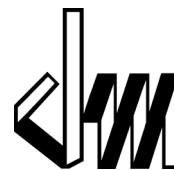




UNIVERSIDADE DE LISBOA  
Faculdade de Ciências



DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

11º ANO

# INICIAÇÃO AO ESTUDO DAS FUNÇÕES REAIS DE VARIÁVEL REAL

Luís Sanchez

(com a colaboração de M. Luísa Mascarenhas)

— 2ª edição —

2003

REANIMAT

Projecto Gulbenkian de Reanimação Científica da Matemática no Ensino Secundário



FUNDAÇÃO CALOUSTE GULBENKIAN

**Título:** INICIAÇÃO AO ESTUDO DAS FUNÇÕES REAIS DE VARIÁVEL REAL

**Autor:** Luís Sanchez (com a colaboração de M. Luísa Mascarenhas)

Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, Departamento de Matemática, 2003

**Tratamento de texto em  $\text{\LaTeX}$ :** Béatrice Huberty

## NOTA PRÉVIA

*No seguimento do trabalho iniciado em 2001, no âmbito do REANIMAT, surge agora o presente texto didáctico para acompanhamento do estudo das funções reais de uma variável real no 11º ano do Ensino Secundário.*

*Procurámos cobrir os tópicos que constam do programa oficial\*, tendo como princípios orientadores os que estão na base do presente projecto e que foram explicitados na nota prévia do texto “Introdução ao estudo das funções reais de variável real — 10º ano”. Havendo uma clivagem muito acentuada entre aqueles princípios e o espírito do programa, fomos obrigados a reorganizar as matérias, sugerindo, necessariamente, metodologias de abordagem não coincidentes com as que o programa aconselha. O programa de funções do 11º ano é vasto e constitui um desafio para quem ensina e para quem aprende. Nunca, antes de ter metido ombros a este trabalho, tínhamos tomado consciência nítida deste facto. Entre os factores que contribuem para avolumar dificuldades não temos a menor dúvida em apontar a ausência de treino dos alunos em cálculo numérico e algébrico, que deveria ter sido iniciado no ensino básico. No 11º ano é necessário suprir esta lacuna, ensinando a manejar fracções, radicais, potências de expoente fraccionário. Por outro lado é necessário introduzir os conceitos de limite e derivada, os quais exigem uma elaboração intelectual de ordem superior. Quem trabalha em Matemática ou a utiliza como instrumento sabe que sem um desembaraço mínimo no uso dos algoritmos de cálculo qualquer pequeno problema fica a parecer intransponível. Não é, pois, difícil prever que é necessário trabalhar bem para levar a bom termo esta fase de aprendizagem, uma vez que se trata de iniciar o domínio de matérias delicadas (cuja introdução não pode ser adiada) ao mesmo tempo que se executa a recuperação de uma fase anterior.*

*Dividimos a matéria em quatro capítulos. No primeiro agrupámos todos os temas que não envolvem o conceito de limite, por nos parecerem de menor dificuldade: funções racionais e irracionais, inversão e composição. No segundo efectuamos o estudo das sucessões e em particular do primeiro conceito de limite. No terceiro introduzimos as noções fundamentais de continuidade e limites para funções. No quarto faz-se um primeiro estudo das derivadas e suas aplicações, não se podendo ir muito longe porque o programa já vai longo...*

*A abordagem dos limites – o ponto mais delicado deste programa – é realizada com base na ideia de valor aproximado. As definições e a teoria desenvolvida para os limites de sucessões procuram transmitir claramente ideias que sabemos não serem de apreensão*

---

\* com excepção da introdução do número  $e$ , que nos parece espúria e inútil no contexto em que é proposta.

*imediatamente pelo principiante. Cabe ao professor o papel decisivo de encontrar a melhor maneira de fazer passar essas ideias, doseando dados intuitivos com linguagem rigorosa de acordo com o conhecimento que tem dos alunos. Não temos em vista neste, como noutros capítulos, que o estudo siga extensivamente o modelo apresentado, mas queremos também fornecer aos estudantes mais interessados os meios de satisfazer a curiosidade a respeito de determinados tópicos, já que a abordagem na sala de aula tem de se confinar às grandes linhas da matéria. No que diz respeito à noção de limite para funções optámos por fazê-la preceder da ideia de continuidade, por nos parecer que esta é mais fácil de interiorizar por via geométrica, embora não prescindamos de uma definição clara. Como apenas temos em vista funções de tipo muito simples, as noções apresentadas referem-se quase exclusivamente a funções definidas em intervalos ou uniões finitas de intervalos. Esta recusa da generalidade, que pode criar algumas situações pontualmente incómodas, visa poupar os estudantes a complicações evitáveis quando há que os expor pela primeira vez ao contacto com os conceitos de limite e continuidade.*

*Sempre que nos pareceu natural e adequado, incluímos exemplos de situações do “mundo real” como motivação ou aplicação das matérias.*

*Temos consciência de que este trabalho é susceptível de melhorias significativas, tanto a nível da exposição como dos exercícios propostos. O tempo limitado de que dispusemos obriga-nos, no entanto, a considerar a presente versão como definitiva. Esperamos que ela constitua, ainda assim, um bom auxiliar de trabalho dentro e fora do REANIMAT.*

## **AGRADECIMENTOS**

*Para a realização deste texto, tal como ele aqui aparece, foram preciosos os contributos de Armando Machado, dos professores que participam no projecto REANIMAT (Clementina Timóteo, Eduarda Paiva, Emanuel Martinho, M. Fátima Almeida, Hélder Martins, Maria dos Anjos Moreira e Maria João Estaca) e ainda dos professores António Rosa e Teresa Caracol, que participaram na acção de formação Matemática 11 (F.C.U.L., Julho 2002) que precedeu e influenciou a redacção final do trabalho.*

Janeiro de 2003

*Na versão agora disponibilizada procurámos eliminar uma quantidade substancial de incorrecções presentes na edição inicial. Agradecemos ao Professor F.R. Dias Agudo e à Dra. Virginia Amaral as valiosas sugestões que nos forneceram nesse sentido.*

Maio de 2003

---

As secções assinaladas com asterisco ou os excertos, dentro do texto principal, impressos em tipo mais pequeno, contêm matéria que claramente excede as exigências do programa.

As referências ao texto do 10º ano são feitas com o símbolo **10**.

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Generalidades sobre funções reais de variável real: tópicos complementares</b>	<b>1</b>
1.1	Funções racionais .....	1
	<b>Apêndice 1:</b> O cálculo com funções racionais .....	12
	<b>*Apêndice 2:</b> A hipérbole .....	14
1.2	Funções cuja expressão analítica envolve radicais .....	19
	<b>Apêndice 3:</b> O cálculo com expressões que envolvem radicais .....	24
	<b>Apêndice 4:</b> Potências de expoente racional .....	27
1.3	Funções dadas por restrições a subconjuntos do domínio .....	32
1.4	Notas sobre resolução de equações e inequações de tipos simples .....	37
1.5	Função inversa .....	42
1.6	Funções compostas .....	52
<b>2</b>	<b>Sucessões de números reais</b>	<b>61</b>
2.1	Generalidades e definições .....	61
2.2	Progressões aritméticas .....	67
2.3	Progressões geométricas .....	71
2.4	Limites reais e limites infinitos .....	79
2.5*	Sucessões e representação decimal dos números reais .....	101
2.6*	Comprimento da circunferência, área do círculo .....	105
2.7*	Limites de sucessões definidas por recorrência .....	110
2.8	As sucessões monótonas .....	114
	<b>Apêndice 5:</b> O método de indução finita .....	122
<b>3</b>	<b>Continuidade e Limites de Funções</b>	<b>129</b>
3.1	Introdução, definições .....	129
3.2	Limites infinitos e limites no infinito .....	143
3.3	Assíntotas .....	152

<b>4</b>	<b>Taxa de variação e derivada</b>	<b>157</b>
4.1	Introdução .....	157
4.2	A derivada como função .....	171
4.3	As regras de derivação mais simples .....	174
4.4	As funções com derivada são contínuas .....	176
4.5	Derivadas das potências .....	177
4.6	Derivadas de funções racionais de tipo muito simples .....	181
4.7	Derivada, extremos relativos e monotonia .....	183

# Capítulo 1

## Generalidades sobre funções reais de variável real: tópicos complementares

### 1.1 Funções racionais

Chamamos *função racional* a uma função real de variável real cuja expressão analítica possa ser dada pelo cociente de dois polinómios. São exemplos:

$$\frac{x}{x+1}, \quad \frac{x^2-1}{3x-2}, \quad \frac{x^3-2x^2+x}{x^4+x^2+1}.$$

Em particular, qualquer polinómio é uma função racional, pois que

$$P(x) = \frac{P(x)}{1}.$$

Mas  $\sqrt{x}$  e  $|x|$  não são funções racionais. Por outro lado,  $\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\right)^2$  é função racional, porque a expressão que a define é equivalente a  $\frac{1+x^2}{x^2}$ .

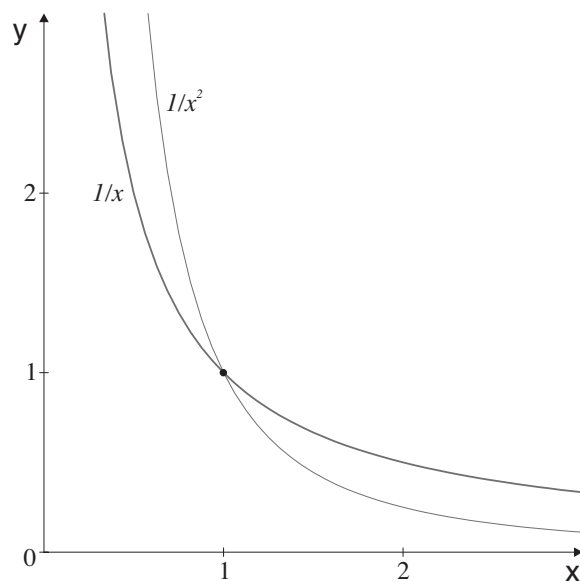
Entre as funções racionais, têm interesse particular as que são dadas por uma expressão do tipo

$$f(x) = \frac{C}{x^n}$$

em que  $C$  é uma constante real e  $n$  um inteiro positivo (quando  $n = 1$ , encontrámos esta função a propósito da proporcionalidade inversa). Comparemos, por exemplo, a função  $\frac{1}{x^2}$  com a já nossa conhecida  $\frac{1}{x}$ , para  $x > 0$ . Uma tabela de valores

$x$	0.01	0.1	0.5	1	1.5	2	3
$1/x$	100	10	2	1	0.667	0.5	0.333
$1/x^2$	10 000	100	4	1	0.444	0.25	0.111

permite-nos formar uma ideia das respectivas ordens de grandeza e comparar os gráficos:



Notemos que o gráfico de  $\frac{1}{x^2}$  (mais fino) está acima do de  $\frac{1}{x}$  (mais grosso) para  $0 < x < 1$  e abaixo do mesmo para  $x > 1$ .

Para estudar  $\frac{1}{x^2}$  em  $]-\infty, 0[$  não precisamos de novos dados, pois trata-se de uma função par e por isso o seu gráfico é simétrico em relação ao eixo  $Oy$ . Fica, pois, situado nos 1º e 2º quadrantes.

Deixamos ao leitor um estudo análogo para a função  $\frac{1}{x^3}$ . Uma vez mais, basta considerar a restrição no intervalo  $]0, +\infty[$  e ter em atenção que o gráfico fica agora situado nos 1º e 3º quadrantes. . .

**EXEMPLO 1.1.1** Funções deste tipo intervêm com frequência na formulação de leis naturais. Por exemplo: a intensidade da iluminação que uma fonte luminosa pontual produz é uma grandeza  $I$  que se define em Física e que varia com a distância  $d$ , à fonte, do ponto onde nos encontramos, tendo-se

$$I = \frac{C}{d^2} \quad (1.1)$$

para uma certa constante  $C$ . Traduz-se este facto dizendo que *a intensidade de iluminação é inversamente proporcional ao quadrado da distância do objecto à fonte*.

Podemos apreciar o significado da função (1.1) partindo de um valor  $d = d_0 > 0$ , calculando o correspondente  $I_0 = \frac{C}{d_0^2}$ , e colocando depois a questão seguinte: por quanto vem multiplicado este valor  $I_0$  se *multiplicarmos*  $d_0$  por 2, 3, 4, etc.? Facilmente calculamos

$$I(2d_0) = \frac{C}{(2d_0)^2} = \frac{1}{4} I_0,$$

$$I(3d_0) = \frac{C}{(3d_0)^2} = \frac{1}{9} I_0,$$



$$I(4d_0) = \frac{C}{(4d_0)^2} = \frac{1}{16} I_0, \quad \text{etc.}$$

isto é, a resposta à questão acima é  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{9}$ ,  $\frac{1}{16}$ , etc. Do mesmo modo concluímos que, se dividirmos  $d_0$  por 2, 3, 4, etc., então  $I_0$  vem multiplicado por 4, 9, 16, etc. Em termos do fenómeno físico descrito, estes factos significam, numa linguagem menos rigorosa, que a intensidade de iluminação diminui de forma muito acentuada quando nos afastamos da fonte luminosa e aumenta de forma muito acentuada quando nos aproximamos da mesma. ■

As funções racionais que são cociente de polinómios do 1º grau podem estudar-se sem qualquer dificuldade com base nos nossos conhecimentos anteriores. Vamos ilustrar esta afirmação com o seguinte exemplo:  $\frac{3x+1}{x+1}$ . Dividindo o polinómio  $3x+1$  pelo polinómio  $x+1$ , ou simplesmente escrevendo

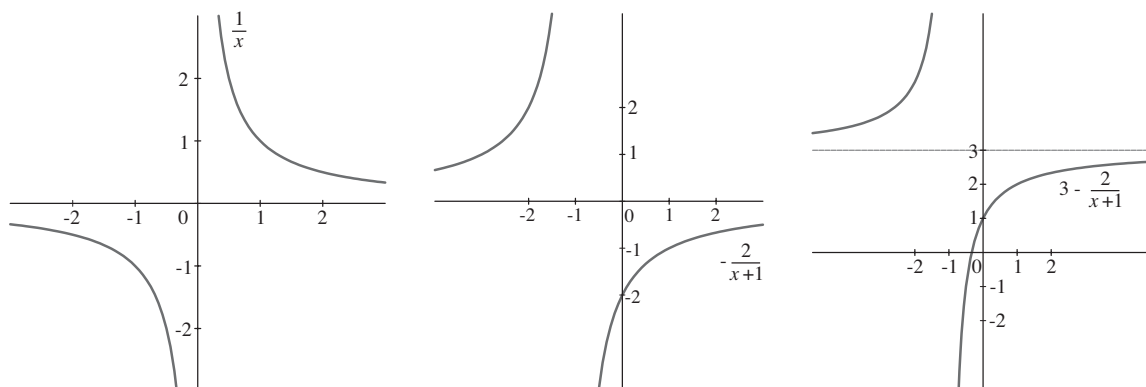
$$\frac{3x+1}{x+1} = \frac{3(x+1) - 3 + 1}{x+1},$$

imediatamente concluímos que

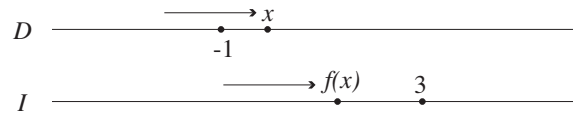
$$\frac{3x+1}{x+1} = 3 - \frac{2}{x+1} \quad (1.2)$$

e vemos que o gráfico da nossa função se obtém a partir do de  $\frac{1}{x}$  com a seguinte sequência de transformações:

- translação horizontal para a esquerda de uma unidade;
- dilatação por um factor 2 ao longo do eixo  $Oy$ , seguida de reflexão no eixo  $Ox$  (o que corresponde a multiplicar por  $-1$ );
- translação vertical de 3 unidades para cima.



É interessante visualizar a acção da função  $f(x)$  dada por (1.2) sob a forma seguinte. Consideremos duas cópias da recta real: na primeira,  $D$ , onde vamos representar o domínio de  $f$ , destacamos o ponto  $-1$ , pois o domínio é constituído por todos os números reais com excepção deste; na segunda,  $I$ , onde representaremos a imagem de  $f$ , destacamos o ponto  $3$  (o único que não faz parte da imagem de  $f$ ).



Materializemos os valores da variável independente ( $x$ ) como posições de um ponto móvel em  $D$ , e consideremos as correspondentes posições ( $f(x)$ ) de um ponto a mover-se em  $I$ . Imaginemos o ponto  $x$  a mover-se da esquerda para a direita.

Quando  $x$  está “muito longe, à esquerda”, o ponto  $f(x)$  está muito próximo de  $3$  mas para a direita deste, visto que a fracção

$$-\frac{2}{x+1} \quad (1.3)$$

é, nessa altura, positiva e de valor absoluto muito pequeno.

Quando  $x$  avança para a direita, mas sem chegar a ocupar a posição  $-1$ ,  $f(x)$  avança também para a direita (porque a função  $f$  é estritamente crescente no intervalo  $]-\infty, -1[$ . À medida que  $x$  se aproxima de  $-1$ ,  $f(x)$  afasta-se cada vez mais, tornando-se tão grande quanto quisermos (e tanto maior quanto mais o ponto  $x$  se aproxima de  $-1$ ), visto que na fracção (1.3) o numerador se mantém constante e o denominador se aproxima de zero (sendo numerador e denominador negativos).

Quando  $x$  se move (sempre da esquerda para a direita) entre posições próximas de  $-1$  e posições muito afastadas, o ponto  $f(x)$  move-se entre posições muito afastadas à esquerda, na recta  $I$ , e a posição  $3$ . Com efeito, se  $x$  está próximo de  $-1$  mas  $x > -1$ , a fracção (1.3) é negativa e tem valor absoluto muito grande. À medida que  $x$  aumenta,  $f(x)$  também aumenta porque  $f$ , restringida ao intervalo  $]-1, +\infty[$  é ainda estritamente crescente. Quando  $x$  está muito longe, à direita,  $f(x)$  aproxima-se novamente do valor  $3$  (desta vez pela esquerda).

Podemos dar uma descrição pictórica deste movimento dizendo:

- (a) quando  $x$  avança da esquerda para a direita em  $D$ ,  $f(x)$  avança também da esquerda para a direita em  $I$ .
- (b)  $x$  ocupa todas as posições excepto  $-1$  e  $f(x)$  ocupa todas as posições excepto  $3$ .
- (c) Quando  $x$  “atravessa”  $-1$  da esquerda para a direita,  $f(x)$  “desaparece” muito longe à direita e “reaparece” muito longe à esquerda.
- (d) Quando  $x$  “desaparece” muito longe à direita ou “reaparece” muito longe à esquerda,  $f(x)$  “atravessa” a posição  $3$  da esquerda para a direita.

Este tipo de análise, que não é senão outra maneira de “ler” o gráfico de  $f$ , repete-se com qualquer função racional que seja cociente de polinómios do 1º grau. Há, no entanto, uma diferença possível: quando as restrições de  $f$  a cada um dos intervalos que constituem o domínio são decrescentes, então, ao movimento de  $x$  da esquerda para a direita corresponde um movimento de  $f(x)$  da direita para a esquerda.

---

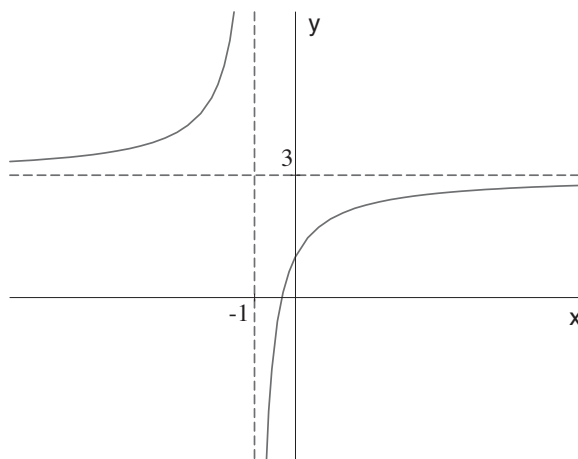
Observamos que para a função  $\frac{1}{x}$  há duas rectas com significado importante:

- o eixo  $Ox$ , pois os pontos do gráfico aproximam-se dele tanto quanto quisermos para valores das abcissas suficientemente elevados em módulo;
- o eixo  $Oy$ , pois há pontos do gráfico com ordenadas arbitrariamente grandes que se aproximam do eixo tanto quanto quisermos.

Para a função  $\frac{3x+1}{x+1}$ , as rectas com significado análogo passam a ser:

- a recta vertical  $x = -1$ ;
- a recta horizontal  $y = 3$ .

Descrevemos este comportamento da função dizendo que  $x = -1$  é a sua *assíntota vertical* e  $y = 3$  é a sua *assíntota horizontal*. O termo “assíntota” será definido com generalidade mais adiante (ver secção 3.3).



Quando se somam ou multiplicam duas funções racionais, o resultado é uma nova função racional. Por exemplo, suponhamos dadas as funções

$$f(x) = \frac{1}{x-2} \quad \text{e} \quad g(x) = \frac{x^2}{x+2}.$$

O seu produto é a função

$$p(x) = f(x)g(x) = \frac{1}{x-2} \cdot \frac{x^2}{x+2} = \frac{x^2}{(x-2)(x+2)} = \frac{x^2}{x^2-4},$$

que é, evidentemente, racional. A soma das mesmas funções calcula-se tendo o cuidado de efectuar a redução ao mesmo denominador:

$$\begin{aligned} s(x) &= f(x) + g(x) = \frac{1}{x-2} + \frac{x^2}{x+2} = \\ &= \frac{x+2}{x^2-4} + \frac{x^2(x-2)}{x^2-4} = \frac{x^3-2x^2+x+2}{x^2-4}. \end{aligned}$$

Novamente constatamos que o resultado é uma função racional.

Como é natural, para que se possa falar da soma ou do produto de  $f(x)$  e  $g(x)$ , é necessário que  $x$  pertença tanto ao domínio de  $f$  como ao domínio de  $g$ , pois só assim ambas as expressões designatórias têm sentido e pode-se então operar com elas. Isto quer dizer que o domínio de  $f(x) + g(x)$  e  $f(x)g(x)$  é a intersecção dos domínios de  $f$  e  $g$  (conjunto de pontos comum a ambos). Assim, os domínios de  $f$ ,  $g$  são

$$\mathbb{R} \setminus \{2\} \quad \text{e} \quad \mathbb{R} \setminus \{-2\};$$

o domínio tanto de  $f + g$  como  $fg$  é

$$\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}.$$

---

Adicionando

$$\frac{x^3+2}{x^2-4} \quad \text{e} \quad \frac{2x^2+x}{x^2-4},$$

obtemos

$$\frac{x^3+2x^2+x+2}{x^2-4}. \quad (*)$$

Observando que o numerador é um polinómio divisível por  $x+2$ ,

$$x^3+2x^2+x+2 = (x+2)(x^2+1),$$

concluimos que a expressão  $(*)$  se pode simplificar e obtemos

$$\frac{x^3+2x^2+x+2}{x^2-4} = \frac{(x+2)(x^2+1)}{(x+2)(x-2)} = \frac{x^2+1}{x-2} \quad (**)$$

para todo o  $x \neq -2$ . O domínio da soma  $(*)$ , tal como o domínio de cada uma das funções que adicionámos, é  $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$ . A soma *coincide* com a função dada no último membro de  $(**)$ , a qual tem o domínio mais amplo  $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ . Por outras palavras: quando adicionamos  $\frac{x^3+2}{x^2-4}$  e  $\frac{2x^2+x}{x^2-4}$ , o que obtemos é a *restrição* de  $\frac{x^2+1}{x-2}$  a  $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$ .

---

As fracções cujos termos são polinómios são, como temos visto, os símbolos por meio dos quais definimos funções racionais.

Recordamos que a fracção inversa de uma fracção não nula,  $F(x)$ , se representa por  $\frac{1}{F(x)}$  e se obtém trocando as posições do numerador e do denominador desta. Por exemplo, tratando-se de fracções numéricas, a inversa de  $\frac{3}{5}$  é  $\frac{5}{3}$  e o que caracteriza a relação entre uma e outra é que o seu produto é a unidade:

$$\frac{3}{5} \times \frac{5}{3} = \frac{15}{15} = 1.$$

Dada uma fracção racional cujo numerador não seja o polinómio nulo, também definimos a fracção inversa daquela como sendo a nova fracção obtida trocando a posição do numerador e do denominador. Por exemplo, as inversas de  $\frac{1}{x-2}$  e  $\frac{x^2}{x+2}$  são, respectivamente,  $x-2$  e  $\frac{x+2}{x^2}$ .

Note-se que os domínios das funções representadas por uma fracção racional e pela sua inversa são em geral distintos. Assim,

$$\begin{array}{ll} \frac{x^2}{x+2} & \text{tem domínio } \mathbb{R} \setminus \{-2\}, \\ \frac{x+2}{x^2} & \text{tem domínio } \mathbb{R} \setminus \{0\} \end{array}$$

mas continuamos a poder afirmar que

$$\frac{x^2}{x+2} \times \frac{x+2}{x^2} = 1$$

para todo  $x$  que pertença a ambos os domínios (para que o primeiro membro desta equação tenha sentido) - no caso presente, para todo o  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$ .

Finalmente, é possível considerar a divisão de duas fracções algébricas. Dividir uma fracção  $F(x)$  por uma fracção  $G(x)$  é o mesmo que multiplicar  $F(x)$  pela inversa de  $G(x)$ :

$$\frac{F(x)}{G(x)} = F(x) \cdot \frac{1}{G(x)}.$$

Assim, por exemplo,

$$\begin{aligned} \frac{\frac{x-1}{x^2-9}}{\frac{x^2-2x+1}{x+3}} &= \frac{x-1}{x^2-9} \cdot \frac{x+3}{x^2-2x+1} = \frac{1}{(x-3)(x-1)} \\ &= \frac{1}{x^2-4x+3}. \end{aligned}$$

**EXEMPLO 1.1.2** Consideremos agora um cociente de dois polinómios, sendo o grau do denominador maior que o grau do numerador:

$$g(x) = \frac{x-1}{x^2+2}.$$

O domínio desta função racional é  $\mathbb{R}$ , visto que o denominador nunca se anula (porque  $x^2 + 2 \geq 2, \forall x \in \mathbb{R}$ ). A fracção toma valores positivos (para  $x > 1$ ) e negativos (para  $x < 1$ ), anulando-se para  $x = 1$ .

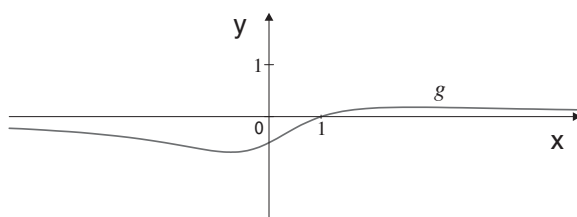
Se quisermos obter um *polinómio* com valores próximos de  $g(x)$  para valores de  $x$  próximos de 1, uma escolha razoável é  $\frac{x-1}{3}$ .<sup>1</sup> Isto ajuda-nos a compreender que, pelo menos em certo intervalo centrado em 1,  $g$  é crescente, como uma tabela de valores ou um gráfico evidenciam:

$x$	-0.8	-0.6	1	1.2	1.4
$g(x)$	-0.682	-0.678	0	0.058	1.01

Mas quando  $x$  se afasta muito de 1 para a direita, devido ao facto de os polinómios em jogo se comportarem como os respectivos “termos dominantes para  $|x|$  grande”,

$$x \quad \text{e} \quad x^2,$$

vemos que o denominador excede o numerador tanto quando quisermos (tanto mais quanto maior for  $|x|$ ). Portanto a fracção fica próxima de 0 para  $x$  suficientemente grande, e por isso não surpreende que, para lá de um certo valor da variável independente,  $g$  passa a ser decrescente. Valem considerações análogas para  $x$  negativo e grande em valor absoluto, de modo que o que acabámos de dizer ajuda a interpretar o gráfico obtido:



e até, de algum modo, a esperar um tal comportamento.

O exame do gráfico sugere que a função  $g$  assume um valor máximo (para algum valor de  $x$  maior que 1) e um valor mínimo (para algum valor de  $x$  menor que 1). Vamos ver que é possível determiná-los utilizando apenas os nossos conhecimentos sobre a função quadrática.

Recordemos que um *valor* da função, isto é, um *elemento da sua imagem*, é um número  $h \in \mathbb{R}$  tal que

$$\frac{x-1}{x^2+2} = h$$

para algum  $x$ . Como o denominador da fracção é sempre  $\neq 0$ , esta equação é equivalente a

$$x-1 = h(x^2+2) \tag{1.4}$$

---

<sup>1</sup>Em certo sentido, que não é oportuno detalhar aqui,  $\frac{x-1}{3}$  é o polinómio que “melhor” aproxima  $g(x)$  quando  $x$  está “perto” de 1.

e podemos dizer: um valor de  $g$  é um número  $h$  tal que a equação (1.4) tem solução (ou soluções) em  $\mathbb{R}$ . O valor máximo e o valor mínimo de  $g$  são, respectivamente, o *maior* e o *menor* dos  $h$  com esta propriedade.

Já sabemos que o máximo  $h$  de  $g$  é positivo. Então, com  $h > 0$ , a equação (1.4) tem soluções reais se, e só se

$$8h^2 + 4h - 1 \leq 0,$$

o que dá:

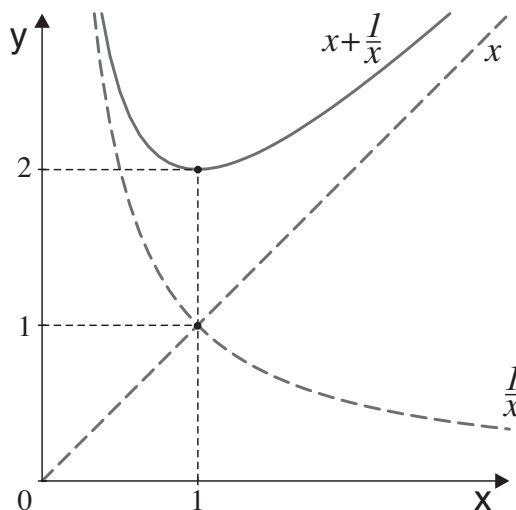
$$\frac{-1 - \sqrt{3}}{4} \leq h \leq \frac{-1 + \sqrt{3}}{4}.$$

Concluimos, pois, que o valor máximo de  $g$  é  $\frac{-1+\sqrt{3}}{4}$ . O mesmo argumento mostra que o valor mínimo de  $g$  é  $\frac{-1-\sqrt{3}}{4}$ . ■

**EXEMPLO 1.1.3** Na realidade, esta técnica pode ser utilizada para calcular valores máximos e mínimos de funções racionais cujos termos sejam polinómios de grau  $\leq 2$ . Consideremos por exemplo a função  $\varphi$  definida por

$$\varphi(x) = \frac{x^2 + 1}{x} = x + \frac{1}{x}$$

no domínio  $]0, +\infty[$ . Repare-se que o seu gráfico pode ser obtido a partir dos gráficos de  $x$  e  $\frac{1}{x}$  adicionando as ordenadas correspondentes a cada valor de  $x$ :



Ao desenhar o gráfico, ou ao obtê-lo numa máquina, constatamos que a função  $\varphi$ :

- toma valores “muito grandes” quando  $x$  está “próximo de 0”;
- toma também valores “muito grandes” quando  $x$  é “grande”;

- parece assumir um valor mínimo em  $x = 1$ , com o valor  $1 + \frac{1}{1} = 2$ ;
- tem o gráfico acima do da recta  $y = x$  e o gráfico tende a confundir-se com o desta recta para “grandes” valores de  $x$ .

Vamos agora confirmar a terceira asserção, que tem a ver com o valor mínimo de  $\varphi$ . Para isso, à semelhança do Exemplo 1.1.2, vamos caracterizar a imagem de  $\varphi$ . Um número  $h \in \mathbb{R}$  pertence à imagem de  $\varphi$  se e só se

$$\exists x > 0 \quad x + \frac{1}{x} = h. \quad (1.5)$$

Ora, esta afirmação é equivalente a

$$\exists x > 0 \quad x^2 + 1 = hx,$$

ou ainda

$$\exists x > 0 \quad x^2 - hx + 1 = 0. \quad (1.6)$$

A condição para que esta equação do 2º grau tenha raízes reais é

$$h^2 - 4 \geq 0$$

ou ainda

$$h \geq 2 \quad \text{ou} \quad h \leq -2.$$

Como os valores  $h$  que nos interessam são certamente positivos ( $h$  é soma de duas parcelas positivas), a condição que nos interessa é

$$h \geq 2.$$

Podemos garantir que para  $h \geq 2$  a condição (1.6) é satisfeita; a equação tem garantidamente raízes reais e são até ambas positivas, pois são dadas por

$$\frac{h \pm \sqrt{h^2 - 4}}{2}.$$

Concluimos, como se tinha intuído pelo gráfico, que a imagem de  $\varphi$  é o intervalo  $[2, +\infty[$ . O valor mínimo de  $\varphi$  é 2.

Ainda em relação com este exemplo, dizemos que a recta  $y = x$  é *assíntota do gráfico de*  $\varphi$ . (Comparar com o que dissemos atrás a respeito da função  $\frac{3x+1}{x+1}$ .) ■



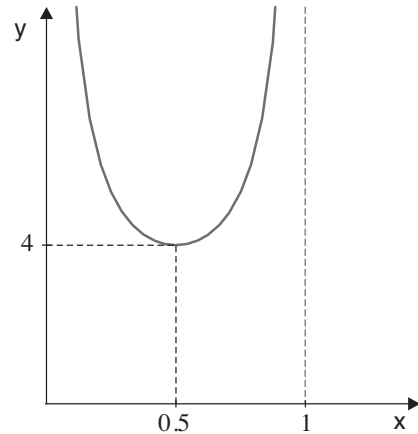
**EXEMPLO 1.1.4** A função  $\alpha : ]0, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\alpha(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x},$$

ou, se preferirmos, por

$$\alpha(x) = \frac{1}{x - x^2},$$

toma apenas valores positivos: porque  $x - x^2 > 0$  para  $0 < x < 1$  e os inversos de números positivos são positivos. Os valores da função são “muito elevados” quando  $x$  está próximo de 0 ou de 1, pois nesse caso o denominador de uma das fracções é “muito pequeno”. O gráfico tem o aspecto indicado na figura.



Trata-se de uma função com duas *assíntotas* verticais: as rectas  $x = 0$  e  $x = 1$ . Utilizando o método do exemplo anterior, pode ver-se que o valor mínimo de  $\alpha$  é  $\alpha\left(\frac{1}{2}\right) = 4$ . Também podemos raciocinar assim: como a função quadrática  $x - x^2$  (*positiva* em  $]0, 1[$ ) atinge o *máximo* em  $x = \frac{1}{2}$  com o valor  $\frac{1}{4}$ , a função  $\alpha$ , que é o seu inverso aritmético, atinge o *mínimo* em  $x = \frac{1}{2}$  com o valor 4. ■

## Apêndice 1 : O cálculo com funções racionais

Quando trabalhamos com funções racionais, quer em teoria quer nas aplicações, é frequente a necessidade de manipular algebricamente as expressões que as representam. Recomendamos ao leitor a revisão do Apêndice A de **10** e o treino no domínio das regras e procedimentos que destacamos em seguida.

(i) Simplificação. Uma fracção racional cujos termos possuem um factor comum *não nulo* pode tornar-se mais simples eliminando esse factor nos dois termos. Assim,

$$\frac{4x+8}{2(x+3)} = \frac{4(x+2)}{2(x+3)} = \frac{2(x+2)}{(x+3)} = \frac{2x+4}{x+3}$$

são igualdades válidas para todo o valor de  $x \neq -3$ . Também

$$\frac{x+x^3}{3+3x^2} = \frac{x(1+x^2)}{3(1+x^2)} = \frac{x}{3}$$

vale para todo o  $x$ , visto que o factor eliminado é  $1+x^2$ , sempre diferente de 0.

No entanto, temos

$$\frac{x^2-10x+25}{x^2-7x+10} = \frac{(x-5)^2}{(x-2)(x-5)}$$

e portanto podemos afirmar

$$\frac{x^2-10x+25}{x^2-7x+10} = \frac{x-5}{x-2} \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2, 5\} \quad (*)$$

pois, como é evidente, a igualdade só pode ter sentido para os valores de  $x$  *comuns aos domínios* de duas fracções envolvidas; esses domínios são

$$\mathbb{R} \setminus \{2, 5\} \quad \text{e} \quad \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

respectivamente para o 1º e o 2º membros de (\*). Passámos de um membro para outro eliminando em ambos os termos o factor  $x-5$  (e portanto o valor  $x=5$  deve ser excluído).

A igualdade (\*) mostra que a *função do 1º membro coincide no seu domínio com outra de expressão mais simples e de domínio maior, a do 2º membro*. Podemos dizer, olhando para as duas expressões analíticas, que a função associada à primeira representa uma restrição da função associada à segunda.

(ii) Multiplicação e divisão. Recorde-se que as fracções se multiplicam termo a termo e que dividir uma fracção por outra é multiplicá-la pelo inverso desta. Assim, temos

$$\begin{aligned} \frac{x^3-1}{2x+4} \cdot \frac{x^2-4}{(x^2+5)(x-1)} &= \frac{(x^3-1)(x^2-4)}{(2x+4)(x^2+5)(x-1)} = \\ &= \frac{(x-1)(x^2+x+1)(x+2)(x-2)}{2(x+2)(x^2+5)(x-1)} = \frac{(x^2+x+1)(x-2)}{2(x^2+5)} \end{aligned}$$

sendo o resultado final da operação dado por

$$\frac{x^3 - x^2 - x - 2}{2x^2 + 10}.$$

Deve sublinhar-se que a última igualdade é válida para  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$ , que é o domínio do produto que nos foi dado para calcular. A conclusão é que o referido produto é restrição de uma função racional com domínio  $\mathbb{R}$ .

Vejamos também o seguinte exemplo de cálculo:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{3x-6}{x^2+2x+1}}{\frac{6x+12}{x^2-1}} &= \frac{3x-6}{x^2+2x+1} \cdot \frac{x^2-1}{6x+12} = \\ &= \frac{3(x-2)(x+1)(x-1)}{6 \cdot (x+1)^2 \cdot (x+2)} = \frac{(x-2)(x-1)}{2 \cdot (x+1)(x+2)} = \frac{x^2-3x+2}{2x^2+6x+4}. \end{aligned}$$

A igualdade vale para  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 1\}$  que é o domínio da expressão inicial. (Na penúltima passagem foi eliminado o factor  $x+1$ , o que é suficiente para excluir  $x=-1$ .) No entanto, o domínio da última expressão obtida é  $\mathbb{R} \setminus \{-2, -1\}$ .

(iii) Adição. Recordemos que, quando se trata de adicionar fracções, é necessário começar por reduzir as parcelas a um denominador comum. Por exemplo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2} + \frac{2x-1}{3x^3} &= \frac{3x}{3x^3} + \frac{2x-1}{3x^3} = \frac{5x-1}{3x^3} \text{ para todo o } x \neq 0; \\ 2x-1 - \frac{1}{x} &= \frac{2x^2-x}{x} - \frac{1}{x} = \frac{2x^2-x-1}{x} \text{ para todo o } x \neq 0; \\ \frac{x}{x^2-k^2} + \frac{1}{x^2-2kx+k^2} &= \frac{x}{(x+k)(x-k)} + \frac{1}{(x-k)^2} = \\ &= \frac{x(x-k)}{(x+k)(x-k)^2} + \frac{x+k}{(x+k)(x-k)^2} = \\ &= \frac{x^2+(1-k)x+k}{(x+k)(x-k)^2}. \end{aligned}$$

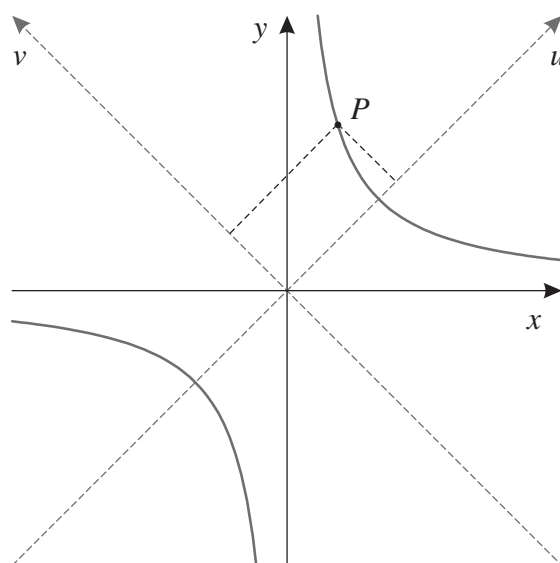
Aqui o símbolo  $k$  representa um número real dado. Tratando as expressões envolvidas como funções de  $x$ , os cálculos são válidos para todo o  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-k, k\}$ .

## \*Apêndice 2 : A hipérbole

O gráfico da função que representa a proporcionalidade inversa é, como vimos, o conjunto dos pontos  $(x, y)$  do plano tais que

$$xy = C \quad (*)$$

(assumimos que  $C$  é uma constante  $> 0$ ). Vamos obter uma maneira diferente de o descrever. Para isso, utilizamos *outro referencial ortonormado* em que os eixos coordenadas são as bissetrizes dos quadrantes ímpares e pares, com a orientação da figura. Designamos por  $(u, v)$  as coordenadas de um ponto no novo sistema.



Como o novo eixo das abscissas (bissetriz dos quadrantes ímpares) tem a direcção e sentido do vector unitário  $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ , sabemos da Geometria Analítica que o ponto P, cujas coordenadas são  $(x, y)$  no referencial original, tem a nova abscissa  $u$  dada pelo produto interno do vector  $(x, y)$  com o vector  $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$  :

$$u = \frac{x + y}{\sqrt{2}}. \quad (1.7)$$

Do mesmo modo,

$$v = \frac{-x + y}{\sqrt{2}}. \quad (1.8)$$

Destas duas equações concluímos que

$$u^2 = \frac{x^2 + 2xy + y^2}{2}, \quad v^2 = \frac{x^2 - 2xy + y^2}{2},$$

e por conseguinte

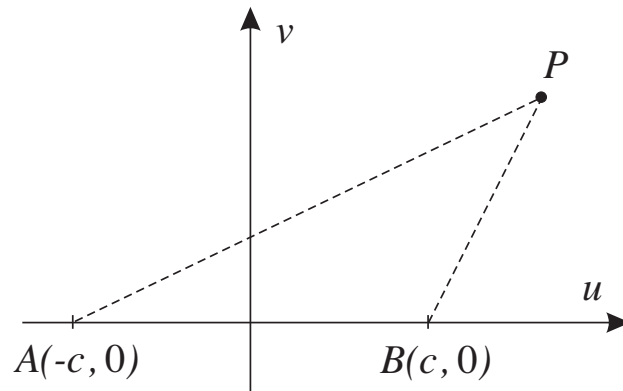
$$u^2 - v^2 = 2xy$$

e, finalmente, atendendo a (\*), obtemos a equação deste conjunto de pontos no novo referencial:

$$u^2 - v^2 = 2C. \quad (**)$$

Consideremos, no sistema de coordenadas  $(u, v)$ , o problema seguinte: determinar o lugar geométrico dos pontos  $P(u, v)$  tais que

- (H) o módulo da diferença das distâncias  $|PA - PB|$  aos pontos  $A(-c, 0)$  e  $B(c, 0)$  é uma constante  $d$  dada, com  $0 < d < 2c$ .<sup>2</sup>



A condição proposta traduz-se analiticamente por

$$\left| \sqrt{(u+c)^2 + v^2} - \sqrt{(u-c)^2 + v^2} \right| = d$$

e a partir dela deduzimos, sucessivamente:

$$\sqrt{(u+c)^2 + v^2} = \sqrt{(u-c)^2 + v^2} \pm d, \quad (\text{i})$$

$$(u+c)^2 + v^2 = (u-c)^2 + v^2 + d^2 \pm 2d\sqrt{(u-c)^2 + v^2}, \quad (\text{ii})$$

$$(u+c)^2 + v^2 - (u-c)^2 - v^2 - d^2 = \pm 2d\sqrt{(u-c)^2 + v^2}, \quad (\text{iii})$$

$$u^2 + 2cu + c^2 + v^2 - u^2 + 2cu - c^2 - v^2 - d^2 = \pm 2d\sqrt{(u-c)^2 + v^2}, \quad (\text{iv})$$

$$4cu - d^2 = \pm 2d\sqrt{(u-c)^2 + v^2}, \quad (\text{v})$$

$$16c^2u^2 - 8cd^2u + d^4 = 4d^2[(u^2 - 2cu + c^2) + v^2]. \quad (\text{vi})$$

Depois de eliminar a parcela comum aos dois membros  $(-8cd^2u)$  e pôr  $u^2$  em evidência nos termos em que intervêm, temos

$$4(4c^2 - d^2)u^2 - 4d^2v^2 = (4c^2 - d^2)d^2$$

---

<sup>2</sup> A condição  $d < 2c$  é necessária para que existam tais pontos  $P$  fora da recta  $AB$ , visto que, se  $A, B, P$  formam um triângulo, tem-se  $2c = |AB| > |PA - PB| = d$ .

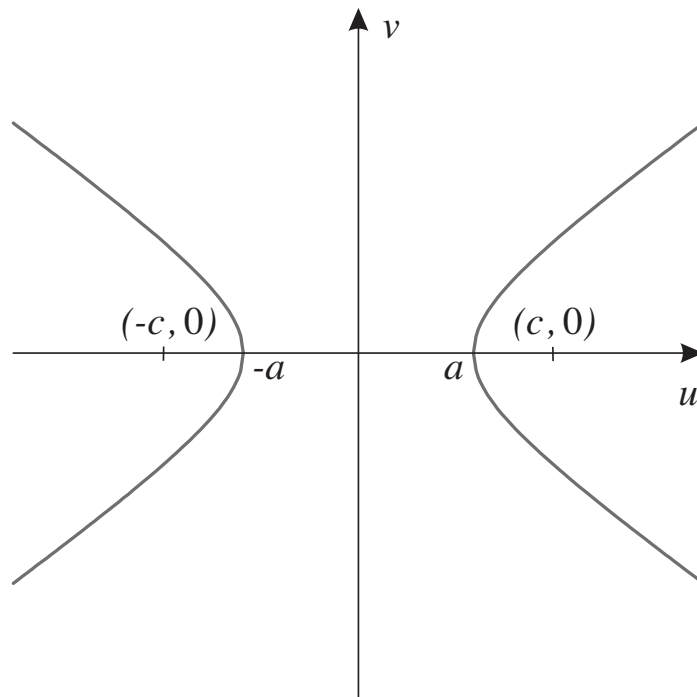
que finalmente se pode escrever, dividindo por  $(4c^2 - d^2)d^2$ :

$$\frac{u^2}{a^2} - \frac{v^2}{b^2} = 1 \quad (+)$$

onde  $a = \frac{d}{2}$  e  $b = \frac{\sqrt{4c^2 - d^2}}{2}$ .

Assim, a solução do problema proposto é dada pela equação (+). Mostrámos que todo ponto  $(u, v)$  que satisfaz a condição imposta verifica (+). Pode mostrar-se que, nos cálculos anteriores, quando elevamos ao quadrado ambos os membros de uma mesma equação, não são introduzidas raízes estranhas (ver **10**, Apêndice A12)<sup>3</sup> e portanto, reciprocamente, toda a solução  $(u, v)$  de (+) verifica a condição (H).

A este lugar geométrico – caracterizado por (H) ou, equivalentemente, por (+), chamamos *hipérbole*. Aos pontos  $(\pm c, 0)$  chamamos *focos* da hipérbole. O lugar geométrico (+) é uma curva constituída por dois ramos separados com o aspecto da figura:



A curva (\*\*), em particular, é uma hipérbole com  $a = b = \sqrt{2C}$ .

---

<sup>3</sup>Na verdade, só poderia haver lugar à introdução de raízes estranhas na passagem de (i) para (ii), e essas raízes seriam as das equações

$$\sqrt{(u+c)^2 + v^2} = -\sqrt{(u-c)^2 + v^2} - d \quad \text{ou} \quad \sqrt{(u+c)^2 + v^2} = -\sqrt{(u-c)^2 + v^2} + d.$$

A primeira é manifestamente impossível. A segunda significa  $PA + PB = d$ , e como  $AB \leq PA + PB$ , e  $d < 2c$ , também não possui soluções.

## Exercícios da Secção 1.1

1] A distância de Lisboa a Nova York é 5 500 km. Quanto tempo demora o percurso entre as duas cidades

(a) num jacto a 800 Km/h?

(b) no Concorde a 2 100 Km/h?

(c) para um raio luminoso a 300 000 Km/s?

2] As duas tabelas seguintes dizem respeito às funções  $y = \frac{C}{x}$  e  $y = \frac{C}{x^2}$ , onde  $C$  é uma constante (a mesma nos dois casos)

$x$	0.1	0.5	1	10	.
$y$	300	.	.	.	$10^{-6}$

$x$	0.1	0.5	1	10	.
$y$	30	.	.	.	$10^{-6}$

Distingui-las e completá-las.

