UNIVERSIDADE DE LISBOA
Faculdade de Ciências
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

12º ANO

INTRODUÇÃO AO ESTUDO DAS FUNÇÕES REAIS DE VARIÁVEL REAL

Luís Sanchez

2003

REANIMAT

Projecto Gulbenkian de Reanimação Científica da Matemática no Ensino Secundário

FUNDAÇÃO CALOUSTE GULBENKIAN

Título: 12º ano — Introdução ao estudo das funções reais de variável real

Autor: Luís Sanchez

Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, Departamento de Matemática, 2003

Tratamento de texto em LaTeX: Béatrice Huberty

NOTA PRÉVIA

Para complemento dos textos de apoio ao estudo das funções reais de variável real no âmbito do projecto REANIMAT surge agora o presente volume, que respeita à matéria do 12º ano.

Os nossos objectivos gerais já foram expostos nas introduções dos tomos anteriores. Ainda assim, gostaríamos de fazer alguns comentários respeitantes à estrutura do texto.

O programa oficial do 12º ano requer o tratamento de um número apreciável de tópicos de iniciação à Análise Real com doses de rigor não muito uniformes. Sendo característico destes programas um enunciado de conteúdos pouco normativo, é grande a margem de manobra para proceder à sua apresentação concreta. Procurámos fazê-lo com fidelidade ao objectivo de mostrar que as técnicas e resultados com que os estudantes devem familiarizar-se constituem um corpo de conhecimentos estruturalmente encadeados, sem descurar o apelo à intuição, quando ela tem um papel a desempenhar, e o sublinhado do papel da Matemática como modelo do mundo real.

Assim, ordenámos as matérias de um modo que, para nós, lhes confere um sentido, ao mesmo tempo que as dificuldades e novidades surgem tanto quanto possível numa sequência crescente. Colocámos no início os complementos de Cálculo Diferencial porque, supostamente, esta matéria foi iniciada no 11º ano e por isso os estudantes terão já alguma familiaridade com ela. O estudo da função exponencial, que é das funções a conhecer aquela que contém mais novidade, fica relegado para um capítulo posterior, podendo já então tirar-se partido de resultados gerais entretanto estabelecidos.

Sabemos que, por circunstâncias diversas, não é possível, nem razoável, demonstrar tudo o que se estabelece como facto útil. No entanto, justificações e demonstrações de enunciados seleccionados enquadram-se nas recomendações do programa e podem constituir um auxiliar de aprendizagem ao funcionarem como aquilo que desvenda a razão das coisas. Em nossa opinião, ninguém melhor que o professor poderá guiar os alunos na quota de atenção a dar a este aspecto da aprendizagem da Matemática. Determinados factos importantes no âmbito da introdução à Análise Real não podem deixar de ser dados sem demonstração. São eles:
1) a existência de limite das sucessões monótonas (ver ***11****, Capítulo 2);*
2) a monotonia de uma função num intervalo como consequência da constância do sinal da derivada da função nesse intervalo (ver ***11****, Capítulo 4);*
3) o teorema do valor intermédio para funções contínuas;
4) a existência de derivada das funções exponenciais e em particular a existência de uma exponencial que coincide com a própria derivada. (Os factos referidos não são independentes uns dos outros — por exemplo, o teorema do valor intermédio pode ser demonstrado com base no teorema das sucessões monótonas — mas considerámos fora de questão reduzi-los a um número mínimo de enunciados não justificados.)

Em nosso entender, o primeiro destes tópicos excede claramente o espírito do programa, está condenado a uma superficialidade inútil e deveria ser retirado em revisões futuras. Quanto aos restantes, é natural presumir que estes enunciados básicos suscitem graus de aceitação diferenciados: em apoio de 2) e 3) pode apelar-se com vantagem à intuição geométrica, ao passo que em apoio de 4) não há recurso disponível nesta fase de aprendizagem da Matemática. A estrutura do texto que apresentamos contém, pelo menos ao nível de ideias principais, justificação de todos os factos, com excepção dos quatro assinalados. Observamos que é a propósito do facto 4) mencionado acima que definimos o número e, sendo possível depois compreender porque é que ele é limite da sucessão $(1 + 1/n)^n$. *Os limites que envolvem exponenciais e potências, ou logaritmos e potências, são obtidos com base num cálculo simples. Quanto ao valor do limite de* $(\operatorname{sen} x)/x$ *em* $x = 0$ *(Capítulo 4) não há, neste nível de estudos, alternativa à clássica e elegante demonstração baseada na comparação de quantidades geométricas.*

A teoria dos limites (ao menos ao nível de ideias básicas), e o seu cálculo efectivo, têm um papel de relevo no estudo dos vários tópicos, percorrendo transversalmente toda a matéria. Tendo sido já estabelecidas as suas bases em ***11****, Capítulo 3, e havendo necessidade de recorrer a resultados sobre limites no âmbito dos vários capítulos, pareceu-nos razoável organizar num Apêndice a informação relevante que lhes respeita. O apêndice inclui, em particular, exemplos das chamadas "indeterminações" que ocorrem no cálculo dos limites. Observar-se-á que, mesmo na ausência das regras de l'Hospital e Cauchy, que o programa não prevê (e bem), é possível resolver um razoável número de indeterminações sem que se requeiram resultados suplementares além dos já estudados.*

Incluimos no fim de cada secção uma selecção de exercícios que vão desde os que têm como finalidade a aquisição de prática de cálculo até aos que exigem procedimentos ou argumentação mais ou menos elaborados. Julgamos que eles cobrem de modo razoável o leque de desafios que um estudante bem preparado neste estudo inicial das funções reais de variável real deve estar pronto a enfrentar.

Setembro de 2003

Agradeço a colaboração dos meus colegas M. Luísa Mascarenhas e Armando Machado, e as várias sugestões dos professores que frequentaram a acção de formação MATEMÁTICA 12 *(FCUL, Julho de 2003).*

Os excertos, dentro do texto principal, impressos em tipo mais pequeno, contêm matéria que claramente excede as exigências do programa, ou que pode ser dispensada numa primeira leitura.

As referências ao texto do 11° ano são feitas com o símbolo **11**.

Assinalamos com os exercícios em cuja resolução é conveniente utilizar uma máquina de cálculo para obter (aproximações de) um valor (ou valores) numérico(s). Com , assinalamos os exercícios em cuja resolução a utilização de uma máquina de cálculo, eventualmente com capacidades gráficas, é indispensável ou fortemente recomendada.

Conteúdo

Capítulo 1

Complementos sobre técnicas de derivação

Antes de iniciar o estudo deste capítulo, o leitor deve recordar a noção de *derivada de uma função num ponto* do seu domínio, a noção de *função derivada* e as primeiras regras de derivação que estudámos em **11**, Capítulo 4.

