$ seja a mesma, isto é, 1 tal como devia. A curva $\boldsymbol{e^{-3x}}$ tem abaixo de si área 1/3 ($a = 3$).

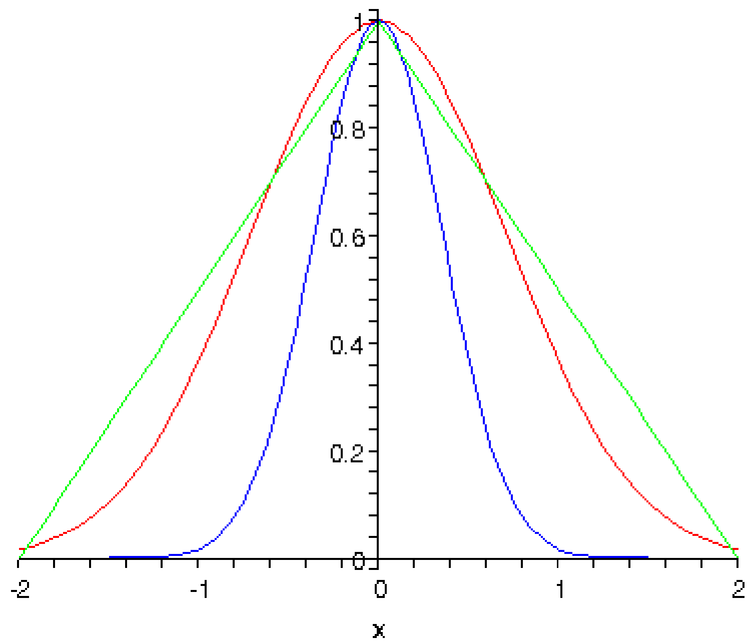


Agora para algo um pouco mais desafiante: como é que calculamos o integral

$$I(a) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx\ ?$$

(a tem de ser positivo, claro.) O integral não é definitivamente infinito: decresce com igual rapidez para x positivo ou negativo, e para x maior que 1, é menor que e^{-ax}, que já sabemos que converge.

Para ver melhor o aspecto desta função, representamos graficamente para $a = 1$ (vermelho) e $a = 4$ (azul).



Repara primeiro no quão mais rapidamente esta função descresce do que a função e^{-x}. Repara também que a curva azul, $a = 4$, tem cerca de metade da área total da curva $a = 1$. De facto, a área vai com $1/\sqrt{a}$. As linhas verdes ajudam-nos a ver que a área abaixo da curva vermelha (positiva mais negativa) é ligeiramente menor que 2, de facto é $\sqrt{\pi} = 1.77$ aproximadamente.

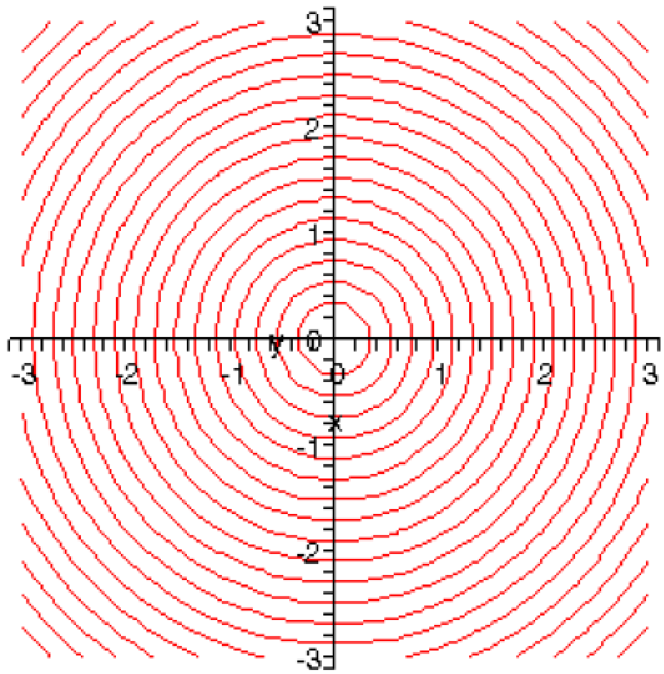
Mas – não é assim tão fácil de calcular! Há um truque: calcula o quadrado. Isto é, escreve

$$\left(I(a)\right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ay^2} dy$$

Este produto de integrais ao longo de *rectas*, o integral em x e o integral em y, é exactamente o mesmo que o integral num *plano*, o plano (x, y), extendendo-se até ao infinito em todas as direcções. Podemos reescrevê-lo

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ay^2} dy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{-ay^2} dxdy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ar^2} dxdy$$

Mas de facto esta abordagem não é mais fácil que o problema original – o truque é reparar que e^{ar^2} tem *simetria circular*: para cada circumferência centrado na origem $(0{,}0)$, tem o *mesmo valor em qualquer ponto da circumferência*. Para explorar isto, não devíamos estar a dividir o plano (x, y) em pequenos quadradinhos, mas em regiões cujos pontos estejam à mesma distância da origem.



