Usando Dimensões

Michael Fowler, UVa

Alguns dos resultados mais interessantes da hidrodinâmica, tal como o aumento de 16 vezes no caudal de um cano quando se duplica o raio, podem ser encontrados sem fazer qualquer cálculo, apenas por análise dimensional.

Simbolizamos as "dimensões" massa, comprimento e tempo por M, L, T respectivamente. Escreveremos então, as dimensões de outras quantidades físicas em função destas. Por exemplo, a velocidade tem dimensões LT^{-1}, e aceleração LT^{-2}.

Usaremos parênteses rectos[] para escrever as dimensões de uma quantidade, por exemplo, a velocidade, escrevemos $[v] = LT^{-1}$. A força tem de ter as mesmas dimensões que uma massa vezes uma aceleração, portanto $[F] = MLT^{-1}$. Esta notação "dimensional" não depende das unidades que usamos para medir a massa, o comprimento e o tempo.

Todas as equações em física têm de ter as mesmas dimensões de ambos os lados.

Podemos ver pela equação que define o coeficiente de viscosidade, η, $F/A = \eta v_0/d$, (o membro do lado esquerdo é força por unidade de área e o do lado direito é o gradiente de velocidade) que

$$[\eta] = \left(\frac{[F]}{[A]}\right) \cdot \left(\frac{[d]}{[v]}\right) = \left(\frac{MLT^{-2}}{L^2}\right) \cdot \frac{L}{LT^{-1}} = ML^{-1}T^{-1}$$

Como é possível que pensar dimensionalmente nos ajude a encontrar o caudal I através de um tubo? Bem, o caudal em si, digamos em metros cúbicos por segundo, tem dimensões $[I] = M^3T^{-1}$. De que poderá depender este caudal?

A física do problema é que a diferença de pressão ΔP entre as extremidades do cano de comprimento L está a realizar trabalho para superar a força de viscosidade. Os únicos parâmetros a determinar o caudal são portanto: o gradiente de pressão, $\Delta P/L$, a viscosidade η e o raio da secção perpendicular ao cano a. De notar que estamos a assumir que o caudal é constante – sem aceleração – e portanto a massa, mais precisamente a densidade, do fluido não influencia. Claro que se o caudal for no sentido descendente, a densidade tem um papel *indirecto* pois o peso do fluido gera um gradiente de pressão, mas também já incluímos a pressão como parâmetro.

Portanto,

$$Caudal\ I = f(\Delta P/L, \eta, a)$$

Onde f é uma função que desconhecemos, mas sabemos que ambos os membros desta equação têm de ter as mesmas dimensões, portanto f tem de ter as mesmas dimensões de I, isto é, L^3T^{-1}.

Sabemos que aumentando a pressão aumenta o caudal, por isso têm de aparecer na combinação $\frac{\Delta P}{L\eta}$. Isto livra-nos de M. A próxima tarefa é por esta combinação, que tem dimensões $\frac{MLT^{-2}L^{-2}}{ML^{-1}T^{-1}} = L^{-1}T^{-1}$, juntamente com $[a] = L$, para obter a quantidade com as dimensões de um caudal, L^3T^{-1}. A única maneira é multiplicar $\Delta P/L\eta$ por a^4.

Podemos então concluir que o caudal através de um cano circular tem de ser dado por:

$$I = C\left(\frac{\Delta P}{L\eta}\right)a^4$$

Isto é certamente mais fácil que resolver uma equação diferencial e integrar para achar o caudal! O problema é a constante indeterminada C na equação – não conseguimos determiná-la sem trabalho árduo. No entanto, estabelecemos através de análise dimensional que o caudal aumenta por um factor de 16 quando o raio duplica.

É de notar que esta conclusão depende da validade das hipóteses tomadas – em particular, que o caudal é uniforme e em linhas de fluxo rectas. A pressão suficientemente alta, o fluxo torna-se turbulento. Quando isto acontece, a pressão faz com que o fluido salte de um lado para o outro dentro do cano e o padrão do fluxo dependerá também da densidade do fluido, que era irrelevante para o fluxo lento, e então o raciocínio anterior será inválido.

Exercício: derive a dependência com a profundidade do caudal constante de um rio largo sob a acção da gravidade. (Nota: As unidades apropriadas para o caudal são metros cúbicos por segundo *por metro de largura do rio*.)

Portanto, a análise dimensional não nos pode dar constantes globalmente adimensionais, mas pode prever a dependência do caudal num parâmetro físico tal como a pressão ou o tamanho do cano. Mostrámos acima como facilmente nos dá um resultado não óbvio, a dependência do caudal em a^4, que encontrámos anteriormente à custa de muito trabalho. Mas veremos que a análise dimensional pode iluminar a física essencial dos problemas de caudal onde a análise matemática exacta é muito mais difícil, tal como a Lei de Stokes, e ajudar-nos a perceber como os caudais mudam a altas velocidades.

Tradução/Adaptação **Casa das Ciências 2009**