Para o prosseguimento do estudo das derivadas, que vamos agora empreender, convém ter ideias claras sobre aqueles conceitos e também sobre a notação que é usual utilizar. Assim, se $f(x)$ é a expressão designatória de uma dada função f, sabemos que $f'(x)$ representa a derivada de f num ponto genérico x, pelo que nos referimos à função com expressão designatória $f'(x)$ como sendo a função derivada de f. Por vezes é conveniente escrever também

$$(f(x))' \qquad \text{ou} \qquad Df(x) \qquad \text{ou} \qquad D_x f(x)$$

para representar a função derivada de f. A última destas notações é particularmente útil se é necessário chamar a atenção para a variável independente x, pois a expressão designatória pode conter outros símbolos (constantes). Exemplifiquemos: se $f(x) = x^2$, já sabemos que $f'(x) = 2x$. O mesmo pode ser indicado escrevendo

$$(x^2)' = 2x \qquad \text{ou} \qquad Dx^2 \qquad \text{ou } D_x x^2 = 2x.$$

Se g é a função definida em $\mathbb{R}$ pela expressão designatória

$$g(x) = a - ax^2$$

(onde a é uma constante), então $g'(x) = -2ax$, e de todas as notações anteriores a que evita ambiguidade é

$$D_x(a - ax^2) = -2ax$$

pois indica que a expressão dentro do parêntesis deve ser considerada função de x e não de a [1].

1.1 A derivada de um produto

Suponhamos que somos colocados perante o problema de calcular a derivada de função

$$x^2\sqrt{x}$$

no intervalo $]0,+\infty[$. Já sabemos calcular

$$(x^2)' = 2x \quad \text{e} \quad \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Se tivermos uma regra de derivação aplicável ao *produto* de duas funções, o problema ficará resolvido. É claro que também podemos efectuar o cálculo

$$x^2\sqrt{x} = \sqrt{x^4 \cdot x} = \sqrt{x^5} = \left(\sqrt{x}\right)^5$$

mas deparamos com uma função para a qual não conhecemos regra de derivação (a *composição* de u^5 com $u = \sqrt{x}$). É, pois, necessário conhecer regras que permitam tratar casos tão simples como este. E vamos começar por dar, precisamente, uma lei de derivação para o produto.

Facto 1.1.1 *Sejam $f, g : I \to \mathbb{R}$ funções com derivada no intervalo I. Então o produto $f \cdot g$ (isto é, a função cuja expressão designatória é $f(x)g(x)$, com domínio I) tem derivada em I, e*

$$(f(x)g(x))' = f(x)g'(x) + f'(x)g(x).$$

Demonstração. Para calcular a derivada de $f(x)g(x)$ no ponto $x = a$, observamos que

$$\frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x-a} = f(x)\frac{g(x)-g(a)}{x-a} + g(a)\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Como f é contínua (**11**, 4.4) obtemos

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x-a} = f(a)g'(a) + f'(a)g(a).$$

■

---

[1] Claro que, dentro da mesma convenção, poderemos escrever

$$D_a(a - ax^2) = 1 - x^2,$$

mas a função que agora estivemos a derivar é completamente diferente!

OBSERVAÇÃO. A derivada dum produto *não é* o produto das derivadas!

EXEMPLO 1.1.1 Agora é fácil calcular

$$\begin{aligned}\left(x^2\sqrt{x}\right)' &= 2x \cdot \sqrt{x} + x^2\frac{1}{2\sqrt{x}} = 2x\sqrt{x} + \frac{x\sqrt{x}}{2} \\ &= \frac{5}{2}x\sqrt{x}.\end{aligned}$$

EXEMPLO 1.1.2 Podemos reobter as derivadas das potências a partir da derivada do produto. Para a de expoente 2, por exemplo, temos

$$(x^2)' = (x)'x + x(x)' = x + x = 2x.$$

Exercícios da Secção 1.1

$\boxed{1}$ Calcular as derivadas de:

$$x^2\sqrt{x}; \qquad (x-1)^2\sqrt{x}; \qquad \frac{(x-1)^3}{x}.$$

1.2 Derivada do inverso aritmético e do cociente

Como obter a derivada de funções com expressões tão simples como

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{x^2+1}\,?$$

O que se requer é uma regra para obter a derivada da função "inverso aritmético" de uma função dada.

Facto 1.2.1 *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função derivável e que não toma o valor 0 no intervalo I. Então a função $\frac{1}{f(x)}$ também tem derivada em I, e*

$$\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = \frac{-f'(x)}{f(x)^2}\,.$$

Demonstração. A derivada de $\frac{1}{f(x)}$ em a é

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{f(a)}}{x-a} &= \lim_{x\to a}\frac{f(a)-f(x)}{f(x)f(a)(x-a)} = \lim_{x\to a}\left(-\frac{1}{f(x)f(a)}\,\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)\\ &= -\frac{1}{f(a)^2}f'(a).\end{aligned}$$

■

EXEMPLO 1.2.1 Agora calculamos facilmente

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}} \qquad \text{em }]0,+\infty[$$

$$\left(\frac{1}{x^2+1}\right)' = \frac{-2x}{(x^2+1)^2} \qquad \text{em } \mathbb{R}.$$

A partir daqui, por aplicação das regras estudadas, já podemos derivar um cociente $\frac{f(x)}{g(x)}$, pois ele é o produto

$$f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\,.$$

Facto 1.2.2 *Sejam $f, g : I \to \mathbb{R}$ funções deriváveis no intervalo I e tais que g não toma o valor 0. Então o cociente de f por g (isto é, a função cuja expressão designatória é $\frac{f(x)}{g(x)}$ com domínio I) é derivável em I e tem-se*

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}\,.$$

Demonstração. A derivada de $\frac{f(x)}{g(x)}$ é, em virtude das duas regras anteriores,

$$f(x)\,\frac{-g'(x)}{g(x)^2}+f'(x)\cdot\frac{1}{g(x)}=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

■

EXEMPLO 1.2.2 Temos

$$\begin{aligned}\left(\frac{x^2+1}{\sqrt{x}}\right)' &= \frac{\sqrt{x}\cdot 2x-(x^2+1)\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}\\ &= \frac{2x\sqrt{x}-\frac{1}{2}x\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}=2\sqrt{x}-\frac{1}{2}\sqrt{x}-\frac{1}{2x\sqrt{x}}\\ &= \frac{3}{2}\sqrt{x}-\frac{1}{2x\sqrt{x}}=\frac{3x^2-1}{2x\sqrt{x}}\,.\end{aligned}$$

(Também podíamos ter procedido assim:

$$\left(\frac{x^2+1}{\sqrt{x}}\right)'=\left(x\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)'=\left(x\sqrt{x}\right)'+\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)'$$

e aplicar as regras do produto e do inverso.)