Estas são chamadas regiões "anulares": a área entre dois círculos concêntricos na origem, um de raio r e outro de raio ligeiramente superior $r + dr$. Tomamos dr muito pequeno, portanto trata-se de uma *fina* tira circular de comprimento $2\pi r$ (o perímetro da circumferência) e largura dr, sendo a área total $2\pi r dr$ (desprezando termos como dr^2, que se tornam neglicenciáveis para dr suficientemente pequeno).

Portanto, a contribuição de uma destas regiões anulares é $e^{-ar^2} 2\pi r dr$, e o integral completo sobre todo o plano é:

$$\left(I(a)\right)^2 = \pi \int_0^{\infty} e^{-ar^2} 2r dr.$$

Este integral é fácil de calcular: faz a mudança de variável $u = r^2, du = 2rdr$ vindo

$$(I(a))^2 = \pi \int_0^{\infty} e^{-au} du = \frac{\pi}{a}$$

Portanto calculando a raiz quadrada

$$I(a) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

Alguns integrais úteis na Teoria Cinética dos Gases

Podemos facilmente geral mais resultados derivando a expressão anterior para $I(a)$ em relação a a!

Derivando uma vez:

$$\frac{d}{da} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = -\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{d}{da}\sqrt{\frac{\pi}{a}} = -\frac{1}{2a}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

Logo

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2a}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

e derivando este resultado em relação a a obtemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-ax^2} dx = \frac{3}{4a^2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

A razão entre estes dois integrais surge na teoria cinética dos gases durante o cálculo da energia cinética média de uma molécula com a distribuição de velocidades de Maxwell.

$$\frac{\int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-ax^2} dx}{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx} = \frac{\frac{3}{4a^2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}}{\frac{1}{2a}\sqrt{\frac{\pi}{a}}} = \frac{3}{2a}.$$

Calcular esta razão sem fazer os integrais:
É interessante notar que esta razão poderia ter sido encontrada com muito menos trabalho, de facto sem sequer calcular os integrais, do seguinde modo:

Faz a mudança de variável $y^2 = ax^2, dy = \sqrt{a}dx$ e

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = (a)^{-3/2} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 e^{-y^2} dy = Ca^{-3/2}$$

onde C é uma constante *independente* de a, porque a desapareceu completamente do integral em y. (Sabemos que $C = \sqrt{\pi}/2$, mas isso deu-nos muito trabalho.) Agora, o integral em x^4 em vez de x^2 descobre-se derivando o integral em x^2 em ordem a a e multiplicando por -1, tal como discutido acima. Portanto, derivando o lado direito da equação anterior, concluimos que o integral em x^4 é simplesmente $\left(\frac{3}{2}\right) Ca^{-5/2}$, e C cancela na razão entre os integrais.

Contudo, há uma altura em que temos *mesmo* de fazer os integrais: a normalização da distribuição de velocidades faz-se requerendo que

$$1 = \int_0^{\infty} f(v)dv = \int_0^{\infty} 4\pi A^3 v^2 e^{-mv^2/2kT}$$

e isto de facto determina A, usando os resultados encontrados anteriormente, vindo

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/2kT}.$$

Um último truque...
Isto não foi necessário na aula de teoria cinética dos gases, mas é uma pena falar em integrais de exponenciais sem mencionar este.

É fácil fazer o integral

$$I(a,b) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{bx} dx$$

Pode-se escrevê-lo

$$I(a,b) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x-b/2a)^2} e^{b^2/4a} dx = e^{b^2/4a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x-b/2a)^2} dx = e^{b^2/4a} \sqrt{\pi / a}$$

onde no último passe se mudou de variável para $y = x - b/2a$.

Isto pode mesmo ser usado para calcular, por exemplo,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} \cos bx \, dx$$

escrevendo o cosseno como uma soma de exponenciais.

Tradução/Adaptação **Casa das Ciências 2009**