3] Verificar que são funções racionais:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}; \quad \frac{2}{x} + \frac{x}{x+1}; \quad \frac{x}{x-2} \cdot \frac{x+1}{x+2} + \frac{2x-1}{x+2}.$$

4] Simplificar as seguintes expressões designatórias e indicar o domínio das novas expressões obtidas:

$$\frac{x^2 + 4x + 4}{x + 2}; \quad \frac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6}; \quad \frac{x^3 + 3x}{x(x^4 - 9)}; \quad \frac{2x^2 + 1}{4x^4 + 4x^2 + 1}.$$

5] Verificar que a função racional  $\frac{x^3 - 1}{x - 1}$  é restrição de uma função polinomial.

6] Indicar o domínio e o contradomínio das funções

$$y = \frac{x + 10}{x - 5}, \quad y = \frac{4 - x}{x + 3}.$$

e esquematizar os seus gráficos.

7] Determinar o valor máximo de  $3 - \frac{1}{1 - x^2}$  para  $x \in ]-1, 1[$ .

8] Verificar que  $\frac{x}{1 + x^2} \leq \frac{1}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$ .

9] Qual é o contradomínio da função  $\frac{1 - x}{1 + x^2}$  ?

(Mais difícil: e qual é o contradomínio da sua restrição a  $[0, +\infty[$  ?)

10 Determinar os contradomínios das funções

$$\frac{1}{1-x^2};$$

$$\frac{x}{1-x^2};$$

$$\frac{x^2-1}{x^2+4}.$$

11 Resolver as equações e inequações seguintes:

$$\frac{x^2-4x+3}{x-3}=0,$$

$$\frac{x^2-1}{x^2-4} \geq 0,$$

$$\frac{x^3+3x}{x^2-4} \geq 0,$$

$$\frac{x}{1-x^2} < 1,$$

$$\frac{2x+1}{x-2} > 3,$$

$$\frac{x^2-1}{x^2+4} \leq 0,$$

$$\frac{1}{x} > 2,$$

$$\frac{1}{x} < 5,$$

$$\frac{1}{x} < 10^{-6},$$

$$x = \frac{1}{x}.$$

12 Escrever as expressões das seguintes funções racionais sob a forma de fracção sem factores polinomiais comuns:

$$\frac{x^3-8}{x^2-4} \cdot \frac{2x+4}{(x^2+2x+4)^2};$$

$$\frac{\frac{x^2+6x+9}{x^3}}{x^2-9};$$

$$\frac{1}{x} - \frac{4}{1-x};$$

$$\frac{\frac{\frac{3x}{x+1}}{x^2}}{x^2-5x+4};$$

$$\frac{\frac{x}{2} + \frac{1}{3}}{\frac{2}{x} - \frac{1}{4}}.$$



## 1.2 Funções cuja expressão analítica envolve radicais

Recordemos o significado do símbolo

$$\sqrt[n]{a} \quad (1.9)$$

onde  $a \in \mathbb{R}$  e  $n$  é um número natural: se  $n$  é par, o número  $a$  assume-se não negativo e o símbolo (1.9) representa o *único* número real positivo  $x$  com a propriedade

$$x^n = a. \quad (1.10)$$

Se  $n$  é ímpar, (1.9) representa o *único* número real  $x$  que tem a propriedade (1.10). Quando  $n = 2$ , o índice  $n$  do radical (1.9) é omitido.

Uma grande variedade de problemas, quer com significado matemático intrínseco, quer ligados a aplicações ao mundo real, levam-nos a considerar expressões em que intervém uma variável sob o sinal de radical; por exemplo

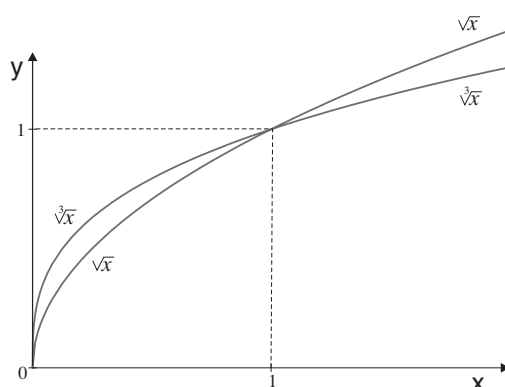
$$\sqrt{x}, \quad \sqrt[3]{1+x^2}, \quad \frac{1}{\sqrt{x-2}}, \quad \sqrt[3]{x} - \frac{1}{x\sqrt{x}},$$

são expressões que definem funções reais de variável real cujos domínios são, respectivamente,

$$[0, +\infty[, \quad \mathbb{R}, \quad ]2, +\infty[, \quad ]0, +\infty[.$$

**EXEMPLO 1.2.1** Estudemos o gráfico das funções  $\sqrt{x}$  e  $\sqrt[3]{x}$  no intervalo  $[0, 10]$ . É útil construir uma tabela de valores a fim de comparar o efeito de “calcular a raiz quadrada” com o de “calcular a raiz cúbica”.

$x$	0	0.05	0.5	0.75	1	2	...
$\sqrt{x}$	0	0.224	0.707	0.866	1	1.414	
$\sqrt[3]{x}$	0	0.368	0.794	0.909	1	1.260	



Desde logo se observa que  $\sqrt{x} < \sqrt[3]{x}$  para  $x \in ]0, 1[$  e  $\sqrt{x} > \sqrt[3]{x}$  para  $x > 1$ .

Notemos ainda que, como a função  $\sqrt[3]{x}$  está definida para todo o  $x \in \mathbb{R}$  e é ímpar, isto é

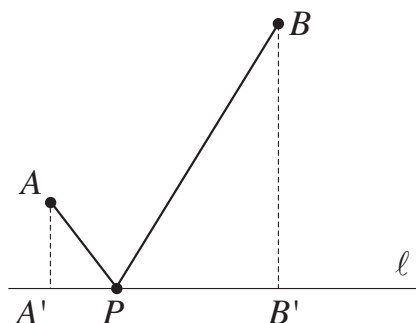
$$\sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{x}, \quad \forall x \in \mathbb{R};$$

o comportamento desta função para  $x < 0$  deduz-se facilmente do já estudado.

**EXEMPLO 1.2.2** Os lugares  $A$  e  $B$  distam da estrada rectilínea  $\ell$  1 km e 3 km, respectivamente. Os pontos  $A'$  e  $B'$  da estrada  $\ell$  mais próximos de  $A$  e  $B$ , respectivamente, distam entre si 2 km. Pretende-se construir dois troços rectilíneos de estrada partindo de  $A$  e  $B$ , respectivamente, e constituindo ligação à estrada  $\ell$  num ponto  $P$ . Qual deve ser a localização deste ponto  $P$  de modo que daí resulte uma ligação entre  $A$  e  $B$  cujo comprimento

$$AP + PB$$

seja o menor possível?



Representemos por  $x$  a distância  $A'P$  entre  $A'$  e o ponto  $P$  que se pretende determinar. Pelo teorema de Pitágoras,

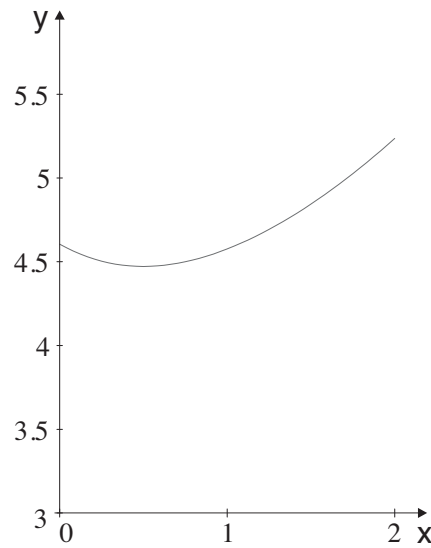
$$AP^2 = AA'^2 + A'P^2 = 1^2 + x^2,$$

$$PB^2 = BB'^2 + PB'^2 = 3^2 + (2 - x)^2 = x^2 - 4x + 13,$$

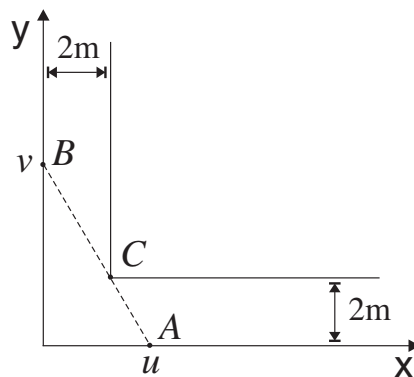
de modo que

$$AP + PB = \sqrt{1 + x^2} + \sqrt{x^2 - 4x + 13}.$$

A distância em causa (ligação de  $A$  a  $B$  através de dois percursos rectilíneos com um ponto comum sobre  $\ell$ ) é, pois, função de  $x$  onde intervêm dois radicais de índice 2. O domínio da função, com relevo para o problema que pretendemos resolver, é o intervalo  $[0, 2]$ , visto que o ponto  $P$  deve situar-se entre  $A'$  e  $B'$ . A obtenção de um gráfico desta função numa calculadora dá-nos uma indicação de qual é o valor de  $x$  onde a função atinge o seu mínimo:



**EXEMPLO 1.2.3** Dois corredores longos, com 2 metros de largura cada, estão ligados “em L” como na figura. Quais os comprimentos de hastes rectilíneas rígidas que se podem fazer passar horizontalmente de um a outro corredor?



Coloquemos um referencial ortonormado  $0xy$  num plano horizontal, com eixos nas paredes externas dos corredores. Uma haste rectilínea colocada horizontalmente, de modo que as suas extremidades  $A$  e  $B$  estejam assentes nas paredes externas e que passe também pelo vértice  $C$  do ângulo (recto) das paredes internas, tem comprimento

$$\ell(u) = \sqrt{u^2 + v^2}$$

onde  $A \leftrightarrow (u, 0)$ ,  $B \leftrightarrow (0, v)$ . Os números  $u$  e  $v$  não são independentes um do outro: fixado  $u$ , podemos calcular  $v$ , porque  $B$  pertence à recta  $AC$ . Ora, esta recta tem equação

$$y = \frac{2}{2-u}(x-u)$$

e como  $v$  é a ordenada do ponto desta recta cuja abcissa é 0, temos

$$v = \frac{2u}{u-2}.$$

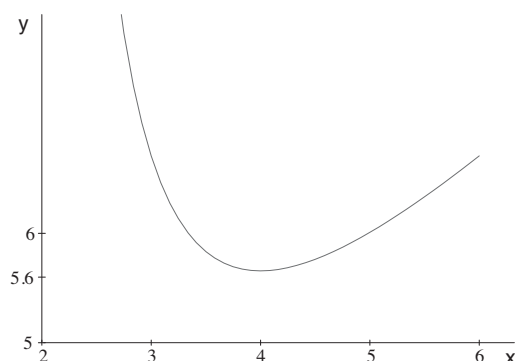
Assim, o comprimento da haste é

$$\sqrt{u^2 + \left(\frac{2u}{u-2}\right)^2} = \sqrt{u^2 + \frac{4u^2}{(u-2)^2}} = \sqrt{\frac{u^2(u-2)^2 + 4u^2}{(u-2)^2}} = \sqrt{\frac{u^2((u-2)^2 + 4)}{(u-2)^2}}.$$

É claro que os valores de  $u$  que interessa considerar são os que satisfazem  $u > 2$ . Portanto obtém-se a expressão do comprimento da haste, como função de  $u$ :

$$\ell(u) = \frac{u\sqrt{u^2 - 4u + 8}}{u - 2}.$$

Se uma haste passa de um corredor a outro, o seu comprimento não pode exceder nenhum dos valores desta função. Por outras palavras, deve ser menor ou igual a cada um deles. Em particular, deve ser menor ou igual ao mínimo da função  $\ell$ , caso exista. O gráfico de  $\ell$  no intervalo  $[2.5, 10]$  sugere que  $\ell$  tem mínimo, atingido em  $u = 4$ , com o valor  $\ell(4) = 4\sqrt{2}$ . Este é, portanto, o comprimento que não pode ser excedido.

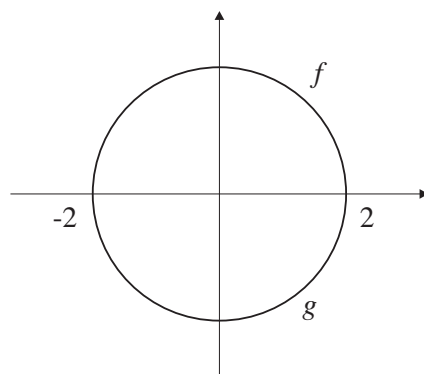


Este resultado poderia ser antecipado facilmente, com um argumento geométrico. No entanto, se as larguras dos dois corredores forem diferentes, o argumento geométrico deixa de ser tão simples e o problema é ainda eficazmente resolvido utilizando como modelo uma função  $\ell(u)$  análoga à anterior.

**EXEMPLO 1.2.4** Vimos em Geometria Analítica que a circunferência de centro  $(0, 0)$  e raio 2 tem a equação

$$x^2 + y^2 = 4.$$

Ora, tanto a semicircunferência superior (situada nos 1º e 2º quadrantes) como a inferior (situada nos 3º e 4º quadrantes) são gráficos de funções.



Vejamos como obter a expressão designatória destas funções. Notemos que a semicircunferência superior é, por definição, aquela porção da circunferência onde as ordenadas dos pontos são  $\geq 0$ . Portanto essa semicircunferência é caracterizada pela conjunção de condições

$$x^2 + y^2 = 4 \quad \text{e} \quad y \geq 0. \quad (1.11)$$

Ora, a condição (1.11) permite identificar, para cada  $x \in [-2, 2]$ , *um único*  $y$  tal que o par  $(x, y)$  a verifica: de facto, temos sucessivamente

$$\begin{aligned} y^2 &= 4 - x^2, & x^2 &\leq 4, \\ y &= \sqrt{4 - x^2}, & -2 &\leq x \leq 2. \end{aligned}$$

porque sabemos que  $y \geq 0$ . Assim, se chamarmos  $f$  à função cujo gráfico é a semicircunferência superior, a sua expressão designatória será

$$f(x) = \sqrt{4 - x^2}.$$

Analogamente se conclui que a função  $g$  que tem como gráfico a semicircunferência inferior tem a expressão

$$g(x) = -\sqrt{4 - x^2}.$$

Observe-se que ambas são pares e ambas têm domínio  $[-2, 2]$  (porque a condição  $4 - x^2 \geq 0$  é equivalente a  $-2 \leq x \leq 2$ ).

Observação. Exemplificámos em (10, §1, página 14) a definição de uma função por um processo semelhante ao que nos conduziu de (1.11) à expressão de  $f$ .

## Apêndice 3 : O cálculo com expressões que envolvem radicais

No Apêndice A 14) de **10** indicámos algumas das regras mais elementares que é necessário ter em conta para operar com radicais. Vamos aqui revê-las e apresentar novos exemplos.

(i) Começemos por observar que, dado um número real positivo qualquer,  $a$ , se tem

$$\sqrt{a} = \sqrt[4]{a^2} = \sqrt[6]{a^3}$$

e, de um modo geral, com  $n, p \in \mathbb{N}$

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[np]{a^p}. \quad (*)$$

Na verdade, o primeiro membro de  $(*)$  é o número positivo  $x$  que satisfaz

$$x^n = a;$$

mas elevando a  $p$  ambos os membros desta igualdade vem

$$(x^n)^p = x^{np} = a^p$$

e portanto o número  $x$  é também o  $2^\circ$  membro de  $(*)$ .

(ii) Simplificação. A simplificação de expressões onde há um radical pode ocorrer nos casos em que certos factores envolvem expoentes que têm factores comuns com o índice do radical. Por exemplo:

$$\begin{aligned}\sqrt{3^5} &= \sqrt{3^4 \times 3} = \sqrt{3^4} \times \sqrt{3} = 3^2 \sqrt{3}, \\ \sqrt[3]{7^4} &= \sqrt[3]{7^3 \times 7} = 7 \sqrt[3]{7}, \\ \sqrt[4]{18a^4b^9} &= \sqrt[4]{2 \times 3^2 \cdot a^4 \cdot b^8 \cdot b} = \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{3^2} \cdot \sqrt[4]{a^4} \cdot \sqrt[4]{b^8} \cdot \sqrt[4]{b} \\ &= \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt{3} \cdot a \cdot b^2 \cdot \sqrt[4]{b} = \sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{2b} \cdot a.\end{aligned}$$

(Aqui, supomos que  $a, b \geq 0$ .)

(iii) Multiplicação. Para a multiplicação (ou divisão) de radicais, utilizamos as regras já estudadas no Apêndice a 14) de **10**:

$$\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}, \quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$

(Os números sob os radicais supõem-se positivos.) Utilizando-as, efectuamos cálculos simples como

$$\begin{aligned}\sqrt{3x} \cdot \sqrt[4]{x} &= \sqrt[4]{9x^2} \cdot \sqrt[4]{x} = \sqrt[4]{9x^3}; \\ \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}} &= \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}.\end{aligned}$$

(iv) Adição. Para a adição (ou subtracção) podemos agrupar parcelas com o mesmo radical por simples aplicação da propriedade distributiva:

$$\begin{aligned}5\sqrt{2} + \sqrt{3} - 7\sqrt{2} &= (5 - 7)\sqrt{2} + \sqrt{3} = -2\sqrt{2} + \sqrt{3}; \\ 3\sqrt{x^3} + 8\sqrt{x} + \sqrt{2x} &= 3x\sqrt{x} + 8\sqrt{x} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{x} \\ &= (3x + 8 + \sqrt{2})\sqrt{x}.\end{aligned}$$

(v) Racionalização de termos de uma fracção. Por vezes há conveniência em escrever uma fracção numa forma equivalente, mas sem a presença de radicais num dos seus termos. Assim, para fazer desaparecer o sinal de raiz no denominador de  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ , escrevemos

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Diz-se então que *racionalizámos o denominador*. Do mesmo modo

$$\frac{1}{\sqrt[3]{5}} = \frac{1 \times \sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{5^2}} = \frac{\sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{5^3}} = \frac{\sqrt[3]{25}}{5}.$$

Vejamos um caso apenas ligeiramente mais complicado:

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{\sqrt{7} - \sqrt{2}} &= \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{2})(\sqrt{7} + \sqrt{2})}{(\sqrt{7} - \sqrt{2})(\sqrt{7} + \sqrt{2})} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{7} + \sqrt{2}) - \sqrt{2}(\sqrt{7} + \sqrt{2})}{7 - 2} = \\ &= \frac{(\sqrt{7} + \sqrt{2})\sqrt{x} - \sqrt{14} - 2}{5}.\end{aligned}$$

De mesmo modo,

$$\frac{1}{\sqrt{x} - 2} = \frac{\sqrt{x} + 2}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)} = \frac{\sqrt{x} + 2}{x - 4}.$$

Se, em vez disso, quisermos racionalizar o numerador na fracção  $\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$ , procedemos assim:

$$\frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}} = \frac{(1 + \sqrt{x})(1 - \sqrt{x})}{(1 - \sqrt{x})^2} = \frac{1 - x}{1 - 2\sqrt{x} + x}.$$

Em particular, se quisermos escrever a expressão  $\sqrt{x} - \sqrt{a}$  sob a forma de fracção cujo numerador não envolve radicais, temos

$$\sqrt{x} - \sqrt{a} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} + \sqrt{a})}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} = \frac{x - a}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}.$$

(vi) Combinando as regras de cálculo conhecidas é possível operar com expressões mais complicadas. Vejamos um exemplo:

$$\begin{aligned} x + 1 - \frac{\frac{1}{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}}{\frac{x-1}{x}} &= x + 1 - \frac{\frac{1}{x} + \frac{2\sqrt{x}}{x}}{\frac{x-1}{x}} = x + 1 - \frac{\frac{2\sqrt{x}+1}{x}}{\frac{x-1}{x}} = \\ &= x + 1 - \frac{2\sqrt{x}+1}{x} \cdot \frac{x}{x-1} = x + 1 - \frac{2\sqrt{x}+1}{x-1} = \\ &= \frac{x^2-1}{x-1} - \frac{2\sqrt{x}+1}{x-1} = \frac{x^2-1-2\sqrt{x}-1}{x-1} = \\ &= \frac{x^2-2\sqrt{x}-2}{x-1}. \end{aligned}$$

(vii) Por vezes é possível simplificar algumas expressões numéricas onde intervêm combinações de radicais. Consideremos, por exemplo,

$$\sqrt{6-2\sqrt{5}}$$

o qual representa efectivamente um número real, uma vez que  $6-2\sqrt{5} > 0$  (porquê?).

Façamos a tentativa de escrever este número na forma mais simples  $a+b\sqrt{5}$ , onde  $a$  e  $b$  são números racionais. Se isto é possível, teremos

$$\sqrt{6-2\sqrt{5}} = a+b\sqrt{5} \quad (*)$$

e portanto

$$6-2\sqrt{5} = a^2 + 5b^2 + 2ab\sqrt{5}.$$

Para garantir esta igualdade, basta que

$$\begin{cases} a^2 + 5b^2 = 6, \\ 2ab = -2. \end{cases}$$

Da segunda equação sai  $b = -1/a$ , e da primeira resulta sucessivamente

$$\begin{aligned} a^2 + \frac{5}{a^2} &= 6, \\ a^4 - 6a^2 + 5 &= 0, \\ a^2 &= 1 \quad \text{ou} \quad a^2 = 5. \end{aligned}$$

Com  $a^2 = 1$ , temos duas escolhas possíveis:  $a = 1$  (e então  $b = -1$ ) ou  $a = -1$  (e então  $b = 1$ ). A escolha correcta é a segunda porque o segundo membro de (\*) deve ser positivo:

$$\sqrt{6-2\sqrt{5}} = \sqrt{5} - 1.$$

O resultado obtido com  $a^2 = 5$  não vai, naturalmente, trazer nada de novo.



## Apêndice 4 : Potências de expoente racional

Na realização de operações, os radicais podem ser substituídos eficazmente por potências com expoente racional. Por exemplo, *convencionamos* escrever

$$\sqrt{3} = 3^{1/2}, \quad \sqrt[3]{5} = 5^{1/3}, \quad \sqrt[3]{25} = \sqrt[3]{5^2} = 5^{2/3}$$

e, de modo geral, definimos a potência de base  $a$  e o expoente racional  $p/q$  pondo

$$\boxed{a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}}.$$

Aqui,  $a$  é um número real positivo ou zero;  $p$  e  $q$  são inteiros e  $q > 0$ . (Quando  $q = 1$ , convencionamos que  $\sqrt[q]{b} = b$  para qualquer  $b \geq 0$ .)

---

Esta definição não contém qualquer ambiguidade, apesar de um número racional se poder representar por uma infinidade de fracções. Por exemplo:  $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$  e por isso deverá ter-se

$$5^{1/3} = 5^{2/6} \quad (*)$$

sem o que a nossa definição não seria eficaz. Ora, efectivamente,

$$5^{1/3} = \sqrt[3]{5}, \quad 5^{2/6} = \sqrt[6]{5^2}$$

e, utilizando a regra dada no início do Apêndice 3, concluímos

$$\sqrt[3]{5} = \sqrt[6]{5^2}.$$

---

A utilidade destas potências reside no facto de elas obedecerem às regras de cálculo já conhecidas para as operações com potências de expoente inteiro, Concretamente:

$$\begin{aligned} a^{p/q} \cdot a^{m/n} &= a^{p/q+m/n}, & \frac{a^{p/q}}{a^{m/n}} &= a^{p/q-m/n}, \\ a^{p/q} \cdot b^{p/q} &= (ab)^{p/q}, & \frac{a^{p/q}}{b^{p/q}} &= \left(\frac{a}{b}\right)^{p/q}, \\ (a^{p/q})^{r/s} &= a^{pr/qs}. \end{aligned}$$

---

A validade destas leis de cálculo baseia-se nas regras de cálculo com radicais, por um lado, e com fracções, por outro. A título de exemplo, vamos dar a verificação da primeira.

Tem-se  $a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}$ ,  $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$ , e em virtude da primeira regra recordada no Apêndice 3

$$\sqrt[q]{a^p} = \sqrt[q]{\sqrt[n]{a^{pn}}}, \quad \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[q]{\sqrt[n]{a^{mq}}}$$

de onde calculamos, usando agora a regra de multiplicação com radicais,

$$a^{\frac{p}{q}} \cdot b^{\frac{m}{n}} = \sqrt[q]{a^p} \cdot \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[qn]{a^{pn}} \cdot \sqrt[qn]{a^{mq}} = \sqrt[qn]{a^{pn+mq}}.$$

O resultado obtido é, novamente por definição, igual a

$$a^{\frac{pn+mq}{qn}} = a^{\frac{pn}{qn} + \frac{mq}{qn}} = a^{\frac{p}{q} + \frac{m}{n}}$$

onde, nas duas últimas igualdades, nos limitámos a efectuar cálculos com a fracção que figura no expoente. A igualdade pretendida fica provada.

---

**EXEMPLOS.** (i) Calculemos  $3^{1/2} + 2 \times 3^{3/2}$ :

$$3^{1/2} + 2 \times 3^{3/2} = 3^{1/2} + 2 \times 3^{1/2} \times 3 = 3^{1/2}(1 + 2 \times 3) = 7 \times 3^{1/2} = 7\sqrt{3}.$$

(ii) Para calcular  $\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}$  e apresentar o resultado com denominador racional, podemos proceder assim:

$$\begin{aligned} \sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} &= 2^{1/2} - \frac{1}{2^{1/2}} = 2^{1/2} - 2^{-1/2} = \\ &= 2^{1/2} - 2^{1/2} \times 2^{-1} = 2^{1/2}(1 - 2^{-1}) = 2^{1/2} \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} 2^{1/2} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(iii)} \quad \frac{x^{1/2} - 1}{x^{1/3}} &= \frac{x^{1/2}}{x^{1/3}} - \frac{1}{x^{1/3}} = x^{1/2-1/3} - x^{-1/3} = x^{1/6} - x^{-1/3} \\ &= \sqrt[6]{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}. \end{aligned}$$

Este cálculo é válido para  $x > 0$ .

(iv)  $(1 + x^{-1/2})(1 - x^{-1/2}) = 1 - (x^{-1/2})^2 = 1 - x^{-1} = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$ . O cálculo é válido para  $x > 0$ .

$$\text{(v)} \quad (x^{1/3} + 1)^2 = x^{2/3} + 2x^{1/3} + 1 = \sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 1.$$

(vi) Se quisermos escrever  $\frac{3^{1/2} - 27^{1/2}}{1 + \sqrt{3}}$  sem radicais no denominador, podemos efectuar o cálculo:

$$\begin{aligned} \frac{3^{1/2} - 27^{1/2}}{1 + \sqrt{3}} &= \frac{3^{1/2} - (3^3)^{1/2}}{1 + \sqrt{3}} = \frac{3^{1/2} - 3^{3/2}}{1 + \sqrt{3}} = \frac{3^{1/2} - 3 \times 3^{1/2}}{1 + \sqrt{3}} \\ &= \frac{3^{1/2}(1 - 3)}{1 + \sqrt{3}} = \frac{-2\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} = \frac{-2\sqrt{3}(1 - \sqrt{3})}{(1 + \sqrt{3})(1 - \sqrt{3})} = \frac{6 - 2\sqrt{3}}{1 - 3} \\ &= -3 + \sqrt{3}. \end{aligned}$$

(vii) Verificar que, sempre que o denominador não se anula:

$$\frac{x^{1/3} - y^{2/3}}{x^{2/3} - y^{4/3}} = \frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{xy^2} + y\sqrt[3]{y}}{x + y^2}$$

Vamos tomar o primeiro membro e simplificá-lo:

$$\frac{x^{1/3} - y^{2/3}}{x^{2/3} - y^{4/3}} = \frac{x^{1/3} - y^{2/3}}{(x^{1/3})^2 - (y^{2/3})^2} = \frac{x^{1/3} - y^{2/3}}{(x^{1/3} + y^{2/3})(x^{1/3} - y^{2/3})} = \frac{1}{x^{1/3} + y^{2/3}}.$$

Trata-se agora de ver que

$$\frac{1}{x^{1/3} + y^{2/3}} = \frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{xy^2} + y\sqrt[3]{y}}{x + y^2}$$

o que pode ser verificado através da igualdade equivalente

$$x + y^2 = (x^{1/3} + y^{2/3}) \left( \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{xy^2} + y\sqrt[3]{y} \right).$$

Ora, efectuando as operações no 2º membro com utilização de potências, vem

$$\begin{aligned} (x^{1/3} + y^{2/3}) \left( \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{xy^2} + y\sqrt[3]{y} \right) &= (x^{1/3} + y^{2/3}) [x^{2/3} - (xy^2)^{1/3} + y \cdot y^{1/3}] \\ &= (x^{1/3} + y^{2/3}) (x^{2/3} - x^{1/3} \cdot y^{2/3} + y^{4/3}) \\ &= x^{1/3+2/3} - x^{1/3+1/3}y^{2/3} + x^{1/3}y^{4/3} + y^{2/3}x^{2/3} - x^{1/3}y^{2/3+2/3} + y^{2/3+4/3} = x + y^2. \end{aligned}$$

## Exercícios da Secção 1.2

- 1 Utilizando, numa calculadora, apenas a tecla que permite calcular quadrados, indicar quais são as “melhores” aproximações com 0, 1 ou 2 casas decimais, dos números

$$\sqrt{3}, \quad \sqrt{10}, \quad \sqrt{120}, \quad \sqrt{1\,000}.$$

(Pretende-se para cada número uma aproximação inferior e outra superior.)

- 2 Verificar:  $(\sqrt{3} - 2)^2 = 7 - 4\sqrt{3}$ . É verdade que

$$\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} = \sqrt{3} - 2?$$

- 3 Qual é maior:  $\sqrt[3]{10}$  ou  $\sqrt{5}$ ?

- 4 Simplificar a expressão

$$5\sqrt{x} - 7\sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x^3}$$

pondo em evidência o factor  $\sqrt{x}$ .

- 5 Simplificar

$$\sqrt{12x^3} - \sqrt{3x}; \quad \sqrt[3]{54x} - \frac{\sqrt[3]{x^7}}{4}$$

pondo em evidência um radical contendo  $x$ , em cada caso.

- 6 Apresentar as expressões seguintes com um único radical e nunca em denominador:

$$\sqrt{2x} \cdot \sqrt[4]{1+x}; \quad \frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt[4]{x}}; \quad \frac{1-x^2}{\sqrt{(1+x)^3}}; \quad \frac{x^2+6x+9}{\sqrt{(x+3)^3}}.$$

- 7 Efectuar as operações dando o resultado sob a forma de fracção que não tenha radicais no denominador:

$$\frac{1}{x} - \frac{2}{\sqrt{x}}; \quad x^2\sqrt{x} + \frac{\frac{x}{2} - \frac{1}{x\sqrt{x}}}{\frac{1}{x}}.$$

- 8 Apresentar as seguintes expressões sem radicais no denominador:

$$\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{5}}; \quad -\frac{1}{10\sqrt{x^3}}; \quad \frac{4x}{\sqrt[3]{x}}; \quad \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{x}}$$

- 9 Apresentar as seguintes expressões sem radicais no numerador:

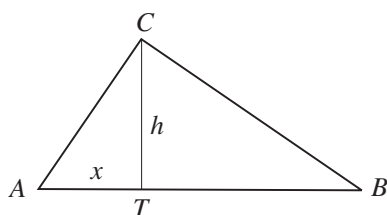
$$\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}; \quad \frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}; \quad \frac{x\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}.$$

[10] Um cubo está inscrito numa esfera. Expressar o volume da esfera em função da área total do cubo.

[11] Uma pirâmide quadrangular regular tem altura igual à aresta da base. Expressar o volume da pirâmide em função da sua área total.

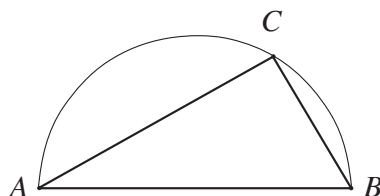
[12] Sabemos que o comprimento do lado do hexágono regular inscrito na circunferência de raio  $R$  é igual a  $R$ . Expressar o comprimento do lado do *dodecágono* regular inscrito em função de  $R$ .

[13] No triângulo  $ABC$ , rectângulo em  $C$ , com  $AB = 1$ , exprimir a altura  $h$  relativa ao lado  $AB$  em função da projecção  $x$  de  $AC$  sobre  $AB$ .



(Sugestão: os triângulos  $ATC$  e  $CTB$  são semelhantes.)

[14] De todos os percursos entre os pontos dados  $A$  e  $B$ , constituídos por dois segmentos de recta  $AC$ ,  $CB$ , em que  $C$  pertence à semicircunferência de diâmetro  $AB$ , qual parece ser o mais longo?



Tomar  $AB = 2$ . (Expressar o comprimento do percurso  $AC + CB$  em função de  $x = AC$  e em seguida recorrer a uma calculadora gráfica para ter uma primeira impressão sobre a resposta.)

[15] Calcular, sem usar calculadora:  $16^{3/2}$ ;  $\left(\frac{27}{8}\right)^{2/3}$ ;  $81^{-1/2}$ .

[16] Escrever as expressões  $x^2(2x)^{1/2}$ ;  $\frac{(2x)^{1/3}}{x}$ , sob a forma de produto de um factor numérico e uma potência de  $x$ .

[17] Escrever as expressões seguintes de modo a que surjam apenas radicais e fracções, mas não potências:

$$\left(\frac{2^{1/3}}{x^{1/6}}\right)^{3/2}; \quad \frac{(1+x^2)^{1/2}(1-x^2)^{-1/2}}{1+x}; \quad \frac{1-x^{1/2}}{1+x^{1/2}}; \quad \frac{1-x^{-1/2}}{x^{1/2}-1}.$$

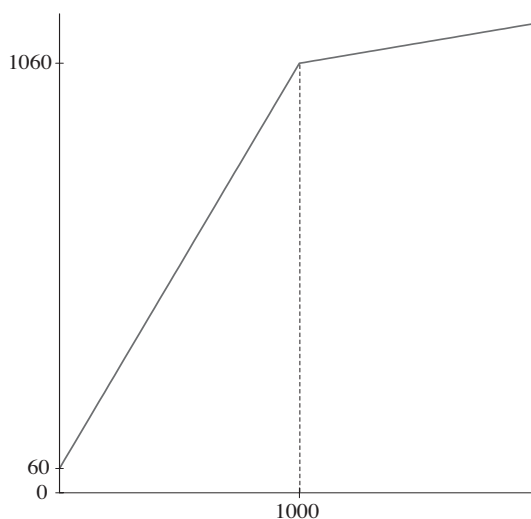
## 1.3 Funções dadas por restrições a subconjuntos do domínio

Já no 10º ano deparámos com exemplos de funções cuja expressão designatória contém instruções para utilizar mais do que uma expressão algébrica contendo a variável independente  $x$ , dependendo a utilização da situação de  $x$  no domínio: recordem-se os exemplos 1.9 e 5.7 em **10**, e ainda as funções em que intervém o módulo, no § 5 de **10**. Vamos estudar aqui novos exemplos.

**EXEMPLO 1.3.1** No seguro LAR PROTEGIDO, que tem por objectivo cobrir danos ou furtos em objectos que fazem parte do recheio de uma casa, o prémio anual a pagar é de 60 € ; em caso de sinistro, a responsabilidade pela reposição dos valores perdidos é do segurado desde que esses valores não ultrapassem 1 000 € ; e a Companhia de Seguros indemniza 90% dos valores perdidos para além de 1 000 € . Nestas condições, a despesa anual total do segurado é função do valor perdido no ano ( $x$ ), dada por

$$f(x) = \begin{cases} x + 60 & \text{se } 0 \leq x \leq 1\,000 \\ 0.1x + 960 & \text{se } x > 1\,000 \end{cases}$$

uma vez que  $60 + 1\,000 + 0.10(x - 1\,000) = 0.1x + 960$ .



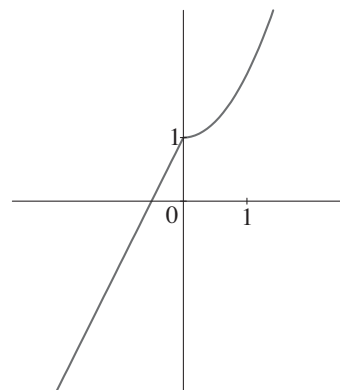
A função  $f$  fica conhecida a partir das suas restrições aos intervalos  $[0, 1\,000]$  e  $]1\,000, +\infty[$ . Em cada um destes, é uma função afim, mas não é, obviamente, afim no seu domínio  $[0, +\infty[$ .

Uma função  $f$ , como a deste exemplo e dos exemplos citados acima, cujo domínio admite uma decomposição em dois ou mais intervalos tais que  $f$  é afim em cada um deles, é por vezes referida com a designação de *função seccionalmente afim*.

Uma técnica de definição semelhante permite combinar restrições de funções de vários tipos para obter novas funções.

**EXEMPLO 1.3.2** Seja  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

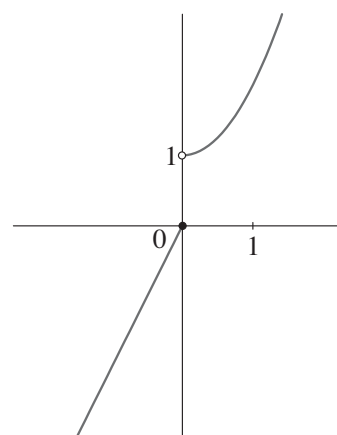
$$g(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{se } x < 0 \\ x^2 + 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$



Estamos em presença de uma função com uma restrição afim e outra restrição quadrática. Observe-se que em lugar da condição “se  $x < 0$ ”, na primeira linha da chaveta, poderíamos também ter escrito “se  $x \leq 0$ ”, visto que o valor de  $2x + 1$  coincide com o de  $x^2 + 1$  se  $x = 0$ . Analogamente, no exemplo precedente, poderíamos ter substituído o fim da segunda linha da chaveta por “se  $x \geq 1\,000$ ”.

**EXEMPLO 1.3.3** A função  $h : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

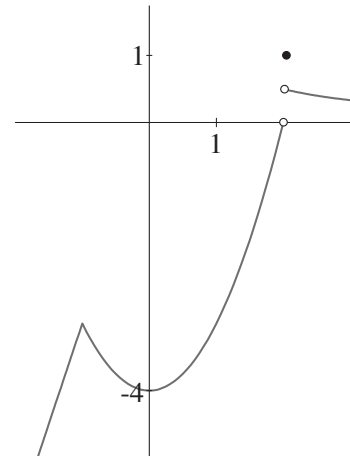
$$h(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x \leq 0 \\ x^2 + 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$



tem como gráfico a união de um segmento de recta com um arco de parábola; verifica-se a existência de um *salto* entre os valores que  $h$  toma em pontos  $x < 0$  e os valores tomados em pontos  $x > 0$ . O segmento de recta “não cola” com o arco de parábola. Neste exemplo, e noutros semelhantes, a bola escura e a bola branca em pontos com a mesma abcissa significam, por convenção, que o primeiro *pertence* ao gráfico e o segundo *não*.

**EXEMPLO 1.3.4** Para a função  $k : [-2, 3] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$k(x) = \begin{cases} 3x & \text{se } -2 \leq x \leq -1 \\ x^2 - 4 & \text{se } -1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{se } x = 2 \\ 1/x & \text{se } 2 < x \leq 3 \end{cases}$$



o gráfico é constituído por um segmento de recta que “cola” com um arco de parábola e ainda por um arco de hipérbole e um ponto isolado. Há um *salto* entre valores tomados à esquerda e à direita do ponto 2, e o próprio valor da função nesse ponto não é determinado por nenhuma das fórmulas que definem  $k(x)$  em pontos  $x$  próximos de 2.

Terminamos esta secção com um exemplo útil e interessante. Dado um número real  $x$ , chama-se *característica* de  $x$  o (único) número *inteiro*  $C(x)$  que cumpre as duas condições

$$C(x) \leq x \quad \text{e} \quad x - C(x) < 1.$$

Por palavras:  $C(x)$  é, dos inteiros que não ultrapassam  $x$ , o maior (visto que a sua distância a  $x$  é menor que 1 e 1 é a distância entre inteiros consecutivos).

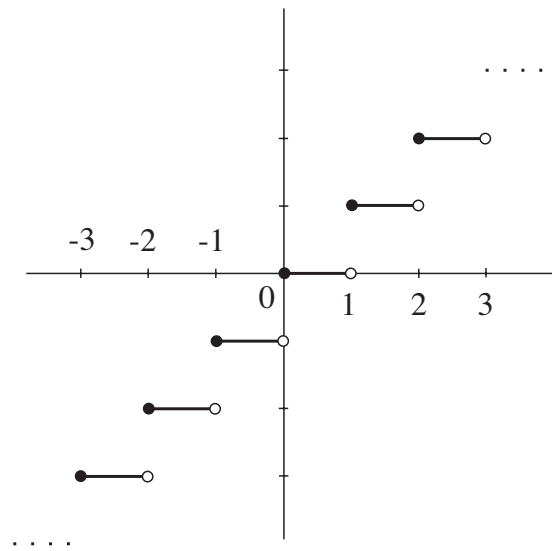
Assim, por exemplo, temos

$$C(-3.5) = -4, \quad C(-3) = -3, \quad C\left(\frac{1}{4}\right) = 0, \quad C(\pi) = 3.$$

**EXEMPLO 1.3.5** A função  $x \mapsto C(x)$ , definida acima, pode ser dada também pela infinidade de expressões

$$C(x) = \begin{cases} \dots & \dots \\ -2 & \text{se } x \in [-2, -1[ \\ -1 & \text{se } x \in [-1, 0[ \\ 0 & \text{se } x \in [0, 1[ \\ 1 & \text{se } x \in [1, 2[ \\ \dots & \dots \end{cases}$$





O seu contradomínio é o conjunto  $\mathbb{Z}$  dos números inteiros. O gráfico apresenta *saltos* junto dos pontos de abcissa inteira.

## Exercícios da Secção 1.3

1 Fazer um esquema dos gráficos das funções:

$$(a) f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{se } x \leq 0 \\ 1 - x & \text{se } x \geq 0, \end{cases}$$

$$(b) g: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } -1 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ |x - \frac{2}{3}| & \text{se } \frac{1}{2} < x \leq 1, \end{cases}$$

e indicar se têm máximo ou mínimo (absolutos).

2 Esquematizar o gráfico das funções  $2C(x)$  e  $C\left(x - \frac{1}{2}\right)$ .

3 A HAPPY FLIGHT tem uma campanha para premiar passageiros frequentes, concedendo um desconto de 10% sobre o preço base das viagens aos clientes que, nos dois anos anteriores, compraram bilhetes num total de pelo menos 650 €.

Designando por  $x$  o total das compras de um passageiro à HAPPY FLIGHT nos últimos dois anos, escrever, em função de  $x$ , quanto é que o passageiro tem a pagar por um bilhete que pretende comprar agora e cujo preço base é 455 € (Admite-se que  $x$  pode tomar qualquer valor do intervalo  $[0, +\infty[$ .)

4 Num determinado modelo de cálculo do imposto sobre rendimentos de pessoas, procede-se de acordo com as seguintes instruções:

- se o rendimento anual de um contribuinte é inferior a 6 000 euros, não há imposto a pagar;
- se o rendimento anual se situa entre 6 000 e 10 000 €, o imposto a colectar é 15% da diferença entre esse rendimento e 6 000 €;
- se o rendimento anual se situa entre 10 000 € e 20 000 €, o imposto a colectar obtém-se adicionando 600 € a 20% da diferença entre o rendimento e 10 000 €;
- se o rendimento anual excede 20 000 €, o imposto a colectar obtém-se adicionando 2 600 € a 30% da diferença entre o rendimento e 20 000 €.

Escrever uma expressão designatória para o cálculo do imposto em função do rendimento anual.

5 Escrever a expressão designatória da função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  que é constante no intervalo  $] -\infty, 0]$  e cuja restrição a  $[0, +\infty[$  coincide com a função  $x^2 + 1$  neste intervalo. Esboçar o gráfico.

6 Escrever a expressão analítica da função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  que tem restrições afins aos intervalos  $] -\infty, 0[$  e  $] 0, +\infty[$ , sendo  $f(-2) = 3$ ,  $f(-1) = 0$ ,  $f(0) = 0$ ,  $f(10) = 0$  e  $f(20) = 10$ .

## 1.4 Notas sobre resolução de equações e inequações de tipos simples

Em anos anteriores, o leitor já se iniciou na resolução de equações e inequações. No 10º ano foi dada uma atenção particular ao estudo de equações e inequações que envolvem trinómios do 2º grau. No apêndice de **10** encontram-se observações úteis sobre algumas técnicas básicas na resolução de equações: desembaraçar de denominadores e (quando intervêm radicais quadráticos) elevar ao quadrado ambos os membros da equação. Recomendamos a releitura desse apêndice como apoio ao estudo dos exemplos que agora vamos incluir.

### EXEMPLO 1.4.1 A equação

$$\frac{x}{2x-1} = \frac{5-8x}{4x-2} + 10 \quad (1.12)$$

envolve fracções racionais. Para a resolver vamos multiplicar ambos os membros por  $4x-2$  (que é múltiplo comum dos denominadores), obtendo a equação linear

$$2x = 5 - 8x + 40x - 20 \quad (1.13)$$

cuja solução, como facilmente se verifica, é  $x = \frac{1}{2}$ . Qualquer solução de (1.12) é solução de (1.13), mas como  $\frac{1}{2}$  anula os denominadores em (1.12),  $\frac{1}{2}$  não é admissível como solução de (1.12), visto que os valores das expressões que surgem em (1.12) não têm significado para  $x = \frac{1}{2}$ . Concluimos que (1.12) *não tem soluções*.

As funções que intervêm na equação (1.12) têm domínio  $\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$ ; ao desembaraçarmos de denominadores obtemos nova equação (1.13) onde as funções intervenientes têm domínio  $\mathbb{R}$ . Em tais casos é necessário regressar à equação de partida e verificar se para ela fazem sentido eventuais soluções encontradas. ■

**EXEMPLO 1.4.2** No Apêndice A-12) de **10**, foi dado um exemplo de equação onde intervêm radicais quadráticos. Vamos aqui apresentar outro. Seja a equação

$$1 - \sqrt{x} = x - 11.$$

Isolando o radical num dos membros, ficamos com a equação equivalente

$$-\sqrt{x} = x - 12.$$

Elevando ambos os membros ao quadrado, obtemos

$$x = x^2 - 24x + 144,$$

ou ainda

$$x^2 - 25x + 144 = 0$$

cujas raízes são 16 e 9. Voltando à equação dada, verificamos que 9 é efectivamente solução, mas 16 não o é. A explicação de ocorrências como esta foi feita no Apêndice A-12) de **10**. ■

**EXEMPLO 1.4.3** Seja agora a equação

$$\sqrt{x+3} = 1 - \sqrt{2x}.$$

Elevando ao quadrado ambos os membros obtemos

$$x+3 = 1 + 2x - 2\sqrt{2x}$$

que é equivalente a

$$x-2 = 2\sqrt{2x}.$$

Aqui isolámos o radical ainda presente para o eliminar com nova elevação ao quadrado:

$$x^2 - 4x + 4 = 8x.$$

Esta equação é equivalente a

$$x^2 - 12x + 4 = 0$$

e imediatamente constatamos que tem as raízes

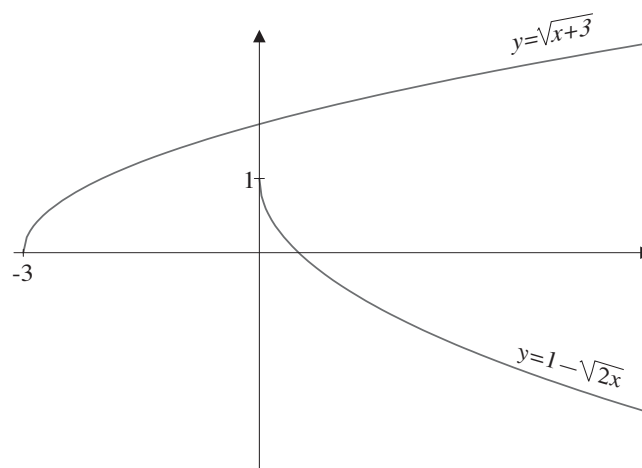
$$x_1 = 6 + 4\sqrt{2} \quad \text{e} \quad x_2 = 6 - 4\sqrt{2}.$$

Serão estes números soluções da equação inicial? Quanto a  $x_1$ , se fosse

$$\sqrt{9 + 4\sqrt{2}} = 1 - \sqrt{2(6 + 4\sqrt{2})}$$

teríamos um número superior a 3 (o 1º membro) igual a um número inferior a 1 (o 2º membro), o que é impossível. Portanto,  $x_1$  não é solução. Por uma razão análoga (que o leitor é convidado a explicitar)  $x_2$  também não é solução. A equação dada não tem soluções.

Neste (e noutros casos) poderíamos ter antecipado a existência ou não existência de raízes recorrendo à representação gráfica das funções que intervêm nos dois membros da equação; constata-se no exemplo em análise que não há ponto comum aos dois gráficos.