Exercícios da Secção 1.2

$\boxed{1}$ Calcular as derivadas de:

$$\frac{1}{x-1}\,;\qquad \frac{1}{2x-1}\,;$$
$$\frac{x}{1+x}\,;\qquad \frac{1}{1+x^2}\,;$$
$$\frac{x}{1+x^2}\,;\qquad \frac{x^2-4x+1}{x+2}\,;$$
$$\frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}}\,.$$

1.3 Observações sobre "mudança de variável" no cálculo de limites

Antes de continuar o estudo de novas regras de derivação é conveniente ter em conta como certas *mudanças de variável* podem constituir uma maneira cómoda de efectuar o cálculo de limites de funções.

Comecemos por ilustrar o que se pretende com um exemplo simples. Pede-se para calcular

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}+x}{\sqrt{x^3}-x} \cdot$$

A primeira ideia que naturalmente nos ocorrerá é efectuar operações de simplificação, operando com os radicais, isto é, eliminar eventuais factores comums aos dois termos. Mas, no caso presente, podemos também fazer a "substituição" ou "mudança de variável" $\sqrt{x} = u$, obtendo-se depois da substituição uma expressão sem radicais:

$$\frac{\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}^3-x} = \frac{u+u^2}{u^3-u^2}\,;$$

isto equivale a observar que a função em causa é construída a partir de

$$\frac{u+u^2}{u^3-u^2} \qquad \text{com a substituição (ou } \textit{composta com}\text{) } u=\sqrt{x}$$

(para $x > 0$, naturalmente). Ora,

$$\text{quando} \quad x \to 0, \quad \text{também} \quad u = \sqrt{x} \to 0 \tag{1.1}$$

e "por isso"

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}+x}{\sqrt{x^3}-x} = \lim_{u\to 0} \frac{u+u^2}{u^3-u^2} \ \cdot \tag{1.2}$$

Na última expressão pomos em evidência factores comuns aos dois termos e vem

$$\lim_{u\to 0} \frac{u(1+u^2)}{u^2(u^2-1)} = \lim_{u\to 0} \frac{1}{u} \cdot \frac{1+u^2}{u^2-1} = -\infty.$$

porque

$$\lim_{u\to 0} \frac{1}{u} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{u\to 0} \frac{1+u^2}{u^2-1} = -1.$$

(note-se que u só toma valores positivos).

Como justificação de (1.2) invocámos (1.1). Esta conclusão foi propositadamente demasiado rápida, para não perdermos de vista a estratégia de cálculo. Mas é fácil demonstrar que está correcta:

Seja x_n uma sucessão qualquer de números positios tal que $x_n \to 0$. Considerando $u_n = \sqrt{x_n}$, a nova sucessão u_n é também formada por termos positivos e vem $u_n \to 0$,

$$\frac{\sqrt{x_n} + x_n}{\sqrt{x_n^3} - x_n} = \frac{u_n + u_n^2}{u_n^3 - u_n^2}\,.$$

Logo, se o limite do segundo membro de (1.2) existe, o do primeiro também existe e é igual.

Vejamos aindo outro exemplo. Para calcular

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$$

podemos ensaiar a substituição

$$\sqrt{x} - 1 = u,$$

isto é,

$$x = 1 + 2u + u^2$$

e, atendendo a que $u \to 0$ quando $x \to 1$,

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \lim_{u\to 0} \frac{u}{2u + u^2} = \lim_{u\to 0} \frac{1}{2 + u} = \frac{1}{2}\,.$$

Vamos retomar este tipo de procedimento numa situação mais geral. Suponhamos que nos interessa calcular

$$\lim_{x\to a} f(x)$$

e temos conveniência em exprimir f como uma função composta

$$f(x) = g(h(x))$$

(isto é, consideramos a expressão designatória $f(x)$ resultante da expressão $g(u)$ com a *substituição* $u = h(x)$).

Admitamos ainda que sabemos que

$$\lim_{x\to a} h(x) = b. \tag{1.3}$$

Então gostaríamos de concluir

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{u\to b} g(u). \tag{1.4}$$

E, na verdade, esta conclusão é verdadeira, desde que

$(*)$ o limite no segundo membro de (1.4) exista, e $h(x) \neq b$, sempre que $x \neq a$.

Conclui-se então não só (1.4) mas também a própria existência do limite que figura no primeiro membro. A justificação é simples e é quase um decalque da que demos no caso particular atrás estudado.

Observe-se que (1.3) e a segunda condição referida em $(*)$ se verificam, em particular, quando h é uma função estritamente monótona e contínua com $h(a) = b$.

No primeiro exemplo acima, temos

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} + x}{\sqrt{x^3} - x}, \quad g(u) = \frac{u + u^2}{u^3 - u}, \quad h(x) = \sqrt{x}.$$

com $a = b = 0$.

No segundo exemplo,

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}, \qquad g(u) = \frac{u}{2u + u^2}, \qquad h(x) = \sqrt{x} - 1,$$

e $a = 1$, $b = 0$.

EXEMPLO 1.3.1 Com a mudança de variável $y = x^2$, ou $\sqrt{x} = y$ (para $x > 0$) calculamos

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3 + x\sqrt{x}}{x^4 + 3x\sqrt{x}} = \lim_{y \to 0} \frac{y^6 + y^3}{y^8 + 3y^3} = \lim_{y \to 0} \frac{y^3 + 1}{y^5 + 3} = \frac{1}{3}.$$

Exercícios da Secção 1.3

$\boxed{1}$ Calcular os limites:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x + \sqrt{x}}{3x - 2\sqrt{x}}; \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{x + \sqrt{x}}{3x - 2\sqrt{x}};$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sqrt{x^3}}{3x - 2\sqrt{x}}; \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - \sqrt{x}}{3x - 2\sqrt{x}}.$$

$\boxed{2}$ Reobter o $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x - 1}{2x - 1}$ com a mudança de variável $x = \dfrac{1}{y}$.

1.4 Derivadas de funções compostas

Consideremos uma função f que se exprime como composição de duas outras, digamos

$$f(x) = g(\varphi(x)) \tag{1.5}$$

ou, se quisermos, diremos que a relação entre a "variável independente" e a "variável dependente" em f

$$y = f(x)$$

resulta de "substituir" $u = \varphi(x)$ na correspondente relação para g

$$y = g(u).$$

Pretendemos saber como calcular a derivada de f a partir das derivadas de g e φ. Na verdade, se estas funções têm derivadas, o mesmo acontece com f e a fórmula para a calcular não é difícil de memorizar:

$$f'(x) = g'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x). \tag{1.6}$$

Por vezes escreve-se esta lei sob a forma mais sugestiva

$$f'(x) = g'(u)\,\big|_{u=\varphi(x)} \cdot \varphi'(x)$$

ou ainda

$$D_x g(\varphi(x)) = D_u g(u)\,\big|_{u=\varphi(x)} \cdot D_x \varphi(x)$$

exprimindo que a derivada da composição é um produto de derivadas, mas a da função g deve ser calculada no ponto $u = \varphi(x)$, o que é expresso pelo símbolo $|_{u=\varphi(x)}$.

EXEMPLOS 1.4.1 A função $(x+2)^4$ resulta de compôr u^4 com $u = x + 2$. Como tal,

$$((x+2)^4)' = 4u^3|_{u=x+2} \cdot 1 = 4(x+2)^3.$$

A função $(3x-2)^5$ é a composição de u^5 com $u = 3x - 2$. Então

$$\big((3x-2)^5\big)' = 5u^4\,|_{u=3x-2} \cdot 3 = 5(3x-2)^4 \cdot 3 = 15(3x-2)^4.$$

A função $\frac{5}{x+4}$ é composição de $\frac{5}{u}$ com $u = x + 4$. Então

$$\left(\frac{5}{x+4}\right)' = -\frac{5}{u^2}\bigg|_{u=x+4} \cdot 1 = -\frac{5}{(x+4)^2}\,.$$

A função $\frac{1}{x^2}$ é composição de $\frac{1}{u}$ com $u = x^2$. Então

$$\left(\frac{1}{x^2}\right)' = -\frac{1}{u^2}\bigg|_{u=x^2} \cdot 2x = -\frac{1}{x^4} \cdot 2x = \frac{2}{x^3}\,.$$

A regra (1.6) não é difícil de justificar no caso em que φ é estritamente monótona (que é precisamente o que ocorre em muitos exemplos concretos, como os anteriores). Porque, nessas circunstâncias, a taxa média de variação de f pode escrever-se

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{g(\varphi(x+h))-g(\varphi(x))}{h} \\ &= \frac{g(\varphi(x+h))-g(\varphi(x))}{\varphi(x+h)-\varphi(x)} \cdot \frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}\,.\end{aligned}$$

Na primeira fracção do último membro, fazemos a mudança de variável $\varphi(x+h) = s$. Quando $h \to 0$, temos $s \to \varphi(x)$ porque φ é contínua (**11**, 4.4). Então

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(\varphi(x+h))-g(\varphi(x))}{h} = \lim_{s\to\varphi(x)} \frac{g(s)-g(\varphi(x))}{s-\varphi(x)} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}\,.$$

De um modo geral, podemos agora concluir que se f é uma função com derivada e $n \in \mathbb{N}$, a função potência $f(x)^n$ tem derivada dada por

$$\boxed{(f(x)^n)' = nf(x)^{n-1}f'(x).}$$

Exercícios da Secção 1.4

$\boxed{1}$ Calcular as derivadas de:

$$(x^2-1)^4\,; \qquad (3x-1)^4\,; \qquad \sqrt{4x+1}\,; \qquad \frac{1}{\sqrt{4x+1}}\,;$$

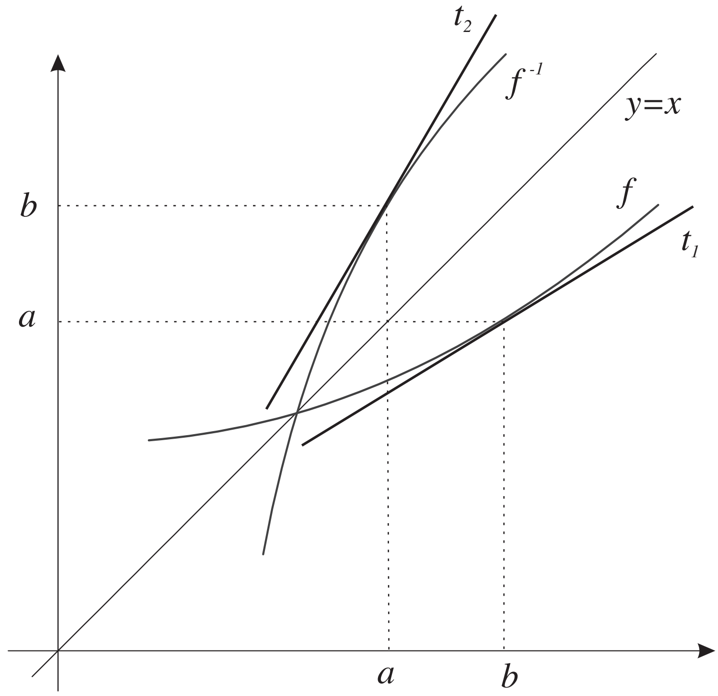
$$\sqrt{1+x^2}\,; \qquad \sqrt{4-x^2}\,; \qquad \frac{1}{(x^2-1)}\,; \qquad \left(1-\frac{2}{x}\right)^3.$$

1.5 Derivada da função inversa. Derivada da função raiz

Sabemos que uma função estritamente monótona, f, cujo domínio é o intervalo I e cujo contradomínio é o intervalo J, tem uma inversa representada por f^{-1} e assim definida

$$f^{-1}(a) = b \quad \Longleftrightarrow \quad f(b) = a.$$

Como calcular a derivada de f^{-1}, a partir da derivada de f?



Recordemos que os gráficos de f^{-1} e f são simétricos a respeito da bissectriz dos quadrantes ímpares. Por conseguinte, as tangentes t_2 e t_1 em pontos correspondantes (a, b) e (b, a) são rectas simétricas a respeito da mesma bissectriz. Logo, são rectas que são gráficos de funções afins inversas numa da outra. Se não se trata de rectas verticais e se as respectivas equações forem

$$y = nx + k, \qquad y = mx + l,$$

então é fácil concluir que $n = \frac{1}{m}$; como $m = f'(b)$ e $n = (f^{-1})'(a)$ obtemos, sempre que $f'(b) \neq 0$,

$$\boxed{(f^{-1})'(a) = \frac{1}{f'(b)}\,, \qquad (b = f^{-1}(a))}$$

ou, se quisermos referir-nos a um ponto genérico x,

$$\boxed{(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}\,.}$$

Como, nesta fórmula, os pontos onde as derivadas são calculadas (um é x e outro é $f^{-1}(x)$) estão em domínios distintos, pode ser conveniente, para a utilizar na prática, tratar as funções f e f^{-1} com uma representação do tipo

$$x = f(y), \qquad y = f^{-1}(x)$$

onde as variáveis independentes estão diferenciadas. Com esta notação, também poderíamos reescrever a fórmula sob a forma

$$\boxed{(f^{-1})'(x) = \left.\tfrac{1}{f'(y)}\right|_{y=f^{-1}(x)}\,,}$$

onde o símbolo $\big|_{\dots}$ indica, como dissemos na Secção 1.4, que *após o cálculo* a variável y deve ser substituída por $f^{-1}(x)$.