Se quisermos aprofundar a questão, o que sucede é que

$$\sqrt{x+3} + \sqrt{2x} = 1$$

não pode ter lugar pela simples razão de que é sempre

$$\sqrt{x+3} + \sqrt{2x} > 1 \quad \forall x \geq 0,$$

visto que  $\sqrt{x+3} + \sqrt{2x} \geq \sqrt{x+3} > \sqrt{3} > 1$ , para  $x \geq 0$ . ■

**EXEMPLO 1.4.4** A resolução de inequações em que intervêm fracções racionais pode fazer-se utilizando argumentos semelhantes aos utilizados para polinómios. Comecemos por resolver

$$\frac{x+1}{2x-3} < 1.$$

É conveniente deixar apenas 0 num dos membros, o que se faz neste caso adicionando  $-1$  a ambos:

$$\frac{x+1}{2x-3} - 1 < 0.$$

Seguidamente, efectuando os cálculos, temos

$$\frac{-x+4}{2x-3} < 0.$$

Agora trata-se de estudar o sinal de uma fracção. A fracção é negativa quando numerador e denominador têm sinais contrários. Escrevendo um quadro de sinais para um e outro,

$x$	$3/2$			$4$	
$-x+4$	+	+	+	0	-
$2x-3$	-	0	+	+	+

conclui-se que os valores de  $x$  que resolvem a inequação são os dados pela condição

$$x < \frac{3}{2} \quad \text{ou} \quad x > 4. \quad \blacksquare$$

**EXEMPLO 1.4.5** Quando estão presentes polinómios do 2º grau o procedimento é semelhante. Para resolver

$$\frac{2x - 7}{x^2 - 4} > 1$$

obtemos sucessivamente as inequações equivalentes

$$\begin{aligned}\frac{2x - 7}{x^2 - 4} - 1 &> 0, \\ \frac{-x^2 + 2x - 3}{x^2 - 4} &> 0,\end{aligned}$$

e do quadro de sinais

$x$	-3		-2		1		2	
$-x^2 + 2x - 3$	-	0	+	+	+	0	-	-
$x^2 - 4$	+	+	+	0	-	-	-	0

concluimos que as soluções são dadas por

$$-3 < x < -2 \quad \text{ou} \quad 1 < x < 2.$$

■

**EXEMPLO 1.4.6** A resolução de

$$\frac{2x - 7}{x^2 + 4} > 1$$

seria um pouco mais simples. Porquê?

■

A resolução de equações ou inequações pode ser em muitos casos efectuada, pelo menos de maneira “aproximada”, usando uma máquina com capacidade gráfica. A inequação

$$f(x) < g(x) \tag{a}$$

onde  $f, g$  são funções reais dadas, é equivalente à inequação

$$h(x) < 0 \tag{b}$$

onde  $h(x) = f(x) - g(x)$ . Podemos optar por obter os gráficos de  $f$  e  $g$  e, de acordo com (a), procurar as abcissas dos pontos do gráfico de  $f$  que se situam abaixo dos pontos com as mesmas abcissas pertencentes ao gráfico de  $g$ . Ou então, obtemos o gráfico de  $h$  e, de acordo com (b), procuraremos as abcissas dos pontos desse gráfico que se situam abaixo do eixo  $0x$ .

Este procedimento pode dar uma primeira indicação para a resolução de problemas como os que acima exemplificámos. Na verdade, é aplicável a uma classe muito mais vasta de funções (todas aquelas que a máquina permite tratar) mas deve ter-se em conta que, sem um conhecimento teórico prévio do comportamento das funções envolvidas, pode ser muito difícil a escolha acertada da janela (ou janelas) de visualização que permita dar uma resposta satisfatória ao problema.

## Exercícios da Secção 1.4

1 Resolver as equações:

$$\sqrt{x-1} = 3x; \quad \sqrt{x} = \sqrt{1-x}; \quad 1 + \sqrt{x} = \frac{1}{2}\sqrt{x+1}; \quad \sqrt{4-x^2} = x.$$

2 Resolver as inequações:

$$\frac{3x-1}{x^2+1} < 0; \quad \frac{3x-1}{x^2-1} < 0.$$

## 1.5 Função inversa

Consideremos as funções, bem nossas conhecidas,

$$\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \alpha(x) = \frac{x}{2} - 1,$$
$$\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \beta(x) = x^2 + 1.$$

A cada número real  $x$  corresponde, por meio de  $\alpha$  ou  $\beta$ , outro número bem determinado. Quando escrevemos as condições

$$y = \alpha(x) \tag{1.14}$$

ou

$$y = \beta(x) \tag{1.15}$$

uma vez dado  $x$ , o valor de  $y$  fica bem determinado. Colocamos agora a questão ao contrário, invertendo o papel das variáveis:

*Dado  $y$ , será que a relação (1.14) (ou (1.15)) permite calcular  $x$  sem qualquer ambiguidade?*

Para (1.14), a resposta é SIM. Com efeito, de

$$y = \frac{x}{2} - 1 \tag{1.16}$$

resulta, resolvendo esta equação em ordem a  $x$ ,

$$x = 2y + 2. \tag{1.17}$$

Para (1.15), a resposta é NÃO. Porque, de

$$y = x^2 + 1 \tag{1.18}$$

resulta que

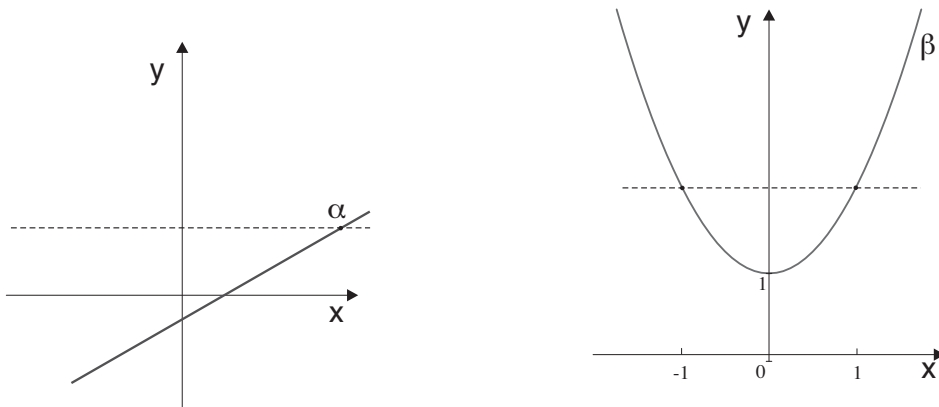
$$x = \pm\sqrt{y-1} \tag{1.19}$$

e obtemos *dois* valores possíveis para  $x$  sempre que  $y > 1$ . (Se  $y = 1$  obtemos, de facto, apenas um valor:  $x = 0$ .) Se  $y < 1$ , nenhum valor de  $x$  é obtido.

Para traduzir esta situação é costume dizer que a *condição* (1.14), que define a função  $\alpha$ , *define também  $x$  como função de  $y$* , mas a *condição* (1.15), que define a função  $\beta$ , *não define  $x$  como função de  $y$* .

A grande diferença entre um e outro caso está no comportamento das funções  $\alpha$  e  $\beta$ : para a função  $\alpha$ , dado um número  $y$  do contradomínio (que é  $\mathbb{R}$ ) ele é imagem de *um só*





elemento do domínio; para a função  $\beta$ , dado um número superior a 1 no contradomínio (que é  $[1, +\infty[$ ) há sempre *mais de um* (exactamente dois) elementos do domínio que o têm como imagem. Em termos geométricos, esta diferença pode descrever-se dizendo que *cada recta horizontal encontra o gráfico de  $\alpha$  em apenas um ponto*; mas *as rectas horizontais de ordenada  $> 1$  encontram o gráfico de  $\beta$  em mais do que um ponto* (exactamente dois).

Observamos desde já que é possível modificar a condição (1.15) com o objectivo de obter uma nova condição que já permita definir  $x$  como função de  $y$ . Basta considerar a conjunção

$$y = x^2 + 1 \quad \text{e} \quad x \geq 0. \quad (1.20)$$

Sabemos, com efeito, que de (1.20) resulta sem ambiguidade

$$x = \sqrt{y - 1} \quad \text{e} \quad y \geq 1. \quad (1.21)$$

Agora, cada elemento do contradomínio é imagem de *apenas um* elemento do domínio.

As fórmulas (1.16)-(1.17) têm entre si uma relação em tudo semelhante à das fórmulas (1.20)-(1.21). A expressão designatória (1.17) define uma nova função, a que chamamos *inversa* de  $\alpha$ ; o papel da variável independente é agora desempenhado por  $y$ . Representamos por  $\hat{\alpha}$  esta função. Temos, como é fácil constatar,

$$\begin{aligned} \alpha(0) &= -1, & \hat{\alpha}(-1) &= 0, \\ \alpha(2) &= 0, & \hat{\alpha}(0) &= 2, & \dots \end{aligned}$$

e, de um modo geral

$$\alpha(x) = y \iff x = \hat{\alpha}(y), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Em termos de gráfico como conjunto de pares (**10**, pág. 19), podemos dizer que os pares que constituem o gráfico de  $\hat{\alpha}$  se obtêm dos que constituem o gráfico de  $\alpha$  trocando o 1º com o 2º elementos;  $(0, -1)$  está no gráfico de  $\alpha$ , e  $(-1, 0)$  está no gráfico de  $\hat{\alpha}$ .

Ao passar de  $\alpha$  para  $\hat{\alpha}$  diz-se que se inverteu a função  $\alpha$ .

Quando passámos de (1.20) para (1.21) também invertemos uma função, mas não a função  $\beta$ ! Repare-se que já tínhamos observado a dificuldade (a impossibilidade!) de inverter  $\beta$ . A condição (1.20) representa uma nova função, que é a *restrição de  $\beta$  a  $[0, +\infty[$* , e a que vamos chamar  $\gamma$ :

$$\gamma : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}, \quad \gamma(x) = x^2 + 1. \quad (1.18')$$

A fórmula (1.21) dá-nos a expressão designatória de uma nova função  $\hat{\gamma}$ , a que chamamos inversa de  $\gamma$ ;  $y$  passou a ser encarada como variável independente. À semelhança do que sucedia no caso anterior, temos, por exemplo,

$$\gamma(2) = 5, \quad \hat{\gamma}(5) = 2$$

e, em geral,

$$\gamma(x) = y \iff x = \hat{\gamma}(y), \quad \forall x \geq 0, \forall y \geq 1.$$

Observemos como o domínio (contradomínio) da função inversa é o contradomínio (domínio) da função dada em cada caso. No primeiro exemplo, ambos coincidem com  $\mathbb{R}$ , mas no segundo temos:

$$\begin{aligned} \text{domínio de } \gamma &= [0, +\infty[ = \text{contradomínio de } \hat{\gamma}, \\ \text{contradomínio de } \gamma &= [1, +\infty[ = \text{domínio de } \hat{\gamma}. \end{aligned}$$

É também interessante comparar, do ponto de vista geométrico, os gráficos de uma função e da sua inversa. Naturalmente, a comparação exige que usemos o mesmo referencial cartesiano para ambos e, por isso, é conveniente escrever as expressões analíticas das duas funções com o mesmo símbolo no lugar da variável independente<sup>4</sup>. Assim, no caso da função  $\alpha$ , as funções a comparar são

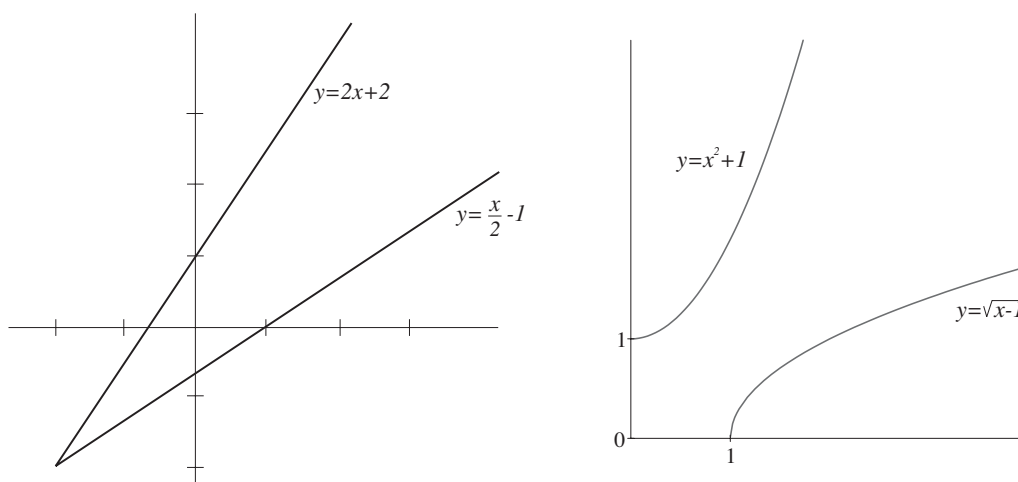
$$\alpha(x) = \frac{x}{2} - 1 \quad \text{e} \quad \hat{\alpha}(x) = 2x + 2,$$

enquanto, no caso da função  $\gamma$ , trata-se de

$$\gamma(x) = x^2 + 1 \quad \text{e} \quad \hat{\gamma}(x) = \sqrt{x - 1}.$$

---

<sup>4</sup>Recorde-se que somos livres de escolher os símbolos que representam a variável independente e a variável dependente na expressão analítica de uma função.



Antes de explicitar a relação entre os gráficos de  $\alpha$  e  $\hat{\alpha}$  por um lado e os de  $\gamma$  e  $\hat{\gamma}$  por outro (terá o leitor notado já alguma simetria a evidenciar-se?), vamos refazer o procedimento anterior em termos genéricos para introduzir o conceito de “função inversa”.

**DEFINIÇÃO.** Uma função real de variável real  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  diz-se *injectiva* se cada elemento do contradomínio é imagem por  $f$  de *apenas um elemento do domínio*. Ou, dito de outro modo equivalente: se, dados dois quaisquer elementos diferentes do domínio, as suas imagens por  $f$  são diferentes.

Em símbolos: “ $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  é injectiva” significa

$$\forall x_1, x_2 \in A \quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

ou ainda,

$$\forall x_1, x_2 \in A \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

**EXEMPLO 1.5.1** A função  $\alpha$  é injectiva. A função  $\beta$  não é injectiva, mas a sua restrição  $\gamma$  é injectiva. ■

**EXEMPLO 1.5.2** *Toda a função estritamente monótona é injectiva.* A justificação desta afirmação é simples e é deixada ao cuidado do leitor. ■

Seja  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  uma função injectiva e consideremos a frase onde intervêm duas variáveis  $a$  e  $b$ :

“Para cada elemento  $b$  do contradomínio de  $f$  há pelo menos um elemento  $a$  do domínio de  $f$  tal que  $b = f(a)$ ”.

A frase assim escrita é banal; não passa da definição de contradomínio. Mas, como  $f$  é injectiva, podemos modificá-la substituindo a expressão

“pelo menos um”

por

“um e um só”.

Então a frase assim modificada pode ser encarada como uma regra que permite fazer corresponder a cada elemento  $b$  do contradomínio de  $f$  um elemento bem determinado do domínio de  $f$ . Por outras palavras, estamos em presença de uma nova função  $\hat{f}$  que, por definição, actua do seguinte modo:

$$\hat{f}(b) = a \iff b = f(a). \quad (1.22)$$

O domínio (respectivamente o contradomínio) de  $\hat{f}$  é o contradomínio (respectivamente o domínio) de  $f$ .

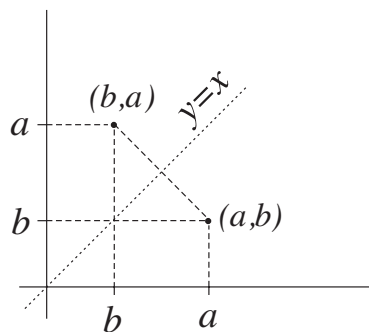
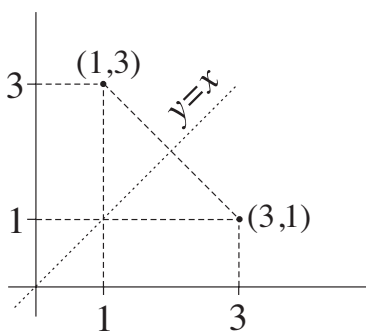
**DEFINIÇÃO.** A função  $\hat{f}$  definida por (1.22) chama-se *função inversa* de  $f$ . É usual utilizar a notação  $f^{-1}$  para a representar. Assim, temos

$$f^{-1}(b) = a \iff b = f(a)$$

e portanto, em termos de gráficos, imediatamente concluímos que

Um ponto  $(b, a)$  está no gráfico de  $f^{-1}$  se, e só se,  $(a, b)$  está no gráfico de  $f$ .

Detenhamos-nos a observar como se relacionam entre si, do ponto de vista geométrico, os pontos  $(a, b)$  e  $(b, a)$ .



É fácil constatar que, num referencial ortonormado,  $(a, b)$  e  $(b, a)$  são pontos *simétricos a respeito da bissetriz dos quadrantes ímpares* (a recta  $y = x$ ). Esta é a mediatriz do segmento

que tem aqueles pontos como extremos; cada um dos pontos é “imagem” do outro por “reflexão no espelho” que é a bissetriz.

Esta observação permite-nos obter o gráfico da função inversa  $f^{-1}$  de uma função dada. Podemos desde já voltar atrás, aos exemplos das funções  $\alpha$  e  $\gamma$  estudados no início da secção, e constatar que os gráficos de  $\alpha^{-1}$  e  $\gamma^{-1}$  são, respectivamente, os “reflexos no espelho” dos gráficos de  $\alpha$  e  $\gamma$ .

**EXEMPLO 1.5.3** Determinemos a inversa da função  $y = \frac{3}{x-2}$  (cujo domínio é  $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ ). Por definição, trata-se de ver como é que esta condição permite exprimir  $x$  a partir de  $y$  e, por isso, há que resolver a equação dada em ordem à “incógnita”  $x$ . Temos, sucessivamente, para  $x \neq 2$ ,

$$\begin{aligned} y(x-2) &= 3, \\ x-2 &= \frac{3}{y} \quad (\text{com } y \neq 0), \\ x &= 2 + \frac{3}{y}. \end{aligned}$$

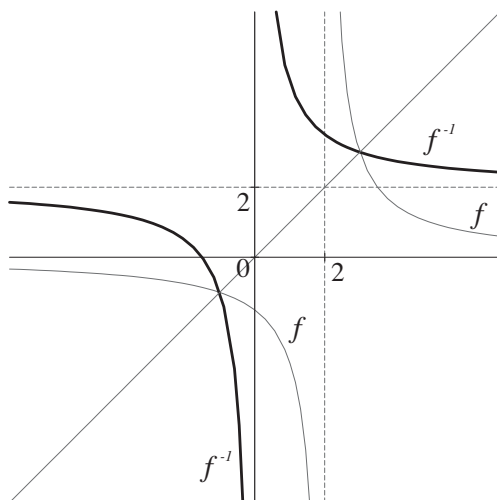
Esta é, pois, a expressão analítica da função inversa, representando  $y$  o papel da variável independente. Se quisermos voltar a chamar  $x$  à variável independente e  $y$  à variável dependente, a expressão fica a ser

$$y = 2 + \frac{3}{x}.$$

Com outra notação podemos dizer: se

$$f(x) = \frac{3}{x-2}, \quad \text{então} \quad f^{-1}(x) = 2 + \frac{3}{x}.$$

Comparando os gráficos desta função e da inicial, constatamos uma vez mais que um é a reflexão do outro relativamente à bissetriz dos quadrantes ímpares. ■



**EXEMPLO 1.5.4** Consideremos agora a função  $y = \sqrt{4 - x^2}$  definida no intervalo  $[0, 2]$ . De acordo com o que vimos no Exemplo 1.2.4, o gráfico desta função consiste na porção de circunferência  $x^2 + y^2 = 4$  que está situada no primeiro quadrante. Para determinar a inversa, se é que ela existe, tentamos resolver a equação

$$y = \sqrt{4 - x^2}, \quad 0 \leq x \leq 2 \quad (1.23)$$

em ordem à incógnita  $x$ , e procuramos a solução (ou soluções) em  $[0, 2]$ .

O nosso procedimento vai ilustrar que ao mesmo tempo que determinamos a expressão da função inversa encontramos o seu domínio (ou seja, o contradomínio da função dada).

Na equação (1.23),  $y$  é dado e é certamente  $\geq 0$ , por definição do símbolo  $\sqrt{\phantom{x}}$ . Elevando ao quadrado ambos os membros obtemos

$$y^2 = 4 - x^2,$$

de onde  $y^2 \leq 4$ ; portanto

$$0 \leq y \leq 2 \quad (1.24)$$

e

$$\begin{aligned} x^2 &= 4 - y^2 \\ x &= \sqrt{4 - y^2}, \quad 0 \leq y \leq 2. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Esta é, pois, a expressão analítica da função inversa procurada. Note-se que escolhemos para  $x$  o valor positivo da raiz quadrada porque sabemos pelos dados que  $x$  só pode variar no intervalo  $[0, 2]$ . De acordo com (1.24), o domínio da função inversa é  $[0, 2]$ . Assim, comparando (1.23) com (1.25), vemos que são fórmulas que definem a mesma função (já que o domínio é o mesmo). Quer dizer, se  $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$  para  $0 \leq x \leq 2$ , então  $f^{-1}(x) = \sqrt{4 - x^2}$  para  $0 \leq x \leq 2$ . Por outras palavras: a função definida por (1.23) coincide com a sua inversa. Esta observação é consistente com o facto de o quarto de circunferência, que constitui o gráfico, ser simétrico relativamente à bissetriz dos quadrantes ímpares. ■

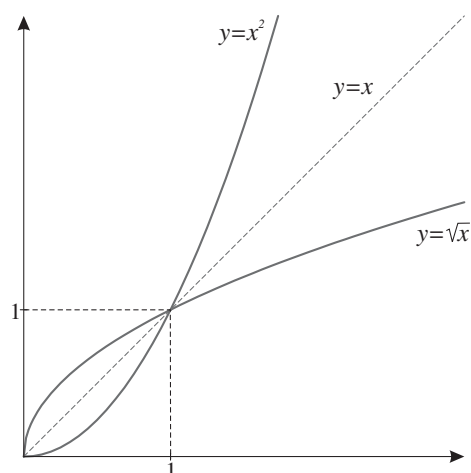
**EXEMPLO 1.5.5** Já sabemos que, por definição do símbolo  $\sqrt{\phantom{x}}$ :

$$\forall u \geq 0, v \geq 0 \quad u = \sqrt{v} \Leftrightarrow v = u^2.$$

Ora isto significa que a *função raiz quadrada*,

$$\begin{aligned} f &: [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) &= \sqrt{x} \end{aligned}$$

é a inversa da função  $g : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x^2$ . Este é, de resto, um exemplo ainda mais simples do que o que apresentámos no início da secção. A comparação dos dois gráficos evidencia uma vez mais o efeito de reflexão em relação à recta  $y = x$ .



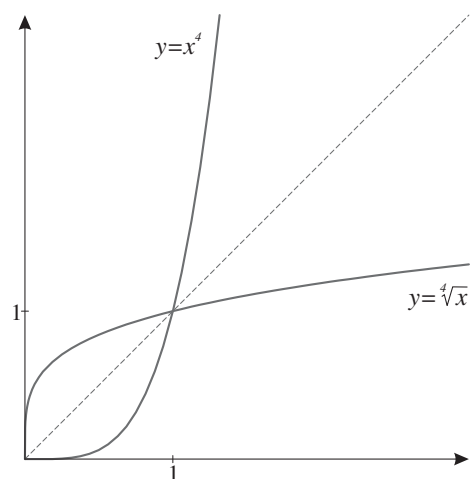
Mais geralmente, por definição do símbolo  $\sqrt[n]{\phantom{x}}$ ,

$$\forall u \geq 0, v \geq 0 \quad u = \sqrt[n]{v} \Leftrightarrow v = u^n. \quad (*)$$

de modo que

a função  $y = \sqrt[n]{x}$ , definida em  $[0, +\infty[$ , é a inversa de  $y = x^n$ , definida também em  $[0, +\infty[$ .<sup>5</sup>

A figura junta mostra os gráficos destas funções no caso  $n = 4$ .



■

---

<sup>5</sup> No caso em que  $n$  é ímpar, a restrição de sinais é desnecessária em (\*), sendo a implicação verdadeira para todo o  $u \in \mathbb{R}$  e todo o  $v \in \mathbb{R}$ . Portanto a função  $\sqrt[n]{x}$  tem então domínio  $\mathbb{R}$ ; é uma função ímpar, tal como a função  $x^n$ .

---

Já vimos (exemplo 1.5.2) que uma função estritamente monótona é injectiva e portanto tem inversa. É fácil concluir ainda que:

se  $f$  é estritamente crescente (respectivamente decrescente) então  $f^{-1}$  é também estritamente crescente (respectivamente decrescente).

Com efeito, suponhamos  $f$  estritamente crescente. Sejam  $a < b$  dois elementos do domínio de  $f^{-1}$ . Então

$$\begin{aligned} f^{-1}(a) = a' & \quad \text{significa} \quad a = f(a'), \\ f^{-1}(b) = b' & \quad \text{significa} \quad b = f(b'). \end{aligned}$$

Se fosse  $a' = b'$  viria  $a = b$ . Se fosse  $a' > b'$  viria  $a > b$ . Logo, tem-se necessariamente  $a' < b'$ .

Em particular,

a função  $\sqrt[n]{x}$ , definida em  $[0, +\infty[$ , é estritamente crescente



## Exercícios da Secção 1.5

- 1 Determinar a expressão designatória e os domínios das inversas das funções:

$$y = 3x - 1; \quad y = -\frac{1}{5}x + 2; \quad s = -t + 10; \quad y = \frac{3x - 1}{x + 2}; \quad u = \sqrt{v - 3}.$$

(No primeiro membro figura sempre a variável dependente.)

- 2 (a) Verificar que as funções

$$x - x^2 \quad \text{e} \quad |x + 2|$$

não são injectivas.

(b) Para cada uma delas, indicar restrições injectivas a um intervalo que contenha 0 e que seja o maior possível. (A inspecção dos gráficos ajuda ...)

(c) Determinar as funções inversas das restrições referidas na alínea anterior.

- 3 Que valores devem ter  $a, b$  para que a função

$$y = ax + b$$

coincida com a sua inversa? Interpretar geometricamente.

- 4 Descobrir uma relação entre  $a, b, c$  e  $d$  para que a função racional

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}$$

seja igual à sua inversa.

- 5 Redemonstrar que  $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{1}{\tan \alpha}$  para os ângulos  $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ . (Sugestão:  $\tan \alpha$  é o declive de uma certa recta. Considerá-la gráfico de uma função e inverter esta.)

- 6 Expressar o raio de uma circunferência em função do perímetro da mesma.

- 7 Um paralelepípedo rectângulo tem dimensões  $a, 2a, 3a$ . Expressar  $a$  em função do volume do paralelepípedo.

- 8 Um cone circular recto tem altura igual ao dobro do raio  $r$  da base. Expressar  $r$  em função do volume do cone.

- \*9 Determinar, recorrendo a um argumento geométrico, a partir do gráfico, a expressão designatória da inversa da função

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{x}{5} & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

## 1.6 Funções compostas

No estudo das funções ocorre com frequência a possibilidade de decompor a correspondência que lhe está subjacente em correspondências mais simples. Por exemplo, consideremos a função racional

$$x \xrightarrow{f} \frac{1}{x} + 3, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

O processo que leva de cada objecto  $x$  à sua imagem  $f(x)$  pode ser encarado como resultando de duas etapas esquematizadas no diagrama de setas

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{g} & \frac{1}{x} \xrightarrow{h} \frac{1}{x} + 3 \\ & \searrow f & \nearrow \\ & & \end{array}$$

As “etapas” que referimos são as funções

$$x \xrightarrow{g} \frac{1}{x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}; \quad u \xrightarrow{h} u + 3, \quad u \in \mathbb{R},^6$$

sendo  $g$  a função que actua em primeiro lugar. Obtém-se  $f(x)$  calculando a imagem por  $h$ , da imagem por  $g$ , de  $x$ :

$$f(x) = h[g(x)], \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Dizemos por isso que  $f$  é a *composição de  $h$  com  $g$* , ou que *resulta de compor  $h$  com  $g$* . Esta maneira de encarar  $f$  fazendo intervir duas outras funções pode ser também vista, de modo mais ingénuo e mais simples, como uma *mudança de variável* na expressão analítica de  $f$ . Assim, se em

$$y = \frac{1}{x} + 3$$

fizemos a mudança  $u = \frac{1}{x}$ , dizemos simplesmente que

$$“y = \frac{1}{x} + 3 \text{ resulta de compor } y = u + 3 \text{ com } u = \frac{1}{x}.”$$

Consideremos ainda outro exemplo muito simples: para a função quadrática  $f$  dada por

$$f(x) = x^2 + 4x + 3, \quad x \in \mathbb{R}$$

temos, como é bem sabido

$$x^2 + 4x + 3 = (x + 2)^2 - 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

---

<sup>6</sup>Utilizamos um outro símbolo para a variável independente de  $h$  para evitar confusões ou ambiguidades.

Então o processo que conduz de  $x$  a  $f(x)$  pode ser imaginado como resultado das duas etapas sucessivas

$$x \mapsto x + 2 \mapsto (x + 2)^2 - 1,$$

o que nos leva a introduzir as funções

$$x \xrightarrow{g} x + 2, \quad x \in \mathbb{R}; \quad u \xrightarrow{h} u^2 - 1, \quad u \in \mathbb{R},$$

sendo novamente  $f$  a composição de  $h$  com  $g$ , visto que  $f(x) = h[g(x)]$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . De outro modo, com a mudança de variável  $u = x + 2$ , podemos dizer que a função

$$y = x^2 + 4x + 3$$

é a composição de  $y = u^2 - 1$  com  $u = x + 2$ .

As situações que nos serviram de exemplo enquadram-se numa circunstância geral que é descrita na seguinte

**DEFINIÇÃO.** Seja  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  uma função real de variável real. Sejam também  $g : A \rightarrow \mathbb{R}$  e  $h : B \rightarrow \mathbb{R}$  duas outras funções reais de variável real de modo que

$$f(x) = h[g(x)] \quad \forall x \in A.^7$$

Então dizemos que  $f$  é *composição de  $h$  com  $g$* , ou que é a *função composta* de  $h$  e  $g$ , e representamo-la pelo símbolo  $h \circ g$ .

Esquemáticamente, isto significa que no diagrama de setas

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{g} & g(x) \xrightarrow{h} h[g(x)] \\ & \searrow \scriptstyle f=h \circ g & \uparrow \\ & & \end{array} \quad (x \in A)$$

o caminho de duas etapas e o caminho directo produzem o mesmo efeito. Note-se que, segundo a nossa definição, quando se fala de compor  $h$  com  $g$ ,  $g$  actua em primeiro lugar.

## Observações sobre a utilização de notações:

1) Dadas as funções  $h$  e  $g$ , através das respectivas expressões analíticas,

$$y = h(x), \quad y = g(x),$$

---

<sup>7</sup>Para que a definição tenha sentido, admitimos tacitamente que o contradomínio de  $g$  está contido no domínio de  $h$ .

como obter a expressão que define a função  $f$ , composta de  $h$  com  $g$ ? Basta substituir o lugar da variável independente de  $h$  pela expressão  $g(x)$ :

$$y = h(g(x)). \quad (1.26)$$

É corrente, para efeito de considerar esta composição, mudar os símbolos que representam a variável independente de  $h$  e a variável dependente de  $g$  utilizando a mesma letra para ambos:

$$y = h(u), \quad u = g(x).$$

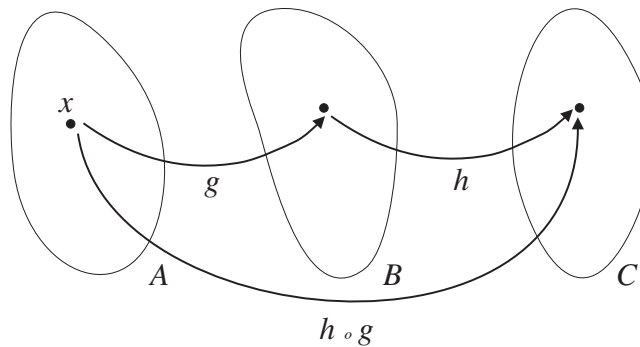
Podemos então dizer que para obter (1.26) fizemos simplesmente uma *mudança de variável*, tendo  $u$  sido substituído pela função  $g(x)$ . Mas convém ter presente que os símbolos a utilizar têm um carácter arbitrário e o que interessa é o modo como cada função actua. De resto, a escolha das variáveis com que trabalhamos só é limitada por uma regra de elementar bom senso: não podemos usar, num determinado contexto, como variável, um símbolo a que foi já atribuído o significado de um dado objecto.

**2)** O conceito de função composta pode utilizar-se com aplicações definidas em conjuntos arbitrários: se  $g : A \rightarrow B$  e  $h : B \rightarrow C$  são aplicações, pode sempre definir-se

$$h \circ g : A \rightarrow C$$

pela fórmula

$$(h \circ g)(x) = h[g(x)] \quad \forall x \in A.$$



**EXEMPLO 1.6.1** Sejam  $g$  e  $h$  as funções definidas, respectivamente, por

$$y = 2x \quad \text{e} \quad y = x^2.$$

Então a composição de  $h$  com  $g$  é dada pelo esquema

$$x \xrightarrow{g} 2x \xrightarrow{h} (2x)^2,$$

isto é, pela expressão analítica

$$y = 4x^2,$$

enquanto a composição de  $g$  com  $h$  é dada por

$$x \longmapsto x^2 \longmapsto 2x^2,$$

isto é,

$$y = 2x^2.$$

Com outra notação temos, pois,

$$(h \circ g)(x) = 4x^2 \quad \text{e} \quad (g \circ h)(x) = 2x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Observa-se, a este respeito, que a composição de funções não é, em geral, comutativa! Importa qual a que actua em primeiro lugar.

### EXEMPLO 1.6.2 A afirmação

$$\sqrt{x^2} = |x|, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

significa que podemos encarar a função módulo ( $y = |x|$ ) como a composição de

$$y = \sqrt{u} \quad \text{com} \quad u = x^2.$$

---

**EXEMPLO 1.6.3** A função linear  $y = x$  tem um comportamento muito especial - não altera os objectos, visto que a imagem de cada um é igual ao próprio. Por isso, chama-se-lhe *função identidade*. Representando-a pelo símbolo  $i$ , temos

$$i(x) = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Resulta que, se compusermos  $i$  com qualquer outra função  $f$ , voltamos a obter  $f$ , seja qual for a que actua primeiro:

$$\begin{aligned} i[f(x)] &= f(x), \\ f[i(x)] &= f(x), \quad \forall x \in \text{domínio de } f. \end{aligned}$$

**EXEMPLO 1.6.4** Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função real de variável real que possui uma inversa  $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Sabemos então que

$$y = f(x) \iff x = f^{-1}(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

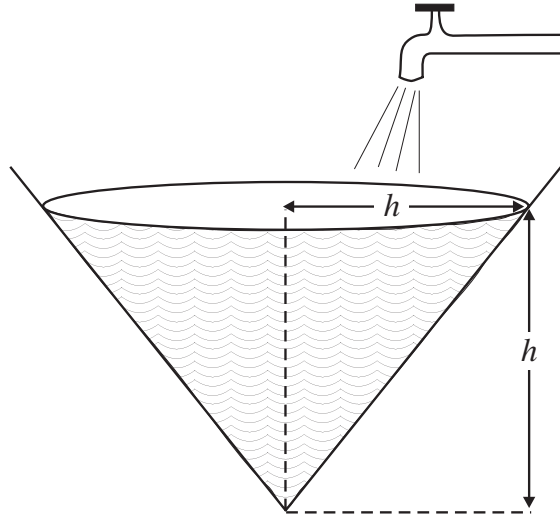
e concluímos:

$$\begin{aligned} f^{-1}[f(x)] &= x, \\ f[f^{-1}(x)] &= x, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Dito de outro modo, a composição de  $f^{-1}$  com  $f$  é a identidade e a composição de  $f$  com  $f^{-1}$  é a identidade.

---

**EXEMPLO 1.6.5** Num vaso cónico, cuja secção por um plano que passa pelo eixo é um ângulo recto, vamos verter líquido à razão constante de  $3 \text{ cm}^3$  por segundo.



A altura ( $h$ ) do líquido no vaso, medida em centímetros, varia em função do tempo ( $t$ ), medido em segundos a partir do instante ( $t = 0$ ) em que se inicia o enchimento. Como determinar a expressão de  $h$  em função de  $t$ ?

Atendendo a que nos é dada uma indicação sobre como o volume ( $V$ ) de líquido vertido varia com o tempo, temos que ao fim de  $t$  segundos o valor de  $V$  é dado em  $\text{cm}^3$  por

$$V = 3t. \quad (A)$$

Sabemos, por outro lado, da Geometria, que

$$V = \frac{1}{3}\pi h^2 \cdot h,$$

isto é,

$$V = \frac{1}{3}\pi h^3. \quad (B)$$

A expressão que dá  $h$  em função de  $t$  é então fácil de obter. Resolvendo (B) em ordem a  $h$ , temos

$$h = \sqrt[3]{\frac{3V}{\pi}} \quad (C)$$

e, utilizando (A), temos finalmente a expressão pedida,

$$h = \sqrt[3]{\frac{9t}{\pi}}. \quad (D)$$

Este exemplo ilustra a conveniência do uso de variáveis (como  $V$ ,  $h$ ,  $t$ ) que facilmente referenciam grandezas com significado físico ou geométrico, não havendo inconveniente em associá-las a funções diferentes do ponto de vista estritamente matemático. As funções representadas por  $(A)$  e  $(B)$  são diferentes. Podemos dizer que a função  $(A)$  resulta de compor  $(B)$  com  $(D)$ . Observe-se também que  $(B)$  e  $(C)$  *representam funções inversas uma da outra*.

A composição de funções intervém de modo muito nítido nas transformações simples de funções que estudámos no 10<sup>o</sup> ano em termos de gráficos. Consideremos as seguintes funções afins

$$\varphi_a(x) = x - a,$$

$$\psi_c(x) = cx,$$

onde  $a$  e  $c$  são constantes reais. Diremos que  $\varphi_a$  representa uma translacção e  $\psi_c$  uma dilatação (ou contracção). Supomos  $c \neq 0$ .

Para cada função  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  com domínio  $A \subset \mathbb{R}$  podemos então formar quatro tipos de composição:

- A composição de  $f \circ \varphi_a$ , que representaremos por  $f_1$ , e é dada pela fórmula

$$f_1(x) = f(x - a).$$

- A composição de  $\varphi_{-b} \circ f$ , que representaremos por  $f_2$  e é dada por

$$f_2(x) = f(x) + b.$$

- A composição de  $f \circ \psi_c$ , que representaremos por  $f_3$ ,

$$f_3(x) = f(cx).$$

- A composição de  $\psi_c \circ f$ , que representaremos por  $f_4$ ,

$$f_4(x) = cf(x).$$

De acordo com o que vimos em **10**, Secção 8, podemos afirmar que a partir do gráfico  $G$  de  $f$  podemos obter:

- o gráfico de  $f_1$ , aplicando a  $G$  a translacção do plano definida pelo vector  $(a, 0)$ ;
- o gráfico de  $f_2$ , aplicando a  $G$  a translacção do plano definida pelo vector  $(0, b)$ ;
- o gráfico de  $f_3$ , se transformarmos cada ponto  $(x, y) \in G$  no ponto  $(\frac{x}{c}, y)$ ;
- o gráfico de  $f_4$ , se transformarmos cada ponto  $(x, y) \in G$  no ponto  $(x, cy)$ .

Assim, os gráficos obtidos por translacção ou dilatação segundo um dos eixos são, afinal, gráficos de funções compostas da função inicial com outras dos tipos  $\varphi_a$  ou  $\psi_c$ .

## Exercícios da Secção 1.6

1 Determinar  $g \circ f$  nos casos em que  $g$  e  $f$  têm, respectivamente, as expressões designatórias:

(a)  $y = x + 1$  e  $y = 3x - 1$

(b)  $y = x + 1$  e  $y = |x - 1|$

(c)  $y = x^2 + x$  e  $y = x - 2$

(d)  $y = \frac{1}{x^2 + 1}$  e  $y = \sqrt{x}$ .

2 Exprimir a função quadrática  $2x^2 + 3x - 5$  como composição de uma função do tipo  $y = 2x^2 + K$  ( $K$  constante) com uma função afim.

3 Completar as frases:

(a) A função  $1 + x^2$  é a função composta  $g \circ f$ , em que  $g(x) = \sqrt{x}$  e  $f(x) = \dots$

(b) A função  $|x + 1|$  é a função composta  $g \circ f$ , em que  $g(x) = \sqrt{x}$  e  $f(x) = \dots$

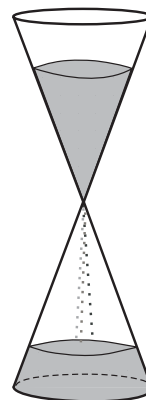
4 Um quadrado com 1 cm de lado começa a ser dilatado, no instante  $t = 0$ , de modo que o comprimento do lado cresce à razão constante de 2cm/s. Escrever uma expressão designatória que represente o valor da área do quadrado em função do tempo, para  $t \geq 0$ .

5 Um cubo com aresta 1cm vai ser dilatado, a partir do instante  $t = 0$ , de modo que o seu volume cresce à razão de 1 cm<sup>3</sup>/s. Exprimir a área total do cubo em função do tempo.

6 Uma ampulheta é constituída por dois cones circulares rectos com o mesmo eixo e o vértice comum, sendo 1 cm e 3 cm, respectivamente, o raio da base e a altura de ambas.

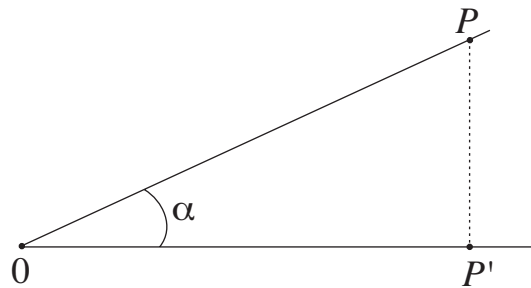
Vai ser vertida areia muito fina do cone superior para o cone inferior à razão constante de 2mm<sup>3</sup>/s. Começamos com o cone superior cheio e o inferior vazio no instante  $t = 0$ .

Determinar a expressão da altura de areia em cada um dos cones em função do tempo.





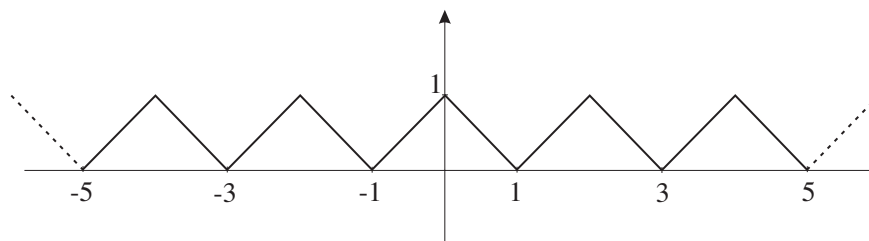
- 7] Duas rectas de um plano têm ponto comum 0 e fazem um ângulo  $\alpha$ . Numa delas move-se um ponto  $P$  que parte de 0 e com velocidade constante igual a 5 unidades de comprimento por segundo.



Determinar, em função do tempo, a distância a 0 percorrida na outra recta pela projecção ortogonal  $P'$  do ponto sobre ela, nos casos seguintes:

- (a)  $\alpha = 45^\circ$ ;                      (b)  $\alpha = 30^\circ$ .

- 8] O gráfico de uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é formado por segmentos de recta constituindo um padrão que se repete indefinidamente, de acordo com a figura:



Quais são os números  $a \in \mathbb{R}$  que têm a propriedade

$$f(x+a) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}?$$



# Capítulo 2

## Sucessões de números reais

### 2.1 Generalidades e definições

Quando há conveniência ou necessidade de trabalhar com uma listagem de objectos dispostos numa certa ordem, é-se levado a considerar aquilo a que, em Matemática, chamamos sucessão. Os objectos a listar podem ser de natureza variada (podem pertencer a um conjunto qualquer) mas, frequentemente, são números reais.

**EXEMPLO 2.1.1** O André recebeu do pai 250 € no início de 2003. O pai vai dar-lhe 10 € por semana, a fim de ele constituir economias para a compra de um leitor de DVD ou de um computador portátil. Ao fim de quantas semanas pode o André comprar um leitor no valor de 450 € ? E um computador no valor de 1 035 € ?

É fácil calcular o montante amealhado pelo André ao fim de 1, 2, 3, etc. semanas: em Euros, esse valor é dado pela sequência de números da seguinte lista

$$260, \quad 270, \quad 280, \quad \dots$$

Para responder às questões postas, é conveniente ter uma expressão geral que permita calcular os valores da quantia acumulada, seja qual for a semana a que quisermos referir-nos. As sucessivas semanas, a partir da primeira, podem ser representadas pelos números naturais 1, 2, 3, ... É fácil concluir que a expressão

$$250 + 10n \tag{2.1}$$

representa o total acumulado pelo André decorridas  $n$  semanas. Na verdade, trata-se de adicionar ao montante inicial de 250 € os sucessivos múltiplos de 10, visto que em cada semana são acrescentados 10 € às economias do André.

Podemos agora responder às questões formuladas. Para responder à primeira, trata-se de ver quantas semanas devem decorrer para que o total economizado seja pelo menos igual a 450 €, o que nos leva a resolver a inequação

$$250 + 10n \geq 450.$$

Daqui obtemos sucessivamente

$$10n \geq 450 - 250$$

$$10n \geq 200$$

$$n \geq 20.$$

Ao fim de 20 semanas, o André pode comprar o leitor.

Quanto à segunda, somos de mesmo modo levados a resolver

$$250 + 10n \geq 1035$$

donde obtemos

$$10n \geq 785$$

$$n \geq 78.5$$

Como as semanas correspondem exclusivamente a valores inteiros, concluímos que o André pode comprar o computador quando tiverem decorrido 79 semanas. ■

Se observarmos com atenção o modo como resolvemos as questões postas, concluímos que a entidade matemática que utilizámos não é nova para nós: é uma função, precisamente a função representada pela expressão designatória (2.1). O que ela tem de especial também não é inteiramente novo, pois já nos surgiram casos análogos em exemplos estudados no 10º ano, secção 1: é o facto de nos interessar atribuir-lhe como domínio o conjunto dos números naturais; por outras palavras, interessa-nos que a variável independente ( $n$ ) na expressão (2.1) tome apenas valores naturais.

Muitas funções utilizadas para descrever matematicamente uma situação concreta em que está envolvida uma listagem têm como domínio um conjunto de números naturais, ou o conjunto  $\mathbb{N}$  dos números naturais 1, 2, ... (ver os exemplos 3, 4 e 5 de **10**, Secção 1), ou ainda o conjunto  $\mathbb{N}_0$  dos números naturais acrescentado com zero, 0, 1, 2, ... Tais funções são particularmente úteis, irão surgir várias vezes ao longo do nosso curso de Matemática e merecem um nome especial.

**DEFINIÇÃO.** Chamamos *sucessão* a uma função  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  em que o domínio é  $D = \mathbb{N}$  ou  $D = \mathbb{N}_0$ .

Na expressão analítica  $y = f(n)$  que define uma sucessão  $f$  costumamos usar a letra  $n$  para representar a variável independente (referida como *variável natural*). E costumamos representar o valor de  $f$  em  $n$  com uma notação em que  $n$  aparece em índice: em vez de  $f(n)$  é frequente escrever  $f_n$ .

A esta expressão damos o nome de *termo de ordem  $n$* , ou *termo geral*.

**EXEMPLO 2.1.2** No exemplo 2.1.1 utilizámos a sucessão  $f_n = 250 + 10n$ .

**EXEMPLO 2.1.3** Os números naturais constituem os termos da sucessão  $f_n = n$ . (1 é o primeiro termo, 2 o segundo termo, 101 o termo de ordem 101, etc.).

**EXEMPLO 2.1.4** A expressão  $b_n = \frac{(-1)^n}{2}$  define uma sucessão cujos termos são, alternadamente,  $-\frac{1}{2}$  e  $\frac{1}{2}$ . Por exemplo, o termo de ordem 2257 é  $-\frac{1}{2}$ . De facto, sabemos que  $(-1)^{2257} = -1 \dots$

**EXEMPLO 2.1.5** Começando com um casal de coelhos jovens, quantos casais de coelhos adultos temos ao fim de  $n$  meses? Sabe-se que um coelho se torna adulto ao fim de um mês e cada casal adulto produz um novo casal em cada mês. Admitimos que não há mortes de coelhos. . .

Façamos um esquema indicando qual é a situação ao fim dos meses 1, 2, 3, . . . indicando um casal jovem com uma bola branca e um casal adulto com uma bola preta.

1	2	3	4	5	6
•	•	• •	• • •	• • • •	• • • • •
	○	○	○ ○	○ ○ ○	○ ○ ○ ○

Assim, no primeiro mês há um casal adulto e nenhum casal jovem; e dum modo geral, se no mês  $n$  há  $a_n$  casais adultos e  $j_n$  casais jovens, no mês seguinte  $(n + 1)$  haverá

$$a_{n+1} = a_n + j_n$$

adultos, e

$$j_{n+1} = a_n$$

jovens; de modo que o número total de casais adultos presentes é, sucessivamente, 1, 1, 2, 3, 5, 8, . . . ; nesta sucessão cada termo a partir do terceiro é a soma dos dois anteriores.

**EXEMPLO 2.1.6** A sucessão

$$q_n = n^2$$

tem como valores (termos) os quadrados dos números inteiros: 1, 4, 9, 16. . .

**EXEMPLO 2.1.7** A sucessão

$$u_n = \frac{1}{n}$$

tem como termos os *inversos* dos inteiros. À medida que  $n$  aumenta, estes aproximam-se cada vez mais de 0:  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$ . E, na verdade, aproximam-se de 0 *tanto quanto quisermos*.