EXEMPLO 1.5.1 A função $y = \sqrt{x}$ é inversa de $x = y^2$ no intervalo $]0, +\infty[$. Então reobtemos o resultado já conhecido

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \left.\frac{1}{2y}\right|_{y=\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,.$$

Facto 1.5.1 *A função $\sqrt[n]{x}$ tem derivada em todos os pontos $x \neq 0$ ($x > 0$, se n é par) e*

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}\,.$$

Demonstração. $y = \sqrt[n]{x} \iff x = y^n$. Então

$$D_x \sqrt[n]{x} = \left.\frac{1}{ny^{n-1}}\right|_{y=\sqrt[n]{x}} = \frac{1}{n\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1}} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}\,.$$

EXEMPLO 1.5.2 A derivada de $\sqrt{1+x^2}$ (composição de $\sqrt{u}$ com $u = 1 + x^2$) é

$$\left.\frac{1}{2\sqrt{u}}\right|_{u=1+x^2} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,.$$

OBSERVAÇÃO. Vimos que, quando α é um expoente natural, tem-se

$$D_x x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1} \tag{$*$}$$

Ora, se $\alpha = m/n$ é racional (cociente de inteiros m, n com $n > 0$) temos

$$D_x x^\alpha = D_x \sqrt[n]{x^m} = \frac{m x^{m-1}}{n \sqrt[n]{x^{m(n-1)}}} = \alpha x^{m-1-\frac{m(n-1)}{n}}$$

Como

$$m - 1 - \frac{m(n-1)}{n} = \frac{mn - n - mn + m}{n} = \frac{m-n}{n} = \alpha - 1,$$

podemos concluir que

$$\boxed{D_x x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}}$$

exactamente como em $(*)$ em que o expoente é natural. A fórmula $(*)$ vale, pois, para todos os números racionais α, entendendo-se que a função x^α tem domínio $]0, +\infty[$.

Exercícios da Secção 1.5

$\boxed{1}$ Calcular as derivadas de:

$$\sqrt{x+1}\,; \qquad \sqrt[3]{x}\,; \qquad \sqrt[3]{2x+1}\,; \qquad \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,.$$

$\boxed{2}$ Seja f uma função estritamente crescente no intervalo $[0, +\infty[$, com derivada. Suponha-se que $f(0) = f'(0) = 0$. Que se pode dizer a respeito da existência de $(f^{-1})'(0)$? (Começar por considerar um possível esquema dos gráficos de f e f^{-1}!).

1.6 Aplicações do cálculo de derivadas: estudo de gráficos e problemas de máximo e mínimo

Como já vimos em **11**, Secção 4.7, o cálculo da derivada de uma função permite descobrir os intervalos onde a função é monótona e localizar eventuais extremos relativos ou absolutos. Em particular, alguns problemas de máximo ou mínimo sugeridos por situações do mundo real podem ser resolvidos utilizando esta técnica matemática. Recomendamos ao leitor a revisão de **11**, 4.7 antes de estudar os exemplos adicionais que incluímos a seguir.

EXEMPLO 1.6.1 Determinar os eventuais máximos e mínimos da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2} \cdot$$

Temos

$$f'(x) = \frac{(1+x^2)\cdot 1 - x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\iff -1 < x < 1, \\ f'(x) = 0 &\iff x = -1 \text{ ou } x = 1, \\ f'(x) < 0 &\iff x < -1 \text{ ou } x > 1. \end{aligned}$$

Podemos descrever o comportamento de f' e f no seguinte quadro de sinais e setas

x		-1		1	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$

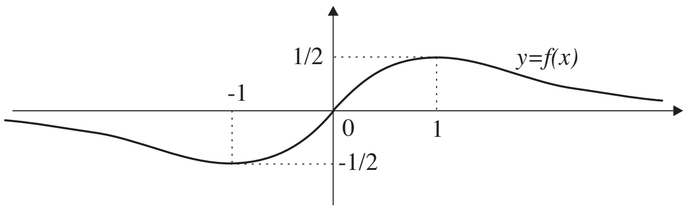
do qual concluímos que $f(-1) = -\frac{1}{2}$ é mínimo relativo e $f(1) = \frac{1}{2}$ é máximo relativo. Mas, como também é verdade que

$$\begin{aligned} f(x) > 0 &\iff x > 0, \\ f(x) < 0 &\iff x < 0, \\ f(x) = 0 &\iff x = 0, \end{aligned}$$

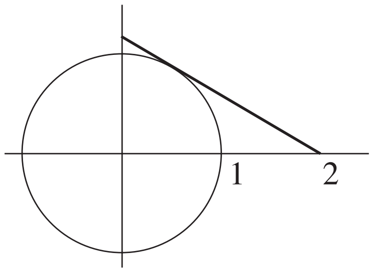
podemos concluir que se trata de um mínimo absoluto e um máximo absoluto, respectivamente. E, já que

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{1+x^2} = 0$$

ficamos com uma ideia razoável da representação gráfica de f.



EXEMPLO 1.6.2 Determinar a equação da recta tangente à circunferência unitária $x^2 + y^2 = 1$ num ponto do 1º quadrante que passa pelo ponto $(2, 0)$.



A porção de circunferência que ocupa o 1º quadrante é o gráfico da função

$$y = \sqrt{1 - x^2}, \qquad x \in]0, 1[.$$

A equação geral das rectas que passam por $(2, 0)$ é

$$y = m(x - 2) \qquad \text{ou} \qquad x = 2$$

onde m é o declive. A recta vertical $x = 2$ não encontra a circunferência e por isso não interessa ao problema.

Como o declive da tangente ao gráfico duma função num ponto é a derivada da função na abcissa do ponto, e como, para a função que define a semicircunferência,

$$y' = \frac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

somos conduzidos ao sistema

$$\begin{cases} -\dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}} & = & m \\ \sqrt{1 - x^2} & = & m(x - 2) \end{cases}$$

(A primeira equação traduz que, no ponto de abcissa x, a derivada da função é o declive da recta procurada e a segunda equação traduz que efectivamente o ponto de abcissa x é comum ao gráfico da função e à recta.)
Do sistema acima resulta sucessivamente (começando por substituir o valor de m na 2ª equação)

$$\sqrt{1 - x^2} = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}}(x - 2),$$

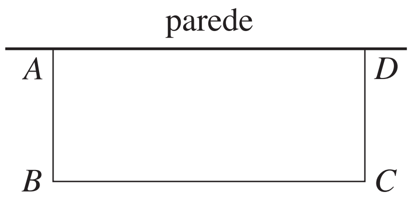
$$1 - x^2 = 2x - x^2$$

$$x = \frac{1}{2}, \qquad m = -\frac{1}{\sqrt{3}} \ .$$

A recta procurada é, pois, $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}(x-2)$ e o ponto de tangência tem abcissa $\frac{1}{2}\cdot$

EXEMPLO 1.6.3 Pretende-se construir junto a uma parede um recinto rectangular $ABCD$ para exposição de determinados artigos.

A área pretendida para o recinto é de 20 m^2. Os lados AB e CD serão feitos com cartão, ao preço de 10 € por metro; o lado BC é feito com madeira ao custo de 30 € por metro



Que dimensões do recinto tornarão o seu custo mínimo?