**EXEMPLO 2.1.8** Algumas funções já estudadas anteriormente poderiam, na realidade, ser consideradas sucessões. Por exemplo, em **10**, Exemplo 5.7 (LOQUACIUS), só tem interesse prático calcular os valores de  $y$  quando  $x$  é inteiro, e por isso basta considerar a sucessão

$$\begin{aligned} y_n &= 0.4 & \text{se } n &= 1, 2, \dots, 60 \\ y_n &= 0.4 + \frac{0.4}{60}(n - 60) & \text{se } n &\geq 61. \end{aligned}$$

**EXEMPLO 2.1.9** Em **10**, na parte final da secção 8, vimos como construir aproximações do número  $\sqrt{5}$  com 0, 1, 2, 3, ... casas decimais. Do que aí ficou dito resulta que  $\sqrt{5}$  é maior do que todos os termos da sucessão

$$2, \quad 2.2, \quad 2.23, \quad \dots$$

e menor que todos os termos da sucessão

$$3, \quad 2.3, \quad 2.24, \quad \dots$$

Aos termos da primeira destas sucessões chamamos *aproximações de  $\sqrt{5}$  por defeito* (com 0, 1, 2, 3, ... casas decimais) e aos da segunda chamamos *aproximações de  $\sqrt{5}$  por excesso* (com 0, 1, 2, 3, ... casas decimais).

**EXEMPLO 2.1.10** Se, na sucessão de termo geral  $\frac{1}{n}$ , retivermos apenas os termos de ordem par,

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \dots$$

obtemos uma nova sucessão, com termo geral  $\frac{1}{2n}$ ; se retivermos apenas os termos de ordem ímpar

$$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \dots$$

obtemos uma nova sucessão, com termo geral  $\frac{1}{2n-1}$ . A estas novas sucessões é costume chamar

*subsucessão dos termos de ordem par,* e *subsucessão dos termos de ordem ímpar.*

Mais geralmente, a partir de *qualquer* sucessão  $(u_n)$  podemos sempre constituir a *subsucessão dos termos de ordem par*,  $u_2, u_4, u_6, u_8, \dots$  com termo geral  $u_{2n}$  e a *subsucessão dos termos de ordem ímpar*,  $u_1, u_3, u_5, u_7, \dots$  com termo geral  $u_{2n-1}$ . ■

---

Observemos que o modo como estão definidas as sucessões nos exemplos apresentados não é sempre o mesmo. Nos exemplos 2.1.2, 2.1.3, 2.1.4, 2.1.6, 2.1.7, 2.1.8, há uma expressão designatória que permite calcular o termo de ordem  $n$  quando  $n$  é dado. No exemplo 2.1.9, não foi dada expressão designatória mas foi indicada claramente a regra que permite calcular cada termo e portanto a sucessão está bem definida. No exemplo 2.1.5, a sucessão está bem definida através de uma fórmula que permite conhecer o termo de ordem  $n$  a partir não só de  $n$  mas também do termo anterior (de ordem  $n - 1$ ). Para efeitos de cálculo efectivo, se quisermos neste caso calcular, por exemplo, o termo de ordem 5 necessitamos de calcular sucessivamente os 4 termos anteriores. Uma sucessão definida por um processo semelhante diz-se *definida por recorrência*.

---

Uma sucessão é *crescente* (*decrecente*, *estritamente crescente* ou *estritamente decrescente*) se o for como função real de variável real. Imediatamente se reconhece que a condição para que uma sucessão  $(a_n)$  seja crescente é  $a_n \leq a_{n+1} \forall n$ . Analogamente se escrevem condições que traduzem os restantes atributos.

Uma sucessão crescente ou decrescente diz-se *monótona*. Se for estritamente crescente ou estritamente decrescente diz-se *estritamente monótona*.

O leitor facilmente verificará que, nos exemplos 2.1.2 a 2.1.10, todas as sucessões são monótonas com excepção da do exemplo 2.1.4, tratando-se de sucessões crescentes, com três excepções (quais?). Num dos exemplos figura uma sucessão crescente que não é estritamente crescente (qual?).

## Exercícios da Secção 2.1

1 Determinar expressões do termo geral (isto é, expressões designatórias) para as sucessões sugeridas pelos seguintes inícios de listagem

(a)  $\frac{1}{10}, \frac{1}{11}, \frac{1}{12}, \frac{1}{13}, \dots$

(b)  $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \dots$

(c)  $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$

(d)  $3, 9, 27, 81, \dots$

(e)  $3, -9, 27, -81, \dots$

(f)  $1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4}, \dots$

(g)  $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$

2 Indicar quais das sucessões anteriores são crescentes ou decrescentes (Quanto a (f), observar que

$$1 < \sqrt{2} < \sqrt[3]{3} \text{ mas } \sqrt[3]{3} > \sqrt[4]{4} \dots)$$

3 Escrever o termo geral da subsucessão dos termos de ordem par no caso (b) e da subsucessão dos termos de ordem ímpar no caso (c).



## 2.2 Progressões aritméticas

Uma classe importante de sucessões obtém-se partindo de um primeiro termo dado e resultando cada termo seguinte da soma ao anterior de um número também dado. Por exemplo, se tomarmos 3 para primeiro termo e se o outro número dado for  $\frac{1}{2}$ , os sucessivos termos são

$$3, \frac{7}{2}, 4, \frac{9}{2}, 5, \frac{11}{2}, \dots$$

Facilmente se reconhece que a expressão que dá o termo geral é

$$a_n = 3 + \frac{n-1}{2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

De modo geral, se tomarmos  $b$  para o primeiro termo e se  $a$  for o número dado que se soma a cada termo para obter o seguinte, então teremos  $x_1 = b$ ,  $x_2 = b + a$ ,  $x_3 = b + 2a$ ,  $x_4 = b + 3a$ , e de um modo geral,

$$x_n = b + a(n-1), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.2)$$

visto que os sucessivos termos são então

$$b, b+a, b+2a, b+3a, \dots$$

**DEFINIÇÃO.** Uma sucessão do tipo (2.2) chama-se *progressão aritmética* de razão  $a$ .

Imediatamente reconhecemos que uma progressão aritmética é a mesma coisa que uma função afim restringida a  $\mathbb{N}$ .

Afirmar que uma sucessão  $x_n$  é progressão aritmética é equivalente a afirmar que a *diferença entre cada dois termos consecutivos* é constante; o valor desta constante é a razão de progressão. Com efeito, de acordo com a definição existe um número  $a$  tal que  $x_{n+1} = x_n + a$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}_0$ , e portanto

$$x_{n+1} - x_n = a \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

A sucessão tratada nos exemplos 2.1.1 e 2.2.2 é uma progressão aritmética em que o primeiro termo é 250 e a razão é 10.

**EXEMPLO.** Determinar  $1 + 2 + 3 + \dots + 73$ .

Sugestão: escrever também  $73 + 72 + \dots + 1$  e somar ao longo de linhas e colunas no esquema seguinte, onde  $S$  representa a soma desconhecida.

$$\begin{array}{r|rrrrr} S & 1 & 2 & 3 & \dots & 73 \\ S & 73 & 72 & 71 & \dots & 1 \\ \hline 2S & 74 & 74 & 74 & \dots & 74 \end{array}$$

**Facto 2.2.1** Para a progressão aritmética (2.2), a soma

$$S = x_1 + \dots + x_p$$

dos  $p$  primeiros termos é dada pela fórmula

$$s = \frac{x_1 + x_p}{2} p.$$

Demonstração. Pondo em prática a ideia sugerida no exercício anterior, vamos escrever a soma  $S$  de duas maneiras

$$S = x_1 + x_2 + \dots + x_p$$

$$S = x_p + x_{p-1} + \dots + x_1$$

de onde, adicionando membro a membro,

$$2S = (x_1 + x_p) + (x_2 + x_{p-1}) + \dots + (x_p + x_1).$$

Vejamos agora que cada soma entre parênteses conduz sempre ao mesmo resultado:

$$x_2 + x_{p-1} = x_1 + a + x_{p-1} = x_1 + x_p,$$

$$x_3 + x_{p-2} = x_2 + a + x_{p-2} = x_2 + x_{p-1} = x_1 + x_p.$$

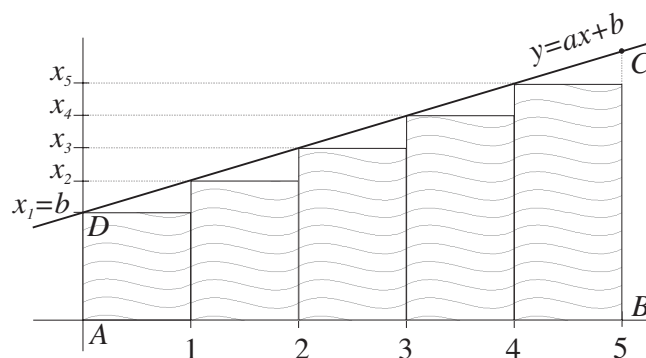
... ..

Por conseguinte, obtemos

$$2S = p(x_1 + x_p)$$

e daí o resultado.

**OBSERVAÇÃO.** Vamos dar uma “demonstração geométrica” do facto anterior. Para simplificar a exposição, suponhamos que  $p = 5$  de modo que se pretende calcular  $S = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$ .



Os termos  $x_1 = b$ ,  $x_2 = b + a$ ,  $x_3 = b + 2a$ ,  $\dots$ ,  $x_5 = b + 4a$  são os valores da função afim  $y = ax + b$  nos inteiros 0, 1, 2, 3, 4. Portanto, a soma é a área da figura sombreada, constituída por rectângulos adjacentes (cujas “bases” têm todas o comprimento 1). Esta área é igual à área do trapézio  $ABCD$  após subtracção da área dos 5 triângulos rectângulos (todos iguais) cujos catetos medem 1 e  $x_2 - x_1 = a$ . Portanto a soma procurada é:

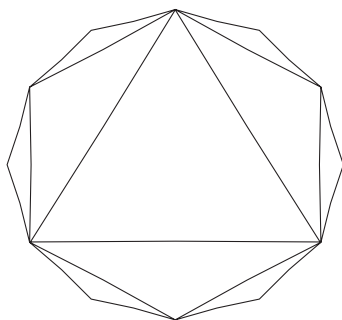
$$\begin{aligned} & \text{Área}(ABCD) - 5 \times \text{área de um triângulo} = \\ &= \frac{1}{2}(5a + b + b) \times 5 - 5 \times \frac{1}{2} \times 1 \times a = \frac{5a + 2b}{2} \times 5 - \frac{a}{2} \times 5 = \\ &= \frac{4a + b + b}{2} \times 5 = \\ &= \frac{x_1 + x_5}{2} \times 5. \end{aligned}$$

## Exercícios da Secção 2.2

- 1 Calcular a soma dos primeiros 2 003 números naturais.
- 2 Calcular a soma dos primeiros 2 003 números ímpares.
- 3 Num determinado plano tarifário, uma chamada de voz é paga em função da sua duração em minutos, custando 0.20 € no primeiro minuto e 0.10 € nos minutos seguintes. Qual é a duração máxima de uma (única) chamada que se pode fazer com um carregamento de  
(a) 10 € ?                      (b) 75 € ?

## 2.3 Progressões geométricas

Consideremos a questão seguinte. Partindo de um triângulo equilátero, vamos construir uma sucessão de polígonos regulares por duplicação do número de lados de cada um:



construímos sucessivamente um hexágono, um dodecágono, um polígono de 24 lados ... Ao fim de 20 operações deste tipo, qual é o número de lados do polígono obtido?

Observemos que o número de lados dos sucessivos polígonos pode ser listado do modo seguinte:

$$3, \quad 3 \times 2, \quad 3 \times 2 \times 2, \quad 3 \times 2 \times 2 \times 2, \dots$$

ou, usando a notação abreviada das potências:

$$3, \quad 3 \times 2, \quad 3 \times 2^2, \quad 3 \times 2^3, \quad 3 \times 2^4, \dots$$

Trata-se de uma sucessão numérica cujo termo geral é

$$u_n = 3 \times 2^{n-1}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (2.3)$$

ao fim de 20 operações estamos no termo de ordem 21 e por isso a resposta à pergunta acima é dada pelo valor de

$$u_{21} = 3 \times 2^{20} = 3\,145\,728$$

que representa o número de lados pedido.

Utilizámos, mais uma vez, uma sucessão numérica para dar resposta a um problema. A sucessão utilizada é de um tipo especial: ela parte de um termo inicial (3) e cada termo é obtido multiplicando por 2 o anterior. Dizemos, por isso, que a sucessão (2.3) é uma “progressão geométrica com primeiro termo 3 e razão 2”.

Mais geralmente: dados dois números reais  $b$ ,  $a$ , a sucessão construída partindo do primeiro termo  $b$  e obtendo cada termo seguinte multiplicando por  $a$  o anterior, isto é

$$b, \quad ba, \quad ba^2, \quad ba^3, \quad ba^4, \dots \quad (2.4)$$

chama-se *progressão geométrica com primeiro termo  $b$  e razão  $a$* .

É fácil escrever a expressão do termo geral da sucessão (2.4):

$$u_n = ba^{n-1} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (2.5)$$

Suponhamos  $a \neq 0$  (no caso em que  $a = 0$  todos os termos de (2.4), a partir do segundo, são nulos). Então tem-se

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{ba^n}{ba^{n-1}} = a \quad (2.6)$$

para todo o  $n \in \mathbb{N}$ , o que significa que:

a razão (cociente) de dois termos consecutivos da progressão geométrica (2.4) tem um valor constante - precisamente o valor  $a$  que chamámos razão da progressão <sup>8</sup>.

Reciprocamente, uma sucessão com a propriedade (2.6) é geométrica de razão  $a$ , porque de (2.6) conclui-se

$$\begin{aligned} u_2 &= u_1 \cdot a \\ u_3 &= u_2 \cdot a = u_1 \cdot a^2, \\ u_4 &= u_3 \cdot a = u_1 \cdot a^3, \text{ etc.} \end{aligned}$$

**EXEMPLO 2.3.1** A sucessão dos inversos das potências de 2,

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$$

com termo geral  $\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}$ , é uma progressão geométrica em que tanto o primeiro como a razão valem  $\frac{1}{2}$ . O termo de ordem 10 vale

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{2^{10}} = 0.0009765625.$$

Aproveitamos este exemplo, e recordamos aquele com que iniciámos esta secção, para fazer uma observação útil embora em termos poucos rigorosos: as progressões geométricas monótonas têm um ritmo de crescimento ou de decrescimento muito rápido. De facto, vimos que a grandeza do termo de ordem 21 da progressão  $3 \times 2^{n-1}$  se cifra já na casa dos milhões; analogamente, para o décimo termo da progressão  $\frac{1}{2^n}$ , a primeira casa decimal não nula é a das décimas milésimas. . . ■

---

<sup>8</sup>A utilização do termo *razão* é, pois, mais adequada no caso das progressões geométricas do que no das progressões aritméticas. . .

**EXEMPLO 2.3.2** Partindo de uma folha de papel macio, rectangular, de grandes dimensões, vamos dobrá-la sobre si própria ao meio sucessivamente várias vezes. Supondo que a espessura da folha inicial é 0.06 mm, qual é a espessura obtida após 10 dobragens? Que comentário sugere o resultado?

**Facto 2.3.1** *Uma progressão geométrica  $(u_n)$  com  $u_1 > 0$  é estritamente crescente (respectivamente estritamente decrescente) se, e só se, a sua razão  $a$  for  $> 1$  (respectivamente se  $a \in ]0, 1[$ ).* ■

Tal como no caso das progressões aritméticas, também para as progressões geométricas é possível dar uma fórmula simples para a soma dos  $n$  primeiros termos.

**Facto 2.3.2** *Seja  $u_n = ba^{n-1}$  a progressão geométrica de primeiro termo  $b$  e razão  $a$ . Então, se  $a \neq 1$ , a soma dos seus primeiros  $n$  termos é*

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{u_1 - u_{n+1}}{1 - a}$$

ou, escrita de outro modo

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{b(1 - a^n)}{1 - a}.$$

Demonstração. Representemos por  $S$  a soma de  $u_1, u_2, \dots, u_n$ :

$$S = u_1 + u_2 + \dots + u_n. \quad (2.7)$$

Multiplicando por  $a$  ambos os membros, obtemos

$$aS = u_1a + u_2a + \dots + u_na$$

ou ainda, atendendo a (2.6), ou à definição de progressão geométrica,

$$aS = u_2 + u_3 + \dots + u_{n+1}. \quad (2.8)$$

Subtraindo (2.8) de (2.7) membro a membro vem:

$$S - aS = u_1 + u_2 + \dots + u_n - u_2 - u_3 - \dots - u_{n+1}$$

ou ainda

$$(1 - a)S = u_1 - u_{n+1}$$

donde, resolvendo em ordem a  $S$ , resulta a primeira igualdade do enunciado. A segunda igualdade resulta imediatamente de escrever

$$u_1 = b, \quad u_{n+1} = ba^n, \quad u_1 - u_{n+1} = b - ba^n = b(1 - a^n). \quad \blacksquare$$

**EXEMPLO 2.3.3** Quanto vale a soma das primeiras 10 potências de 2? A partir da fórmula dada calculamos facilmente

$$\begin{aligned} 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{10} &= \frac{2 - 2^{11}}{1 - 2} = \frac{2 \cdot (1 - 2^{10})}{-1} \\ &= 2 \times (2^{10} - 1) = 2046. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

**EXEMPLO 2.3.4** Consideremos um segmento AB de comprimento igual a 1 e construamos uma sucessão de segmentos assim obtidos:



$AA_1$  é o segmento da esquerda que resulta da bissecção de  $AB$ ;  $A_1A_2$  é o segmento da esquerda que resulta da bissecção de  $A_1B$ ; de um modo geral,

$A_nA_{n+1}$  é o segmento da esquerda que resulta da bissecção de  $A_nB$ .

Vamos listar os comprimentos dos segmentos obtidos, começando com  $AA_1$ :

$$\frac{1}{2}, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^2, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^3, \dots$$

Obtemos, pois, os termos da progressão geométrica do exemplo 2.3.1. Calculemos a soma dos 10 primeiros termos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{10} &= \frac{\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{11}}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= \frac{\frac{2^{10}-1}{2^{11}}}{\frac{2-1}{2}} = \frac{2^{10}-1}{2^{10}} = 0.9990234375. \end{aligned}$$

Vemos que com os primeiros 10 segmentos já “quase recuperámos” o segmento inicial  $AB$ , no sentido em que o comprimento total daqueles já só difere da unidade por menos de uma milésima ... ■



**EXEMPLO 2.3.5 Divisão “rápida” do polinómio  $x^n - 1$  por  $x - 1$** 

Como sabemos, qualquer que seja o inteiro positivo  $n$ , o polinómio  $x^n - 1$  é divisível por  $x - 1$ .

O cociente

$$\frac{x^n - 1}{x - 1} = \frac{1 - x^n}{1 - x}$$

pode ser visto (para  $x \neq 1$ ) como soma dos termos

$$1, x, x^2, \dots, x^{n-1}$$

da progressão geométrica de razão  $x$  e primeiro termo 1. Logo,

$$\frac{x^n - 1}{x - 1} = x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x^2 + x + 1.$$

Em particular, reobtemos o resultado bem conhecido

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$$

e também

$$\frac{x^3 - 1}{x - 1} = x^2 + x + 1.$$

Este resultado pode facilmente generalizar-se para calcular o cociente de polinómios

$$\frac{x^n - a^n}{x - a}$$

onde  $a$  é uma constante real qualquer. Basta escrever, dividindo ambos os termos por  $a^n$ ,

$$\begin{aligned} \frac{x^n - a^n}{x - a} &= \frac{\left(\frac{x}{a}\right)^n - 1}{\frac{1}{a^{n-1}} \left(\frac{x}{a} - 1\right)} = a^{n-1} \frac{\left(\frac{x}{a}\right)^n - 1}{\frac{x}{a} - 1} \\ &= a^{n-1} \left( \left(\frac{x}{a}\right)^{n-1} + \left(\frac{x}{a}\right)^{n-2} + \dots + \frac{x}{a} + 1 \right) \end{aligned}$$

e, finalmente,

$$\frac{x^n - a^n}{x - a} = x^{n-1} + ax^{n-2} + \dots + a^{n-2}x + a^{n-1}.$$

■

**EXEMPLO 2.3.6** Vamos decompor em factores mais simples o número inteiro  $A = 11111111$  (oito algarismos) observando que

$$\begin{aligned} A &= 10^7 + 10^6 + 10^5 + 10^4 + 10^3 + 10^2 + 10 + 1 \\ &= \frac{1 - 10^8}{1 - 10} = \frac{10^8 - 1}{10 - 1}. \end{aligned}$$

Temos

$$10^8 - 1 = (10^4 - 1)(10^4 + 1)$$

e por isso

$$A = \frac{10^4 - 1}{10 - 1}(10^4 + 1).$$

Ora, novamente pela teoria da progressão geométrica,

$$\frac{10^4 - 1}{10 - 1} = \frac{1 - 10^4}{1 - 10} = 10^3 + 10^2 + 1 = 1111$$

e concluímos

$$A = 1111 \times 10001.$$

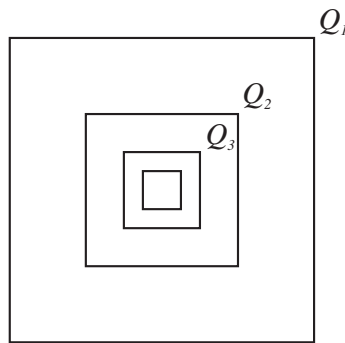
■

## Exercícios da Secção 2.3

- 1 (a) Calcular a soma das primeiras 100 potências inteiras de 3.  
(b) Calcular a soma dos inversos daquelas.
- 2 Uma folha de papel rectangular com as dimensões  $20\text{ cm} \times 15\text{ cm}$  vai ser dobrada ao meio sobre si própria sucessivas vezes. Qual é a área da porção obtida após  
(a) 3 dobragens ?                      (b) 7 dobragens ?                      (c) 20 dobragens ?

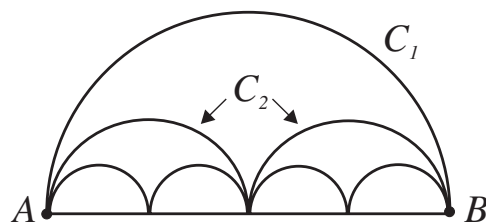
Comentar o resultado.

- 3 Partimos de um quadrado  $Q_1$  de lado igual a 1 e construímos sucessivamente os quadrados  $Q_2$ ,  $Q_3$ , ... de tal modo que cada um deles tem o lado igual a metade do do anterior.



Escrever o termo geral da *sucessão das áreas* dos quadrados  $Q_n$ .

- 4 Sobre o segmento  $AB$  de comprimento 1 construímos sucessivamente as curvas seguintes:  
 $C_1$ : semicircunferência de diâmetro  $AB$ ;  
 $C_2$ : dois arcos de semicircunferência que têm como diâmetro as duas metades do segmento;  
 $C_3$ : quatro arcos de semicircunferência que têm como diâmetro os quatro quartos do segmento; etc.



Determinar o termo geral

- (a) da sucessão dos comprimentos de  $C_n$   
(b) da sucessão das áreas das figuras planas limitadas pelas curvas  $C_n$  e o segmento  $AB$ .

- 5 Simplificar as fracções

$$\frac{x^3 - 1}{x - 1} \quad \text{e} \quad \frac{x^4 - 1}{x - 1}$$

sem recorrer ao algoritmo de divisão polinomial.

- 6 Decompor o número 111111111 em factores mais simples.

## 2.4 Limites reais e limites infinitos

Quando trabalhamos com números como  $\sqrt{2}$ , é frequente referirmo-nos a “valores aproximados”. Por exemplo, 1.4, 1.41 são valores aproximados (até às décimas e até às centésimas, respectivamente) de  $\sqrt{2}$ . Do mesmo modo, vimos em **10**, Secção 8, que 2.23 é valor aproximado, até às centésimas, de  $\sqrt{5}$ . Estes conceitos não se aplicam apenas à consideração de números irracionais: também podemos dizer que 0.33 é valor aproximado de  $1/3$ , ou mesmo que 1 é valor aproximado de 2. . . De facto, o que é importante ao usar o conceito de “valor aproximado” é referir o “grau de aproximação” de que se trata. Assim, partindo dos nossos exemplos anteriores, ficará mais correcto afirmar:

1.4	é valor aproximado de $\sqrt{2}$ com erro <sup>9</sup> que não excede	$0.1 = 10^{-1}$
1.5	é valor aproximado de $\sqrt{2}$ com erro que não excede	$0.1 = 10^{-1}$
2.23	é valor aproximado de $\sqrt{5}$ com erro que não excede	$0.01 = 10^{-2}$
2.24	é valor aproximado de $\sqrt{5}$ com erro que não excede	$0.01 = 10^{-2}$
0.33	é valor aproximado de $1/3$ com erro que não excede	$0.01 = 10^{-2}$
0.34	é valor aproximado de $1/3$ com erro que não excede	$0.01 = 10^{-2}$
1	é valor aproximado de 2 com erro que não excede	1

e o que estas frases significam, simplesmente, é que a distância (valor absoluto da diferença) entre o número e a aproximação indicada é menor ou igual à quantidade mencionada:

$$1.4 < \sqrt{2} < 1.5$$

e, por isso,

$$\begin{aligned} |\sqrt{2} - 1.4| &= \sqrt{2} - 1.4 < 1.5 - 1.4 = 0.1, \\ |\sqrt{2} - 1.5| &= 1.5 - \sqrt{2} < 1.5 - 1.4 = 0.1; \end{aligned}$$

$$2.23 < \sqrt{5} < 2.24$$

e, por isso,

$$\begin{aligned} |\sqrt{5} - 2.23| &= \sqrt{5} - 2.23 < 2.24 - 2.23 = 0.01, \\ |\sqrt{5} - 2.24| &= 2.24 - \sqrt{5} < 2.24 - 2.23 = 0.01; \end{aligned}$$

$$0.33 < \frac{1}{3} < 0.34$$

---

<sup>9</sup>O termo “erro” é aqui usado com o significado de “diferença” (em valor absoluto, como veremos) e não significa incorrecção.

e, por isso,

$$\left| \frac{1}{3} - 0.33 \right| = \frac{1}{3} - 0.33 < 0.34 - 0.33 = 0.01,$$
$$\left| \frac{1}{3} - 0.34 \right| = 0.34 - \frac{1}{3} < 0.34 - 0.33 = 0.01;$$

e

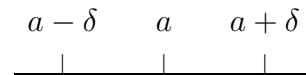
$$|1 - 2| = 1.$$

De um modo geral, adoptaremos a seguinte definição: *um número real  $x$  é valor aproximado (ou aproximação) de outro número real  $a$ , com erro que não excede  $\delta$ , se*

$$|x - a| \leq \delta.$$

Aqui,  $\delta$  é um número real positivo dado.

Vemos, pois, que os valores aproximados do número  $a$  com erro que não excede  $\delta$  são exactamente os elementos do intervalo  $[a - \delta, a + \delta]$  centrado em  $a$ .



É costume referir-mo-nos a um intervalo do tipo  $[a - \delta, a + \delta]$  como uma *vizinhança* de  $a$ , e representamo-lo também por  $V(a, \delta)$ . Há tantas vizinhanças de  $a$  quantos os números reais positivos; para fixar uma vizinhança de  $a$  temos de especificar o número  $\delta$  (que representa metade do comprimento do intervalo).

São evidentes os dois factos seguintes:

**Facto 2.4.1**  *$a$  é valor aproximado de  $a$  com erro que não excede  $\delta$  para todo o  $\delta > 0$ .*

**Facto 2.4.2** *Se  $\delta < \delta'$  e  $x$  é valor aproximado de  $a$  com erro que não excede  $\delta$ , então é também valor aproximado de  $a$  com erro que não excede  $\delta'$ .*

Reparemos que, dados dois números pertencentes a um certo intervalo, qualquer número situado entre eles ainda pertence ao mesmo intervalo. Esta observação tem a seguinte consequência imediata:

**Facto 2.4.3** *Sejam  $x, y$  dois valores aproximados de  $a$  com erro que não excede  $\delta$ . Então, se  $x < z < y$ ,  $z$  é também valor aproximado de  $a$  com erro que não excede  $\delta$ .*

Também é evidente a partir da definição:

**Facto 2.4.4**  $x$  é valor aproximado de  $a$  com erro que não excede  $\delta$  se, e só se,  $x - a$  é valor aproximado de 0 com erro que não excede  $\delta$ .

Para vermos como os valores aproximados se comportam relativamente às operações, registemos:

**Facto 2.4.5** *Sejam:*

$x$ , valor aproximado de  $a$  com erro que não excede  $\delta$ ;

$y$ , valor aproximado de  $b$  com erro que não excede  $\delta$ .

*Então*

$x + y$  é valor aproximado de  $a + b$  com erro que não excede  $2\delta$ .

Demonstração. Da hipótese

$$a - \delta \leq x \leq a + \delta, \quad b - \delta \leq y \leq b + \delta$$

obtém-se, adicionando ordenadamente,

$$a + b - 2\delta \leq x + y \leq a + b + 2\delta. \quad \blacksquare$$

**OBSERVAÇÃO.** O significado prático deste facto é que, quando numa adição se utilizam aproximações e não “valores exactos”, os desvios das parcelas adicionam-se, produzindo o desvio para a soma. Por exemplo, se calcularmos a soma

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{9} = 0.33333 \dots + 0.11111 \dots$$

utilizando aproximações até às décimas (portanto, com erro que não excede 0.1) somos conduzidos a:

$$0.3 + 0.1 = 0.4.$$

É certo que obtivemos um resultado “exacto às décimas”, ou seja, com erro *menor* que 0.1. Mas, se quisermos trabalhar com uma margem de erro menor, podemos dizer, por exemplo:

0.3 é aproximação de  $\frac{1}{3}$  com erro que não excede 0.04;

0.1 é aproximação de  $\frac{1}{9}$  com erro que não excede 0.02;

e podemos então garantir que 0.4 é aproximação de  $\frac{1}{3} + \frac{1}{9}$  com erro que não excede 0.06.

**Facto 2.4.6** Se  $x$  é valor aproximado de 0 com erro que não excede  $\delta$  e  $y$  é valor aproximado de 0 com erro que não excede  $\delta$ , então  $xy$  é valor aproximado de 0 com erro que não excede  $\delta^2$ .

Demonstração. Porque, da hipótese

$$|x| \leq \delta, \quad |y| \leq \delta$$

se obtém, multiplicando ordenadamente,

$$|xy| = |x| |y| \leq \delta^2. \quad \blacksquare$$

Um dos aspectos de grande interesse no estudo e utilização das sucessões numéricas consiste na observação do comportamento dos seus termos, “para grandes valores de  $n$ ”, quanto ao modo como tendem a concentrar-se ou dispersar-se. Com este objectivo em vista, a nossa atenção deve recair sobre o que fica da sucessão quando sucessivamente lhe retiramos o primeiro termo, os dois primeiros termos, os três primeiros termos, ..., o primeiro milhão de termos, etc., a fim de fazer sobressair uma tendência de concentração ou dispersão.

**EXEMPLO 2.4.1** Para  $u_n = \frac{1}{n}$ , a supressão de termos iniciais fornece-nos sucessivamente os conjuntos de termos

$$\begin{aligned} C_2 &= \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \right\} \\ C_3 &= \left\{ \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots \right\} \\ &\dots \quad \dots \\ C_{100} &= \left\{ \frac{1}{100}, \frac{1}{101}, \frac{1}{102}, \dots \right\}. \end{aligned}$$

Constatamos que os conjuntos  $C_n$  são formados por números (positivos) *cada vez mais próximos de 0*. Por exemplo,  $C_{100}$  pode ser totalmente “encaixado” no intervalo  $[0, 0.01]$  :  $C_{100} \subset [0, 0.01]$ . Mas  $C_{1000000}$  pode ser encaixado no intervalo  $[0, 0.000001]$ ...

**EXEMPLO 2.4.2** Para  $v_n = (-1)^n$ , a operação de sucessivas supressões de termos deixa-nos *sempre* com o conjunto de dois números  $\{-1, 1\}$ . Se quisermos “encaixá-lo” num *intervalo*, podemos dizer

$$\{-1, 1\} \subset [-1, 1]$$

mas as operações de supressão de termos não permitem nunca encurtar o intervalo.

**EXEMPLO 2.4.3** Para  $w_n = n^2$ , ficamos sucessivamente com

$$\begin{aligned} C_2 &= \{4, 9, 16, 25, \dots\} \\ C_3 &= \{9, 16, 25, 36, \dots\} \\ &\dots = \dots \\ C_{100} &= \{10000, 10201, \dots\} \\ &\dots \quad \dots \end{aligned}$$



Os conjuntos  $C_2, C_3, \dots, C_{100}, \dots$  podem neste caso ser encaixados nos intervalos

$$[4, +\infty[, \quad [9, +\infty[, \dots, [10000, +\infty[ \dots$$

os quais, embora cada um seja menor que o anterior, têm sempre “comprimento infinito”.

**EXEMPLO 2.4.4** Para  $z_n = \frac{(-1)^n}{n}$ , obtemos os conjuntos

$$\begin{aligned} C_2 &= \left\{ \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \dots \right\} \subset \left[ -\frac{1}{3}, \frac{1}{2} \right], \\ C_3 &= \left\{ -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots \right\} \subset \left[ -\frac{1}{3}, \frac{1}{4} \right], \\ &\dots \quad \dots \\ C_{100} &= \left\{ \frac{1}{100}, -\frac{1}{101}, \frac{1}{102}, -\frac{1}{103}, \dots \right\} \subset \left[ -\frac{1}{101}, \frac{1}{100} \right], \end{aligned}$$

e novamente se observa um efeito de concentração. Os elementos de  $C_p$  são valores aproximados de 0 com erro que não excede  $\frac{1}{p}$ ; este erro será tão pequeno quanto quisermos se tomarmos  $p$  suficientemente grande.

Para exprimir em termos rigorosos o efeito de concentração que se observa nestes e noutros casos, usamos um dos conceitos mais importantes em Matemática e que agora vamos introduzir: o conceito de *limite* de uma sucessão.

Seja  $(u_n)$  uma sucessão de números reais e consideremos os conjuntos numéricos

$$\begin{aligned} C_1 &= \{u_1, u_2, u_3, \dots\}, \\ C_2 &= \{u_2, u_3, u_4, \dots\}, \\ &\dots = \dots \\ C_{1000} &= \{u_{1000}, u_{1001}, u_{1002}, \dots\}, \dots \end{aligned}$$

obtidos suprimindo termos iniciais e deixando apenas os termos a partir de certa ordem. Aquilo que nos interessa é enunciar uma condição que traduza a ideia seguinte: os termos de  $C_p$  devem constituir valores aproximados de um certo número  $a$ ; o erro envolvido nessa aproximação diminui à medida que  $p$  aumenta e torna-se, na realidade, tão pequeno quanto quisermos.

**DEFINIÇÃO.** Dizemos que a sucessão  $u_n$  tem limite  $a \in \mathbb{R}$  (ou *tende para*  $a$ ) se, dado arbitrariamente  $\delta > 0$ , há um dos conjuntos  $C_p$  constituído por aproximações de  $a$  com erro que não excede  $\delta$ .

Escrevemos então:

$$\lim u_n = a \quad \text{ou} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a \quad \text{ou} \quad u_n \rightarrow a$$

para exprimir a condição descrita<sup>10</sup>.

O significado da definição anterior é que, fixado um certo grau de aproximação ( $\delta$ ) com total arbitrariedade, podemos encontrar uma ordem ( $p \in \mathbb{N}$ ) de modo que todos os termos da sucessão a partir desta ordem (isto é,  $u_p, u_{p+1}, u_{p+2}, \dots$ ) constituem aproximação de  $a$  com erro que não excede  $\delta$ , o que significa que eles se encontram no intervalo  $[a - \delta, a + \delta]$ . Podemos, pois, dizer que

$\lim u_n = a$  significa, por outras palavras:

Dado arbitrariamente  $\delta > 0$  há um número  $p \in \mathbb{N}$  de modo que  $C_p \subset V(a, \delta)$ .

**OBSERVAÇÃO.** Quando um dado  $C_p$  satisfaz a condição descrita, todos os  $C_q$  com  $q > p$  também a satisfazem, obviamente. . .

**EXEMPLO 2.4.5**  $\lim \frac{1}{n} = 0$ . Se pretendermos, por exemplo, obter termos da sucessão que sejam aproximações de 0 com precisão  $10^{-6}$ , exigimos

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \left| \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n} \leq 10^{-6};$$

esta condição é equivalente a  $n \geq 10^6$  e, portanto, o conjunto  $C_{1000000}$  tem a propriedade requerida (todos os seus elementos são aproximações de 0 com erro que não excede  $10^{-6}$ ).

O que fizemos com  $10^{-6}$  pode refazer-se com um número positivo arbitrário: se pretendermos, em geral, obter termos da sucessão que sejam aproximações de 0 com erro não superior a  $\delta$  (agora  $\delta$  é um número positivo qualquer) exigimos, analogamente,

$$\frac{1}{n} \leq \delta.$$

Como esta inequação é equivalente a  $n \geq \frac{1}{\delta}$ , basta escolher  $p \in \mathbb{N}$  tal que  $p \geq \frac{1}{\delta}$  para que os termos incluídos no conjunto

$$C_p = \left\{ \frac{1}{p}, \frac{1}{p+1}, \frac{1}{p+2}, \dots \right\}$$

tenham a propriedade requerida (isto é, sejam aproximações de 0 com erro não superior a  $\delta$ ).

<sup>10</sup>Nesta notação,  $n$  é uma variável muda!

Agora, sim, mostrámos que  $\lim \frac{1}{n} = 0$ .

**EXEMPLO 2.4.6** Para  $z_n = \frac{(-1)^n}{n}$  tem-se também

$$\lim \frac{(-1)^n}{n} = 0$$

e a razão é que os cálculos anteriores valem para esta sucessão sem modificar nada, visto que

$$\left| \frac{(-1)^n}{n} - 0 \right| = \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \frac{1}{n}.$$

**EXEMPLO 2.4.7** As sucessões  $v_n$  e  $w_n$  dos exemplos 2.4.2 e 2.4.3, respectivamente, não têm limite no sentido que acabamos de atribuir a esta noção. No caso de  $v_n$ , porque os conjuntos  $C_p$  são sempre o mesmo:  $\{-1, 1\}$  e os seus elementos não podem constituir aproximação seja de que número for com erro *arbitrariamente pequeno* ... No caso de  $w_n$ , porque os conjuntos  $C_p$  “fogem” de qualquer intervalo, afastando-se para a direita na recta real, e a mesma impossibilidade se constata.

Como as afirmações

“ $x$  é valor aproximado de  $a$  com erro que não excede  $\delta$ ”

e

“ $x - a$  é valor aproximado de 0 com erro que não excede  $\delta$ ”

são equivalentes, temos:

$$\boxed{\lim u_n = a \Leftrightarrow \lim(u_n - a) = 0.} \quad (2.9)$$

Podemos dizer então que qualquer afirmação sobre limites se pode reduzir a uma afirmação em que o limite considerado é 0.

Por isso as sucessões com limite 0 têm um papel importante na teoria dos limites, e merecem uma designação especial:

chamamos *infinitésimo* a qualquer sucessão  $u_n$  com  $\lim u_n = 0$ .

A sucessão  $w_n = n^2$  do exemplo 2.4.3 tem uma característica digna de nota. Já vimos que os seus termos não tendem a concentrar-se; pelo contrário, eles “afastam-se para a direita” de tal modo que acabam por ultrapassar qualquer número em que pensarmos, por maior que seja. Assim, se pensarmos em  $10^6$ , os termos de  $w_n$  ultrapassam-no a partir de certa ordem:

$$n^2 \geq 10^6$$

desde que  $n \geq 1000$ . Ou seja,  $C_{1000}$  é, para esta sucessão, constituído por números que já são maiores ou iguais a 1 milhão. E o que dissemos para 1 milhão pode repetir-se para números arbitrários...

**DEFINIÇÃO.** Dizemos que a sucessão  $u_n$  tem limite  $+\infty$  (ler “mais infinito”), ou tende para  $+\infty$ , se dado arbitrariamente um número  $A > 0$  há um dos conjuntos  $C_p$  cujos elementos são todos maiores ou iguais a  $A$ .

Escrevemos então

$$\lim u_n = +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty \quad \text{ou} \quad u_n \rightarrow +\infty.$$

Uma sucessão nas condições desta definição designa-se por *infinitamente grande positivo*. A sucessão  $w_n$  do exemplo 2.4.3 tem, pois, limite no sentido desta nova definição:  $\lim w_n = +\infty$ .

Observámos, ao estudar a função  $\frac{1}{x}$ , que quando  $x$  está “muito próximo” de 0,  $\frac{1}{x}$  é “muito grande”, e quando  $x$  é “muito grande”,  $\frac{1}{x}$  fica “próximo” de 0. Ora bem, esta circunstância está relacionada com o seguinte

**Facto 2.4.7** *Seja  $(u_n)$  uma sucessão numérica com os termos todos positivos. Então*

$$\lim u_n = 0 \iff \lim \frac{1}{u_n} = +\infty.$$

(Por outras palavras: uma sucessão de termos positivos é infinitésimo se, e só se, a sucessão dos inversos constitui um infinitamente grande.)

Demonstração. Vamos verificar a implicação no sentido  $\Rightarrow$  e deixamos a outra ao cuidado do leitor interessado, visto que o argumento é muito semelhante.

Suponha-se então que  $\lim u_n = 0$ . Seja  $A$  um número positivo arbitrário. Então o número  $\delta = 1/A$  é positivo. Pela hipótese, há um conjunto  $C_p = \{u_p, u_{p+1}, u_{p+2}, \dots\}$  cujos elementos pertencem à vizinhança de 0  $[-\delta, \delta]$ :

$$0 < u_n \leq \delta \quad \forall n \geq p.$$

Portanto

$$\frac{1}{u_n} \geq \frac{1}{\delta} = A \quad \forall n \geq p.$$

Todos os elementos de  $C_p$  são maiores ou iguais a  $A$ . A demonstração fica concluída. ■

**EXEMPLO 2.4.8** Como se viu atrás, temos  $\lim n^2 = +\infty$ . Portanto  $\lim \frac{1}{n^2} = 0$ . Podemos verificar este facto directamente. . .

**EXEMPLO 2.4.9** Consideremos a sucessão  $x_n = \frac{n+2}{n+1}$ , cujos termos são  $\frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \dots$ . Não é difícil suspeitar de que

$$\lim \frac{n+2}{n+1} = 1.$$

E, para o comprovar, basta atender a que

$$\frac{n+2}{n+1} - 1 = \frac{1}{n+1},$$

pelo que

$$\lim(x_n - 1) = \lim \frac{1}{n+1} = 0,$$

uma vez que  $\lim(n+1) = +\infty$ .

**EXEMPLO 2.4.10** A sucessão  $x_n = 10 - n^2$ , cujos termos são

$$9, 6, 1, -6, -15, -26, \dots$$

não tem como limite um número e também não tem limite  $+\infty$ , visto que os seus termos se afastam não para o lado positivo, mas sim para o lado negativo do eixo real. Na verdade, temos

$$\lim(-x_n) = +\infty.$$

Com efeito,  $-x_n = n^2 - 10$  e para obtermos, por exemplo,

$$n^2 - 10 > 1000$$

basta que  $n^2 > 1010$ ; todos os inteiros tais que

$$n \geq 32$$

satisfazem esta condição, como é fácil ver. O que fizemos com o número 1000 pode repetir-se com outro qualquer, por muito grande que seja, e confirma o que se pretendia.

Quando se tem  $\lim(-x_n) = +\infty$ , dizemos que  $x_n$  tende para  $-\infty$  e escrevemos

$$\lim x_n = -\infty.$$

Assim, podemos dizer

$$\lim(10 - n^2) = -\infty.$$

**EXEMPLO 2.4.11** A sucessão  $(-1)^n n$  não tende para  $+\infty$  nem para  $-\infty$ , pois os seus termos

$$-1, 2, -3, 4, -5, 6, -7$$

afastam-se tanto na direcção positiva como na direcção negativa do eixo real. O que facilmente constatamos é que

$$\lim |(-1)^n n| = \lim n = +\infty. \quad \blacksquare$$

A designação de “infinitamente grande” usa-se também para designar qualquer sucessão  $x_n$  tal que

$$\lim |x_n| = +\infty.$$

Em particular, se  $\lim x_n = -\infty$ ,  $x_n$  é um infinitamente grande (como no caso de  $10 - n^2$ ) mas dizemos então que é um *infinitamente grande negativo*.

Os conceitos de limite que estudámos dão sentido a escrever

$$\lim x_n = a$$

quer  $a \in \mathbb{R}$ , quer  $a$  seja um dos símbolos  $+\infty$ ,  $-\infty$ . Quando há necessidade de sublinhar que dada sucessão  $(x_n)$  tem limite  $a \in \mathbb{R}$ , dizemos que tem *limite real* ou *limite finito* (por oposição aos *limites infinitos*  $+\infty$ ,  $-\infty$ ).

O Facto 2.4.7 pode ser assim reformulado:

**Facto 2.4.8** Se  $(u_n)$  é uma sucessão de números diferentes de 0, então

$$u_n \rightarrow 0 \iff \frac{1}{|u_n|} \rightarrow +\infty.$$

Na verdade, basta ter em conta que “ $u_n \rightarrow 0$ ” e “ $|u_n| \rightarrow 0$ ” são afirmações equivalentes!

Para calcular limites de sucessões, quando eles existem, é conveniente usar certas regras a fim de evitar o uso directo da definição, que por vezes é pouco cómodo. Começemos por dar as regras mais simples.

**Facto 2.4.9** Se  $x_n = c \ \forall n$  (isto é,  $x_n$  é constante com todos os termos iguais a  $c$ ), então  $\lim x_n = c$ .

Demonstração. Neste caso, os conjuntos  $C_n$  são sempre  $\{c\}$ . Para qualquer  $\delta > 0$  tem-se:  $C_n \subset [c - \delta, c + \delta]$ , para todo o  $n \in \mathbb{N}$ . ■

**EXEMPLO 2.4.12 - Limite de uma progressão aritmética.**

Seja  $u_n = b + an$  o termo geral de uma progressão aritmética, com razão  $a$ . Então facilmente se vê que

$$\lim(b + an) = \lim b = b, \quad \text{se } a = 0;$$

$$\lim(b + an) = +\infty, \quad \text{se } a > 0;$$

$$\lim(b + an) = -\infty, \quad \text{se } a < 0.$$

Para comprovar a segunda afirmação, basta atender a que, dado  $K > 0$  arbitrário, conseguimos obter

$$b + an \geq K,$$

desde que

$$an \geq K - b,$$

isto é,

$$n \geq \frac{K - b}{a}.$$

Assim, se  $p$  é um inteiro maior ou igual a  $\frac{K-b}{a}$ , todos os elementos do conjunto

$$\{u_p, u_{p+1}, u_{p+2}, \dots\}$$

ultrapassam  $K$ . ■

**Facto 2.4.10** Se  $\lim x_n = a$  e  $\lim y_n = b$ , então

$$\lim(x_n + y_n) = a + b.$$

(Aqui,  $a$  e  $b$  são números reais.)

Demonstração. Dado  $\delta > 0$  arbitrário, temos também  $\frac{\delta}{2} > 0$ ; então temos que

$$\begin{aligned} x_n &\text{ é valor aproximado de } a \text{ com erro que não excede } \frac{\delta}{2} \\ y_n &\text{ é valor aproximado de } b \text{ com erro que não excede } \frac{\delta}{2} \end{aligned}$$

são afirmações correctas a partir de certos valores de  $n$ , digamos, se  $n \geq p$  no primeiro caso e se  $n \geq q$  no segundo. Se escolhermos o maior dos números  $p, q$  e lhe chamarmos  $r$ , temos que para  $n \geq r$  são as duas correctas e utilizando o Facto 2.4.5 resulta

$$x_n + y_n \text{ é valor aproximado de } a + b \text{ com erro que não excede } \delta$$

para  $n \geq r$ . ■

**Facto 2.4.11** (i) Se  $\lim x_n = a$  e  $c \in \mathbb{R}$ , então

$$\lim(cx_n) = ca.$$

(ii) Se  $\lim x_n = 0$  e  $\lim y_n = 0$ , então

$$\lim x_n y_n = 0.$$

Demonstração. (i) Se  $c = 0$ , o resultado é evidente tendo em conta o Facto 2.4.9.

Admitamos  $c \neq 0$ . Seja  $\delta$  um número positivo arbitrário. Então  $\frac{\delta}{|c|}$  é também positivo. Pela hipótese, há um  $C_p$  tal que  $C_p \subset V\left(a, \frac{\delta}{|c|}\right)$ , o que significa

$$|x_n - a| \leq \frac{\delta}{|c|} \quad \forall n \geq p.$$

Multiplicando por  $|c|$  esta desigualdade obtemos

$$|c| |x_n - a| = |cx_n - ca| \leq \delta \quad \forall n \geq p$$

e portanto o conjunto  $C'_p = \{cx_p, cx_{p+1}, \dots\}$  referente à sucessão  $(cx_n)$  está contido em  $V(ca, \delta)$ . A demonstração de (i) está concluída.

(ii) Seja  $\delta$  um número positivo arbitrário e inferior a 1. Então, pela hipótese,

$x_n$  é valor aproximado de 0 com erro que não excede  $\delta$ ,

$y_n$  é valor aproximado de 0 com erro que não excede  $\delta$ ,

são afirmações correctas a partir de certas ordens, diagramos,  $n \geq p$  no primeiro caso e  $n \geq q$  no segundo. Sendo  $r$  o maior dos números  $p, q$  são ambas verdadeiras para  $n \geq r$ . Pelo Facto 2.4.6 conclui-se

$x_n y_n$  é valor aproximado de 0 com erro que não excede  $\delta^2$ ,

para  $n \geq r$ . Como  $\delta^2 < \delta$ , vem

$$\{x_r y_r, x_{r+1} y_{r+1}, x_{r+2} y_{r+2}, \dots\} \subset V(0, \delta).$$

A condição que significa " $\lim(x_n y_n) = 0$ " está, pois, verificada. (Se obtivemos a inclusão no caso  $0 < \delta < 1$ , com maioria de razão a obteríamos no caso  $\delta \geq 1$ .) ■



**Facto 2.4.12** Se  $\lim x_n = a$  e  $\lim y_n = b$ , então

$$\lim(x_n y_n) = ab.$$

Demonstração. Pela hipótese sabemos que, com

$$u_n = x_n - a, \quad v_n = y_n - b,$$

temos

$$\lim u_n = 0 \quad \text{e} \quad \lim v_n = 0.$$

Então, pelo Facto 2.4.11 (ii) vem

$$\lim(u_n v_n) = 0,$$

e também

$$\lim(a v_n) = 0, \quad \lim(b u_n) = 0.$$

Como

$$x_n y_n = (a + u_n)(b + v_n) = ab + a v_n + b u_n + u_n v_n,$$

resulta do facto 2.4.10 que

$$\lim(x_n y_n) = ab + 0 + 0 + 0 = ab. \quad \blacksquare$$

**EXEMPLO 2.4.13** É fácil agora calcular os limites de sucessões que se exprimem como somas ou produtos de outras cujos limites são conhecidos. Assim,

$$\begin{aligned} \lim \left( 1 - \frac{3}{n} \right) &= \lim 1 - \lim \frac{3}{n} = 1 - 0 = 1, \\ \lim \frac{2n+1}{n+2} &= \lim \left( 2 + \frac{-3}{n+2} \right) = 2 + 0 = 2, \\ \lim \frac{2n+1}{n^2+2n} &= \lim \left( \frac{1}{n} \cdot \frac{2n+1}{n+2} \right) = 0 \cdot 2 = 0. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

**Facto 2.4.13** Se as sucessões  $x_n, y_n, z_n$  satisfazem

$$x_n \leq z_n \leq y_n \quad \forall n$$

e se  $\lim x_n = a, \lim y_n = a$ , então também

$$\lim z_n = a.$$

Demonstração. Para todo o  $\delta > 0$  há (pelo argumento utilizado na demonstração de 2.4.11) um  $p \in \mathbb{N}$  tal que

$x_n$  é valor aproximado de  $a$  com erro que não excede  $\delta$ ,  
 $y_n$  é valor aproximado de  $a$  com erro que não excede  $\delta$ ,

sempre que  $n \geq p$ . Mas então, utilizando o Facto 2.4.3 vemos que também

$z_n$  é valor aproximado de  $a$  com erro que não excede  $\delta$ . ■

**Facto 2.4.14** (i) Se  $\lim x_n = +\infty$  e

$$x_n \leq y_n \quad \forall n$$

então também  $\lim y_n = +\infty$ .

(ii) Se  $\lim y_n = -\infty$  e

$$x_n \leq y_n \quad \forall n$$

então  $\lim x_n = -\infty$ .

Estas propriedades permitem obter rapidamente muitos limites por *comparação*.

**EXEMPLO 2.4.14** Como, para todo o  $n$

$$0 < \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n} \quad (\text{porquê?})$$

e  $\frac{1}{n}$  tem limite 0, resulta que também

$$\lim \frac{1}{n^2} = 0. \quad \blacksquare$$

Na realidade, é fácil reconhecer que nos factos 2.4.13 e 2.4.14 basta que o enquadramento se verifique *a partir de um certo valor de  $n$*  para que se possa tirar a conclusão.

**EXEMPLO 2.4.15** É claro que

$$n^2 - n + 1 \geq n \quad \forall n.$$

Portanto  $\lim(n^2 - n + 1) = +\infty$ . ■

## Observações complementares sobre o conceito de limite.

(1) De acordo com o estudo efectuado nesta secção, a existência de limite é uma característica de *algumas* sucessões que permite descrever com exactidão o seu “comportamento terminal”, isto é, a tendência que os seus termos exibem quanto à concentração, quando ignoramos os primeiros 2, 3, ..., 1000, ..., milhão, ... de termos.

Quando a tendência é efectivamente para a concentração em torno de um número determinado, estamos no caso em que o limite da sucessão existe e é precisamente esse número.

Quando os termos da sucessão se afastam para a direita, no eixo real, para tão longe quanto quisermos - isto é, quando ultrapassam um número dado, por maior que seja, desde que retiremos uns tantos termos iniciais - estamos no caso em que o limite é  $+\infty$ . Analogamente descreveríamos o caso em que se fala de limite  $-\infty$ .

(2) Quando uma sucessão tem limite, ele é único, o que justifica o uso do artigo definido em locuções como “o limite da sucessão  $x_n \dots$ ” e o uso da escrita “ $\lim u_n = a$ ”. Ver adiante a Consequência 2.4.24.

(3) Os símbolos  $+\infty$ ,  $-\infty$  são apenas isso mesmo: símbolos (que não têm como significado nenhum número!) que servem para abreviar as definições de limite infinito.

(4) A própria definição de limite mostra que podemos alterar à nossa vontade um determinado número (arbitrário) de termos iniciais numa sucessão sem que haja qualquer modificação no valor do limite: precisamente porque para definir o limite apenas intervém “o que resta” da sucessão depois de lhe retirarmos 2, 3, 4 ou um bilião de termos. Por exemplo, se tomarmos a sucessão  $\frac{1}{n}$  e modificarmos os primeiros mil termos decretando que todos eles passam a valer um milhão, obtemos a nova sucessão

$$\underbrace{10^6, 10^6, \dots, 10^6, \dots, 10^6}_{\text{mil termos}}, \frac{1}{1001}, \frac{1}{1002}, \frac{1}{1003}, \dots$$

que tem limite 0, tal como a sucessão original. Na verdade, os conjuntos  $C_p$  relativos a estas sucessões são os mesmos para  $p \geq 1001$ .

Mais geralmente, e com o mesmo tipo de argumentação, podemos concluir:

**Facto 2.4.15** *Sejam  $u_n$  e  $v_n$  duas sucessões que “coincidem a partir de certa ordem”, isto é, há um número natural  $r$  tal que*

$$u_n = v_n \quad \text{se } n \geq r.$$

*Então, se  $\lim u_n = a$ , também é verdade que*

$$\lim v_n = a. \quad \blacksquare$$

De modo semelhante,

**Facto 2.4.16** *Seja  $u_n$  uma sucessão,  $k \in \mathbb{N}$ , e definamos a nova sucessão*

$$v_n = u_{n+k}$$

cujos termos são

$$u_{k+1}, u_{k+2}, u_{k+3}, u_{k+4}, \dots$$

(que podemos referir como sucessão obtida da primeira por supressão dos primeiros  $k$  termos).

Então, se  $\lim u_n = a$ , também é verdade que

$$\lim v_n = a. \quad \blacksquare$$

Já vimos como se comportam os limites com respeito às operações de adição e multiplicação. Para a divisão, e em particular para a passagem ao inverso, há também uma regra simples:

**Facto 2.4.17** Se  $\lim y_n = b \neq 0$ , sendo também os termos de  $y_n$  não nulos, tem-se

$$\lim \frac{1}{y_n} = \frac{1}{b}.$$

---

Demonstração. Trata-se de analisar em que medida os termos  $\frac{1}{y_n}$  são valores aproximados de  $\frac{1}{b}$ . Para isso é natural calcularmos o módulo da diferença

$$\left| \frac{1}{y_n} - \frac{1}{b} \right| = \left| \frac{b - y_n}{y_n b} \right| = \frac{|y_n - b|}{|y_n b|}. \quad (*)$$

Como  $y_n \rightarrow b$ , temos  $y_n b \rightarrow b^2$  (Facto 2.4.12). Então, há um conjunto  $\{y_p b, y_{p+1} b, \dots\}$  cujos elementos são todos maiores que  $\frac{b^2}{2}$ :

$$(|y_n b| =) y_n b > \frac{b^2}{2} \quad \forall n \geq p. \quad (**)$$

Dado agora  $\delta > 0$  arbitrário,  $\frac{2}{b^2} \delta$  é também  $> 0$ , e por hipótese há uma ordem  $r$  tal que

$$|y_n - b| \leq \frac{2}{b^2} \delta \quad \forall n \geq r.$$

Se  $s$  é o maior dos números  $p$  e  $r$ , resulta imediatamente de (\*) e (\*\*)

$$\left| \frac{1}{y_n} - \frac{1}{b} \right| \leq \frac{2}{b^2} \delta \cdot \frac{b^2}{2} = \delta \quad \forall n \geq s.$$

A demonstração fica concluída. ■

---

**Facto 2.4.18** Se  $\lim x_n = a$  e  $y_n$  é como no facto precedente, então

$$\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}.$$

Demonstração. Trata-se de uma consequência imediata do facto anterior e de 2.4.12. ■

**EXEMPLO 2.4.16** Outra maneira de calcular o limite das duas últimas sucessões do exemplo 2.4.13 é utilizar as regras operatórias, depois de dividir ambos os termos da fracção por  $n$  (no primeiro caso) e por  $n^2$  (no segundo caso):

$$\frac{2n+1}{n+2} = \frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}} \rightarrow \frac{2+0}{1+0} = \frac{2}{1} = 2.$$

$$\frac{2n+1}{n^2+2n} = \frac{\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{2}{n}} \rightarrow \frac{0+0}{1+0} = 0.$$

Analogamente se mostra que

$$\frac{3n^2 - 10^6n + 1}{n^2 + 1} = \frac{3 - \frac{10^6}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}} \rightarrow 3.$$

Repare-se nos valores dos primeiros termos desta sucessão e veja-se como eles estão longe de dar uma indicação sobre o valor do limite. ■

Calculámos atrás o limite de uma progressão aritmética. Vamos agora considerar o caso de uma progressão geométrica

$$u_n = a^n$$

em que a razão é o número  $a \in \mathbb{R}$ . É conveniente começar por observar o comportamento de  $u_n$  em certos casos particulares:

- Se  $a = 2$ , obtemos a sucessão

$$u_1 = 2, u_2 = 4, u_3 = 8, u_4 = 16, u_5 = 32, \dots, u_{20} = 1048576, \dots$$

que “visivelmente” tende para  $+\infty$ . Na realidade tem-se  $2^n > n$  para todo o  $n$ .<sup>11</sup> Os termos aumentam de valor com bastante rapidez.

- Com outro número maior que 1, mas mais próximo de 1, por exemplo,  $a = 1.00001$ , obtemos

$u_2 = 1.0000200001$	$u_{100} = 1.00100049516\dots$
$u_3 = 1.0000300003\dots$	$u_{1000} = 1.01005011658\dots$
$u_4 = 1.0000400006\dots$	$u_{10000} = 1.10517036549\dots$
$u_5 = 1.0000500001\dots$	$u_{100000} = 2.71826823717\dots$
$\dots$	$\dots$
$u_{10} = 1.0001000045\dots$	$u_{1000000} = 22025.3645064\dots$
$\dots$	$\dots$

Esta sucessão cresce inicialmente com uma certa lentidão, mas os termos acabam por atingir valores elevados se tivermos a paciência de os calcular para ordens muito elevadas. É agora menos óbvio que a sucessão tem limite  $+\infty$ .

<sup>11</sup>Esta desigualdade é muito fácil de aceitar, mas tem de ser demonstrada (ver o Apêndice 5).

- Se  $a = \frac{1}{2}$ , obtemos

$$\begin{array}{ll} \frac{1}{2} = 0.5, & \frac{1}{4} = 0.25, \\ \frac{1}{8} = 0.125, & \frac{1}{16} = 0.0625, \\ \frac{1}{32} = 0.03125, & \frac{1}{64} = 0.015625, \\ \dots & \frac{1}{2^{20}} = 0.000000953674 \end{array}$$

sendo aparente que o limite da sucessão é 0, e a aproximação ao limite é feita com bastante rapidez.

**Facto 2.4.19** Se  $0 < a < 1$ , então

$$\lim a^n = 0.$$

Demonstração. Sabemos que, com  $0 < a < 1$ , a sucessão  $a^n$  é decrescente:

$$a > a^2 > a^3 > \dots > a^n > a^{n+1} > \dots$$

e sabemos também que a soma de  $n$  termos é

$$a + a^2 + a^3 + \dots + a^n = \frac{a - a^{n+1}}{1 - a} < \frac{a}{1 - a}. \quad (2.10)$$

Para vermos que  $a^n \rightarrow 0$  há que mostrar que, dado  $\delta > 0$ , existe  $p \in \mathbb{N}$  tal que

$$a^p, a^{p+1}, a^{p+2}, \dots$$

são números  $\leq \delta$ . Se tal não acontecesse teríamos

$$a > a^2 > a^3 > \dots > a^n > \dots > \delta$$

para todo o  $n$ . Então

$$a + a^2 + \dots + a^n > n\delta$$

e conclui-se, em virtude de  $n\delta$  ser progressão aritmética de razão  $\delta > 0$ ,

$$\lim(a + a^2 + \dots + a^n) = +\infty,$$

o que está em contradição com (2.10). ■

**Consequência.** Se  $|a| < 1$ , então

$$\lim a^n = 0.$$

Demonstração.  $|a^n| = |a|^n$  e portanto, dado um número  $\delta > 0$  temos

$$|a^n| \leq \delta$$

para os mesmos valores de  $n$  que satisfazem  $|a|^n \leq \delta$ , o que sucede de um certo valor de  $n$  em diante, graças ao facto anterior. ■

**Facto 2.4.20** Se  $a > 1$ , tem-se

$$\lim a^n = +\infty.$$

Demonstração. Seja  $b = \frac{1}{a}$ , ou  $a = \frac{1}{b}$ . Então  $0 < b < 1$ ,

$$a^n = \left(\frac{1}{b}\right)^n = \frac{1}{b^n}$$

e a nossa afirmação é consequência directa dos Factos 2.4.7 e 2.4.19. ■

---

### Outras propriedades dos limites

**Facto 2.4.21** Se  $\lim u_n = a$ , então as subsucessões dos termos de ordem par e dos termos de ordem ímpar (ver o final da secção 2.1) têm o mesmo limite.

Demonstração. Se consideramos os conjuntos

$$\begin{aligned}C_p &= \{u_p, u_{p+1}, u_{p+2}, \dots\} \\C'_p &= \{u_{2p}, u_{2p+2}, u_{2p+4}, \dots\} \\C''_p &= \{u_{2p-1}, u_{2p+1}, u_{2p+3}, \dots\}\end{aligned}$$

é imediato que  $C'_p \subset C_p$  e  $C''_p \subset C_p$ . Portanto, se  $C_p$  é formado por aproximações de  $a$  com erro que não excede  $\delta$ , o mesmo acontece com  $C'_p$  e  $C''_p$ . ■

**EXEMPLO 2.4.17** A sucessão  $(-1)^n$  não tem limite, porque as subsucessões dos termos de ordem par

$$1, 1, 1, 1, \dots$$

e a dos termos de ordem ímpar

$$-1, -1, -1, -1, \dots$$

têm limites distintos.

**Facto 2.4.22** Se, para uma dada sucessão  $u_n$ , se tem

$$\lim u_{2n} = a \quad \text{e} \quad \lim u_{2n-1} = a,$$

então também é verdade que

$$\lim u_n = a.$$

Demonstração. Basta utilizar um argumento semelhante ao da demonstração de 2.4.21, observando agora que

$$C_{2p-1} = C'_p \cup C''_p. \quad \blacksquare$$

**EXEMPLO 2.4.18** Seja  $u_n$  a sucessão assim definida:

$$u_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ é ímpar,} \\ \frac{n+3}{n+2} & \text{se } n \text{ é par.} \end{cases}$$

Então as subsucessões de termos ímpares e termos pares são, respectivamente

$$u_{2n-1} = 1, \quad u_{2n} = \frac{2n+3}{2n+2}.$$

Portanto,  $\lim u_n = 1$ .

---

**Facto 2.4.23** Se as sucessões  $(u_n)$  e  $(v_n)$  satisfazem

$$u_n \leq v_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

e ambas têm limite finito, então

$$\lim u_n \leq \lim v_n.$$


---

Demonstração. Seja  $u_n \rightarrow a$  e  $v_n \rightarrow b$ . Queremos provar que  $a \leq b$ . Argumentando por redução ao absurdo, suponhamos que  $b < a$ .

$$\begin{array}{ccccccc} b & & b + \delta & & a - \delta & & a \\ | & & | & & | & & | \\ \hline \end{array}$$

Dividindo o segmento  $[b, a]$  em três partes iguais, determinamos pontos  $b + \delta$ ,  $a - \delta$  tais que

$$b < b + \delta < a - \delta < a.$$

Por definição de limite há  $p, q \in \mathbb{N}$  de modo que

$$C_p = \{u_p, u_{p+1}, \dots\} \quad \text{e} \quad C'_q = \{v_q, v_{q+1}, \dots\}$$

se encontram totalmente contidos em

$$[a - \delta, a + \delta] \quad \text{e} \quad [b - \delta, b + \delta]$$

respectivamente. Mas, escolhendo  $r \in \mathbb{N}$  com  $r \geq p$  e  $r \geq q$ , vem então

$$v_r \leq b + \delta < a - \delta \leq u_r$$

o que está em contradição com a hipótese. ■

---

**Consequência 2.4.24** O limite de uma sucessão, quando existe, é único, isto é:  $u_n \rightarrow a$  e  $u_n \rightarrow b$  implica  $a = b$ .

Demonstração. Pelo Facto anterior ter-se-á  $a \leq b$  e  $b \leq a$ . Portanto  $a = b$ . ■



## Exercícios da Secção 2.4

- 1 Indicar, com escrita decimal, valores aproximados dos números seguintes com erro que não excede  
(a)  $10^{-1}$ ; (b)  $10^{-3}$

$$\frac{3}{7}; \quad \pi; \quad \frac{3\pi}{1+\pi^2}; \quad \frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}; \quad 5\sqrt[3]{4}-1.$$

(Utilizar uma calculadora para os quatro últimos.)

- 2 Escrever  $\sqrt{7}$  com duas casas decimais correctas. Pode utilizar-se uma calculadora, mas não a tecla  $\sqrt{\phantom{x}}$

- 3 Verificar que todos os termos da sucessão  $\frac{(-1)^n}{n}$  são valores aproximados de 0 com erro que não excede 1. Mas, se quisermos que os elementos do conjunto

$$C_p = \left\{ \frac{(-1)^p}{p}, \frac{(-1)^{p+1}}{p+1}, \frac{(-1)^{p+2}}{p+2}, \dots \right\}$$

sejam valores aproximados de 0 com erro que não excede  $10^{-6}$ , que valores deve assumir  $p$ ?

- 4 Determinar  $p$  de modo que o conjunto

$$C_p = \{u_p, u_{p+1}, \dots\}$$

- (a) para  $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ , seja constituído por aproximações de 0 com erro que não excede  $10^{-3}$ ;  
(b) para  $u_n = \sqrt{n}$ , tenha todos os elementos superiores a 100.

- 5 Determinar ordens  $p \in \mathbb{N}$  a partir das quais se verifique

$$(a) \frac{n}{n+1} > \frac{1}{2}; \quad (b) \frac{n^2}{n+1} > 1\,000.$$

- 6 Verificar que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$ , considerando a sucessão diferença  $\frac{n}{n+1} - 1$ .

- 7 Indicar os limites das sucessões

$$\frac{1}{n^2}; \quad \frac{1}{n^3}; \quad \frac{1}{\sqrt{n}}; \quad (n+1)^4.$$

- 8 Calcular os limites das sucessões:

$$\begin{array}{lll} \frac{n-4}{n+5}; & \frac{5n-2}{1-3n}; & n^2-100n; \\ \frac{7n-4}{n^2+1}; & \frac{n^3-n^2}{4n^3+n}; & \frac{n^3-n}{1\,000n^2+n+1\,000}. \end{array}$$

9] Calcular os limites das sucessões

$$1 - 2^n; \quad 3 - \frac{5}{6^n}; \quad \frac{2^n - 1}{2^n + 1}; \quad \frac{2^n - 1}{3^n + 1}.$$

(Para as duas últimas, começar por dividir ambos os termos das fracções por  $2^n$  e  $3^n$ , respectivamente.)

10] Alguma das sucessões

$$1 + (-1)^n, \quad \frac{1 + (-1)^n}{n}, \quad \frac{2 \times (-1)^n + (-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}.$$

terá limite?

11] Determinar uma ordem a partir da qual a sucessão

$$n + (-1)^n 3$$

tem todos os seus termos superiores a  $10^3$ . A sucessão tem limite?

12] Para a sucessão  $u_n = \frac{3}{2^n} - 4$ , indicar um valor de  $p$  de modo que todos os termos  $u_p, u_{p+1}, u_{p+2}, \dots$  sejam valores aproximados de  $-4$  com erro que não excede  $10^6$ .

13] Sabe-se que uma dada sucessão  $u_n$  tem limite 1. Quais das seguintes afirmações são verdadeiras?

(a) Há uma ordem  $p$  tal que

$$u_n < 20 \quad \forall n \geq p.$$

(b) Há uma infinidade de valores de  $n$  tais que

$$u_n > 0.$$

(c) Há uma infinidade de valores de  $n$  tais que

$$u_n > 1.01.$$

## 2.5\* Sucessões e representação decimal dos números reais

Já tivemos anteriormente oportunidade de considerar representações de números reais na notação decimal. Recordemos algumas:

$$1/100 = 0.01$$

$$\sqrt{5} = 2.2360679 \dots$$

$$\pi = 3.14159 \dots$$

$$1/3 = 0.333333 \dots$$

$$5/7 = 0.714285714285 \dots$$

Estas representações costumam ser designadas por *dízimas*. Em alguns casos há um algarismo ou grupo de algarismos que se repete indefinidamente (0 em 1/100 a partir da 3ª casa decimal; 3 em 1/3 a partir da 1ª casa decimal; 714285 em 5/7 a partir da 1ª casa decimal): tais *dízimas* dizem-se periódicas e pode demonstrar-se que são as que representam números racionais (cocientes de dois inteiros) e só essas. Os números  $\sqrt{5}$  e  $\pi$  são irracionais, e como tal, a sucessão de algarismos presente na *dízima* não obedece a um padrão de repetição de um grupo de algarismos.

Mas o que significa e como se obtém a *dízima* que representa um dado número?

Seja  $a$  um número real dado. Para simplificar a escrita, suponhamos  $a > 0$ . Começemos por escolher a melhor aproximação inteira de  $a$ , isto é, o número  $N \in \mathbb{N}_0$  tal que

$$N \leq a < N + 1^{12} \quad (2.11)$$

Seguidamente, procuremos a primeira casa decimal de  $a$ , ou seja, o número inteiro  $p_1 \in \mathbb{N}_0$  tal que

$$N + \frac{p_1}{10} \leq a < N + \frac{p_1}{10} + \frac{1}{10}. \quad (2.12)$$

Claro que  $p_1$  é um dos números 0, 1, ..., 9 em virtude de (2.11).

Após esta etapa, podemos afirmar que o número que é usual notar por

$$N.p_1$$

é a melhor aproximação, por defeito, de  $a$ , com uma casa decimal.

---

<sup>12</sup>Este número  $N$  é a característica de  $a$ ,  $C(a)$ . Ver a Secção 1.1.

A procura da segunda decimal de  $a$  é a determinação do inteiro  $p_2 \in \mathbb{N}_0$  tal que

$$N + \frac{p_1}{10} + \frac{p_2}{10^2} \leq a < N + \frac{p_1}{10} + \frac{p_2}{10^2} + \frac{1}{10^2} \quad (2.13)$$

e, em virtude de (2.12), este número está também entre 0 e 9.

Na  $k$ -ésima etapa determina-se um inteiro  $p_k$  (entre 0 e 9) tal que

$$N + \frac{p_1}{10} + \frac{p_2}{10^2} + \dots + \frac{p_k}{10^k} \leq a < N + \frac{p_1}{10} + \frac{p_2}{10^2} + \dots + \frac{p_k}{10^k} + \frac{1}{10^k} \quad (2.14)$$

significando que

$$N.p_1p_2 \dots p_k \quad (2.15)$$

é a melhor aproximação de  $a$ , por defeito, com  $k$  casas decimais. Este processo pode prosseguir, de modo que fica assim definida uma sucessão de números decimais

$$d_0 = N, \quad d_1 = N.p_1, \quad d_2 = N.p_1p_2, \dots \quad d_k = N.p_1p_2 \dots p_k, \dots$$

com a propriedade

$$d_k \leq a < d_k + \frac{1}{10^k} \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

ou seja

$$a - \frac{1}{10^k} < d_k \leq a \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Como  $\lim \left(a - \frac{1}{10^k}\right) = a$ , o Facto 2.4.13 permite afirmar imediatamente que a sucessão  $d_k$  tem limite, e

$$\lim d_k = a,$$

ou ainda

$$\lim_k (N.p_1p_2 \dots p_k) = a. \quad (2.16)$$

Portanto, qualquer número real é o limite da sucessão das suas melhores aproximações decimais por defeito. É precisamente a igualdade (2.16) que costuma ser escrita na forma

$$N.p_1p_2 \dots p_k \dots = a \quad (2.17)$$

onde a notação do primeiro membro sugere a sucessão (infinita) dos algarismos  $p_k$ .

Reciprocamente, dada uma dízima infinita, isto é, um símbolo

$$N.p_1p_2 \dots p_k \dots \quad (2.18)$$

onde  $N$  é inteiro, e os  $p_k$  são inteiros entre 0 e 9, sendo  $(p_k)$  uma sucessão definida, não importa por que processo, pode provar-se que existe o  $\lim(N.p_1p_2 \dots p_k)$  e este limite é então o número real  $a$  que corresponde a dízima (2.18).

**EXEMPLO 2.5.1** Tem-se

$$\frac{7}{11} = 0.636363 \dots$$

porque se pode verificar que

$$\begin{aligned} 0.6 &< \frac{7}{11} < 0.7, \\ 0.63 &< \frac{7}{11} < 0.64, \\ 0.636 &< \frac{7}{11} < 0.637, \dots \end{aligned}$$

Se nos fosse dada a dízima infinita

$$0.636363 \dots 63 \dots$$

onde o grupo de algarismos 63 se repete sempre, como poderíamos calcular o número que ela representa? Basta encará-la como limite da sucessão

$$0.63, \quad 0.6363, \quad 0.636363, \quad \dots$$

cujo termo geral é

$$\frac{63}{100} + \frac{63}{100^2} + \dots + \frac{63}{100^n}.$$

Observando que esta é a soma de  $n$  termos da progressão geométrica  $\frac{63}{100^n}$ , temos em virtude do Facto 2.3.2

$$\frac{63}{100} + \frac{63}{100^2} + \dots + \frac{63}{100^n} = \frac{\frac{63}{100} - \frac{63}{100^n} \times \frac{1}{100}}{1 - \frac{1}{100}}.$$

Portanto, já que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{63}{100^n} = 0$ ,

$$0.6363 \dots 63 \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{63}{100} + \frac{63}{100^2} + \dots + \frac{63}{100^n} \right) = \frac{\frac{63}{100}}{\frac{99}{100}} = \frac{7}{11}.$$

## Exercícios da Secção 2.5

- 1 Escrever os primeiros 10 algarismos da dízima que representa os números:

$$2\pi; \quad \frac{1 - \frac{1}{5}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{5}}.$$

- 2 Quais são os números racionais cujas dízimas são

$$0.12121212\dots? \quad 0.121121121121\dots? \quad 0.812121212\dots?$$

## 2.6\* Comprimento da circunferência, área do círculo

A noção de *comprimento* de um segmento de recta é uma das noções básicas que aprendemos em Geometria. A partir dela definimos, sem dificuldade, o *perímetro* de um polígono, que é simplesmente a soma dos comprimentos dos seus lados.

Conhecemos também uma fórmula para calcular o perímetro de uma circunferência de raio  $R$ . Mas como se chega a esse resultado? O problema é agora menos simples: não se trata apenas de adicionar comprimentos de uns tantos segmentos de recta. . .

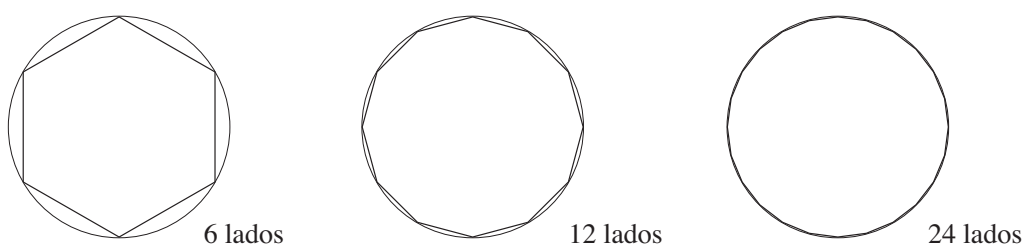
Uma técnica, cuja ideia chave remonta à Antiguidade e que permite resolver o problema com clareza e eficácia, parte do cálculo dos perímetros de polígonos inscritos na circunferência e efectua uma passagem ao limite a partir deles. Mais precisamente: o perímetro  $P$  da circunferência é assumido como sendo igual ao limite da sucessão  $P_n$  de perímetros de polígonos regulares de  $n$  lados nela inscritos:

$$P = \lim P_n,$$

o que é fortemente apoiado pela intuição, visto que para  $n$  “grande”, o polígono regular de  $n$  lados inscrito na circunferência e a própria circunferência são figuras “muito próximas” . . .

Vamos descrever um método de cálculo de  $P$  a partir desta ideia. Por razões de simplicidade usaremos, não os polígonos regulares inscritos de  $n$  lados, para todo o  $n$ , mas apenas os que se obtêm partindo dum hexágono e *duplicando* sucessivamente o número de lados, isto é, vamos trabalhar apenas com a sucessão de polígonos de  $6 \times 2^n$  lados, ( $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ ).

**EXEMPLO 2.6.1** Tomando então como ponto de partida um hexágono regular inscrito numa circunferência de raio  $R$ , consideremos a sucessão de polígonos regulares que se obtêm duplicando o número de lados em cada etapa: polígono de 12 lados, de 24 lados, etc.

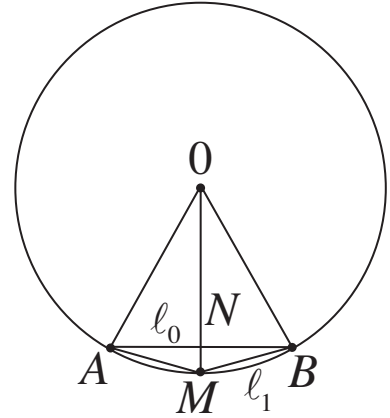


Procuremos uma expressão do termo geral dos perímetros dos polígonos referidos em função de  $R$ . O perímetro do primeiro é muito fácil de calcular: como o lado do hexágono regular inscrito é igual ao raio temos

$$P_0 = 6R$$

como expressão do primeiro perímetro a calcular.

Para passar ao cálculo do segundo perímetro, consideremos um dos lados  $AB$  do hexágono sendo  $\ell_0 = R$  o seu comprimento, e os lados  $AM$ ,  $MB$  do polígono de 12 lados, com comprimento  $\ell_1$ , obtidos a partir do ponto médio  $M$  de arco  $\widehat{AB}$ .



Como  $OM$  é mediatriz de  $AB$ , temos, em virtude do teorema de Pitágoras (e sendo  $N$  o ponto comum a  $OM$  e  $AB$ )

$$R^2 = \left(\frac{\ell_0}{2}\right)^2 + ON^2$$

e, portanto, já que  $\ell_0 = R$ ,

$$ON^2 = R^2 - \frac{R^2}{4} = \frac{3R^2}{4}.$$

Novamente pelo teorema de Pitágoras vem

$$\begin{aligned} \ell_1^2 &= AN^2 + NM^2 = \frac{R^2}{4} + \left(R - \frac{\sqrt{3}}{2}R\right)^2 \\ &= \frac{R^2}{4} + \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 R^2 \\ &= \left[\frac{1}{4} + \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right] R^2 \\ &= (2 - \sqrt{3})R^2, \end{aligned}$$

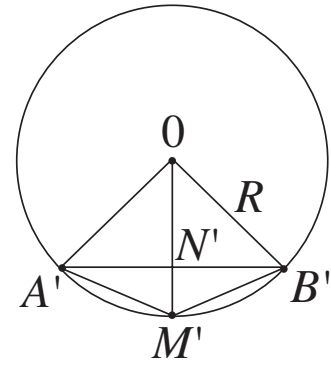
e, finalmente, o perímetro do polígono de 12 lados vem dado por

$$P_1 = 12\sqrt{2 - \sqrt{3}}R.$$

De um modo geral, podemos obter a expressão dos perímetros  $P_2, P_3, P_4, \dots, P_n, \dots$  dos sucessivos polígonos regulares inscritos com 24, 48,  $\dots$  lados, repetindo os cálculos anteriores num enquadramento geral.



Seja  $A'B'$  o lado do polígono inscrito de  $6 \times 2^n$  lados, com comprimento  $\ell_n$  e sejam  $M', N'$  os pontos com o significado análogo a  $M$  e  $N$  na figura anterior. Então, no triângulo rectângulo  $OA'N'$  temos:



$$R^2 = \left(\frac{\ell_n}{2}\right)^2 + ON'^2,$$

$$ON'^2 = R^2 - \frac{\ell_n^2}{4}.$$

O comprimento  $\ell_{n+1}$  do segmento  $A'M'$  (que é o lado do polígono de  $6 \times 2^{n+1}$  lados) é dado por

$$\ell_{n+1}^2 = A'N'^2 + N'M'^2 = \left(\frac{\ell_n}{2}\right)^2 + \left(R - \sqrt{R^2 - \frac{\ell_n^2}{4}}\right)^2.$$

Como  $P_n = 6 \times 2^n \ell_n$ , vem

$$\ell_n = \frac{P_n}{6 \times 2^n}$$

e portanto

$$P_{n+1} = 6 \times 2^{n+1} \ell_{n+1} = 6 \times 2^{n+1} \sqrt{\frac{P_n^2}{144 \times 2^{2n}} + \left(R - \sqrt{R^2 - \frac{P_n^2}{144 \times 2^{2n}}}\right)^2}.$$

Esta fórmula permite calcular os perímetros de todos os polígonos referidos, visto que conhecemos o valor do primeiro ( $P_1$ ) e a partir de uma dada etapa ( $P_n$ ) sabemos passar à etapa seguinte ( $P_{n+1}$ ).

Se, para fixar ideias, fizemos  $R = 1$ , as nossas fórmulas são:

$$P_0 = 6,$$

$$P_{n+1} = 6 \times 2^{n+1} \sqrt{\frac{P_n^2}{144 \times 2^{2n}} + \left(1 - \sqrt{1 - \frac{P_n^2}{144 \times 2^{2n}}}\right)^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.19)$$

Com o auxílio de uma calculadora, é fácil calcular (aproximações decimais dos) termos da sucessão  $P_n$ , que registamos no seguinte quadro onde utilizamos apenas 5 decimais:

$n$	1	2	3	4	5	...
$P_n$	6.21166	6.26526	6.27870	6.28206	6.28290	

Esta sucessão tem efectivamente limite finito (daremos, no fim da secção 2.8, uma justificação deste facto) e o seu valor é o perímetro da circunferência de raio 1, que também se representa por  $2\pi$ . Assim, podemos dizer que o número  $\pi$  é precisamente  $\frac{1}{2} \lim P_n$ , sendo  $P_n$  a sucessão definida por recorrência pela fórmula (2.19). Temos aqui, portanto, um método prático de calcular aproximações do número  $\pi$  com erro arbitrariamente pequeno.

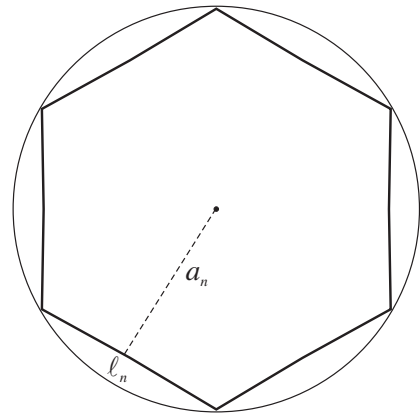
No caso geral em que  $R$  é o raio da circunferência teríamos obtido, analogamente, como resultado para o perímetro

$$P = 2\pi R.$$

O método descrito é também eficaz para o cálculo da área do círculo. A ideia principal é semelhante à anterior: a área  $A$  do círculo é assumida como sendo igual ao limite da sucessão  $A_n$  das áreas dos polígonos regulares inscritos.

Representando por  $\ell_n$  e  $a_n$  o lado e o apótema do  $n$ -ésimo polígono, sabemos que  $A_n$  é soma das áreas de  $6 \times 2^n$  triângulos isósceles:

$$A_n = 6 \times 2^n \times \frac{\ell_n \times a_n}{2},$$



fórmula que pode ser escrita

$$A_n = \frac{P_n \times a_n}{2}.$$

Vamos então aplicar limites. Já vimos que

$$\lim P_n = P = 2\pi R;$$

e sabemos que

$$\lim a_n = R.$$

Então,

$$\lim A_n = \frac{2\pi R \times R}{2} = \pi R^2,$$

ou seja

$$A = \pi R^2$$

que é uma fórmula bem nossa conhecida.

## Exercícios da Secção 2.6

- 1 Recorrendo a uma calculadora e à fórmula de recorrência (2.19), calcular uma aproximação de  $\pi$  com 6 casas decimais correctas (sem utilizar a tecla que dá  $\pi$ !)
- \*2 Obter a fórmula que dá o volume de um cone circular recto como limite de volumes de pirâmides regulares nele inscritas, tais que o número de lados das bases destas duplica indefinidamente.

## 2.7\* Limites de sucessões definidas por recorrência

A determinação do limite (quando ele existe) de uma sucessão definida por recorrência não é, em geral, fácil. Por exemplo, sabemos qual é o significado do limite da sucessão  $(P_n)$  definida (por recorrência) na secção anterior, mas esse é um resultado que obtemos por considerações de carácter geométrico e não por manipulação das fórmulas (2.19) que definem a sucessão.

Examinemos casos em que a sucessão é definida por um processo tecnicamente menos complicado, como o que descrevemos no exemplo seguinte.

**EXEMPLO 2.7.1** Consideremos a sucessão  $(u_n)$  definida por

$$\begin{aligned}u_1 &= 0, \\ u_{n+1} &= \frac{1}{1 + u_n}\end{aligned}\tag{2.20}$$

Os primeiros termos de  $(u_n)$  são

$$0, 1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}, \dots$$

Suponhamos que *sabemos* que  $(u_n)$  tem limite. Então é muito fácil calculá-lo aplicando limites a ambos os membros da segunda fórmula de (2.20). Designaremos por  $\alpha$  o limite de  $u_n$ :

$$\alpha = \lim u_n.$$

Também se tem, como sabemos (ver Facto 2.4.16)

$$\alpha = \lim u_{n+1},$$

e então

$$\alpha = \frac{1}{1 + \alpha}.\tag{2.21}$$

Para resolver esta equação, multiplicamos ambos os membros por  $1 + \alpha$  e obtemos a equação do segundo grau

$$\alpha^2 + \alpha - 1 = 0$$

cujas raízes são

$$\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

$$\alpha = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

$$f(x) = \frac{1}{1+x}.$$

$$\begin{aligned} u_1 &= 0, \\ u_{n+1} &= f(u_n) \end{aligned} \tag{2.22}$$

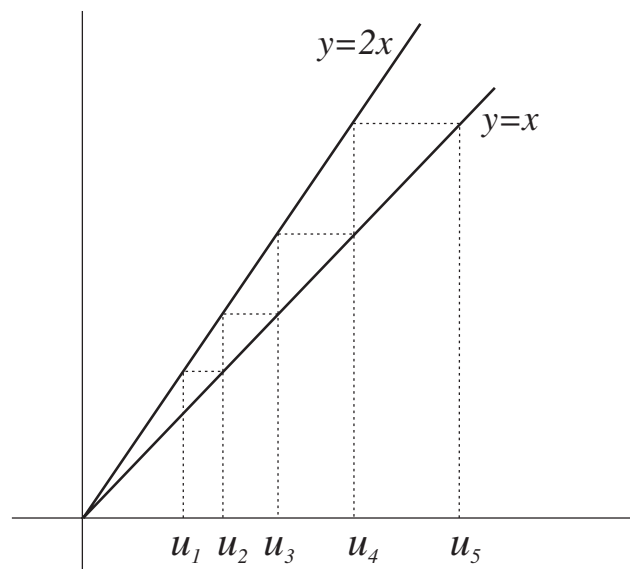
A figura sugere que os valores de  $u_n$  se aproximam tanto quanto quisermos da abcissa do ponto comum ao gráfico de  $f$  e à bissetriz, que é precisamente a raiz positiva da equação de 2º grau que atrás seleccionámos.

**OBSERVAÇÃO.** Uma sucessão definida por um processo semelhante ao do exemplo anterior, mas que não tem limite finito, é a seguinte:

$$\begin{aligned}u_1 &= 1, \\u_{n+1} &= 2u_n\end{aligned}$$

que não é senão a progressão geométrica  $1, 2, 2^2, 2^3, \dots$

Também neste caso  $u_{n+1} = g(u_n)$  com  $g(x) = 2x$ .



O esquema gráfico correspondente evidencia, neste caso, que os termos se afastam na direcção positiva do eixo  $0x$ , acabando por ultrapassar qualquer número fixado, por muito grande que seja.

## Exercícios da Secção 2.7

- 1 Sabendo que a sucessão  $(u_n)$  definida do seguinte modo:

$$\begin{aligned}u_1 &= 10, \\ u_{n+1} &= 1 - \frac{u_n}{2}\end{aligned}$$

tem limite, calcular o seu valor.

Depois tentar compreender, através de um esquema gráfico, por que razão o limite existe.

- 2 A sucessão  $u_1 = 0, u_{n+1} = 1 + u_n^2$  tem limite?

## 2.8 As sucessões monótonas

Já dissemos, na Secção 2.1, que uma sucessão  $(u_n)$  se diz *crescente* (respectivamente *estritamente crescente*) quando verifica a condição

$$u_n \leq u_{n+1} \quad (\text{respect. } u_n < u_{n+1}) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

De modo análogo se definem sucessões *decrecentes* e *estritamente decrecentes*, invertendo o sentido das desigualdades.

Como identificamos, na prática, tais sucessões? Consideremos, por exemplo, a propriedade de  $u_n$  ser *crescente*. Podemos verificá-la assegurando a condição equivalente

$$u_{n+1} - u_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Mas, se  $(u_n)$  tem todos os termos *positivos*, é evidente que também é equivalente a condição

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por outro lado, se o termo geral é dado por

$$u_n = f(n)$$

onde  $f : [1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função conhecida (o que significa, afinal, que  $(u_n)$  é restrição de  $f$  a  $\mathbb{N}$ ), então é óbvio que, se  $f$  é crescente, também  $(u_n)$  o é.

Considerações análogas se podem fazer a respeito dos outros tipos de sucessões monótonas.

**EXEMPLO 2.8.1** A sucessão  $\frac{3n}{n+1}$  é estritamente crescente. Podemos verificá-lo de vários modos:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \frac{3(n+1)}{(n+1)+1} - \frac{3n}{n+1} &= \frac{3(n+1)}{n+2} - \frac{3n}{n+1} = \frac{3(n+1)^2 - 3n(n+2)}{(n+2)(n+1)} \\ &= \frac{3n^2 + 6n + 3 - 3n^2 - 6n}{(n+2)(n+1)} = \frac{3}{(n+2)(n+1)} > 0, \end{aligned}$$

$$\text{(ii)} \quad \frac{\frac{3(n+1)}{n+2}}{\frac{3n}{n+1}} = \frac{3(n+1)}{n+2} \cdot \frac{n+1}{3n} = \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} = \frac{n^2 + 2n + 1}{n^2 + 2n} > 1,$$

$$\text{(iii)} \quad u_n = f(n) \text{ com}$$

$$f(x) = \frac{3x}{x+1} = \frac{3(x+1) - 3}{x+1} = 3 - \frac{3}{x+1}$$

e esta função é crescente em  $] -1, +\infty[$ .



A nomenclatura aqui utilizada para funções monótonas e em particular para sucessões monótonas, não é adoptada por todos os autores. Assim, se o leitor consultar outros textos, poderá encontrar designações diferentes para os mesmos objectos, de acordo com o seguinte dicionário:

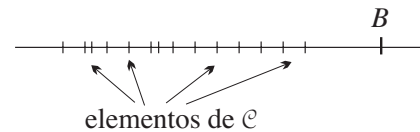
<u>NESTE TEXTO</u>	<u>NOUTROS TEXTOS</u>
crescente	crescente em sentido lato
decrescente	decrescente em sentido lato
estritamente crescente	crescente
estritamente decrescente	decrescente
monótona	monótona em sentido lato
estritamente monótona	monótona

Consideremos um conjunto  $\mathcal{C}$  de números reais:

$$\mathcal{C} \subset \mathbb{R}.$$

Um número  $B \in \mathbb{R}$  que tenha a propriedade de “estar à direita” de todos os números de  $\mathcal{C}$ , isto é:

$$\forall x \in \mathcal{C} \quad x \leq B$$



chama-se um *majorante* de  $\mathcal{C}$ .

**EXEMPLOS.** O intervalo  $[0, 1]$  tem como majorantes 1, 100, 1000, ... O intervalo  $] -\infty, 1]$  tem os mesmos majorantes que o anterior.

O conjunto das soluções da inequação

$$x^2 + 3x < 10$$

tem certamente como majorante o número  $10/3$  visto que a condição  $x^2 + 3x < 10$  implica

$$3x < 10.$$

O conjunto das soluções da inequação

$$x^2 + 3x > 10$$

não tem majorantes.

O conjunto  $\mathbb{N}$  dos números naturais não tem majorantes.

Trocando, na definição acima, o termo “à direita” pelo termo “à esquerda”, ou seja, trocando  $\leq$  por  $\geq$ , obtemos a definição de *minorante*.

Um conjunto de números diz-se *majorado* (respectivamente *minorado*) se tiver um majorante (respectivamente minorante).

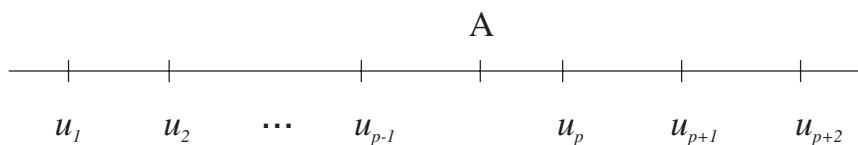
Observemos o seguinte facto trivial: se  $B$  é majorante de um conjunto  $\mathcal{C}$ , qualquer número  $B' > B$  é ainda majorante de  $\mathcal{C}$ . Observação análoga se pode fazer a respeito de minorantes.

Consideremos uma sucessão crescente de números reais,

$$u_1 \leq u_2 \leq u_3 \leq \dots \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \dots$$

É evidente que a respeito de uma tal sucessão só são possíveis duas alternativas:

1) *Dado arbitrariamente um número  $A \in \mathbb{R}$ , então há um termo  $u_p > A$ .*

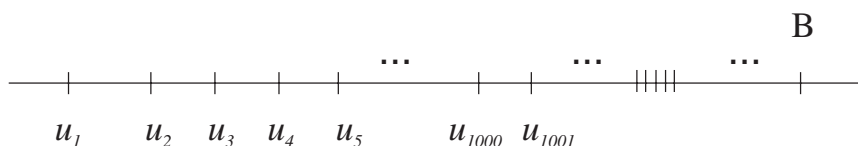


Todos os termos seguintes também são então maiores que  $A$ , ou seja  $C_p = \{u_p, u_{p+1}, \dots\}$  é formado por números que excedem  $A$ . Neste caso tem-se, de acordo com a definição dada na secção 2.4,

$$\lim u_n = +\infty,$$

2) *Há um número  $B \in \mathbb{R}$  que está, no eixo real, à direita de todos os termos da sucessão:*

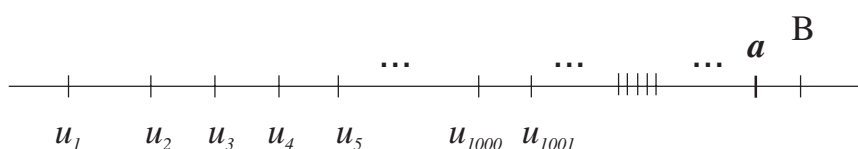
$$u_n \leq B \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$



Por outras palavras,  $B$  é *majorante* do conjunto dos termos da sucessão. Dizemos também que a sucessão é *majorada*.

Recordemos que majorantes há muitos: se  $B$  é um deles, todos os números  $B' \geq B$  são também majorantes da sucessão.

Atendendo a que *todos* os termos  $u_n$  têm de pertencer ao intervalo  $[u_1, B]$  e a que cada termo está à esquerda do seguinte, não é difícil de aceitar que eles têm obrigatoriamente de se “concentrar” perto de algum ponto do intervalo. Dito de outro modo: *tem de haver um número*  $a \in [u_1, B]$  do qual os termos  $u_n$  se aproximam<sup>13</sup> tanto quanto desejarmos, desde que os índices  $n$  sejam suficientemente elevados.