Designemos por x e y as medidas dos lados AB e BC, respectivamente, referidas a metros. O custo total da construção é

$$20x + 30y$$

mas há que atender à condição

$$xy = 20$$

de onde deduzimos $y = \frac{20}{x}$; assim, o custo em causa é função da variável x apenas:

$$f(x) = 20x + \frac{60}{x}, \qquad x \in]0, +\infty[.$$

Para determinar o mínimo desta função calculamos

$$f'(x) = 20 - \frac{60}{x^2}$$

e facilmente estabelecemos o quadro de sinais e setas

x		$\sqrt{3}$	
$f'(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	$\searrow$	min.	$\nearrow$

concluindo-se que o mínimo é atingido quando $x = \sqrt{3}$, $y = \frac{20}{\sqrt{3}}$, ou seja, quando as dimensões do rectângulo são aproximadamente 1.73 e 11.55 metros.

Exercícios da Secção 1.6

$\boxed{1}$ Calcular as derivadas das funções seguintes:

(a) $x^2\sqrt{x+1}$; (b) $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)(1+x^2)$;

(c) $\dfrac{1-x^2}{x+1}$; (d) $\dfrac{x}{x^2+1}$;

(e) $\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$; (f) $\sqrt{x}(1-x^2)$;

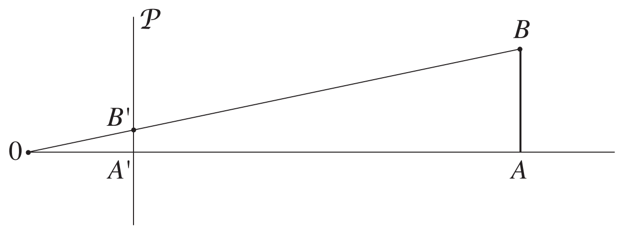
(g) $(x^2+1)^{1000}$; (h) $\sqrt[3]{x+1}$;

(i) $\sqrt[3]{4x-5}$; (j) $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^5$;

(k) $\left(\dfrac{2x-1}{3x+1}\right)$; (l) $(x^2-1)^{10}$;

(m) $\dfrac{1}{(1+x)^2}$; (n) $\dfrac{1}{(1+x^2)^2}$. .

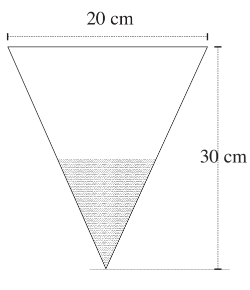
$\boxed{2}$ Um observador colocado em 0 vê um objecto rectilíneo AB que se move na sua direcção, conservando-se sempre num plano vertical.



A "dimensão psicológica" do objecto para o observador é, em cada instante, a perspectiva de AB relativamente a 0 num plano vertical $\mathcal{P}$ cuja distância a 0 podemos tomar igual à unidade.

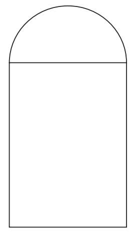
Sendo a medida de AB igual a 10 unidades, e aproximando-se o objecto do observador à velocidade de 15 unidades/segundo, a que velocidade cresce a perspectiva $A'B'$?

$\boxed{3}$ Um vaso cónico cuja secção e dimensão estão indicadas na figura vai ser enchido com líquido à razão de 4 cm^3/s.

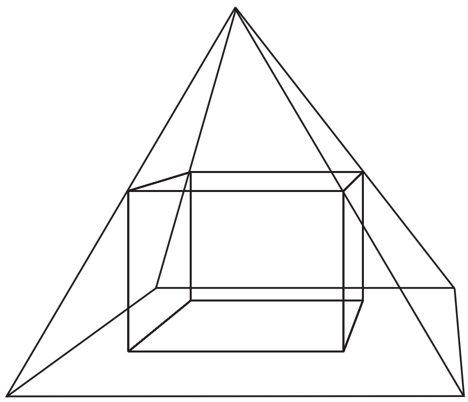


A que velocidade subirá o nível do líquido no vaso?

$\boxed{4}$ Quer-se desenhar uma janela em forma de rectângulo encimado por um semicírculo, de forma que o perímetro seja 12 metros. Em que condições será máxima a área da janela?



$\boxed{5}$ Numa pirâmide quadrangular regular é inscrito um prisma quadrangular de modo que uma das bases do prisma fica na base da pirâmide e os vértices da face oposta ficam nas arestas da pirâmide.



O lado da base da pirâmide é 1 metro, a altura é 5 metros: Qual é o prisma de maior volume que nela se pode inscrever?

$\boxed{6}$ Uma página de determinada publicação deve conter 300 cm^2 de mancha impressa, com margens de 3 cm em cima e em baixo e 3 cm e 2cm à esquerda e à direita. Que dimensões para a página são mais económicas, assumindo que o custo da página é directamente proporcional ao seu perímetro?

1.7 Segunda derivada e concavidade

A derivada da função x^3 é $3x^2$. Mas esta função tem, por sua vez, derivada, que é $6x$. Por isso, dizemos que *a segunda derivada de x^3 é $6x$*.

E, de um modo geral, dada uma função f definida num intervalo, se a função f' tem derivada nesse intervalo, representamo-la por f'' e chamamos-lhe *segunda derivada de f*.

No exemplo anterior, escreveríamos, partindo de $f(x) = x^3$ (com domínio $\mathbb{R}$):

$$f'(x) = 3x^2, \qquad f''(x) = 6x.$$

Quando uma função f tem segunda derivada f'', num determinado intervalo, e a é um ponto particular desse intervalo, referimos-nos ao valor

$$f''(a)$$

como sendo a *segunda derivada de f em a*.

Assim, por exemplo, a segunda derivada de x^3 em 1 é $f''(1) = 6$.

EXEMPLO 1.7.1. Retomemos o comentário feito em **11**, final da Secção 4.2. Seja f a função que representa a distância percorrida por um móvel:

$$s = f(t) \tag{$*$}$$

(a variável independente, t, é o tempo e s é o espaço percorrido). A derivada $f'(t)$ é a velocidade (instantânea) do movimento.
A taxa média de variação de $f'(t)$ num dado intervalo de tempo $[t_1, t_2]$.

$$\frac{f'(t_2) - f'(t_1)}{t_2 - t_1}$$

chama-se *aceleração média* no intervalo $[t_1, t_2]$. Por exemplo, se um automóvel, ao arrancar a partir do repouso, atinge a velocidade de 100 km/h $= \frac{1}{36}$ km/s em 15 segundos, a aceleração média no intervalo de tempo correspondente, $[0, 15]$, é

$$\frac{1/36 - 0}{15 - 0} = \frac{1}{540} \text{ km/s}^2.$$

Em vez da taxa média de variação de $f'(t)$, é conveniente considerarmos $f''(t)$, ou seja, a taxa instantânea de variação da velocidade: falamos então de aceleração (instantânea) no instante t. Assim, se $f(t)$ descreve a distância percorrida num dado movimento, $f''(t)$ representa a aceleração do movimento.