Este facto, que não pode ser demonstrado no âmbito deste estudo, significa afinal que a sucessão  $u_n$  tem limite finito:

$$\lim u_n = a.$$

Assim, uma sucessão monótona crescente tem sempre limite, que é  $+\infty$  (se a sucessão não é majorada) ou um número real (se a sucessão é majorada).

O que dizemos para sucessões crescentes pode repetir-se, com modificações óbvias, para sucessões decrescentes. Basta trocar o sentido das desigualdades. Onde falámos de *majorante*, passaremos a falar de *minorante*, e onde falamos de *sucessão majorada* passaremos a falar de *sucessão minorada*.

Resumindo, tem-se o seguinte

### **Facto 2.8.1 (Teorema da sucessão monótona)**

*Toda a sucessão monótona  $(u_n)$  tem limite, e*

- i) se  $u_n$  é crescente e não majorada, então  $\lim u_n = +\infty$ ;*
- ii) se  $u_n$  é crescente e majorada, então  $\lim u_n$  é um número real;*
- iii) se  $u_n$  é decrescente e não minorada, então  $\lim u_n = -\infty$ ;*
- iv) se  $u_n$  é decrescente e minorada, então  $\lim u_n$  é um número real.*

O reconhecimento das sucessões monótonas é, em certos casos, imediato. Assim, um momento de reflexão sobre as sucessões de termos gerais

$$\frac{1}{n}, \quad n^2 + 1, \quad 1 - \frac{1}{\sqrt{n}}$$

---

<sup>13</sup>necessariamente, pela esquerda...

é suficiente para nos convencer de que a primeira é decrescente, a segunda crescente, a terceira também crescente. (Isso resulta imediatamente de a função  $\frac{1}{x}$  ser decrescente em  $]0, +\infty[$  e as funções  $x^2 + 1$  e  $1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$  serem crescentes em  $]0, +\infty[$ .) Os seus limites não oferecem qualquer dúvida: são 0,  $+\infty$  e 1, respectivamente, em virtude das propriedades dos limites estudadas na secção 2.4.

Não é, portanto, no estudo de casos como estes que o teorema da sucessão monótona tem relevância. As afirmações mais substanciais do teorema - (ii) e (iv) - consistem na garantia de *existência* de um limite finito cujo valor não é conhecido à partida e que por vezes é difícil de calcular.

---

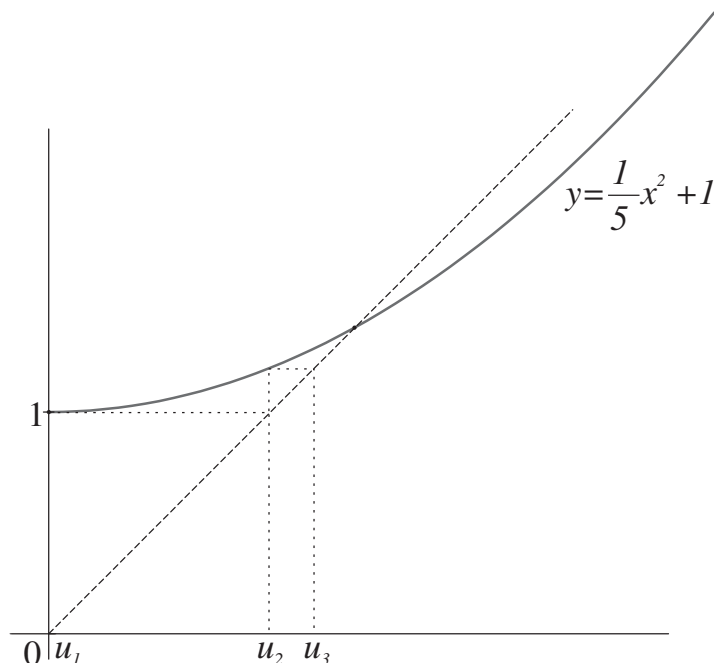
**EXEMPLO 2.8.2** Para a sucessão definida por recorrência por

$$\begin{aligned} u_1 &= 0, \\ u_{n+1} &= \frac{1}{5} u_n^2 + 1 \end{aligned} \tag{2.23}$$

podemos garantir que há limite real, porque a lei de formação dos termos

$$u_{n+1} = f(u_n),$$

onde  $f(x) = \frac{1}{5}x^2 + 1$ , interpretada geometricamente à semelhança do que vimos na secção 2.7, implica que  $(u_n)$  é crescente e tem todos os seus termos à esquerda da abcissa do primeiro ponto de encontro entre a recta  $y = x$  e a parábola  $y = \frac{1}{5}x^2 + 1$ .



Podemos então aplicar a afirmação (ii) do teorema de sucessão monótona e assegurar a existência do limite.

Para o *cálculo* do limite procedemos como na secção 2.7. Pondo

$$\alpha = \lim u_n$$

e aplicando limites aos dois membros da segunda equação (2.23) resulta

$$\alpha = \frac{1}{5}\alpha^2 + 1$$

ou

$$\alpha^2 - 5\alpha + 5 = 0.$$

As soluções desta equação são  $\frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$ . Como os termos da sucessão verificam a desigualdade

$$u_n \leq \frac{5 - \sqrt{5}}{2}$$

(estão à esquerda da abcissa do primeiro ponto comum à recta e à parábola) só pode ser

$$\alpha \leq \frac{5 - \sqrt{5}}{2}$$

e, por conseguinte,

$$\alpha = \lim u_n = \frac{5 - \sqrt{5}}{2}.$$

**EXEMPLO 2.8.3** Uma nova demonstração de que se tem

$$\lim a^n = 0$$

quando a constante  $a$  está entre 0 e 1:

Como  $0 < a < 1$ , tem-se  $a^2 < a$ ,  $a^3 < a^2$ , etc., porque multiplicando uma desigualdade por um número positivo obtém-se uma desigualdade com o mesmo sentido. Então

$$a > a^2 > a^3 > \dots a^n > a^{n+1} > \dots$$

o que significa que  $(a^n)$  é sucessão monótona decrescente. Como tem um minorante (zero, visto que todos os termos são positivos) *tem limite finito*, em virtude do teorema da sucessão monótona. Seja  $\alpha = \lim a^n$ . Como

$$a^{n+1} = a \cdot a^n$$

vem (em virtude do facto 2.4.16)

$$\alpha = a \cdot \alpha$$

ou ainda

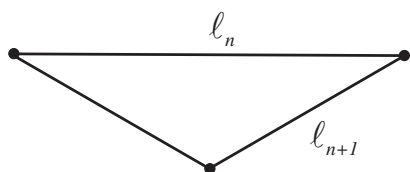
$$\alpha(1 - a) = 0.$$

Como  $a < 1$ , temos  $1 - a \neq 0$ . Então  $\alpha = 0$ , que é o que pretendíamos.

**Justificação de que o  $\lim P_n$  (sucessão dada por (2.19)) existe:** embora não seja claro a partir unicamente da fórmula (2.19), a sucessão  $P_n$  é estritamente crescente:

$$P_n < P_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Isto resulta facilmente do modo como  $P_n$  é construída. Em cada etapa, cada lado  $\ell_n$  de um polígono é substituído por dois lados  $\ell_{n+1}$  de um polígono com o dobro dos lados.



Como num triângulo o comprimento de um lado é menor que a soma dos comprimentos dos outros dois, tem-se

$$\ell_n < 2\ell_{n+1},$$

e, adicionando, fica óbvio que  $P_n < P_{n+1}$ .

Por outro lado,  $(P_n)$  é uma sucessão majorada. A razão é que cada  $P_n$  é menor do que o perímetro  $P$  da circunferência, que acaba por assumir papel de *majorante* da sucessão  $P_n$ .

Em resumo :  $(P_n)$  é sucessão crescente e majorada. De acordo com o teorema da sucessão monótona, tem limite real.

**OBSERVAÇÃO.** Vimos atrás que as afirmações respeitantes ao limite de uma sucessão não são afectadas quando modificamos apenas um número finito de valores da sucessão. Em particular, se uma sucessão  $(u_n)$  tiver a propriedade de existir  $p \in \mathbb{N}$  tal que

$$u_n \leq u_{n+1} \quad \forall n \geq p$$

ou

$$u_n \geq u_{n+1} \quad \forall n \geq p$$

ela tem, para efeitos de existência de limite, as propriedades das sucessões monótonas, e o teorema da função monótona é-lhe aplicável.

Por exemplo, a sucessão  $u_n = \frac{10^n \cdot n}{11^n}$  não é decrescente, mas “torna-se decrescente” para  $n \geq 10$ . Por isso, tem limite finito (e pode ver-se que o limite é zero).

## Exercícios da Secção 2.8

1 Indicar se as sucessões seguintes são crescentes ou decrescentes, examinando em cada caso o sinal de  $u_{n+1} - u_n$ , ou por outro processo.

$$u_n = \frac{n+1}{2n+2}, \quad u_n = \frac{1-3n}{1+4n}, \quad u_n = n^2 - 3n + 2.$$

Quais são os respectivos limites?

2 Indicar se as sucessões seguintes são crescentes ou decrescentes, examinando em cada caso o valor de  $u_{n+1}/u_n$ .

$$u_n = 4^n, \quad u_n = \frac{1}{3^n}, \quad u_n = \frac{n}{3^n}, \quad u_n = \frac{n^2}{5^n}, \quad u_n = \frac{4^n n^3}{5^n}, \quad u_n = \frac{2^n}{n}.$$

3 Quais são os majorantes e os minorantes dos conjuntos

$$\begin{array}{ccccccc} [0, 1]? & [0, 1[? & \{-3\}? & ]1, +\infty[? \\ ]-1, 0[ \cup ]1, 2[? & \mathbb{R}? & & \end{array}$$

4 Quais dos conjuntos solução das seguintes inequações são majorados?

$$4x^2 + 10x < 100$$

$$4x^2 - 10x < 100$$

$$4x^2 + x > 100.$$

\*5 Dada uma sucessão  $u_n$  crescente com limite 10, quantos valores de  $p$  satisfazem as equações seguintes?

$$u_p > 9.8 \quad u_p > 10.2$$

6 Justificar que a sucessão  $\frac{n}{3^n}$  tem limite finito. Utilizando uma calculadora para obter termos da sucessão de ordens elevadas, fazer uma conjectura sobre o valor de limite.

\*7 (a) Verificar que a sucessão  $u_n = \frac{n^2}{5^n}$  tem limite finito.

(b) Verificar que  $\lim u_n = 0$  (Sugestão: se fosse  $\lim u_n = \alpha \neq 0$ , o facto de

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^2 + 2n + 1}{5n^2}$$

conduziria, aplicando limites, a  $1 = \frac{1}{5}$ .)

## Apêndice 5 : O método de indução finita

Suponhamos que nos pedem para *provar* que o quadrado de um número natural ímpar é ainda ímpar. Começamos por escrever o número ímpar dado na forma

$$n = 2k + 1$$

com um certo  $k \in \mathbb{N}_0$  e calculamos depois

$$\begin{aligned} n^2 &= 4k^2 + 4k + 1 \\ &= 2(2k^2 + 2k) + 1 \end{aligned}$$

onde se reconhece a forma de um novo número ímpar. A demonstração está terminada. Envolveu, naturalmente,

- (i) a definição de número ímpar;
- (ii) um cálculo algébrico - o cálculo do quadrado de uma soma, válido no âmbito dos números reais;
- (iii) o conhecimento de que a soma e o produto de números naturais são números naturais.

Nem sempre a prova de afirmações que envolvem os números naturais se pode produzir de uma forma tão simples. Por vezes a ideia vaga e ingénua de “número natural” não é suficiente para fornecer um método de demonstração. Há então necessidade de nos baseamos numa definição rigorosa do que se entende por número natural.

Não vamos aqui dar uma tal definição, que excede muito o presente nível de estudos de Matemática. Mas vamos dar uma parte importante dela, sob a forma de um “Princípio” que aceitaremos porque facilmente o pomos de acordo com o conhecimento que a experiência e a intuição nos propiciaram.

Para enunciar este princípio vamos ter de fazer intervir condições onde intervém a *variável natural*  $n$ . Recordemos exemplos de proposições onde intervêm tais condições.

A  $\forall n \in \mathbb{N} \quad 1 + 2 + \dots + n = \frac{(n+1)n}{2}$   
(soma de termos de progressão aritmética)

B  $\forall n \in \mathbb{N} \quad 2^n > n.$

$$\mathbf{C} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad n^2 > 1000.$$

D  $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R}, x \neq 1 \quad 1 + x + \dots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$   
(soma de termos de progressão geométrica)



## PRINCÍPIO DE INDUÇÃO FINITA.

Para que uma proposição do tipo

$$(\forall n \in \mathbb{N}) P(n)$$

seja verdadeira, é necessário e suficiente que se cumpram as condições seguintes:

- (i)  $P(1)$  é verdadeira.
  - (ii)  $(\forall n) P(n) \Rightarrow P(n+1)$  é verdadeira.
- 

Em termos de linguagem simbólica este enunciado reduz-se a

$$(\forall n \in \mathbb{N}) P(n) \Leftrightarrow \{P(1) \text{ e } [\forall n \in \mathbb{N} P(n) \Rightarrow P(n+1)]\}$$

---

O princípio agora enunciado merece alguns comentários:

(a) Este princípio tem como substância a ideia de que, para percorrer *todos* os números naturais, basta ter a certeza de que passámos pelo *primeiro* deles (1) e que, sempre que passamos por *um qualquer* deles ( $n$ ) também passamos pelo *seguinte*. Em particular, para provar que uma propriedade é verdadeira para todos os naturais, devemos provar que é verdadeira para o *primeiro* e que sempre que é verdadeira para  $n$  também é verdadeira para  $n+1$ .

(b) O princípio de indução finita não tem que ser demonstrado. Podemos encará-lo como um *axioma* que constitui, em boa medida, um modo de usar os números naturais.

**EXEMPLO 1.** Demonstremos que  $A$  é verdadeira, usando o Princípio de Indução Finita. Aqui,  $P(n)$  é a condição  $1 + 2 + \dots + n = \frac{(n+1)n}{2}$ .

- (i)  $P(1)$  significa  $1 = \frac{2 \times 1}{2}$ , que é obviamente verdadeira.
- (ii) Passamos à demonstração de que  $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . *Admitindo*

$$(P(n)) \quad 1 + 2 + \dots + n = \frac{(n+1)n}{2}$$

(a que chamamos *hipótese de indução*) vamos provar que se tem  $P(n+1)$ :

$$(P(n+1)) \quad 1 + 2 + \dots + (n+1) = \frac{(n+2)(n+1)}{2}.$$

Ora, o primeiro membro de  $P(n+1)$  obtém-se do primeiro membro de  $(P(n))$  adicionando  $n+1$  e, usando  $P(n)$ , vem

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + n + (n+1) &= \frac{(n+1)n}{2} + n + 1 = \\ &= \frac{n^2 + n + 2n + 2}{2} = \frac{n^2 + 3n + 2}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2} \end{aligned}$$

como se pretendia. A demonstração está concluída. ■

**EXEMPLO 2.** Demonstremos agora que B é verdadeira. Neste caso,  $P(n)$  é a condição  $2^n > n$ .

(i)  $P(1)$  significa  $2 > 1$ : trata-se obviamente de uma afirmação verdadeira.

(ii) Passemos à demonstração de que  $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ : admitindo

$$(P(n)), \quad 2^n > n$$

(hipótese de indução) temos

$$2^{n+1} = 2^n \times 2 > n \times 2.$$

Ora, é claro que  $n \times 2 = 2n \geq n+1$ , para  $n > 1$ . Logo, uma vez que a relação de ordem é transitiva,

$$2^{n+1} > n+1.$$

A demonstração de B está completa.

**EXEMPLO 3.** C é verdadeira, mas o princípio de indução finita não é aplicável. Como se vê claramente no enunciado, este princípio resolve apenas as proposições universais em  $\mathbb{N}$ , isto é, afectadas do quantificador universal.

Por outro lado, o cálculo efectuado no início desta secção constitui uma prova transparente. Não há necessidade de recorrer ao princípio de Indução Finita.

**EXEMPLO 4.** Fizemos a demonstração de D no Capítulo 2. Vamos, para exemplificar, fazer outra demonstração do mesmo facto, usando o Princípio de Indução Finita. Neste caso,  $P(n)$  é a condição

$$\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 1, \quad 1 + x + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

(i)  $P(1)$  é a afirmação

$$\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 1 \quad 1 + x = \frac{1 - x^2}{1 - x}$$

a qual é verdadeira porque o segundo membro simplifica-se para  $x \neq 1$ :

$$\frac{1 - x^2}{1 - x} = \frac{(1 - x)(1 + x)}{1 - x} = 1 + x.$$

(ii) Admitamos  $P(n)$ . Queremos demonstrar  $P(n+1)$ , ou seja

$$1 + x + \dots + x^n + x^{n+1} = \frac{1 - x^{n+2}}{1 - x}.$$

Partindo do primeiro membro e utilizando a hipótese de indução, vemos que

$$\begin{aligned} 1 + x + \dots + x^n + x^{n+1} &= \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} + x^{n+1} \\ &= \frac{1 - x^{n+1} + x^{n+1} - x^{n+2}}{1 - x} = \frac{1 - x^{n+2}}{1 - x}. \end{aligned}$$

e a demonstração está completa. ■

Como é natural prever, o Princípio de Indução Finita é de grande utilidade no estudo de sucessões, visto que o domínio destas é precisamente  $\mathbb{N}$ .

Voltamos a considerar a sucessão definida por recorrência (ver Exemplo 2.8.1)

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n^2 + 1 \end{cases}$$

Observámos atrás, com recurso a um gráfico, que esta sucessão é *crescente* e *majorada*. (Recordemos que estes factos têm importância para garantir a existência de  $\lim u_n$ .) Vamos agora demonstrar analiticamente estas asserções<sup>14</sup>:

$(u_n)$  é crescente : Trata-se de provar

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq u_{n+1}$$

(i) Se  $n = 1$ , há que reconhecer que

$$0 \leq 1$$

o que é evidente.

(ii) Admitindo agora, para um dado  $n \in \mathbb{N}$ , que  $u_n \leq u_{n+1}$ , trata-se de mostrar que também

$$u_{n+1} \leq u_{n+2}.$$

Ora, como

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{1}{5} u_n^2 + 1 \\ u_{n+2} &= \frac{1}{5} u_{n+1}^2 + 1 \end{aligned}$$

e sabemos, pela sua própria definição, que todos os termos são  $\geq 0$ , vem sucessivamente, a partir da hipótese de indução:

$$\begin{aligned} u_n^2 &\leq u_{n+1}^2, \\ \frac{1}{5} u_n^2 &\leq \frac{1}{5} u_{n+1}^2, \\ \frac{1}{5} u_n^2 + 1 &\leq \frac{1}{5} u_{n+1}^2 + 1, \end{aligned}$$

que é o que pretendíamos. (Na verdade, os mesmos cálculos mostram que  $(u_n)$  é estritamente crescente.)

---

<sup>14</sup>Um pouco de reflexão mostra que a demonstração com recurso ao gráfico (Exemplo 2.8.1) também tem subjacente o princípio de indução finita.

$(u_n)$  é majorada: agora temos de exhibir um majorante, e, tal como intuímos em 2.8 a partir de considerações a respeito do gráfico, um majorante adequado parece ser a menor raiz da equação

$$x = \frac{1}{5}x^2 + 1$$

que é

$$M = 5 - \sqrt{5}.$$

Vamos então tentar mostrar que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq 5 - \sqrt{5}.$$

(i) Se  $n = 1$ , é evidente que

$$0 \leq 5 - \sqrt{5}.$$

(ii) Admitindo que, para um dado  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$u_n \leq 5 - \sqrt{5}$$

resulta (por ser  $u_n \geq 0$ )

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{1}{5}u_n^2 + 1 \leq \frac{1}{5}(5 - \sqrt{5})^2 + 1 \\ &= \frac{1}{5}(25 + 5 - 10\sqrt{5}) + 1 \\ &= 6 - 2\sqrt{5} + 1 = 7 - 2\sqrt{5} < 5 - \sqrt{5} \end{aligned}$$

porque a última desigualdade é equivalente a  $2 < \sqrt{5}$ , que é obviamente verdadeira. Mostrámos, pois, que também  $u_{n+1} < 5 - \sqrt{5}$  e a demonstração está completa.

Vamos dar ainda outra aplicação útil do Princípio de Indução Finita.

**Facto Ap5.1** *Seja  $h$  um número real positivo qualquer. Então para todo o número natural  $n$*

$$(1 + h)^n \geq 1 + hn.$$

Demonstração. (i) Se  $n = 1$ , o que queremos demonstrar é

$$(1 + h)^1 \geq 1 + h$$

e isso é evidente.

(ii) Admitindo que  $(1 + h)^n \geq 1 + hn$ , vamos provar a mesma coisa com  $n + 1$  em vez de  $n$ . Temos, pela hipótese de indução,

$$(1 + h)^{n+1} = (1 + h)(1 + h)^n \geq (1 + h)(1 + hn),$$

mas

$$\begin{aligned}(1 + h)(1 + hn) &= 1 + hn + h + h^2n \\ &= 1 + h(n + 1) + h^2n \geq 1 + h(n + 1),\end{aligned}$$

já que  $h^2n > 0$ : Portanto, como se pretendia,

$$(1 + h)^{n+1} \geq 1 + h(n + 1). \quad \blacksquare$$

Este facto dá uma demonstração alternativa de que  $a^n \rightarrow +\infty$  quando a constante  $a$  é  $> 1$ :

**Consequência.** Se  $a > 1$ , tem-se  $\lim a^n = +\infty$ .

Demonstração. Podemos escrever  $a = 1 + h$  com  $h > 0$  e por isso  $a^n = (1 + h)^n \geq 1 + nh$ . Mas  $1 + nh$  é uma progressão aritmética com limite  $+\infty$  e por isso também  $a^n$  tem limite  $+\infty$ . ■

## Exercícios do Apêndice 5

1 Utilizar o método de indução finita para verificar que são verdadeiras as afirmações:

1.  $2^n \times 3^n = (2 \times 3)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

2.  $3^n > n \times 2^n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

3.  $4^n > n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

4.  $\left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{9}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{n+2}{2n+2} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

\*5. A sucessão dada por  $u_1 = 0$  e  $u_{n+1} = \frac{10}{10 - u_n}$  é crescente e majorada.

(Sugestão: começar por determinar possíveis valores do limite de  $u_n$  e verificar que  $u_n$  tem um desses valores como majorante.)



## Capítulo 3

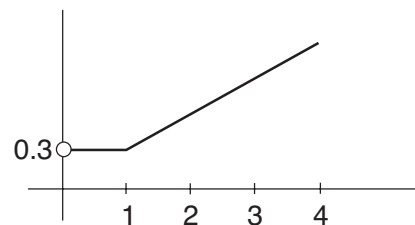
# Continuidade e Limites de Funções

### 3.1 Introdução, definições

A LOQUACIUS põe à disposição dos clientes os dois tarifários seguintes:

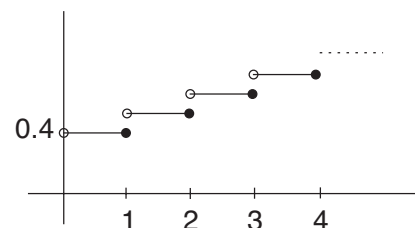
**ALFA:** O custo de uma chamada de voz é de 0.3 Euros para qualquer duração inferior ou igual a 1 minuto e é contabilizado a partir daí ao segundo, à razão de 0.2 Euros por minuto. O preço de uma chamada é portanto dado, em Euros, em função da sua duração em minutos, por:

$$f(x) = \begin{cases} 0.3 & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ 0.3 + 0.2(x - 1) & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$



**BETA:** O custo de uma chamada é contabilizado, desde o início, ao minuto, à razão de 0.1 € por minuto, com excepção do primeiro minuto, que custa 0.4 €. O preço de uma chamada é portanto dado, em Euros, em função da sua duração em minutos por:

$$g(x) = \begin{cases} 0.4 & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ 0.5 & \text{se } 1 < x \leq 2 \\ 0.6 & \text{se } 2 < x \leq 3 \\ \dots & \dots \end{cases}$$



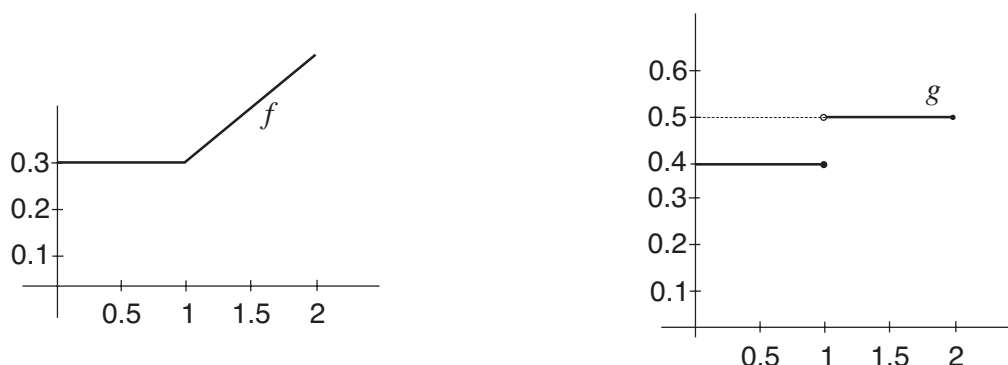
(Os modelos matemáticos aqui descritos são funções cujo domínio é o intervalo  $]0, +\infty[$ , apesar de, no “mundo real”, a variável  $x$  assumir apenas os valores das fracções sexagesimais da unidade. Não há inconveniente nesse facto e é até mais simples adoptar estes modelos, porque é adequado considerar a fracção de tempo *segundo* suficientemente pequena comparada com a unidade “minuto” e com a maioria das durações de tempo que interessa tratar.)

As funções  $f$  e  $g$  têm algumas características comuns de comportamento. Ambas são monótonas crescentes, o que faz todo o sentido: quando a duração da chamada aumenta, o custo deve aumentar ou, pelo menos, não diminuir.

Mas há uma importante diferença qualitativa entre os dois comportamentos. O preço de uma chamada no tarifário ALFA varia “continuamente”, sem saltos bruscos, à medida que a duração aumenta. No caso do tarifário BETA, há variação “contínua” em certos intervalos de tempo (por exemplo, em  $]1, 2[$  o custo mantém-se constante!) mas quando consideramos um intervalo de tempo como  $]0, 2.5[$ , registam-se dois saltos bruscos nos valores assumidos por  $g(x)$ : os saltos acontecem precisamente quando  $x$  “atravessa” os valores 1 e 2.

A necessidade de distinguir entre um e outro tipo de comportamento leva-nos a introduzir novos conceitos, cujo alcance no estudo das funções reais de variável real vão muito além do que estes simples exemplos introdutórios podem permitir antever.

Para tornar compreensíveis as nossas próximas definições, observemos que é possível distinguir os comportamentos de  $f$  e  $g$  recorrendo à noção de valor aproximado. Vamos ampliar os gráficos de ambas em torno do ponto  $x = 1$ ,



que já vimos tratar-se de um ponto sensível para identificar diferenças.

Temos  $f(1) = 0.3$  e  $g(1) = 0.4$ . E se, em vez de calcularmos  $f(x)$  ou  $g(x)$  em  $x = 1$  calcularmos os valores desta função em pontos convenientemente “próximos” de 1: iremos obter aproximações satisfatórias de  $f(1)$  ou  $g(1)$ , respectivamente? Examinando os gráficos e



construindo tabelas de valores de  $f$  e  $g$  a partir das expressões analíticas poderemos aprofundar o sentido da questão.

$x$	0.92	0.94	0.96	0.98	1	1.02	1.04	1.06	1.08
$f(x)$	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.304...	0.308...	0.312...	0.316
$g(x)$	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.5	0.5	0.5	0.5

Quando  $x$  toma valores próximos de 1, a função  $f$  assume valores que nos dão aproximações de  $f(1) = 0.3$ ; e *podemos conseguir aproximações muito precisas* desde que  $x$  seja uma aproximação *conveniente* de 1. (Não temos de nos preocupar com os valores  $x < 1$  porque aí temos sempre  $f(x) = f(1)$ ; e vemos por exemplo que:

para  $x = 1.04$ ,  $f(x)$  é aproximação de  $f(1)$  com erro que não excede 0.008;

para  $x = 1.02$ ,  $f(x)$  é aproximação de  $f(1)$  com erro que não excede 0.004;

e poderíamos continuar a “refinar” a aproximação entre  $f(x)$  e  $f(1)$  desde que tomássemos para  $x$  aproximações ainda melhores de 1.)

A função  $g$  não exhibe este comportamento. É certo que, se  $x < 1$ , também se tem sempre

$$g(x) = g(1);$$

mas, para valores de  $x$  *superiores* a 1, nunca se consegue que  $g(x)$  aproxime  $g(1) = 0.4$  com erro menor que 0.1! Efectivamente, 0.5 é a melhor aproximação de 0.4 que se pode obter com *valores da função* neste caso.

Podemos descrever a importante diferença que está em análise dizendo que, neste exemplo:

- Os valores de  $f(x)$  constituem aproximações de  $f(1) = 0.3$ , *com grau de precisão arbitrário*, desde que se tome para  $x$  uma *aproximação conveniente* de 1.

- Os valores de  $g(x)$  constituem aproximações de  $g(1) = 0.4$  com erro que *nem sempre pode ser diminuído* além de 0.1, mesmo que se tomem valores de  $x$  que sejam aproximações muito boas de 1.

Estas circunstâncias serão traduzidas adiante dizendo que a função  $f$  é *contínua* no ponto  $x = 1$ , mas a função  $g$  *não é contínua* nesse ponto.

Esta diferença é bem evidente nos gráficos: enquanto o de  $f$  não apresenta rupturas perto do ponto  $(1, f(1))$ , o de  $g$  apresenta um salto no ponto  $(1, g(1))$ .

Dentro da mesma ordem de ideias, refiramos também que a função  $f$  do nosso exemplo é contínua não só em 1 mas também em qualquer ponto do seu domínio; a função  $g$  é contínua em todos os pontos do domínio excepto 1, 2, 3, 4, ...

A descrição clara daquilo que é uma função contínua num dado ponto não pode, no entanto, ser feita apenas nos termos simples desta nossa introdução. Para termos uma ideia precisa do que se entende em Matemática por continuidade de uma função é conveniente recorrer à noção de limite (Capítulo 2).

Tal não é de estranhar, uma vez que a noção de limite está estreitamente ligada com o conceito de valor aproximado. Na realidade, o leitor poderá voltar à nossa descrição anterior e observar que os comportamentos de  $f$  e  $g$  podem também caracterizar-se assim:

- Tomemos uma sucessão qualquer de números  $x_n$  tal que <sup>15</sup>

$$x_n \longrightarrow 1$$

(podemos supor que os  $x_n$  são todos positivos, para ficarem no domínio de  $f$  ou  $g$ ). Então resulta que se tem sempre

$$f(x_n) \longrightarrow 0.3 = f(1);$$

mas não é sempre verdade que

$$g(x_n) \longrightarrow 0.4 = g(1).$$

(Por exemplo, esta asserção é falsa com a escolha da sucessão 1.5, 1.05, 1.005, 1.0005, ... e o leitor já deve saber muito bem porquê.)

Estamos agora em condições de apresentar a definição de função contínua.

**DEFINIÇÃO.** Seja  $I$  um intervalo de  $\mathbb{R}$  e  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função. Seja  $a \in I$ . Diremos que  $f$  é contínua em  $a$  se, sempre que  $(x_n)$  é uma sucessão em  $I$  que tende para  $a$ , a sucessão  $f(x_n)$  tende para  $f(a)$ . Simbolicamente,

$$x_n \rightarrow a \quad \text{e} \quad x_n \in I \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(a).$$

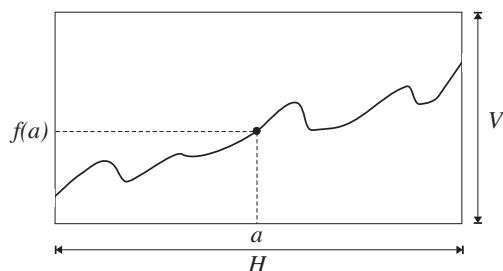
**OBSERVAÇÕES. (1)** A definição dada pretende traduzir a ideia que anteriormente esboçámos e que consiste no seguinte:

*os valores  $f(x)$  da função  $f$  constituem valores aproximados de  $f(a)$  com erro arbitrariamente pequeno, desde que os valores atribuídos a  $x$  sejam valores aproximados de  $a$  com erro suficientemente pequeno.*

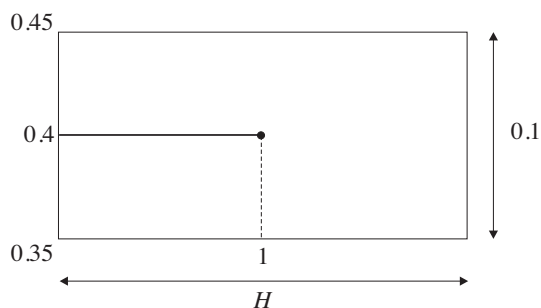
---

<sup>15</sup>Tratando-se de ver como é que  $f(x)$  aproxima  $f(1)$ , é claro que só interessa estudar o que se passa com valores de  $x$ , próximos de 1, mas distintos de 1. Se  $x = 1$ , já sabemos que  $f(x) = 0.3$ . Por isso, poderíamos considerar apenas sucessões  $x_n$  com termos distintos de 1.

A definição podia, na verdade, ser dada deste modo; nos cursos superiores prova-se que esta e a anterior são condições equivalentes. Esta última formulação tem uma interpretação simples em termos de “janelas de visualização” do gráfico. Considerando o ponto  $(a, f(a))$  do gráfico de  $f$ , a frase significa que, *fixada arbitrariamente* a amplitude vertical ( $V$ ) da janela centrada naquele ponto, *há* uma amplitude horizontal ( $H$ ) tal que o gráfico da restrição de  $f$  ao intervalo de centro  $a$  e amplitude  $H$  fica todo dentro da janela. E o que é significativo é que isto pode ser feito para  $V$  tão pequeno quanto quisermos.



Repare-se como isto falha para o ponto  $(1, g(1)) = (1, 0.4)$  no exemplo estudado: se fixarmos  $V = 0.1$ , não há nenhum  $H$  (mesmo muito pequeno) tal que o gráfico da restrição de  $g$  ao intervalo  $[1 - H/2, 1 + H/2]$  caiba dentro da janela de dimensões  $H$  e  $V$ . . . porque a “metade direita” sai fora!



**(2)** Se  $I$  não se reduz a um ponto, e nas condições da definição anterior, podemos considerar sucessões  $x_n$  cujos termos sejam distintos de  $a$ . O valor  $f(a)$  é dado pelo limite de  $f(x_n)$ . Isto significa que, sendo  $f$  contínua em  $a$ , a sua restrição a  $I \setminus \{a\}$  permite calcular o valor  $f(a)$ ; isto é,  $f(a)$  é determinado pelos valores de  $f$  em pontos (próximos mas) distintos de  $a$ .

**(3)** O domínio  $I$  de  $f$  tem um papel decisivo na propriedade de  $f$  ser ou não contínua num ponto  $a$ . Isto é evidente em face da definição, que envolve explicitamente o domínio, e é muito claro se reconsideramos novamente a função  $g$  e a sua restrição  $h$  ao intervalo  $[0, 1]$ .

$$h(x) = 0.4 \quad \forall x \in [0, 1].$$

Esta função  $h$  é constante em todos os pontos do domínio, e em particular *é contínua em todos eles* (ver abaixo o Facto 3.1.1). Assim, a restrição de uma função com uma descontinuidade pode perder a descontinuidade - o que é natural, visto que a ruptura no gráfico pode ser causada pelo comportamento na parte do domínio que passou a ser ignorada.

**(4)** Apesar do que ficou dito na nota anterior, é verdade (e é importante) o seguinte:  $f$  é *contínua em  $a$*  se, e só se, a restrição de  $f$  a uma vizinhança de  $a$  (mais precisamente, a um intervalo da forma  $I \cap [a - \delta, a + \delta]$  com  $\delta > 0$ ) é contínua em  $a$ . Isto é assim porque as sucessões  $x_n \in I$  que tendem para  $a$  têm todos os seus termos num tal intervalo, a partir de um certo índice. Significa também que a continuidade em  $a$  *depende apenas do comportamento da função numa vizinhança de  $a$* .

Ou ainda, visto de outro modo: se há uma descontinuidade, ela manifesta-se já na restrição a qualquer vizinhança de  $a$ .

Se  $f$  tem domínio  $I$  (intervalo) e é contínua em cada ponto  $a \in I$ , dizemos simplesmente que  $f$  é contínua.

Vamos agora reconhecer que muitas das funções que já estudámos são contínuas.

**Facto 3.1.1** *Se  $f$  é uma função constante, então  $f$  é contínua.*

Demonstração. Seja  $f(x) = c$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Consideremos um ponto  $a \in \mathbb{R}$ . Se  $x_n \rightarrow a$ , tem-se  $f(x_n) = c \rightarrow c = f(a)$ . (Nem precisámos de utilizar o facto de  $x_n$  tender para  $a$ !).

**Facto 3.1.2** *A função  $f(x) = x$  é contínua em  $\mathbb{R}$ .*

Demonstração. Se  $x_n \rightarrow a$ , então [obviamente!]  $f(x_n) = x_n \rightarrow a = f(a)$ .

**Facto 3.1.3** *Se  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  são contínuas, então a soma  $f + g$ , e o produto  $fg$ , de  $f$  e  $g$ , são contínuas em  $I$ .*

Demonstração (para a soma). Se tomarmos uma sucessão  $x_n \rightarrow a$ , temos, por hipótese,  $f(x_n) \rightarrow f(a)$  e  $g(x_n) \rightarrow g(a)$ ; então

$$f(x_n) + g(x_n) \rightarrow f(a) + g(a)$$

(pelo facto 2.4.10). ■

A demonstração para o produto é análoga.

**Facto 3.1.4** *Se  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  são contínuas, então o cociente  $\frac{f}{g}$ , restringido a qualquer subintervalo de  $I$  onde  $g$  não toma o valor 0, é uma função contínua.*

A demonstração é análoga à anterior e utiliza o Facto 2.4.18.

A partir dos factos anteriores já podemos afirmar que são contínuas funções como:

$$2x - 1, \quad 5x^2 - 3x + 10, \quad x^3 - 4x^2,$$

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}, \quad \frac{x + 1}{x^2 - 2},$$

etc. (para a última, devemos ter o cuidado de dizer que se trata de uma função contínua em  $] - \infty, -\sqrt{2}[$ , em  $] - \sqrt{2}, \sqrt{2}[$  e em  $] \sqrt{2}, +\infty[ \dots$ )

Na realidade é consequência imediata das propriedades anteriores o seguinte facto geral:

**Facto 3.1.5** *Toda a função polinomial é contínua em  $\mathbb{R}$ . Toda a função racional é contínua em cada intervalo do seu domínio.*

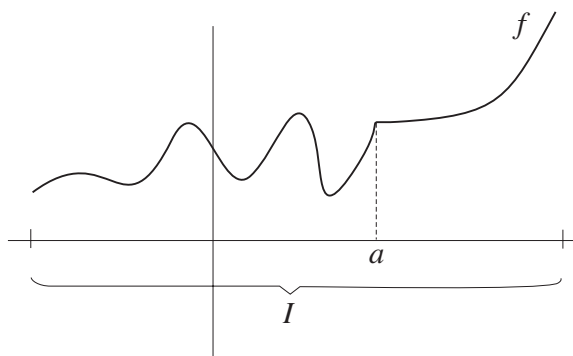
Para estudarmos a continuidade de outras classes de funções - por exemplo, as que fazem intervir o módulo - é útil o seguinte

**Facto 3.1.6** *Seja  $I$  um intervalo de  $\mathbb{R}$ ,  $a \in I$ ,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  tal que*

$$f|_{I \cap ]-\infty, a]} \quad \text{e} \quad f|_{I \cap [a, +\infty[}$$

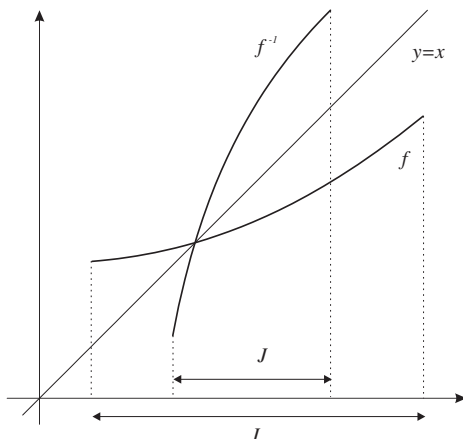
*são contínuas. Então  $f$  é contínua em  $I$ .*

Em vez de dar uma demonstração deste facto, chamamos a atenção para a sua “plausibilidade” quando adoptamos a atitude ingénua de encarar a continuidade como ausência de rupturas ou saltos no gráfico.



Um outro facto importante a respeito de funções contínuas é o seguinte:

**Facto 3.1.7** *Sejam  $I, J$  intervalos de  $\mathbb{R}$  e  $f : I \rightarrow J$  uma função contínua e estritamente monótona em  $I$ , com contradomínio  $J$ . Então a função inversa  $f^{-1} : J \rightarrow I$  é também contínua.*



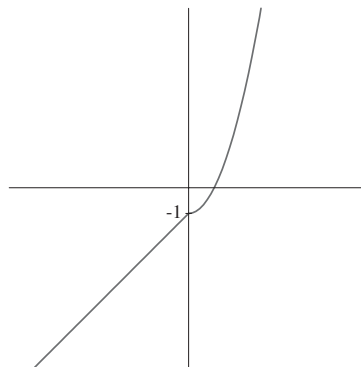
Não faremos aqui uma demonstração deste facto. Limitamo-nos a observar que a conclusão se aceita facilmente utilizando a seguinte ideia: se o domínio de  $f$  é um intervalo e o seu gráfico não apresenta rupturas, ele é transformado pela reflexão, relativamente à recta  $y = x$ , noutro gráfico sem rupturas.

Em consequência deste facto e do que vimos a seguir ao Exemplo 1.5.5, vale a pena observar que:

a função  $\sqrt[n]{x}$  é contínua em  $[0, +\infty[$ <sup>16</sup>

**EXEMPLO 3.1.1** A função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & x \leq 0 \\ x^2 - 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

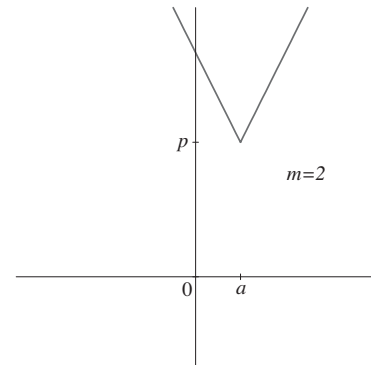


é contínua.

<sup>16</sup>E, na realidade, em  $\mathbb{R}$ , no caso em que  $n$  é ímpar.

**EXEMPLO 3.1.2** Qualquer função do tipo  $f(x) = m|x - a| + p$  é contínua, pois ela pode ser definida por

$$f(x) = \begin{cases} m(x - a) + p & \text{se } x \geq a, \\ m(a - x) + p & \text{se } x \leq a. \end{cases}$$



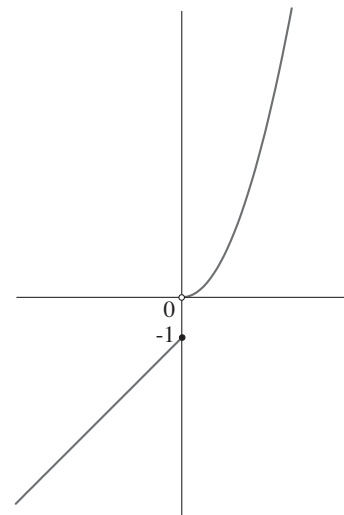
**EXEMPLO 3.1.3** À função

$$g(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{se } x \leq 0, \\ x^2 & \text{se } x > 0, \end{cases}$$

não se pode aplicar o facto anterior. Na verdade, esta função  $g$  não é contínua em 0. A razão pela qual o facto anterior não é aplicável é que a restrição  $g|_{[0, +\infty[}$ ,

$$g|_{[0, +\infty[}(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x = 0, \\ x^2 & \text{se } x > 0, \end{cases}$$

não é contínua em 0.



Seja  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  uma função cujo domínio  $D$  se pode exprimir como união de dois ou mais intervalos  $I_1, I_2, \dots$  de modo que a união de dois quaisquer deles, distintos, não é intervalo. (Por exemplo, podemos ter

$$\begin{aligned} D &= ]-\infty, 0[ \cup ]0, +\infty[, \\ D &= [1, 2] \cup [3, 4] \cup [5, 6], \end{aligned}$$

etc.)

Dizemos então que  $f$  é *contínua se cada restrição  $f|_{I_k}$  é contínua* ( $k = 1, 2, \dots$ ).

Assim, por exemplo, a função  $f(x) = \frac{1}{x}$ , de domínio  $]-\infty, 0[ \cup ]0, +\infty[$ , é contínua, visto que a sua restrição a cada um destes dois intervalos é racional. Mas obviamente não podemos dizer que a função

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{1}{x} & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

é contínua, apesar de a restrição a cada um dos intervalos  $]-\infty, 0]$  e  $]0, +\infty[$  o ser ...

Vamos agora introduzir uma das noções mais importantes no nosso estudo de funções: a noção de *limite* (de que estudámos já uma situação particular, no capítulo sobre sucessões).

**DEFINIÇÃO.** Seja  $I$  um intervalo de  $\mathbb{R}$  com mais do que um ponto;  $a \in I$ , e  $f$  uma função real cujo domínio pode ser  $I$  ou  $I \setminus \{a\}$ . Então, se há um número  $L \in \mathbb{R}$  tal que a nova função definida em  $I$

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in I \setminus \{a\}, \\ L & \text{se } x = a, \end{cases}$$

é contínua em  $a$ , dizemos que o limite de  $f(x)$  quando  $x \rightarrow a$  (ler “quando  $x$  tende para  $a$ ”) é  $L$  e escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L.$$

Observe-se que a própria definição mostra que, mesmo que  $f$  esteja definida em  $a$ , o valor  $f(a)$  não tem influência no valor do limite. Este só depende de como a função se comporta nos pontos  $x \in I \setminus \{a\}$ , pois só desses depende o  $L$  a escolher na fórmula.

Em virtude desta definição e da definição de função contínua, é sempre verdade o seguinte:

**Facto 3.1.8** Tem-se  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  se, e só se, para toda a sucessão  $x_n \in I \setminus \{a\}$  tal que  $x_n \rightarrow a$ , então

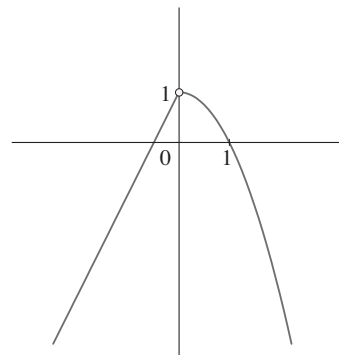
$$f(x_n) \rightarrow L.$$

A unicidade do limite para sucessões (Consequência 2.4.24) implica imediatamente que o limite de  $f(x)$ , quando  $x \rightarrow a$ , caso exista, só pode ter um valor.

**EXEMPLO 3.1.4** Consideremos a função

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{se } x < 0, \\ 1 - x^2 & \text{se } x > 0, \end{cases}$$

cujo domínio é  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ .





O único valor que podemos atribuir-lhe no ponto 0 para que a nova função assim estendida a  $\mathbb{R}$  fique contínua é, evidentemente, 1, já que  $2x + 1$  e  $1 - x^2$  são contínuas (utilizar o facto 3.1.6). Então

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1. \quad \blacksquare$$

Se a função  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua em  $a$ , então a definição acima verifica-se trivialmente com  $L = f(a)$ ; reciprocamente, se se pode tomar  $L = f(a)$  então  $\tilde{f} = f$  e  $\tilde{f}$  é contínua em  $a$ . Assim:

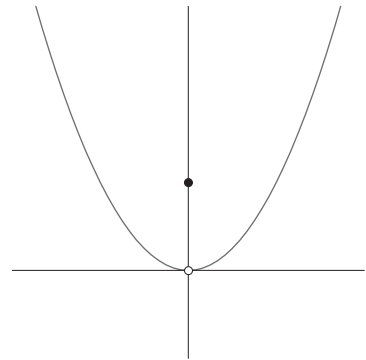
a condição

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

caracteriza as funções que são contínuas em  $a$ .

**EXEMPLO 3.1.5** A função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \neq 0, \\ 1 & \text{se } x = 0, \end{cases}$$



não é contínua em 0, mas tem limite quando  $x \rightarrow 0$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

porque se a modificarmos definindo

$$\tilde{f}(x) = x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

obtemos, como sabemos, uma função contínua.

**EXEMPLO 3.1.6** A função  $g$  do tarifário BETA (ver secção 3.1) *não tem limite quando*  $x \rightarrow 1$ . Porque, se houvesse um número  $L$  a que pudéssemos chamar limite de  $g(x)$  quando  $x \rightarrow 1$ , ter-se-ia, de acordo com o Facto 3.1.8

$$g(x_n) \rightarrow L$$

sempre que  $x_n \rightarrow 1$  (e  $x_n \neq 1, \forall n \in \mathbb{N}$ ). Mas já vimos que:

se  $x_n < 1$  e  $x_n \rightarrow 1$ , então  $g(x_n) \rightarrow 0.4$ ;

se  $x_n > 1$  e  $x_n \rightarrow 1$ , então  $g(x_n) \rightarrow 0.5$ .