Admitindo, por exemplo, que a expressão $(*)$ é dada por uma função quadrática

$$s = f(t) = at^2 + bt + c$$

com $a > 0$, temos

$$f'(t) = 2at + b,$$
$$f''(t) = 2a.$$

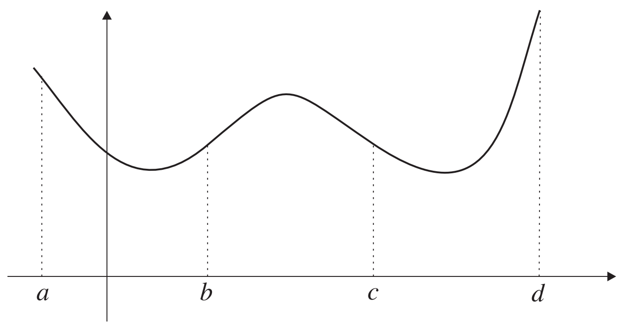
Dito por palavras: *se a distância percorrida depende do tempo como função quadrática, então a velocidade é afim e a aceleração é constante*. Por isso, um tal movimento é designado como *uniformemente acelerado*.

Que significado atribuir à segunda derivada f''? Do facto de ela ser simplesmente a "derivada da derivada" concluimos que representa, em cada ponto, a taxa de variação instantânea da função f' nesse ponto. Assim, $f''(a)$ será tanto maior quanto maior for a variação de f' por unidade do eixo das abcissas numa vizinhança de a.

E mais:

num intervalo I, f' é crescente, se e só se $f'' \geqslant 0$ em I; num intervalo I, f' é decrescente, se e só se $f'' \leqslant 0$ em I (em virtude de **11**, Factos 4.7.2 e 4.7.3).

Observando o gráfico da função f representada a seguir, constatamos que f' é crescente nos intervalos $[a, b]$ e $[c, d]$ pois que, visivelmente, o declive da tangente ao gráfico no ponto $(x, f(x))$ aumenta quando a variável x percorre cada um destes intervalos da esquerda para a direita.



Pelo contrário, a derivada f' é decrescente no intervalo $[b, c]$.

No que segue supomos que f tem não só derivada mas também segunda derivada no seu domínio.

Para nos referirmos à característica do gráfico que distingue a forma deste nos intervalos onde f' é crescente da forma do mesmo nos intervalos onde f' é decrescente, dizemos que o gráfico de f restringida a um intervalo onde f' é crescente (ou onde $f'' \geqslant 0$) tem a *concavidade virada para cima*, e o gráfico de f restringida a um intervalo onde f' é decrescente (ou $f'' \leqslant 0$) tem a *concavidade virada para baixo*.

No caso do desenho acima, o gráfico tem a concavidade virada para cima em $[a, b]$ e $[c, d]$ e tem a concavidade virada para baixo em $[b, c]$.

EXEMPLO 1.7.2. O gráfico de $f(x) = x^2$ tem a concavidade virada para cima em $\mathbb{R}$.

EXEMPLO 1.7.3. O gráfico de $f(x) = x^3$, restringida a $[0, +\infty[$ (respectivamente $]-\infty, 0]$) tem a concavidade virada para cima (respectivamente para baixo).

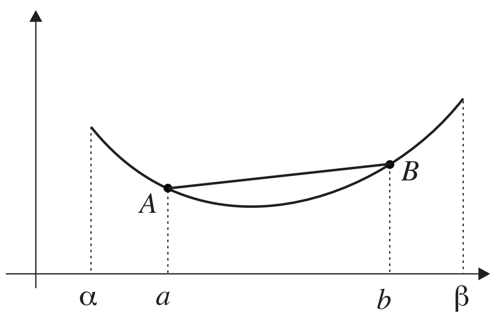
EXEMPLO 1.7.4. O gráfico de $f(x) = \frac{1}{x}$, restringida a $[0, +\infty[$ (respectivamente $]-\infty, 0]$) tem a concavidade virada para cima (respectivamente para baixo). Com efeito, neste caso temos

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \quad \text{e} \quad f''(x) = \frac{2}{x^3} \cdot$$

sendo $f''(x) > 0$ em $]0, +\infty[$ e $f''(x) < 0$ em $]-\infty, 0[$.

Dada a facilidade com que se calculam as derivadas de funções, o critério para avaliar o sentido da concavidade do gráfico de f num intervalo em termos do sinal de f'' é o mais simples possível, do ponto de vista da sua verificação. Mas o sentido da concavidade pode ser descrito equivalentemente, de modo a não fazer intervir f'', e nem sequer f'. Na verdade, demonstra-se que, para uma função f, tal que f' existe num intervalo $I = [\alpha, \beta]$:

(i) f' é crescente em I se, e só se, para *quaisquer* pontos $A = (a, f(a))$, $B = (b, f(b))$ do gráfico com a, $b \in I$, o gráfico de f restringida a $[a, b]$ fica *abaixo* do segmento de recta AB.



Não é difícil justificar que f' é crescente em I se esta condição se verifica: se $a < x < b$, temos que a taxa de variação de f em $[a, x]$ é menor ou igual ao declive do segmento AB:

$$T_{f,a,x} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leqslant \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot$$

No limite quando $x \to a$ obtemos

$$f'(a) \leqslant \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,.$$

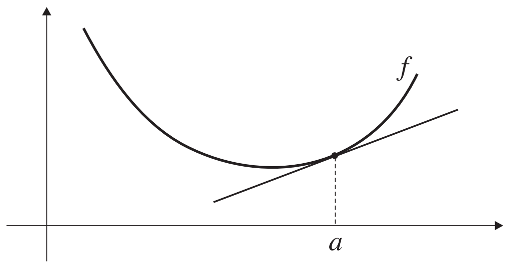
Do mesmo modo, deduzimos

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leqslant f'(b)$$

e conclui-se que f' é crescente.

(ii) Vale uma propriedade análoga substituindo "crescente" por "decrescente", "abaixo" por "acima".

(iii) f' é crescente em I se, e só se, para *cada* ponto $a \in I$ o gráfico de f fica *acima* do da recta tangente ao gráfico no ponto $(a, f(a))$, quer dizer:

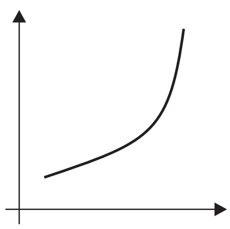


$$f(x) \geqslant f(a) + f'(a)(x - a) \quad \forall x \in I.$$

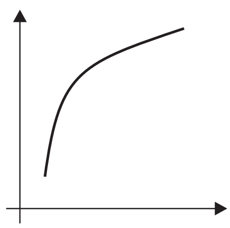
(Ver o exercício 3.)

(iv) Vale uma propriedade análoga substituindo "crescente" por "decrescente", "acima" por "abaixo" e "$\geqslant$" por "$\leqslant$".