O valor de  $L$  tem de ser bem determinado e, por isso, não tem sentido falar deste limite.  $\blacksquare$

## Três observações sobre o conceito de limite que acabamos de introduzir

1) O *limite* de  $f(x)$  em  $a$  é sempre o valor que devemos atribuir a  $f$  para que não haja rupturas ou saltos no gráfico de  $f$  em  $a$ .

2) O limite de  $f(x)$  em  $a$  depende exclusivamente do comportamento da função  $f$  em pontos próximos, mas distintos, de  $a$ . [Ver a observação (2) a seguir à definição de função contínua e a que segue imediatamente a definição de limite.]

3) Se temos uma função  $f : I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$  e uma função  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  que coincidam em  $I \setminus \{a\}$ ,

$$f(x) = g(x) \quad \forall x \in I \setminus \{a\}$$

e  $g$  é contínua, então necessariamente

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = g(a). \quad (\text{Porque obviamente podemos tomar } \tilde{f} = g.)$$

**EXEMPLO 3.1.7** Vamos calcular os limites da função

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

em todos os pontos de  $\mathbb{R}$ . Se  $a \neq 1$ , então  $a$  faz parte do domínio de  $f$ , onde esta é contínua, por ser fracção racional. Logo,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{a^2 - 1}{a - 1}.$$

Se  $a = 1$ , temos de proceder de outro modo, analisando melhor o comportamento da função. Ora sabemos que

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = x + 1$$

para todo o  $x \neq 1$ . Como a função  $x + 1$  é contínua em  $\mathbb{R}$ , o único valor atribuível a um prolongamento de  $f$  para obter uma função contínua em 1 é o valor de  $x + 1$  em 1 (ver a observação 3 atrás). Logo,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 1 + 1 = 2.$$

---

Quando  $a$  é o extremo direito de  $I$ , as sucessões de aproximação a  $a$  só podem tomar valores  $< a$ . Existindo o limite de  $f(x)$  quando  $x \rightarrow a$ , dizemos que se trata de um *limite à esquerda* no ponto  $a$ , e escrevemos então

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \quad \text{em vez de} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x).$$

Analogamente, quando  $a$  é o extremo esquerdo de  $I$ , falamos de *limite à direita* no ponto  $a$  e usamos a notação

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

para o referir.

---

## Exercícios da Secção 3.1

- 1 Por inspecção dos gráficos, indicar em que pontos são contínuas as funções seguintes:

$$(a) f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq 0 \\ x+1 & \text{se } x > 0 \end{cases} \quad (b) g(x) = \begin{cases} |x| & \text{se } x \leq 1 \\ 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

$$(c) C(x) \quad (\text{Exemplo 1.3.5}).$$

- 2 Como se pode justificar a continuidade das funções seguintes?

$$4x^3 - 18x^2 + 1; \quad \frac{1-x^3}{x^4+1}.$$

- 3 Determinar  $k \in \mathbb{R}$  de modo que a função

$$f(x) = \begin{cases} 3-2x & \text{se } x \leq 1 \\ \frac{k}{1+x} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

seja contínua em  $\mathbb{R}$ .

- 4 A função racional  $\frac{3x^2-3}{x-1}$  tem como domínio  $]-\infty, 1[ \cup ]1, +\infty[$ . Para a prolongar a  $\mathbb{R}$  temos de lhe atribuir um valor para  $x = 1$ . Que valor lhe devemos atribuir de modo a obter uma função contínua?

- 5 Quanto vale

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2-3}{x-1}?$$

- 6 Seja  $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$(a) f(x) = 5x - 2; \quad (b) f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 5x - 2, & x \neq 0 \end{cases}.$$

Têm ambas limite quando  $x \rightarrow 0$ ? Qual é o valor do limite? São ambas contínuas?

- 7 Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq 0 \\ 5x - 2 & \text{se } x > 0 \end{cases}.$$

Esta função tem limite quando  $x \rightarrow 0$ ? E a sua restrição a  $]-\infty, 0[$ ? E a sua restrição a  $]0, +\infty[$ ?

- 8 Calcular os limites

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 2x}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1}.$$

9] Para que valor de  $k$  têm limite no ponto  $x = 1$  as funções seguintes?

$$f(x) = \begin{cases} k - x & \text{se } x < 1 \\ x^2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} k - x & \text{se } x < 1 \\ 0 & \text{se } x = 1 \\ x^2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} (x - k)^2 & \text{se } x \leq 1 \\ -1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

10] Para que valor de  $k$  é contínua em  $\mathbb{R}$  a função

$$f(x) = \begin{cases} \frac{k(x^2 - 1)}{x + 1} & \text{se } x \neq -1 \\ 2 & \text{se } x = -1 \end{cases} \quad ?$$

## 3.2 Limites infinitos e limites no infinito

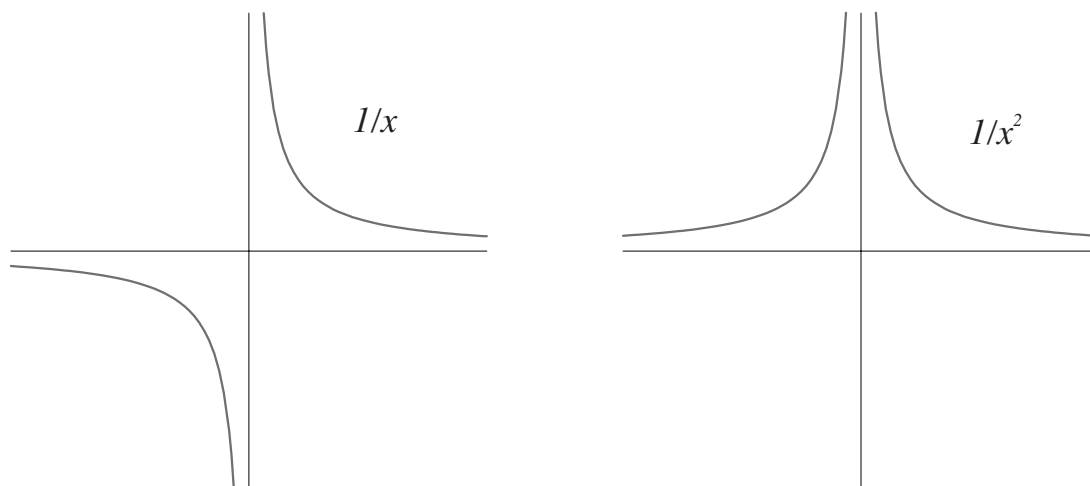
Em contraste com a situação tratada na secção anterior, vamos agora estudar situações em que ainda é conveniente falar de limite, mesmo quando esse “limite” não é um número real. Referiremos também situações em que se procura dar sentido a um “limite” quando a variável  $x$  tende, não para um número real  $a$ , mas sim “para infinito”.

Recordemos o comportamento das funções  $\frac{1}{x}$  e  $\frac{1}{x^2}$  perto de zero. Elas tomam valores arbitrariamente grandes (afectados de sinal no caso da primeira) desde que  $x$  esteja suficientemente próximo de zero. Por isso, dizemos que, quando  $x \rightarrow 0$ , as funções  $\frac{1}{x}$  e  $\frac{1}{x^2}$  “tendem para infinito”.

Mais precisamente até: quando  $x$  tende para 0 à direita (i.e. por valores positivos)  $\frac{1}{x}$  “tende para mais infinito” e quando  $x$  tende para 0 à esquerda (i.e. por valores negativos),  $\frac{1}{x}$  “tende para menos infinito”. Quanto a  $\frac{1}{x^2}$ , dizemos que tende para mais infinito quando  $x \rightarrow 0$ .

Traduzimos isso por símbolos escrevendo:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty,$$



correspondendo estas afirmações ao comportamento já observado e bem sugerido no gráfico.

Que se entende então por esta nova noção de limite? Para a explicar sem ambiguidade damos a seguinte definição.

**DEFINIÇÃO.** Seja  $I$  um intervalo de  $\mathbb{R}$ ,  $a \in I$  e  $f : I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função real. Dizemos:

“o limite de  $f(x)$  quando  $x$  tende para  $a$  é  $+\infty$  [ou  $-\infty$ ]” e escrevemos simbolicamente

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \quad [-\infty]$$

se, para qualquer sucessão  $x_n$  cujos termos estão em  $I \setminus \{a\}$  e tal que  $x_n \rightarrow a$ , se tem  $f(x_n) \rightarrow +\infty$   $[-\infty]$ ;

“o limite de  $f(x)$  quando  $x$  tende para  $a$  à esquerda é  $+\infty$  [ou  $-\infty$ ]” e escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty \quad [-\infty]$$

se, para qualquer sucessão  $x_n$  tal que  $x_n < a$  e  $x_n \rightarrow a$ , se tem  $f(x_n) \rightarrow +\infty$   $[-\infty]$ ;

“o limite de  $f(x)$  quando  $x$  tende para  $a$  à direita é  $+\infty$  [ou  $-\infty$ ]” e escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty \quad [-\infty]$$

se, para qualquer sucessão  $x_n$  tal que  $x_n > a$  e  $x_n \rightarrow a$ , se tem  $f(x_n) \rightarrow +\infty$   $[-\infty]$ .

Por oposição aos “limites infinitos”, falamos de “limite finito” no caso em que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  é um número real.

**EXEMPLO 3.2.1** Calculemos o limite de  $\frac{x-1}{x^2-1}$  quando  $x$  tende para um dado número  $a$ . (Notemos que o domínio da função dada é  $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ .) Ora, se  $a \neq -1$  e  $a \neq 1$ , sabemos que  $a$  é ponto de continuidade da função dada e portanto

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{a-1}{a^2-1} = \frac{a-1}{(a-1)(a+1)} = \frac{1}{a+1}.$$

Se  $a = 1$  já não podemos proceder assim, mas observamos em primeiro lugar que a nossa função pode ser representada mais simplesmente:

$$\frac{x-1}{x^2-1} = \frac{1}{x+1} \text{ para todo o } x \neq 1 \text{ e } x \neq -1.$$

Esta representação é a de uma função contínua no ponto 1, e portanto não há dúvidas de que

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}.$$

Finalmente, se  $a = -1$ , a mesma representação e a definição acima implicam que

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{x+1} = +\infty.$$

Efectivamente, qualquer que seja a sucessão  $x_n \rightarrow -1$  e  $x_n > -1$  sabemos que (Facto 2.4.7)

$$\lim_{x_n \rightarrow -1} \frac{1}{x_n + 1} = +\infty,$$

visto que o denominador tende para zero, por valores positivos. Por razões análogas

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{x + 1} = -\infty. \quad \blacksquare$$

As noções de limite introduzidas até agora dão sentido ao símbolo

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

sempre que  $a \in \mathbb{R}$ , podendo  $L$  ser real ou um dos símbolos  $+\infty$ ,  $-\infty$ . Vamos agora dar também um significado ao símbolo de limite quando  $a$  é substituído por  $+\infty$  ou  $-\infty$ .

Para isso, comecemos por considerar novamente um exemplo simples: o da função  $\frac{1}{x}$ . Já observámos em ocasiões anteriores que  $\frac{1}{x}$  se torna “muito pequeno” quando  $x$  é muito grande”. Expressimos esse facto dizendo que  $\frac{1}{x}$  tende para 0 (ou tem limite igual a 0) quando  $x$  tende para  $+\infty$ . Simbolicamente, escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Mais precisamente, damos a seguinte

**DEFINIÇÃO.** Seja  $f$  uma função real cujo domínio contém um intervalo do tipo  $[\alpha, +\infty[$ . Então dizemos que  $f(x)$  tem limite  $L$  quando  $x$  tende para  $+\infty$ , e escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$$

se, para qualquer sucessão  $(x_n)$  no domínio de  $f$ , tal que  $x_n \rightarrow +\infty$ , se tiver  $f(x_n) \rightarrow L$ .

Analogamente se define o símbolo

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$

devendo, neste caso, considerar-se uma função cujo domínio contenha um intervalo do tipo  $] -\infty, k]$ .

Voltando à função  $\frac{1}{x}$ , é também verdade que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

**EXEMPLO 3.2.2** Consideremos uma função constante :  $f(x) = c, \forall x \in \mathbb{R}$ . É então evidente que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$$

qualquer que seja o objecto  $a$ : pode ser um número real,  $+\infty$  ou  $-\infty$ .

**EXEMPLO 3.2.3** A função afim  $-2x + 3$  tem limites em  $-\infty$  e  $+\infty$ , dados por

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x + 3) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x + 3) = -\infty.$$

**EXEMPLO 3.2.4** Para a função quadrática  $x^2$  temos

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty. \quad \blacksquare$$

Para o cálculo de limites é conveniente dispor de regras operatórias, afim de evitar o recurso sistemático à definição, que deixa de ser cómodo quando se complica a expressão analítica das funções envolvidas.

**Facto 3.2.1 (Operações com limites.)** *Sejam  $f, g$  duas funções definidas em  $I$  ou  $I \setminus \{a\}$  e suponhamos que existem*

$$L = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \quad \text{e} \quad M = \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

Então:

(i) *Se  $L$  e  $M$  são números reais, temos*

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) &= L + M \\ \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) &= LM. \end{aligned}$$

*Se, além disso,  $M \neq 0$ , então<sup>17</sup>*

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}.$$

(ii) *Se  $L = +\infty$  e  $M = +\infty$ , temos*

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) &= +\infty \\ \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) &= +\infty. \end{aligned}$$

(iii) *Se  $L = +\infty$  e  $M \in \mathbb{R}$  tem-se*

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = +\infty.$$

---

<sup>17</sup>E, claro, admitimos que  $g(x) \neq 0, \forall x \in I \setminus \{a\}$  a fim de poder escrever o cociente.



Além disso, se  $M \neq 0$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = \pm\infty \text{ conforme } M \gtrless 0.$$

(iv) Se  $L \in \mathbb{R}$  e  $M = +\infty$ , tem-se

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

(v) Suponhamos agora que  $M = 0$ , mas  $g$  mantém o sinal em  $I \setminus \{a\}$  (quer dizer, temos  $g(x) > 0, \forall x \in I \setminus \{a\}$  ou  $g(x) < 0, \forall x \in I \setminus \{a\}$ ). Então, com  $L \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  temos

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$$

conforme  $L$  e  $g(x)$  têm o mesmo sinal ou sinais contrários.

(vi) (Passagem ao limite numa desigualdade.) Se  $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in I \setminus \{a\}$ , então se  $L$  e  $M$  são números reais,

$$L \leq M.$$

**OBSERVAÇÕES:** (a) Este enunciado tem em conta todas as situações em que os limites  $L, M$  considerados são finitos ou  $+\infty$ . Pode dar-se um enunciado análogo para cobrir o caso em que  $+\infty$  é substituído por  $-\infty$ .

(b) Na prática, o limite considerado no caso (v) é frequentemente um limite lateral, por ser  $a$  extremo de  $I$ . Poderíamos então substituir a notação " $x \rightarrow a$ " por " $x \rightarrow a^+$ " ou " $x \rightarrow a^-$ ", conforme o caso.

(c) Este enunciado, apesar de longo, deve ser fácil de dominar e aplicar a partir do momento em que o leitor compreender as ideias básicas sobre limites. Em linguagem mais sugestiva, poderíamos reenunciar (i) dizendo que o limite de uma soma (ou um produto) é a soma (ou o produto) dos limites; (ii) significa que a soma ou o produto de duas funções que se tornam infinitamente grandes também se torna infinitamente grande; (iii) significa que o mesmo é verdade para a soma de uma infinitamente grande com outra que tem limite finito; para o caso do produto devemos ter o cuidado de exigir que este limite não seja nulo; (iv) significa que uma fracção com o numerador próximo de um número real e o denominador arbitrariamente grande acaba por se tornar arbitrariamente pequena; e (v) significa basicamente (à parte um factor) que o inverso de uma função que tende para 0 (com sinal) tende para  $+\infty$  ou  $-\infty$ . Finalmente, (vi) quer dizer que uma desigualdade entre funções é preservada na passagem ao limite.

Demonstração. (i) Tomemos uma sucessão qualquer  $x_n \in I \setminus \{a\}$  tal que  $x_n \rightarrow a$ . Por hipótese

$$f(x_n) \rightarrow L \quad \text{e} \quad g(x_n) \rightarrow M.$$

Então, em virtude do Facto 2.4.10, temos

$$f(x_n) + g(x_n) \rightarrow L + M,$$

o que prova a afirmação relativa à soma. Para o produto, procede-se do mesmo modo.

Vamos limitar-nos a demonstrar uma das afirmações referentes ao limite infinito. Para as restantes, os argumentos são semelhantes. Consideremos o caso de (v) e para fixar ideias suponhamos  $L < 0$  e  $g(x) > 0 \forall x \in I \setminus \{a\}$ . Tomemos uma sucessão  $x_n \in I \setminus \{a\}$ , tal que  $x_n \rightarrow a$ . Então

$$f(x_n) \rightarrow L \quad \text{e} \quad g(x_n) \rightarrow 0.$$

Como  $L < \frac{L}{2} < 0$ , sabemos (por definição de limite de sucessão) que há uma ordem  $p \in \mathbb{N}$  tal que

$$f(x_n) < \frac{L}{2} \quad \text{para } n \geq p;$$

e sabemos que *dado um número qualquer*  $A > 0$  há uma ordem  $r \in \mathbb{N}$  tal que

$$|g(x_n)| < \frac{|L|}{2A} \quad \text{para } n \geq r.$$

Sendo  $s$  o maior dos inteiros  $p, r$ , resulta que para  $n \geq s$  são verdadeiras as duas desigualdades anteriores e, por isso,

$$\left| \frac{f(x_n)}{g(x_n)} \right| = \frac{|f(x_n)|}{g(x_n)} > \frac{|L|}{2} \cdot \frac{2A}{|L|} = A.$$

Isto mostra que

$$\left| \frac{f(x_n)}{g(x_n)} \right| \rightarrow +\infty$$

e como, no caso presente, a fracção toma valores negativos vem, por definição,

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \rightarrow -\infty.$$

Fica assim provado que, no caso considerado,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty.$$

Observemos, por fim, que (vi) é consequência do Facto 2.4.23, uma vez que, escolhendo uma sucessão qualquer  $x_n \in I \setminus \{a\}$ ,  $x_n \rightarrow a$ , temos

$$L = \lim f(x_n), \quad M = \lim g(x_n),$$

e  $f(x_n) \leq g(x_n)$  por hipótese. ■

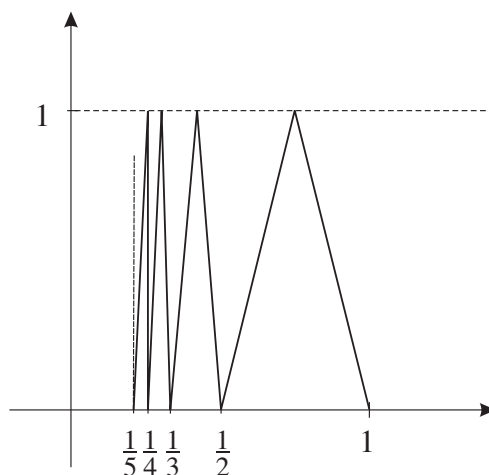
**OBSERVAÇÃO IMPORTANTE.** Valem propriedades operatórias semelhantes às anteriores para limites de sucessões. Quanto a (i) isso não é novidade; para as restantes afirmações, as justificações são semelhantes.

Quais são os obstáculos a que uma função  $f$  tenha limite *finito* quando  $x \rightarrow a$ ?

Um deles, óbvio, é o caso em que a função  $f$ , ou possivelmente  $|f|$ , toma valores arbitrariamente grandes numa vizinhança de  $a$ . (É o caso de  $\frac{1}{x}$  e  $a = 0$ .) Quanto isto sucede, caso haja limite ele só poderá ser  $\pm\infty$ .

Outra situação que constitui impedimento de existência de limite finito é o caso em que se observa um “salto” nos valores de  $f(x)$  quando  $x$  percorre uma vizinhança de  $a$ , ocorrendo o “salto” precisamente quando  $x$  atravessa o ponto  $a$  da esquerda para a direita. É o que observámos em exemplos anteriores (a função  $g$  do tarifário Beta em  $a = 1$ , a função do exemplo 3.1.3 em  $a = 0$ ).

Mas a ausência de limite finito pode dever-se a um comportamento mais complicado da função  $f$ . Vamos dar um exemplo em que  $f : ]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  está definida pelo seu gráfico do modo seguinte: em cada um dos sucessivos intervalos  $[\frac{1}{2}, 1]$ ,  $[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$ ,  $[\frac{1}{4}, \frac{1}{3}]$ , ... a restrição de  $f$  tem como gráfico um triângulo isósceles cuja base é o intervalo considerado e cuja altura é 1 (ver a figura).



Claro que não é possível desenhar a totalidade do gráfico, mas a função fica perfeitamente definida e até podemos calcular a sua expressão analítica em cada um dos intervalos considerados!

Neste caso é o carácter oscilatório de  $f$  que impede a existência do  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ . Na verdade, quando  $x$  se aproxima de 0 (pela direita, necessariamente), os *valores* de  $f$  percorrem todo o intervalo  $[0, 1]$  uma infinidade de vezes, não havendo um número  $L$  do qual  $f(x)$  tende a aproximar-se com grau de precisão arbitrário. Ou, vistas as coisas à base de sucessões: há sucessões

$$x_n \rightarrow 0 \quad \text{com} \quad f(x_n) \rightarrow 0$$

(por exemplo  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ ) mas também há sucessões

$$x'_n \rightarrow 0 \quad \text{com} \quad f(x'_n) \rightarrow 1$$

(por exemplo,  $\frac{3}{4}, \frac{5}{12}, \frac{7}{24}, \frac{9}{40}, \dots$  que é a sucessão dos pontos médios dos intervalos mencionados).

**EXEMPLO 3.2.5** A função  $x^2 + 3x + 5$  tem limites em  $-\infty$  e  $+\infty$  que são os mesmos que os da função  $x^2$ . Na realidade é só o papel do termo de grau mais elevado que aqui é relevante, porque escrevendo

$$x^2 + 3x + 5 = x^2 \left( 1 + \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2} \right)$$

vemos que, quando se substitui  $x$  por uma sucessão  $x_n \rightarrow +\infty$  ou  $x_n \rightarrow -\infty$ , o termo dentro do parêntesis tende para 1 (Factos 2.4.7 e 2.4.10) e daí resulta

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x^2 + 3x + 5) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^2 \left( 1 + \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2} \right) = +\infty.$$

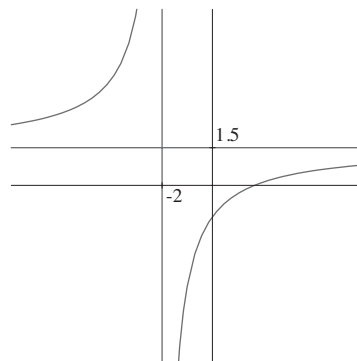
**EXEMPLO 3.2.6** Para a função  $f(x) = \frac{3x-5}{2x+4}$ , cujo domínio é  $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ , e que se pode exprimir na forma

$$\frac{3x-5}{2x+4} = \frac{3}{2} - \frac{11}{2x+4},$$

temos:

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \frac{3}{2}.$$



Outro modo de chegar a esta última conclusão consiste em dividir por  $x$  ambos os membros da fracção para aplicar 3.2.1(i):

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x-5}{2x+4} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3 - \frac{5}{x}}{2 + \frac{4}{x}} = \frac{3}{2}.$$

Da observação (4) a seguir à definição de função contínua e da observação (2) a seguir ao Exemplo 3.1.6 decorre uma ideia importante que voltamos a sublinhar.

Seja  $f$  uma função definida em  $D = I$  ou  $D = I \setminus \{a\}$ . Seja  $\delta > 0$  e consideremos a vizinhança  $V(a, \delta) = [a - \delta, a + \delta]$ . Então as afirmações

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \quad e \quad \lim_{x \rightarrow a} f|_{I \cap V(a, \delta)(x)} = L$$

são equivalentes.

(Com efeito, a função  $\tilde{f}$  usada na definição de limite será contínua em  $a$  se, e só se, a sua restrição a  $I \cap V(a, \delta)$  o for.)

Este carácter local do limite tem consequências úteis. Assim, por exemplo, no Facto 3.2.1(vi), para concluir  $L \leq M$  bastará que se saiba que há uma vizinhança  $V(a, \delta)$  tal que

$$f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in (I \setminus \{a\}) \cap V(a, \delta).$$

Efectivamente, bastará aplicar o enunciado inicial às restrições de  $f$  e  $g$  à vizinhança dada.

## Exercícios da Secção 3.2

1 Calcular os limites, caso existam:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2 - 2x};$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x^3 - 1};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + 1}{x^2};$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x + 1}{x^2 - 1};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + 1}{x^3};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x + 1}{x^3};$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (5x - 1);$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (5x - 1);$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 5x);$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 5x);$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (4x^3 - 10x^2);$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (4x^3 - 10x^2);$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{5x - 1}{2x + 6};$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{5x - 1}{2x + 6};$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x - 1}{2x + 6};$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 3x}{-3x^2 + 1};$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 3x}{-3x^3 + 1};$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 3x}{x - 1}.$$

2 Sabe-se que para uma determinada função  $f$  se tem

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty.$$

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(a) A inequação  $f(x) > 5\,000$  tem soluções no intervalo  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ .

(b) Os valores de  $f(x)$ , quando  $x$  varia no intervalo  $[-0.01, 0.01]$ , são valores aproximados de  $10^6$  com erro que não excede 1.

3 Determinar os limites das seguintes sucessões, caso existam:

$$n^2 + \frac{1}{n},$$

$$n^2 - n + \frac{1}{n},$$

$$\frac{n^2 + 1}{n}$$

$$\frac{2n^4 - n}{(n^2 + 1)^2},$$

$$\frac{1 + n - n^3}{5n^3 + n},$$

$$\frac{1 + n - n^3}{(n^2 + 1)^2},$$

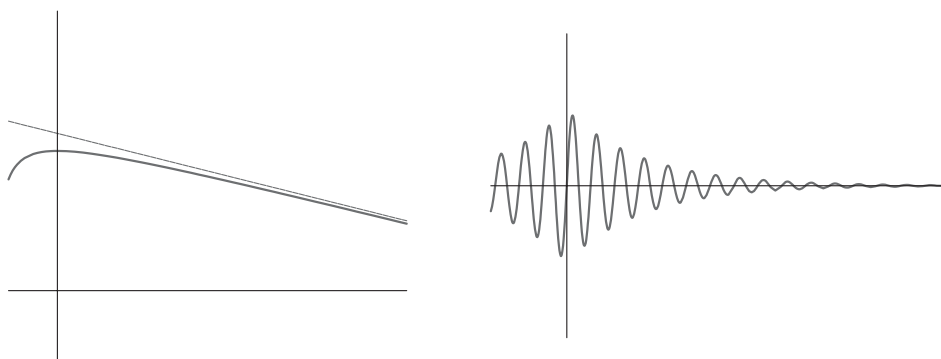
$$\frac{n + 5^n}{n + 4 \times 5^n}.$$

4 Tem-se  $0 < \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ . Passando ao limite, obtemos  $0 = \lim = 0 = \lim \frac{1}{n}$ . Portanto, passando ao limite numa desigualdade estrita, pode obter-se igualdade.

### 3.3 Assíntotas

Podemos agora dar uma noção clara do que se entende por assíntota.

Por fixar ideias, seja  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função cujo domínio  $I$  contém um intervalo com o extremo  $+\infty$ , isto é,  $I \supset [\alpha, +\infty[$ .



**DEFINIÇÃO.** Dizemos que a recta de equação  $y = mx + p$  ( $m, p \in \mathbb{R}$ ) é *assíntota* [do gráfico] de  $f$  em  $+\infty$  se

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx - p) = 0.$$

O significado da condição expressa nesta definição é que o gráfico de  $f$  e a recta considerada praticamente não se distinguem para valores muito grandes de  $x$ ; mais precisamente, aproximam-se tanto quanto quisermos desde que consideremos valores de  $x$  suficientemente elevados.

Em particular, se  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = p$ , a recta  $y = p$  é assíntota de  $f$  em  $+\infty$ ; referimo-la como *assíntota horizontal*.

**EXEMPLO 3.3.1** O eixo  $0x$ , isto é, a recta  $y = 0$ , é assíntota da função  $\frac{1}{x}$  em  $+\infty$ . A recta horizontal  $y = \frac{3}{2}$  é assíntota em  $+\infty$  da função  $\frac{3x-5}{2x+4}$  que surgiu no exemplo anterior.

**EXEMPLO 3.3.2** A função  $f(x) = x + \frac{1}{x}$  que surgiu no exemplo 1.1.3 tem como assíntota em  $+\infty$  a recta  $y = x$ , visto que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

**Facto 3.3.1** A recta  $y = mx + p$  é assíntota de  $f$  em  $+\infty$  se, e só se,

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{e} \quad p = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx],$$

(o que pressupõe a existência dos limites indicados).

Demonstração. Vamos demonstrar uma das afirmações do enunciado; deixamos a outra ao cuidado do leitor interessado (a argumentação utiliza essencialmente os mesmos princípios e os mesmos cálculos).

Suponhamos que  $y = mx + p$  é assíntota de  $f$  em  $+\infty$ . Então, por definição e em virtude do Facto 3.2.1 (i),

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - mx - p) + p = 0 + p = p.$$

Além disso, pelos Factos 3.2.1 (iv) e (i),

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - mx + mx}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{f(x) - mx}{x} \right) + m = 0 + m = m.$$

A demonstração fica concluída. ■

**EXEMPLO 3.3.3** A função  $\sqrt{x^2 + 1}$  tem uma assíntota em  $+\infty$ , porque para  $x > 0$

$$\frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} = \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$$

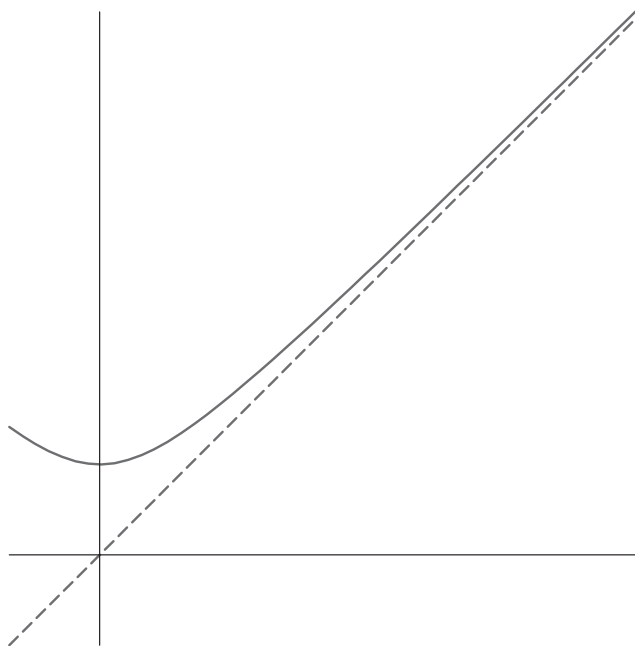
e portanto

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} = 1,$$

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + 1} - x &= \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + 1} + x} \\ &= \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x}, \end{aligned}$$

de onde

$$p = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) = 0.$$



A assíntota é a recta  $y = x$ .

Substituindo, no texto precedente,  $+\infty$  por  $-\infty$ , obtemos a noção de assíntota [do gráfico] de  $f$  em  $-\infty$  e as condições para que ela exista.

**EXEMPLO 3.3.4**  $y = x$  é assíntota de  $x + \frac{1}{x}$  tanto em  $+\infty$  como em  $-\infty$ .

$\sqrt{x^2 + 1}$  tem a assíntota  $y = -x$  em  $-\infty$ , visto que para  $x < 0$

$$\frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} = -\frac{\sqrt{x^2 + 1}}{|x|} = -\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}},$$

e portanto

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} = -1.$$

Por outro lado, pode verificar-se que, como no exemplo anterior,

$$p = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \sqrt{x^2 + 1} + x \right) = 0.$$

**DEFINIÇÃO.** Seja  $I$  um intervalo,  $a \in I$ ,  $f : I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função. Dizemos que a recta vertical  $x = a$  é assíntota de  $f$  se os limites laterais

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

(caso faça sentido considerá-los) têm como valores  $+\infty$  ou  $-\infty$ .



**EXEMPLO 3.3.5**  $\frac{1}{x}$  e  $\frac{1}{x^2}$  têm como assíntota vertical a recta  $x = 0$ . A função  $\frac{3x-5}{2x+4}$  (exemplo 3.2.6 tem como assíntota vertical a recta  $x = -2$ .

**EXEMPLO 3.3.6** A função definida por

$$f(x) = \frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}$$

para  $x \in [0, 1[ \cup ]1, +\infty[$  tem a assíntota vertical  $x = 1$ , visto que

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}} = -\infty.$$

E tem a assíntota horizontal  $y = -1$ , visto que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}} + 1}{\frac{1}{\sqrt{x}} - 1} = \frac{0 + 1}{0 - 1} = -1.$$

### Exercício da Secção 3.3

**1** Determinar todas as assíntotas, caso existam, das funções

$$\begin{array}{lll} \frac{10x-5}{x+1}, & \frac{10x-5}{2x-1}, & \frac{x^2-1}{x^2-4}, \\ \sqrt{4x^2+3}, & & \frac{\sqrt{x^3+1}}{x}. \end{array}$$

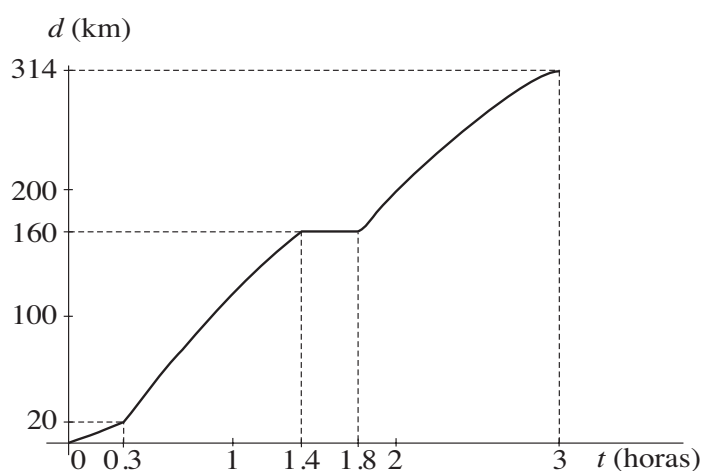


# Capítulo 4

## Taxa de variação e derivada

### 4.1 Introdução

**EXEMPLO 4.1.1** Um automóvel sai de Lisboa em direcção ao Porto na A1. O gráfico seguinte descreve a distância percorrida,  $d$ , em km, em função do tempo,  $t$ , em horas. (A distância é medida em relação ao ponto de partida e o início da viagem faz-se corresponder ao instante 0.)



Um primeiro olhar sobre o gráfico revela-nos que, após um período inicial de 18 minutos (0.3 horas), em que foram percorridos apenas 20 km, o condutor teve condições para “acelerar” e, no intervalo de tempo  $[0.3, 1.4]$  (ou seja, desde os 18 minutos até 1h 24 min.), percorreu mais 140 km, atingindo os 160 km. Seguidamente houve uma paragem de 24 minutos — pois que no intervalo  $[1.4, 1.8]$  não houve variação na distância percorrida. O automóvel arrancou novamente 1h 48 min. após a partida (instante 1.8) e, com velocidade variável, acabou por completar o percurso de 314 km ao cabo de 3 horas.

Em termos quantitativos, o gráfico fornece-nos certas informações mais precisas. Por exemplo:

— a velocidade média na viagem foi de

$$\frac{314}{3} \approx 104.67 \text{ km/h};$$

— no intervalo  $[0.3, 1.4]$  a função  $t \mapsto d(t)$  é sensivelmente afim: há proporcionalidade entre distâncias percorridas e tempos gastos em as percorrer. A velocidade média neste intervalo é

$$\frac{160 - 20}{1.4 - 0.3} = \frac{140}{1.1} = 127.27 \text{ km/h}.$$

Em qualquer subintervalo deste, a velocidade média é a mesma: podemos dizer que em  $[0.3, 1.4]$  a viagem é feita a velocidade constante.

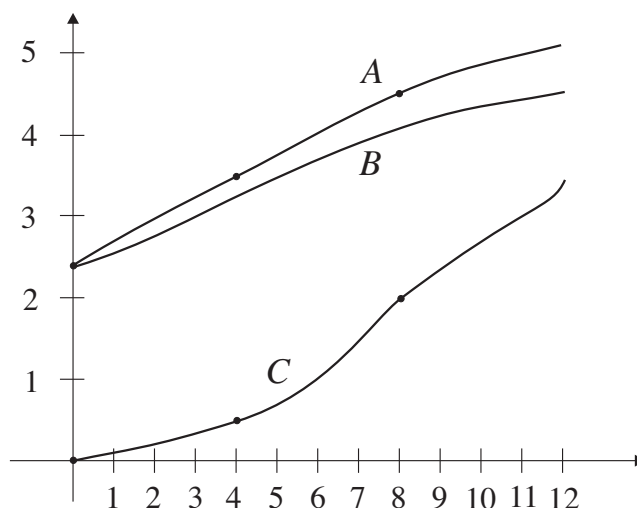
— No intervalo  $[1.4, 1.8]$  a função  $t \mapsto d(t)$  é constante e em particular a velocidade média nesse intervalo é nula:

$$\frac{160 - 160}{1.8 - 1.4} = \frac{0}{0.4} = 0.$$

— No intervalo  $[0.3, 1.8]$  a velocidade média é, naturalmente, menor que em  $[0.3, 1.4]$ :

$$\frac{160 - 20}{1.8 - 0.3} = \frac{140}{1.5} = 93.33 \text{ km/h}. \quad \blacksquare$$

**EXEMPLO 4.1.2** A evolução do volume de vendas em três empresas do mesmo ramo de actividade, ao longo de um ano determinado, está representada pelos três gráficos da figura. O tempo é referido a meses e as vendas estão expressas em milhares de euros.



As três empresas apresentam facturação crescente. No entanto, o ritmo de crescimento é bem diferente: nos casos de A e B, que partem de um nível de 2.4, o volume de vendas

por unidade de tempo vai diminuindo, enquanto que no caso de  $C$  o volume de vendas por unidade de tempo aumenta. Concretamente, designando também por  $A$ ,  $B$ ,  $C$  as funções a que correspondem os gráficos indicados, temos, por exemplo,

$$\begin{aligned}\frac{A(4) - A(1)}{4 - 1} &= \frac{3.5 - 2.4}{3} \approx 0.37, \\ \frac{A(8) - A(4)}{8 - 4} &= \frac{4.5 - 3.5}{4} \approx 0.25, \\ \frac{C(4) - C(1)}{4 - 1} &= \frac{0.5 - 0}{3} \approx 0.17, \\ \frac{C(8) - C(4)}{8 - 4} &= \frac{2 - 0.5}{4} \approx 0.38.\end{aligned}$$

Estes dados quantitativos certamente farão reflectir os empresários e possivelmente levarão a tomar medidas correctivas sobre a gestão das empresas onde isso se revela necessário. . .

Cada cociente dos que calculámos acima é referido com a designação de *taxa média de variação* da função envolvida no intervalo considerado (por exemplo, o primeiro é a taxa média de variação de  $A(x)$  no intervalo de extremos 1 e 4). Estes cocientes representam, para a respectiva função, o mesmo que a velocidade média representa para a função distância no exemplo precedente. Dão uma informação relevante porque exprimem *como* é que a função está a crescer. ■

**EXEMPLO 4.1.3** Numa encomenda postal de forma cilíndrica, a soma do comprimento (altura) com o perímetro da base (circular) não pode exceder 80 cm. Podemos calcular então o volume  $V$  do cilindro em função do raio  $r$  da base:

$$V = \pi r^2 c$$

onde o comprimento (altura)  $c$  do cilindro é tal que

$$c + 2\pi r \leq 80.$$

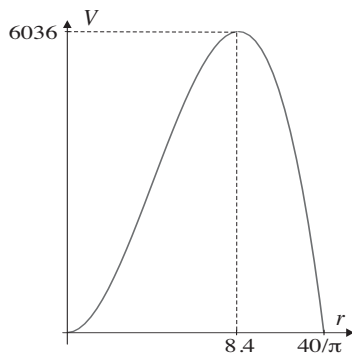
O maior volume para um dado raio da base obtém-se com o maior valor possível para  $c$ :

$$c = 80 - 2\pi r.$$

Então

$$V = \pi r^2 (80 - 2\pi r). \quad (*)$$

Como o valor de  $c$  é positivo, temos  $80 - 2\pi r > 0$  e, portanto,  $r < 40/\pi$ . Estudemos o gráfico da função  $V$ , dada por  $(*)$ , no domínio  $]0, 40/\pi[$ .



Podemos fazer, para esta função, um estudo análogo aos precedentes.

Perguntaremos agora “qual é a *taxa de variação* da função  $V(r)$ ” em determinado intervalo de valores de  $r$ , entendendo por isso o cociente entre a diferença dos valores da função nos extremos do intervalo e o comprimento do intervalo. Assim, nos intervalos  $[0, 2]$ ,  $[0, 8.4]$ ,  $[7, 8.4]$ ,  $[8.4, 10]$  obtemos, respectivamente, os seguintes cocientes:

$$\frac{V(2) - V(0)}{2 - 0} \approx 423.698, \quad \frac{V(8.4) - V(0)}{8.4 - 0} = 718.352$$

$$\frac{V(8.4) - V(7)}{8.4 - 7} = 349.756$$

$$\frac{V(10) - V(8.4)}{10 - 8.4} = -400.389$$

Estes cocientes admitem uma interpretação semelhante à dos exemplos anteriores. Aqui, representam a *variação média de volume*, i.e., a *variação do volume por cada unidade de variação de raio*, em cada intervalo considerado. Esta taxa de variação é positiva, ou negativa, conforme o valor de  $V$  no extremo direito do intervalo é maior, ou menor, que o valor de  $V$  no extremo esquerdo. ■

Seja agora  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função qualquer cujo domínio é um intervalo  $I$ . Para cada par de pontos

$$a \neq b, \quad a, b \in I$$

definimos a *taxa (ou razão) de variação média de  $f$  no intervalo de extremos  $a$  e  $b$*  como sendo o número

$$T_{f,a,b} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Enquanto o numerador desta fracção,  $f(b) - f(a)$ , representa simplesmente a *variação* sofrida por  $f(x)$  quando  $x$  muda de  $a$  para  $b$ , este cociente dá uma informação quantitativa sobre quanto  $f(x)$  variou, em média, *por cada unidade de variação de  $x$* , quando  $x$  passa do valor  $a$  ao valor  $b$ .

**EXEMPLO 4.1.4** Se  $f$  é uma função afim,

$$f(x) = mx + k, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

então sabemos que

$$T_{f,a,b} = m$$

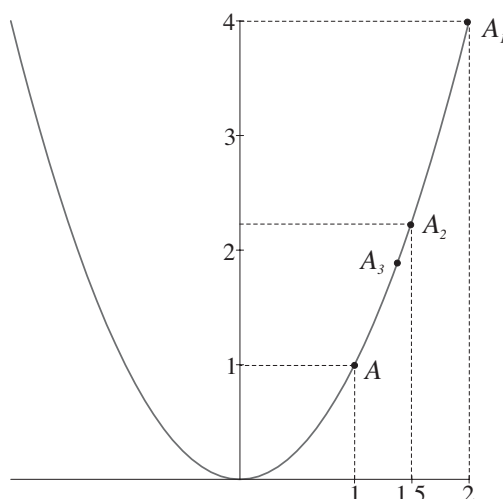
é independente de  $a$  e de  $b$  e é o declive da recta que constitui o gráfico de  $f$  num referencial ortonormado. Em particular,  $T_{f,a,b}$  é positivo, negativo ou nulo, conforme  $f$  é estritamente crescente, estritamente decrescente, ou constante, respectivamente. ■

**EXEMPLO 4.1.5** Consideremos a função  $f(x) = x^2$  em  $\mathbb{R}$ . Temos então, sempre com  $a \neq b$ ,

$$T_{f,a,b} = \frac{b^2 - a^2}{b - a} = \frac{(b + a)(b - a)}{b - a} = b + a.$$

Observamos, em particular, o significado de

$$\begin{aligned} T_{f,1,2} &= 3, \\ T_{f,1,1.5} &= 2.5, \\ T_{f,1,1.3} &= 2.3, \\ T_{f,1,1.2} &= 2.2, \\ T_{f,1,1.1} &= 2.1, \\ T_{f,1,1.01} &= 2.01. \end{aligned}$$



Obtivemos, sucessivamente, os declives das rectas que ligam o ponto  $A(1, 1)$  aos pontos  $A_1(2, 4)$ ,  $A_2(1.5, 2.25)$ ,  $A_3(1.3, 1.69)$ ,  $A_4(1.1, 1.21)$ ,  $A_5(1.01, 1.0201)$ . Estas rectas têm declives que estão cada vez mais próximos de 2, sugerindo que quando tomamos uma sucessão de pontos  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$  sobre a parábola, distintos de  $A$ , mas a aproximar-se de  $A$  tanto quanto desejarmos, as rectas

$$AA_1, AA_2, AA_3, \dots, AA_n, \dots$$

vão “tender” para uma posição limite: a da recta que passa por  $A$  e tem declive 2. A esta recta será apropriado chamar *tangente* à parábola no ponto  $A(1, 1)$ . A tangente surge-nos, pois, como “posição limite” das rectas  $AA_n$ .

---

É interessante observar que o declive da recta tangente à parábola já fora obtido em **10**, Secção 9.6, Facto 9.12. Constatamos que o declive da tangente a  $y = x^2$  no ponto  $(1, 1)$ , que aí foi indicado, é precisamente 2.

---

O leitor facilmente verificará o seguinte (ver também adiante o Facto 4.1.5)

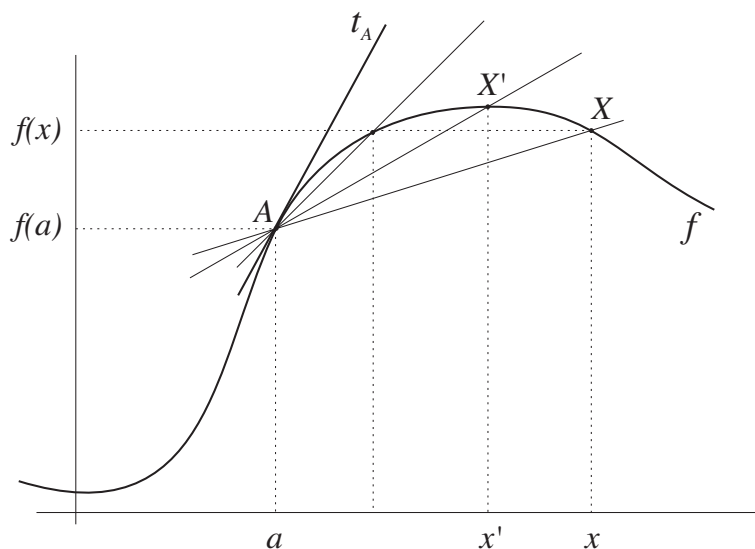
**Facto 4.1.1** *Seja  $I$  um intervalo e  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função monótona. Então, para quaisquer  $a \neq b$  em  $I$ ,*

$$\begin{aligned} T_{f,a,b} &\geq 0 && \text{se } f \text{ é crescente em } I; \\ T_{f,a,b} &\leq 0 && \text{se } f \text{ é decrescente em } I. \end{aligned}$$

■

Voltemos a considerar uma função arbitrária  $f$  e a taxa de variação  $T_{f,a,x}$ . Representamos por  $a$  um ponto que fixamos e por  $x$  um outro que vamos encarar como variável. Representemos graficamente a função num referencial ortonormado e consideremos os pontos do gráfico

$$\begin{aligned} A &\leftrightarrow (a, f(a)), \\ X &\leftrightarrow (x, f(x)). \end{aligned}$$



A taxa de variação  $T_{f,a,x}$  representa exactamente o declive da recta  $AX$ .

Vamos imaginar que  $X$  se desloca ao longo do gráfico de modo a que a sua abcissa se aproxima da de  $A$  tanto quanto quisermos (podemos pensar numa sucessão de pontos  $X_n \leftrightarrow (x_n, f(x_n))$  em que  $x_n \rightarrow a$ ). A cada nova posição  $X'$  de  $X$  corresponde nova taxa de



variação e portanto novo declive: o declive da recta  $AX'$ . A taxa de variação é, pois, função de  $x$ . Se esta função tende para um limite  $L$ , quando  $x \rightarrow a$ , isto é, se

$$T_{f,a,x} \rightarrow L \text{ quando } x \rightarrow a,$$

então o valor do limite representa o declive de uma recta que passa por  $A$  e corresponde à “posição limite” das rectas  $AX$  quando  $X$  varia, no gráfico, aproximando-se a sua abcissa da de  $A$ . Esta recta chama-se *recta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $A$* ; representamo-la na figura por  $t_A$ .

A recta  $t_A$  tem, pois, como equação

$$y = f(a) + L(x - a)$$

onde

$$L = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Na figura sugere-se que as abcissas  $x$  dos pontos aproximantes são maiores que  $a$ ; mas podemos igualmente considerar abcissas menores, e nessa altura as posições do ponto aproximante surgem à esquerda de  $a$ .

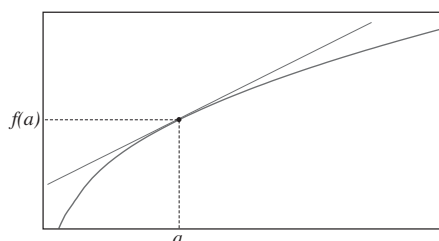
As nossas considerações anteriores fazem intervir dois tipos de objectos:

- *números*: as taxas de variação  $T_{f,a,x}$ ;
- *rectas*: as rectas que passam por  $A$  e cujo declive é  $T_{f,a,x}$ .

E criam dois objectos novos, obtidos por passagem ao limite dos anteriores:

— o *número*  $L = \lim_{x \rightarrow a} T_{f,a,x}$ , que podemos interpretar como “taxa de variação instantânea” de  $f$  em  $a$ , na medida em que é aproximado, com precisão arbitrária, por taxas de variação em intervalos suficientemente pequenos que contêm  $a$ ;

— a *recta*  $t_a$  de declive  $L$ , que podemos encarar, dado o modo como foi obtida, como a recta com a qual “melhor se confunde” o gráfico de  $f$  numa janela de visualização suficientemente pequena, em torno do ponto  $A \leftrightarrow (a, f(a))$ . Efectivamente, um zoom sobre o gráfico de  $f$  no ponto  $A$  mostrará a recta  $t_a$  como “colada” ao gráfico de  $f$  naquele ponto. . .



O número  $L$  acima definido tem um papel muito relevante na descrição das propriedades da função  $f$ . Chamamos-lhe *derivada de  $f$  em  $a$*  e representamo-lo por  $f'(a)$ . Podemos apresentá-lo numa forma equivalente, e utilizada com frequência, que consiste em escrever a variável  $x$  na forma

$$x = a + h$$

de modo que a taxa média de variação passa a ter o aspecto

$$T_{f,a,a+h} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Então tomar o limite de  $T_{f,a,x}$  quando  $x \rightarrow a$  é o mesmo que tomar o limite de  $T_{f,a,a+h}$  quando  $h \rightarrow 0$ .

**DEFINIÇÃO.** Chama-se *derivada* da função  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , definida no intervalo  $I$ , no ponto  $a \in I$ , ao limite (quando existe)

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{ou} \quad f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

É a recta que passa por  $A \leftrightarrow (a, f(a))$  e tem declive  $f'(a)$ , isto é, a recta de equação

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

chamamos *tangente ao gráfico de  $f$  em  $A$* .<sup>18</sup>

As propriedades mais simples das derivadas decorrem daqui imediatamente:

**Facto 4.1.2** Se uma função  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  é constante no intervalo  $I$ , então a sua derivada é zero em todos os pontos:

$$f'(a) = 0, \quad \forall a \in I.$$

Demonstração. Se há um  $c \in \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = c, \forall x \in I$ , então

$$T_{f,a,x} = \frac{c - c}{x - a} = 0, \quad \forall a, x \in I, a \neq x.$$

Como o limite de uma constante (neste caso zero) é a própria constante, vem

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} T_{f,a,x} = \lim_{x \rightarrow a} 0 = 0. \quad \blacksquare$$

**Facto 4.1.3** Se  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  é afim no intervalo  $I$ , isto é, se há  $m, k \in \mathbb{R}$  tais que  $f(x) = mx + k, \forall x \in I$ , então a sua derivada em qualquer ponto de  $I$  é  $m$ :

$$f'(a) = m \quad \forall a \in I.$$

<sup>18</sup> Com um ligeiro abuso de linguagem também podemos dizer *tangente ao gráfico de  $f$  em  $a$* .

Demonstração. Tem-se  $T_{f,a,x} = \frac{mx+k-ma-k}{x-a} = m$  e, novamente pelo facto de o limite de uma constante (neste caso  $m$ ) ser a própria constante vem

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} T_{f,a,x} = \lim_{x \rightarrow a} m = m. \quad \blacksquare$$

**Facto 4.1.4** A derivada de  $f(x) = x^2$  no ponto  $a$  é

$$f'(a) = 2a.$$

Demonstração. Vimos no exemplo 4.1.5 que, para esta função, a taxa média de variação é

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{x^2 - a^2}{x - a} = x + a.$$

Portanto,

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} (x + a) = 2a. \quad \blacksquare$$

**OBSERVAÇÃO.** Em consequência do carácter local do conceito de limite (recordar o final da secção 3.2), também o conceito de derivada possui carácter local. Mais precisamente: se a função  $f$  tem domínio  $I$  e  $a \in I$ , e se fixarmos uma vizinhança  $V(a, \delta)$  de  $a$  ( $\delta > 0$ ), é equivalente afirmar

$$f'(a) = L \quad \text{ou} \quad (f|_{I \cap V(a, \delta)})'(a) = L.$$

Dito de outro modo, a existência e o valor da derivada de  $f$  em  $a$  depende exclusivamente do que se passa com  $f$  numa vizinhança de  $a$  (mesmo que ela seja muito “pequena”).

**Facto 4.1.5** Se  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  é crescente (respectivamente decrescente) e se tem derivada num ponto  $a \in I$ , então

$$f'(a) \geq 0 \quad (\text{respectivamente } \leq 0).$$

Demonstração. A taxa de variação de uma função crescente é maior ou igual a zero:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0 \quad \forall x \in I \setminus \{a\}$$

visto que ambos os termos da fracção têm o mesmo sinal. Passando ao limite, obtemos  $f'(a) \geq 0$  em virtude do Facto 3.2.1 (vi). Analogamente se trata o caso em que  $f$  é decrescente.  $\blacksquare$

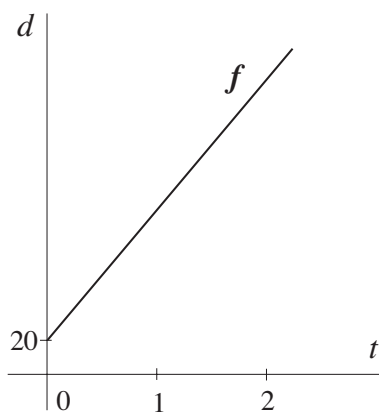
O leitor deve interpretar esta propriedade em termos de declive da tangente ao gráfico.

Uma importante interpretação do conceito de derivada é a que está ligada, na descrição do movimento, à ideia de velocidade. Se os valores da função  $f$  representam a distância percorrida por um móvel e  $x$ , a variável independente, tem o papel do tempo, então, à semelhança do que vimos no Exemplo 4.1.1, as taxas de variação  $T_{f,a,b}$  representam *velocidades médias* e  $f'(a)$  interpreta-se como a *velocidade instantânea*, ou simplesmente *velocidade*, no instante  $a$ .

Concretizemos com dois exemplos.

**EXEMPLO 4.1.6** A função que dá a distância, em km, percorrida por um automóvel numa estrada rectilínea, em cada instante  $t$  (referido em horas) a partir de  $t = 0$ , é

$$d = f(t) = 100t + 20, \forall t \geq 0.$$

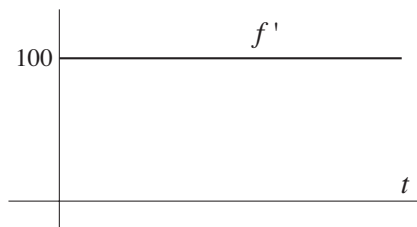


Quer isto dizer que quando começamos a observar o movimento ( $t = 0$ ), o carro já está a 20 km do ponto que serve de referência para cálculo das distâncias. Seguidamente, o carro percorre 100 km em cada hora, mas a velocidade média é constante em qualquer intervalo  $[t_1, t_2]$ :

$$\frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} = 100.$$

Por isso, a velocidade instantânea é também constante, ou seja

$$v = f'(t) = 100 \quad \forall t \geq 0.$$



■

**EXEMPLO 4.1.7** Uma esfera rola sem atrito num plano inclinado. A distância, em cm, que a separa do ponto de partida é dada, em função do tempo, em segundos, pela expressão

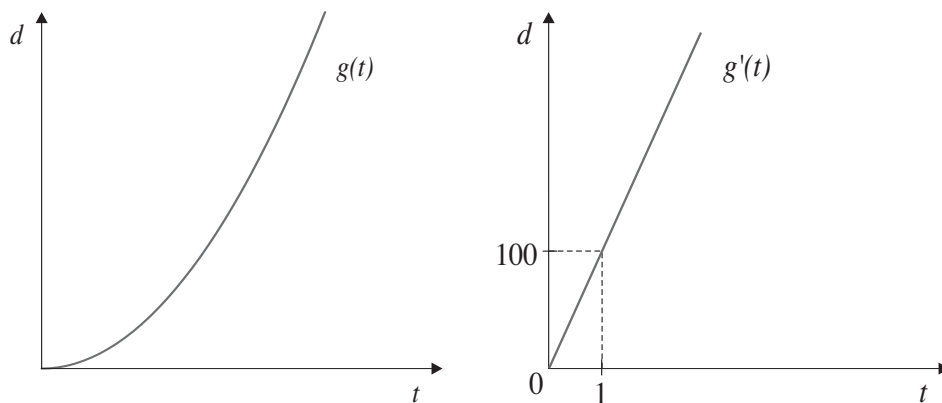
$$d = g(t) = 50t^2, \quad \forall t \geq 0.$$

Agora, a velocidade média no intervalo de tempo  $[t_1, t_2]$  não é sempre a mesma:

$$\frac{g(t_2) - g(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{50t_2^2 - 50t_1^2}{t_2 - t_1} = 50(t_1 + t_2).$$

A velocidade em cada instante  $t_1$  obtém-se desta expressão fazendo  $t_2$  tender para  $t_1$ , à semelhança do que já vimos no Facto 4.1.4. Assim,

$$g'(t_1) = 100t_1 \quad \forall t_1 \geq 0.$$



A velocidade, neste exemplo, é proporcional ao tempo: em cada unidade de tempo há um *acrécimo de velocidade* de 100 cm/s. ■

Havendo variação de velocidade num movimento, há lugar a falarmos de *aceleração*. Mais precisamente, seja

$$v = f(t)$$

a função que representa a velocidade (instantânea) de um móvel num dado intervalo de tempo. À taxa de variação

$$T_{f,t_1,t_2}$$

chamamos *aceleração média* do movimento no intervalo  $[t_1, t_2]$ . Se existir

$$f'(t_1) = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$$

dizemos que  $f'(t_1)$  é a *aceleração (instantânea)* do movimento no instante  $t_1$ .

Assim, tal como a velocidade é a derivada da função que exprime a distância percorrida em termos do tempo, a aceleração é a derivada da função que exprime a velocidade em termos de tempo.

Nos dois exemplos anteriores temos que a aceleração é zero no primeiro (porque a velocidade é constante) e é constante e igual a  $100 \text{ cm/s} = 1 \text{ m/s}$  no segundo (porque a velocidade é afim).

## Exercícios da Secção 4.1

- 1 Determinar  $T_{f,n,n+1}$  com  $n \in \mathbb{N}$  nos casos em que

$$f(x) = x^2 \qquad f(x) = \frac{1}{x}; \qquad f(x) = \sqrt{x}.$$

- 2 Determinar  $T_{f, \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}}$  para as mesmas funções.

- 3 Admitamos que, após uma injeção de cálcio, a quantidade de cálcio presente no sangue de uma pessoa ao fim de  $t$  horas é dada, numa unidade de massa conveniente, por

$$Q = \frac{90}{\sqrt{t^3}} \quad \text{para } t \geq 10.$$

Qual é a taxa média de variação de  $Q$  entre as 12 e as 24 horas ? E entre as 12 e as 20? E entre as 12 e as 15? E entre as 12 e as 13? E entre as 12 e as 12.5?

- 4 Determinar a taxa média de variação da função

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{se } x \leq 0 \\ x^2 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

relativamente aos seguintes pares de pontos:

- (a)  $-2$  e  $-1$ ;      (b)  $-2$  e  $0$ ;      (c)  $0$  e  $1$ ;      (d)  $0$  e  $2$ ;      (e)  $-1$  e  $2$

- 5 Dois pontos movem-se numa recta. Em cada instante  $t$ , as suas posições (abscissas) respectivas são dadas pelas funções

$$f(t) = 5t \qquad \text{e} \qquad g(t) = t + \frac{1}{2}t^2.$$

Em que instante têm os pontos a mesma velocidade? E em que instante têm a mesma posição?

- 6 A massa de um tumor é dada, em certa unidade, em função do tempo (em dias) por

$$M = 0.07t^2.$$

Qual é a taxa de variação instantânea (= derivada) da massa do tumor no 10º dia? E no 20º dia? Ao fim de quantos dias está o tumor a crescer à taxa (instantânea) de 10 unidades de massa por dia?

- 7 Admitamos que o custo de produção de  $x$  unidades de um determinado produto electrónico é dado por uma função real

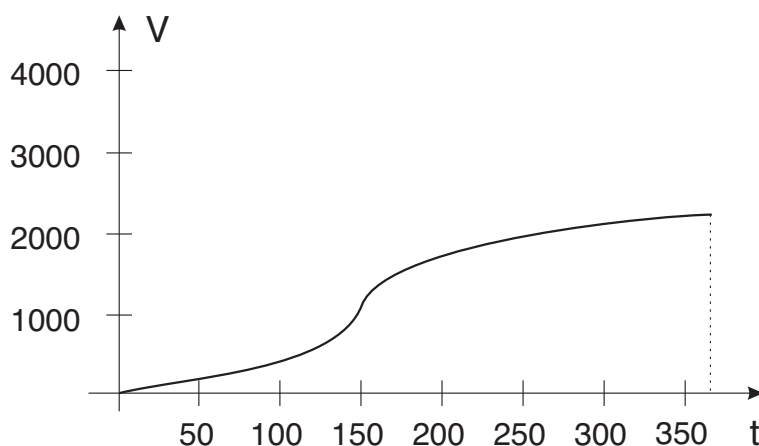
$$x \mapsto C(x)$$

que tem derivada em todos os pontos do domínio.

Quais são os números que representam as quantidades a seguir descritas?

- (a) Custo de produção de 1 000 unidades.
- (b) Diferença de custos de produção de 2 000 e de 1 000 unidades.
- (c) Taxa média de variação dos custos de produção quando se passa de 1 000 para 2 000 unidades.
- (d) Taxa (instantânea) de variação de custo quando se produzem 1 000 unidades.

8 Um depósito vazio começa a ser enchido de líquido às 0 horas. No gráfico junto está representada a quantidade de líquido vertida,  $V$  (em litros) em função do tempo  $t$  (em minutos)



Em que instante parece ser máximo o débito (quantidade vertida por unidade de tempo)?

9 Um automóvel em movimento começa a reduzir a velocidade sob acção do travão de mão. Admitamos que, a partir do instante  $t = 0$  em que é accionado o travão, a distância do carro ao ponto que ocupava naquele instante é dada por

$$d = 80t - 1.5t^2, \quad 0 \leq t \leq T$$

e esta fórmula vale até ao instante  $T$  em que o carro se imobiliza.

Determinar  $T$  e a função velocidade do carro no intervalo  $[0, T]$ .

10 Escrever a equação da recta tangente à parábola  $y = 3x^2$  no ponto  $(2, 12)$ .



## 4.2 A derivada como função

De acordo com o Facto 4.1.4, a função  $f(x) = x^2$  tem derivada, no ponto  $a$ , igual a  $2a$ . Neste cálculo o ponto  $a$  é fixado, mas é arbitrário; o resultado vale para qualquer  $a$ . Então, a cada  $a$  estamos a fazer corresponder um novo número, a derivada de  $f$  em  $a$ ; estamos, pois, em presença de uma nova função

$$a \xrightarrow{f'} 2a$$

a que chamamos (*função*) *derivada* da função dada  $f$ .

Mais geralmente, seja

$$f : I \rightarrow \mathbb{R}$$

uma função definida no intervalo  $I \subset \mathbb{R}$ . Suponhamos que a função  $f$  tem derivada em cada ponto  $x$  de um subconjunto  $D \subset I$ . Então fica definida uma nova função

$$x \xrightarrow{f'} f'(x), \quad x \in D$$

com domínio  $D$ , a que chamamos *derivada* de  $f$ .

Note-se, pois, que o termo *derivada* é usado tanto para designar um número como uma função; mas, de um modo geral, fica claro no contexto a que é que nos queremos referir.

### EXEMPLO 4.2.1 A função

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

tem derivada em cada ponto  $a \neq 0$ . Com efeito, se  $a > 0$ ,  $f$  coincide com a função afim  $x$  numa vizinhança de  $a$  e por isso

$$f'(a) = \text{derivada de } x \text{ em } a = 1.$$

Analogamente, se  $a < 0$ ,

$$f'(a) = -1.$$

No ponto  $a = 0$  a derivada não existe, porque

$$T_{f,0,b} = \frac{|b|}{b} = \begin{cases} 1 & \text{se } b > 0 \\ -1 & \text{se } b < 0 \end{cases}$$

e não pode existir limite de  $T_{f,0,b}$  quando  $b \rightarrow 0$ .

Por conseguinte, podemos falar de derivada da função  $|x|$  como sendo a nova função

$$f'(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0 \\ -1, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

com domínio  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

O gráfico de  $|x|$ , bem nosso conhecido, ilustra como não seria razoável falar de tangente ao gráfico no ponto  $(0, 0)$ . ■

**EXEMPLO 4.2.2** Para a função  $g(x) = \sqrt{x}$ , definida em  $[0, +\infty[$ , calculamos a taxa de variação

$$T_{g,a,x} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{(\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} + \sqrt{a})} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}.$$

Distingamos dois casos:

— se  $a > 0$ , em virtude da continuidade da função  $\sqrt{x}$ , ver o Facto 3.1.7,

$$\lim_{x \rightarrow a} T_{g,a,x} = \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

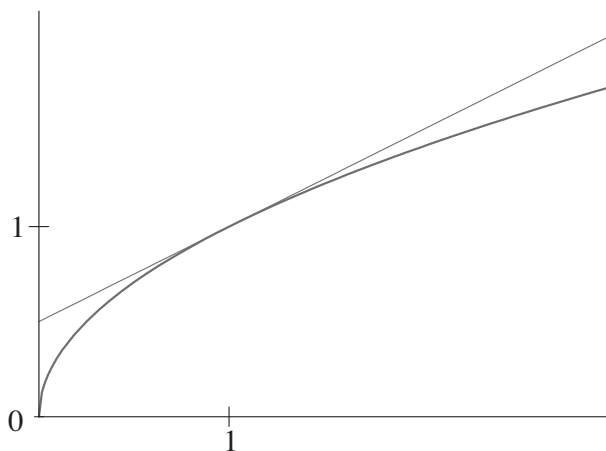
— Se  $a = 0$ , temos

$$T_{g,0,x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0} T_{g,0,x} = +\infty.$$

Então podemos dizer que  $\sqrt{x}$  tem derivada em todos os pontos do intervalo  $]0, +\infty[$ , sendo a função derivada

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad x > 0.$$

No ponto 0 não existe derivada no sentido que lhe demos atrás<sup>19</sup>. Recordando o aspecto do gráfico de  $f$ , constatamos que é razoável falar de tangente em todos os seus pontos, mas a tangente ao gráfico na origem  $(0,0)$  é uma recta vertical, o eixo  $0y$  — portanto, não faz sentido falar do seu declive como número real.



<sup>19</sup>Por vezes é cómodo dizer, num caso como este, que “a derivada de  $g$  em 0 é  $+\infty$ ”.

---

Quando viajamos num automóvel, o conta-quilómetros afixa, em cada instante  $t$ , o valor da *distância* percorrida, que é função do tempo:

$$d = f(t). \quad (*)$$

Imaginando que esta é uma função com derivada, o que o velocímetro marca, em cada instante, é precisamente a “velocidade instantânea” do movimento, que é a derivada nesse instante da função anterior:

$$v = f'(t). \quad (**)$$

A derivada desta função, por sua vez (que poderíamos representar por  $f''(t) \dots$ ) é a *aceleração* do movimento. Os automóveis não possuem um mostrador para esta função, mas os condutores “aceleras” apreciariam muito que os construtores passassem a instalá-los.

O código da estrada em Portugal exige que a velocidade (instantânea) não ultrapasse determinados valores. Por exemplo, nas autoestradas, a velocidade (entendida como derivada da função distância) não deve ultrapassar 120 km/h. Anuncia-se para breve que a mesma norma passará também a aplicar-se à velocidade média (isto é, às taxas de variação da função distância em determinados intervalos, dados pela passagem da viatura em pontos de referência da via)<sup>20</sup>.

---

## Exercício da Secção 4.2

Qual é a função derivada das funções seguintes?

$$3x; \quad -x; \quad 3x + 5; \quad 2x^2; \quad 10|x|; \quad 3\sqrt{x}; \quad -\sqrt{x}.$$

---

<sup>20</sup>Não é difícil entender que, se um condutor respeita a lei actual, então também respeita a futura lei que se anuncia. No 12º ano poderemos fundamentar devidamente esta afirmação.

## 4.3 As regras de derivação mais simples

### Facto 4.3.1 (Derivada de uma soma)

Se as funções  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  têm derivada no ponto  $a \in I$ , então a função  $f + g$  também tem e a sua derivada é a soma daquelas duas:

$$(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a).$$

Demonstração. Tem-se

$$\begin{aligned} T_{f+g,a,x} &= \frac{[f(x) + g(x)] - [f(a) + g(a)]}{x - a} \\ &= \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \\ &= T_{f,a,x} + T_{g,a,x}. \end{aligned}$$

e o resultado é consequência imediata do facto de o limite de uma soma ser a soma dos limites. ■

**Facto 4.3.2** Se  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  tem derivada em  $a$ , e se  $c$  é um número real, então a função  $cf$  também tem derivada em  $a$  e ela é o produto de  $c$  pela primeira:

$$(cf)'(a) = cf'(a)$$

**EXEMPLO 4.3.1** Aplicando os dois factos anteriores (e também os factos 4.1.2, 4.1.3 e 4.1.4), facilmente concluímos que a derivada de  $-3x^2 + 5x - 7$  no ponto  $a$  é

$$-3 \times 2a + 5 + 0 = -6a + 5. \quad \blacksquare$$

## Exercícios da Secção 4.3

1 Determinar a derivada no ponto 1 das funções:

$$-x; \quad 5x^2 + 10x - 2; \quad 5|x|.$$

2 Determinar a função derivada das funções

$$-x; \quad 5x^2 + 10x - 2.$$

3 A altura de um objecto lançado ao ar verticalmente é dada, em metros, em função do tempo,  $t$ , em segundos, por

$$h(t) = 4 + 130t - 4.9t^2$$

sendo  $t = 0$  o instante do lançamento. Qual é a velocidade do objecto ao fim de 5 segundos? E ao fim de 15 segundos?

E em que instante é a velocidade igual a 3m/s?

## 4.4 As funções com derivada são contínuas

Uma consequência simples, mas importante, da existência de derivada de uma função num ponto é a continuidade da função nesse ponto. Com efeito, podemos escrever

$$f(x) - f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a)$$

Supondo que existe  $f'(a)$  podemos aplicar a esta igualdade limites quando  $x \rightarrow a$ , sendo então

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - f(a)] = f'(a) \cdot 0 = 0 \quad (\text{Facto 3.2.1(i)})$$

ou ainda

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Vale a pena sublinhar que acabamos de demonstrar o seguinte

**Facto 4.4.1** *Se  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  tem derivada no ponto  $a \in I$ , então  $f$  é contínua em  $a$ .*

### Exercício da Secção 4.4

Esquematizar os gráficos das funções

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ x^2 & \text{se } x \geq 0 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}.$$

São ambas contínuas em todos os pontos? E têm derivada em todos os pontos?

## 4.5 Derivada das potências

Já vimos que a derivada de  $x^2$  no ponto  $a$  é  $2a$ . Vamos agora obter um resultado semelhante para a função  $x^3$ .

Começando por calcular a razão incremental, temos:

$$\frac{x^3 - a^3}{x - a} = x^2 + ax + a^2.$$

Efectivamente, o polinómio  $x^3 - a^3$  é divisível por  $x - a$  e o cociente, como facilmente se comprova, é o segundo membro da igualdade acima. Portanto

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3 - a^3}{x - a} = a^2 + a^2 + a^2 = 3a^2.$$

Mostrámos, pois, que

Se $f(x) = x^3$ ,	então	$f'(a) = 3a^2$ .
-------------------	-------	------------------

Este resultado estende-se facilmente ao caso da função potência de expoente  $n \in \mathbb{N} : x^n$ . Para esta, a razão incremental é

$$\frac{x^n - a^n}{x - a} = \underbrace{x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \dots + x^{n-2}x + a^{n-1}}_{n \text{ parcelas}} \quad (4.1)$$

Podemos verificar este facto tendo em conta que o polinómio  $x^n - a^n$  é divisível por  $x - a$  e determinando o cociente pelo método dos coeficientes indeterminados ou, directamente, pela regra de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrrrr} a & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a^n \\ & & a & a^2 & & & a^n \\ \hline & 1 & a & a^2 & \dots & a^{n-1} & 0 \end{array}$$

Voltando a (4.1), facilmente calculamos agora

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = \underbrace{a^{n-1} + a^{n-1} + \dots + a^{n-1} + a^{n-1}}_{n \text{ parcelas}} = na^{n-1}.$$

Registemos

Se $f(x) = x^n$ ,	então	$f'(a) = na^{n-1}$ .
-------------------	-------	----------------------

Esta regra tem como consequência que *uma função polinomial tem derivada em todos os pontos*. Além disso ficamos a saber calculá-la:

Se

$$f(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_1 x + c_0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

(onde  $c_0, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$  são constantes), então

$$f'(x) = n c_n x^{n-1} + (n-1) c_{n-1} x^{n-2} + \dots + c_1 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vemos, pois, que a (função) derivada de um polinómio de grau  $n$  é um polinómio de grau  $n - 1$ .

---

**EXEMPLO 4.5.1** Seja  $f$  uma função contínua num intervalo  $I$  e consideremos a nova função

$$g(x) = (x - a)^n f(x)$$

onde  $n \in \mathbb{N}$  é dado. Como

$$\frac{g(x) - g(a)}{x - a} = \frac{(x - a)^n f(x) - 0}{x - a} = (x - a)^{n-1} f(x)$$

concluimos

$$g'(a) = \begin{cases} f(a), & \text{se } n = 1, \\ 0, & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

**EXEMPLO 4.5.2** Na divisão de  $x^3$  por  $(x - 1)^2$ , seja  $Q(x)$  o cociente e  $\alpha x + \beta$  o resto:

$$x^3 = (x - 1)^2 Q(x) + \alpha x + \beta, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (*)$$

Vamos determinar  $\alpha$  e  $\beta$  sem efectuar a divisão. Derivando ambos os membros de  $(*)$  no ponto  $x = 1$  obtemos, em virtude das regras precedentes:

$$3 = 0 + \alpha.$$

Fazendo  $x = 1$  em  $(*)$  temos também

$$1 = 0 + \alpha + \beta.$$

As duas equações obtidas permitem concluir  $\alpha = 3$ ,  $\beta = -2$ .

---

**EXEMPLO 4.5.3** Para que valor de  $m$  é a recta  $y = mx - 1$  tangente ao gráfico  $y = x^5$ ?

No ponto de tangência, o declive da recta ( $m$ ) deve ser igual à derivada da função  $x^5$ . Portanto a abcissa do ponto procurado satisfaz

$$5x^4 = m.$$

Mas o ponto procurado, sendo comum à recta e ao gráfico  $y = x^5$ , deve também satisfazer

$$x^5 = mx - 1.$$



Estas duas condições arrastam

$$x^5 = 5x^5 - 1,$$

$$4x^5 = 1,$$

$$x = \sqrt[5]{\frac{1}{4}}.$$

Portanto, o ponto procurado é  $\left(\sqrt[5]{\frac{1}{4}}, \frac{1}{4}\right)$ , e  $m = \sqrt[5]{\left(\frac{1}{4}\right)^4}$ .

## Exercícios da Secção 4.5

- 1 Calcular a derivada de:

$$f(x) = -7x^3 + 2x^2 - 15x + 1$$

nos pontos  $x = 0$  e  $x = 2$ .

- 2 Calcular a função derivada de

$$-7x^3 + 2x^2 - 15x + 1.$$

- 3 Admitamos que o número de árvores de uma plantação infectadas por um fungo ao fim do tempo  $t$  (em semanas) é dado por

$$N(t) = 50t^2 - 0.6t^3$$

para  $0 \leq t \leq 70$ .

Qual é a taxa de variação média do número de infectadas entre a 3ª e a 10ª semana? E entre a 3ª e a 5ª? E a taxa de variação instantânea (= derivada) na 3ª semana?

Ao fim de quantas semanas se está a infecção a propagar à taxa (instantânea) de 2 árvores por semana?

- \*4 Calcular o resto da divisão de  $x^4 + x$  por:

$$(a) x^2, \quad (b) (x+1)^2,$$

sem utilizar o algoritmo da divisão.

- 5 Determinar  $m \in \mathbb{R}$  de modo que a recta  $y = mx - 1$  seja tangente ao gráfico  $y = x^3$ .

- 6 Determinar  $p \in \mathbb{R}$  de modo que a recta  $y = 2x + p$  seja tangente ao gráfico  $y = x^3$ .

- 7 Determinar os valores de  $m$  para os quais a equação

$$x^4 = mx - 1$$

tem uma e uma só solução. (Sugestão: com recurso a um gráfico, verificar que a questão é equivalente a determinar os valores de  $m$  para os quais a recta  $y = mx - 1$  é tangente ao gráfico  $y = x^4$ , mas não se pede — porque não é agora possível — uma justificação dessa equivalência).

## 4.6 Derivadas de funções racionais de tipo muito simples

Calculemos a derivada de  $\frac{1}{x}$  no ponto  $a$ . A taxa de variação é

$$\frac{1/x - 1/a}{x - a} = \frac{(a - x)/ax}{x - a} = \frac{-1}{ax}$$

e portanto, quando  $x \rightarrow a$ , tende para  $-\frac{1}{a^2}$ . Assim,

Se $f(x) = \frac{1}{x}$ ,      tem-se $f'(a) = -\frac{1}{a^2}$ .
--

**EXEMPLO 4.6.1** Consideremos a função racional, que é cociente de polinómios do 1º grau:

$$f(x) = \frac{3 - x}{2x + 2}.$$

Para calcular a sua derivada num ponto  $a$  do seu domínio, calculamos em primeiro lugar a taxa de variação. Como

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &= \frac{3 - x}{2x + 2} - \frac{3 - a}{2a + 2} = \frac{6a + 6 - 2ax - 2x - 6x + 2ax - 6 + 2a}{(2x + 2)(2a + 2)} = \\ &= \frac{6(a - x) + 2(a - x)}{(2x + 2)(2a + 2)}, \end{aligned}$$

temos

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{6(a - x) + 2(a - x)}{(x - a)(2x + 2)(2a + 2)} = -\frac{8}{(2x + 2)(2a + 2)} = -\frac{2}{(x + 1)(a + 1)}.$$

Passando ao limite, vem

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} -\frac{2}{(x + 1)(a + 1)} = -\frac{2}{(a + 1)^2}.$$

Logo,  $f'(a) = -\frac{2}{(a+1)^2}$ .

## Exercícios da Secção 4.6

Determinar as derivadas de:

$$-\frac{1}{x};$$

$$\frac{1-x}{1+x}.$$

São ambas contínuas em todos os pontos? E têm derivada em todos os pontos?

[2] Em que ponto do primeiro quadrante é a tangente ao gráfico  $y = \frac{2}{x}$  paralela à recta

(a)  $y = -x$ ?

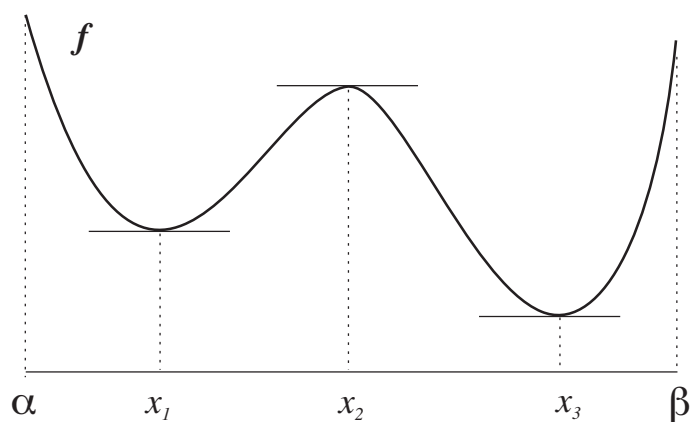
(b)  $y = x$ ?

[3] Determinar  $k$  de modo que os gráficos  $y = x^3$  e  $y = \frac{k}{x}$  se intersectem no 1º quadrante e as respectivas tangentes no ponto de encontro sejam perpendiculares.

## 4.7 Derivada, extremos relativos e monotonia

Consideremos uma função definida num intervalo  $I$ , com derivada em todos os pontos. Em termos de gráfico, isto quer dizer que ele constitui uma curva “suave”, dado que tem tangente em todos os pontos. Que se passa de especial com essa tangente nos pontos onde a função tem máximos ou mínimos relativos ?

A inspeção de um exemplo simples, como o da função  $f$ , definida em  $[\alpha, \beta]$  e representada graficamente abaixo, a qual possui extremos locais nos pontos  $\alpha$ ,  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  e  $\beta$ , mostra que a tangente nos pontos de abscissas  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  só pode ser uma recta horizontal. Como tais rectas têm declive zero, estamos em presença de pontos com derivada nula.



**Facto 4.7.1** Se a função  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  tem um extremo relativo no ponto  $a$  interior a  $I$ <sup>21</sup> e  $f'(a)$  existe, então só pode ser  $f'(a) = 0$ .

Demonstração. Para fixar ideias, suponhamos que  $f$  tem um mínimo relativo em  $a$ . Então há uma vizinhança  $V_\delta(a) = [a - \delta, a + \delta]$  tal que

$$x \in V_\delta(a) \Rightarrow f(x) \geq f(a).$$

Tomemos uma sucessão de pontos  $x_n \in ]a, a + \delta]$  tal que  $x_n \rightarrow a$ . Então

$$\frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} \geq 0 \quad \forall n$$

(porque os dois termos da fracção têm o mesmo sinal) e por isso (recordar o Facto 2.4.23)

$$f'(a) = \lim_n \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} \geq 0. \quad (*)$$

Tomemos seguidamente uma sucessão de pontos  $z_n \in [a - \delta, a[$  tal que  $z_n \rightarrow a$ . Então

$$\frac{f(z_n) - f(a)}{z_n - a} \leq 0$$

---

<sup>21</sup>Quer dizer:  $a$  não é extremo de  $I$ .

porque o numerador é  $\geq 0$  mas agora o denominador é  $< 0$ . Mas temos também

$$f'(a) = \lim_n \frac{f(z_n) - f(a)}{z_n - a} \leq 0. \quad (**)$$

Combinando (\*) e (\*\*) concluímos  $f'(a) = 0$ . ■

---

Note-se que, quando  $f$  atinge um extremo relativo num ponto que é extremidade do intervalo  $I$  onde está definida, a derivada não tem de se anular. Recomenda-se novo exame do gráfico com que começamos esta secção, com particular atenção ao que se passa nos pontos de abcissas  $\alpha$  e  $\beta$ , que são pontos de máximo relativo ...

Do exame do gráfico acima considerado sobressai também uma relação entre o *senti-do da monotonia* e o *declive da tangente* (= a derivada), visto que em subintervalos onde  $f$  é crescente ( $[x_1, x_2], [x_3, \beta]$ ) a derivada é  $\geq 0$  e em subintervalos onde  $f$  é decrescente ( $[\alpha, x_1], [x_2, x_3]$ ) a derivada é  $\leq 0$ . Na verdade, em consequência do que já foi constatado no facto 4.1.5, temos:

**Facto 4.7.2** *Se a função  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  tem derivada em todos os pontos do intervalo  $I$ , e se  $J$  é subintervalo de  $I$  onde  $f$  é crescente (respectivamente decrescente) então  $f'(x) \geq 0$  (respect.  $\leq 0$ )  $\forall x \in J$ .*

É muito significativo que o recíproco deste enunciado também é verdadeiro:

**Facto 4.7.3** *Se a função  $f$  tem derivada em todos os pontos do intervalo  $I$ , e se  $J$  é um subintervalo de  $I$  de modo que*

$$f'(x) \geq 0 \quad (\text{respect. } \leq 0) \quad \forall x \in J \quad (*)$$

*então podemos concluir que  $f|_J$  é crescente (respect. decrescente).*

*E, se em (\*) temos desigualdades estritas ( $>$  ou  $<$ ) podemos concluir que  $f|_J$  é estritamente crescente ou estritamente decrescente.* ■

---

Este facto, que o leitor certamente aceitará sem estranheza, não pode ser aqui demonstrado. Voltaremos à questão no 12º ano.

---

Com base neste enunciado podemos efectuar a pesquisa dos extremos relativos de uma função de maneira prática, visto que dele decorre imediatamente:

**Facto 4.7.4** Suponhamos que  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  tem derivada em todos os pontos de  $I$ ,  $c < a < d$  são pontos de  $I$ , e

$$f'(x) \geq 0 \quad (\text{respect. } \leq 0) \quad \forall x \in [c, a]$$

e

$$f'(x) \leq 0 \quad (\text{respect. } \geq 0) \quad \forall x \in [a, d].$$

Então  $f$  atinge em  $a$  um máximo relativo (respect. mínimo relativo). ■

Nesta situação, é costume utilizarmos um “quadro de sinais” e flechas ( $\nearrow$  ou  $\searrow$ ) que descrevem o sentido da monotonia para esquematizar as nossas conclusões:

$x$	$c$	$a$	$d$	$x$	$c$	$a$	$d$
$f'(x)$	+		−	$f'(x)$	−		+
$f(x)$	$\nearrow$	max. relat.	$\searrow$	$f(x)$	$\searrow$	min. relat.	$\nearrow$

**OBSERVAÇÃO.** Se o domínio de  $f$  se reduz a  $I = [c, d]$  conclui-se também, é claro, que  $f$  tem mínimos locais (respect. máximos locais) em  $c$  e  $d$ .

**EXEMPLO 4.7.1** Para pesquisar os extremos relativos da função  $f(x) = x^3 - x$ , calculamos

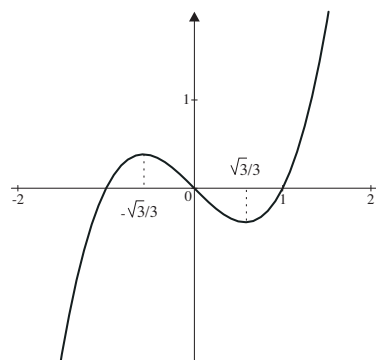
$$f'(x) = 3x^2 - 1$$

e estudamos o seu sinal:

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 > 1/3 \Leftrightarrow |x| > 1/\sqrt{3} = \sqrt{3}/3.$$

Por conseguinte obtemos o quadro de sinais

$x$	$-\sqrt{3}/3$		$\sqrt{3}/3$		
$f'(x) = 3x^2 - 1$	+	0	−	0	+
$f(x) = x^3 - x$	$\nearrow$	max. relat.	$\searrow$	min. relat.	$\nearrow$



(Naturalmente, assinalámos que  $f'(x)$  toma o valor 0 nos pontos  $\pm\sqrt{3}/3$ , onde efectua

mudança de sinal.) Concluimos, pois, que  $f(x)$  tem um valor máximo relativo,

$$f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 - \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{27} + \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

e um valor mínimo relativo

$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{2\sqrt{3}}{9}.$$

A conclusão resultou dos factos seguintes, observáveis no quadro e consequências dos Factos 4.7.3 e 4.7.4:

(a)  $f$  é estritamente crescente em  $\left]-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$  e em  $\left[\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right[;$

(b)  $f$  é estritamente decrescente em  $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right].$  ■

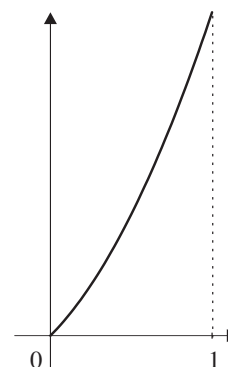
**EXEMPLO 4.7.2** Quais são os extremos locais da função  $f(x) = x^2 + x$  restringida ao intervalo  $[0, 1]$ ?

Neste caso, temos

$$f'(x) = 2x + 1$$

que é  $> 0$  para todo o  $x > -1/2$ . Em particular, a análise que nos é pedida pode condensar-se no quadro

$x$	0	1
$f'(x)$	+	
$f(x)$	min.	↗ max.



Os extremos locais são, neste caso, absolutos (recordar **10**, Factos 6.1-6.2).

Observe-se que, embora o que interessa para concluir sobre extremos locais seja o sinal de  $f'(x)$ , é usual começar por determinar as raízes de  $f'(x)$ , isto é, por resolver a *equação*

$$f'(x) = 0$$

como um primeiro passo indicativo para a resolução da *inequação*

$$f'(x) > 0.$$



**EXEMPLO 4.7.3** Quais são os extremos locais da função  $f(x) = x^2 - 3x$ , restringida ao intervalo  $[0, 10]$ ?

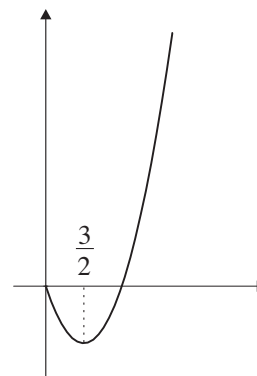
Neste caso, já que  $f'(x) = 2x - 3$ , temos

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2},$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > \frac{3}{2}.$$

Esquemmatizando:

$x$	0	$\frac{3}{2}$	10
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$	max. relat.	$\searrow$ min. $\nearrow$	max. relat.



A função tem dois máximos relativos,

$$f(0) = 0, \quad f(10) = 70,$$

e um mínimo (absoluto),  $f(\frac{3}{2}) = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} = -\frac{9}{4}$ .

É claro que 70 é o máximo absoluto, neste caso.

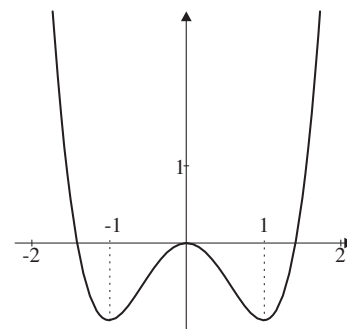
**EXEMPLO 4.7.4** Para estudar a monotonia e os extremos de  $f(x) = x^4 - 2x^2$ , podemos proceder assim:

$$f'(x) = 4x^3 - 4x$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1 \text{ ou } x = -1.$$

Resolução da inequação  $f'(x) > 0$  e conclusões sobre a monotonia:

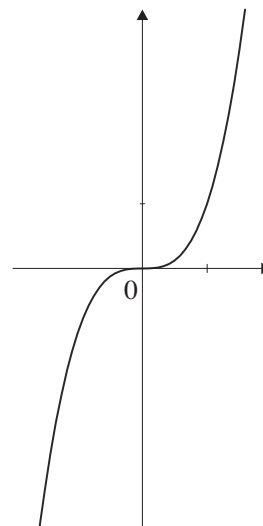
$x$	-1	0	1
$x^2 - 1$	+ -	-	+
$f'(x)$	- 0 +	0 - 0 +	
$f(x)$	$\searrow$ min. $\nearrow$	max. local $\searrow$	min. $\nearrow$



Há, pois, um ponto de máximo relativo,  $f(0) = 0$ , e dois pontos de mínimo (forçosamente o mínimo absoluto),  $f(-1) = f(1) = -1$ .

**EXEMPLO 4.7.5** Os extremos locais de uma função  $f$ , derivável, no *interior* do seu domínio, não podem deixar de ser raízes da equação  $f'(x) = 0$  (Facto 4.7.1). Mas, em geral, esta equação pode ter raízes que *não são* extremos locais. Repare-se que, com  $f(x) = x^3$ , se tem

$x$	0		
$3x^2 = f'(x)$	+	0	+
$f(x)$	↗		↗



sendo a função crescente (até estritamente) em todo o seu domínio, o que de resto já não é novidade para nós.

O Facto 4.7.4 é ainda válido substituindo a hipótese

“ $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  tem derivada em todos os pontos”

pela condição menos exigente

“ $g = f|_{I \cap ]-\infty, a]}$  e  $h = f|_{I \cap [a, +\infty[}$  têm derivada em todos os pontos”.

A diferença é que, com esta nova condição,  $f'(a)$  pode não existir, embora existam uma “derivada à esquerda” e uma “derivada à direita” em  $a$ :

$$f'(a^-) = (f|_{I \cap ]-\infty, a]})'(a)$$

$$f'(a^+) = (f|_{I \cap [a, +\infty[})'(a)$$

as quais podem ser diferentes.

As desigualdades das hipóteses do Facto 4.7.4 podem então ser substituídas por

$$g'(x) \geq 0 \text{ respect. } \leq 0 \quad \forall x \in [c, a]$$

e

$$h'(x) \leq 0 \text{ respect. } \geq 0 \quad \forall x \in [a, d].$$

Como elas implicam, em virtude do Facto 4.7.3, que  $f|_{[c,a]}$  e  $f|_{[a,d]}$  são crescente e decrescente (respectivamente decrescente e crescente) a conclusão é a mesma:  $f$  atinge em  $a$  um máximo relativo (respectivamente mínimo relativo).

Um exemplo muito simples que ilustra esta situação é o da função módulo

$$f(x) = |x|, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Já vimos que  $f'(0)$  não existe, mas para as restrições a  $] -\infty, 0]$ ,  $[0, +\infty[$ , que são respectivamente

$$g(x) = -x, \quad h(x) = x,$$

temos  $g'(x) = -1, \forall x \in ] -\infty, 0]$ ,  $h'(x) = 1, \forall x \in [0, +\infty[$ . (O que, de acordo com a notação acima, pode ser traduzido escrevendo:

$$f'(0^-) = -1, \quad f'(0^+) = 1.)$$

Constata-se (mas não é novidade para nós neste caso) que  $f$  é decrescente em  $] -\infty, 0]$  e crescente em  $[0, +\infty[$ , sendo  $f(0) = 0$  o seu mínimo.

---

## Exercícios da Secção 4.7

- 1 Determinar os pontos onde se anula a derivada das funções

$$x^2 - x; \quad x^3 - x^2 + x - 1; \quad x^3 - x^2 - x - 1.$$

- 2 A partir do estudo do sinal da derivada, indicar os maiores intervalos onde as seguintes funções são monótonas e apontar os seus eventuais extremos relativos:

$$\begin{array}{cccccc} -2x^2 + x; & x^3 - x; & x^3 + x; & x^4 + x; & x^2 - x^2; \\ x + \frac{1}{x}; & \sqrt{x} - x; & \frac{1 - 2x}{x + 2}. \end{array}$$

- 3 A função  $x^3 - x^2 + x - 1$  tem extremos?

- 4 Indicar os extremos locais e absolutos:

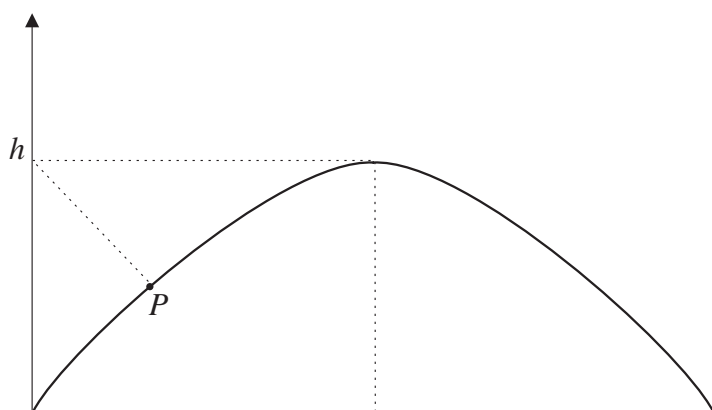
(a) da função  $-x^3 + 3x$  restringida ao intervalo  $[-2, 2]$ ,

(b) da função  $x^5 - 10x$  restringida ao intervalo  $[-1, 1]$ .

- 5 De todos os rectângulos cujo perímetro é 10, qual tem área máxima?

- 6 Numa encomenda postal de forma cilíndrica a soma da altura com o perímetro da base (circular) é 80 cm. Qual é o volume máximo de uma tal encomenda? (Recordar o exemplo 4.1.3).

- 7 O arco de uma ponte em forma de parábola tem a equação  $y = 2x - 0.05x^2$  num referencial cuja origem passa por um dos apoios do arco no solo.



Determinar a ordenada  $h$  do ponto mais alto da parábola. Determinar o ponto  $P$  da parábola que fica mais próximo do ponto  $(0, h)$ .

8] Verificar que a sucessão  $n^3 - 3n$  é (estritamente) crescente. (Sugestão: em que intervalos é a função  $x^3 - 3x$  (estritamente) crescente?)

O mesmo para a sucessão  $n + \frac{1}{n}$ .

9] Para que valores de  $\alpha$  tem a equação

$$x^4 - x = \alpha$$

soluções? (Por outras palavras, pergunta-se que valores de  $\alpha$  pertencem ao contradomínio de  $f(x) = x^4 - x$ . Estudando a variação desta função e determinando eventuais extremos absolutos obtém-se a resposta.)