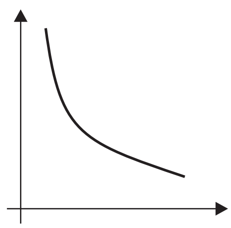
O estudo do sinal de f'' dá-nos, pois, indicação para uma construção da representação gráfica de f. Em particular, ficamos a conhecer maneiras distintas de uma função ser crescente, ou decrescente, num dado intervalo, como ilustram esquematicamente os gráficos seguintes



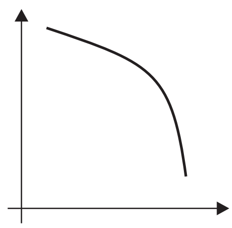
função crescente, com concavidade para cima



função crescente, com concavidade para baixo



função decrescente, com concavidade para cima



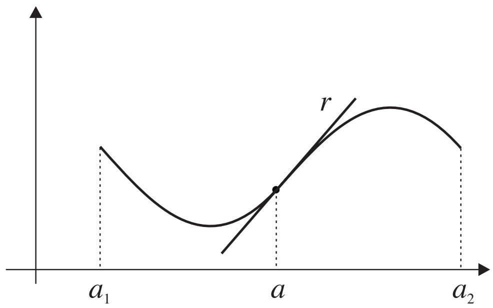
função decrescente, com concavidade para baixo

Tem também interesse referir os pontos do domínio de uma função f onde há mudança de sentido da concavidade. Precisamente, se f é uma função com derivada f', e a um ponto do seu domínio, dizemos que

> a é *ponto de inflexão* (de f, ou do gráfico de f) se há números $a_1 < a < a_2$ de modo que os sentidos da concavidade de f em $[a_1, a]$ e $[a, a_2]$ são opostos.

EXEMPLO 1.7.5. As funções x^2, $\frac{1}{x}$, não têm pontos de inflexão. A função x^3 tem um ponto de inflexão em $x = 0$. (Recordar os exemplos 1.7.2-3-4).

Resulta do que dissemos atrás (ver (iii) a seguir ao Exemplo 1.7.4) que, sendo r a recta tangente ao gráfico num ponto de inflexão, o gráfico de f restringida a $[a_1, a]$ e o gráfico de f restringida a $[a, a_2]$ ficam em semiplanos opostos determinados por r.



Seja f uma função com 2ª derivada e a um ponto de inflexão de f. De acordo com a definição, suponhamos, para fixar ideias, que f tem a concavidade para cima em $[a_1, a]$ e a concavidade para baixo em $[a, a_2]$. Então temos o quadro de setas para f'

	a_1		a		a_2
f'		$\nearrow$		$\searrow$	

o que indica que f' tem um máximo em a. Logo $f''(a) = 0$ em virtude de **11**, Facto 4.7.1. Análogas conclusões se tiram no outro caso. Em resumo:

> Se f tem 2ª derivada e a é ponto de inflexão de f, então $f''(a) = 0$.

EXEMPLO 1.7.6. Voltemos ao exemplo 1.6.1. Para a função $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$, temos

$$f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2},$$
$$f''(x) = -\frac{2x(1+x^2) + 4x(1-x^2)}{(1+x^2)^3}.$$

As raizes de $f''(x) = 0$ são

$$x = 0, \qquad x = \pm\sqrt{3},$$

e facilmente construímos o quadro de sinais e sentidos de concavidade

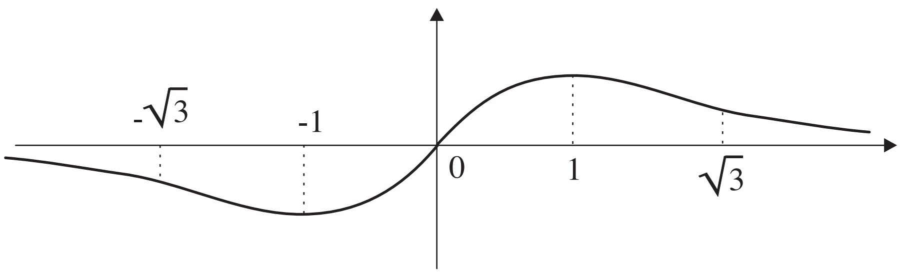
x		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$	
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	conc. baixo		conc. cima		conc. baixo		conc. cima

Podemos fazer agora o estudo do gráfico de f de forma mais completa, tirando partido das informações dadas pelo estudo de f' e f''

x		$-\sqrt{3}$		-1	0	1		$\sqrt{3}$	
$f'(x)$	$-$		$-$	0	$+\ +$	0	$-$		$-$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\searrow$	$\nearrow$		$\nearrow$	$\searrow$		$\searrow$

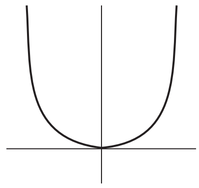
onde utilizámos as setas $\searrow$, $\searrow$, $\nearrow$, $\nearrow$ para significar, respectivamente, "decrescente com concavidade para baixo", "decrescente com concavidade para cima", "crescente com concavidade para cima" e "crescente com concavidade para baixo".

A função tem, pois, o máximo $f(1) = \frac{1}{2}$, o mínimo $f(-1) = -\frac{1}{2}$, e os pontos de inflexão com abcissas 0, $\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$.



Uma função pode não ter pontos de inflexão em certos pontos onde a 2ª derivada é nula. Com efeito, para $f(x) = x^4$, temos

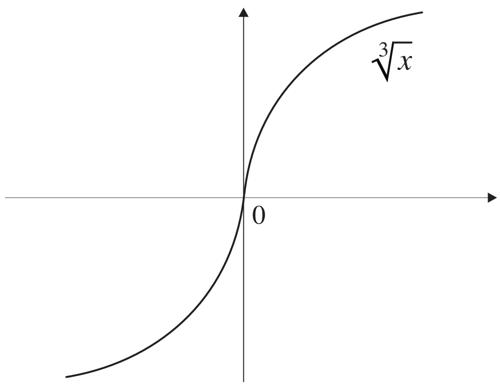
$$f'(x) = 4x^3,$$
$$f''(x) = 6x^4,$$



$f''(x) = 0 \iff x = 0$, mas $f'' \geqslant 0$ sempre, e por isso o gráfico é côncavo para cima em todo o domínio.

Por outro lado, se $f(x) = ax + b$ é uma função afim, então $f'(x) = a$ é constante e por isso podemos considerar que f tem a concavidade tanto para cima como para baixo em qualquer intervalo. Por isso, em consequência das definições que demos, qualquer ponto será ponto de inflexão de f. Para evitar esta situação desinteressante poderíamos ter definido *função com a concavidade para cima num intervalo* como sendo uma função com derivada *estritamente crescente* nesse intervalo.

Finalmente, outra observação: se alargarmos o âmbito da definição (página 23) de ponto de inflexão permitindo que a derivada de f em a seja infinita, poderemos dizer que uma função como $\sqrt[3]{x}$ tem um ponto de inflexão em $x = 0$.



Exercícios da Secção 1.7

$\boxed{1}$ Determinar os intervalos em que as seguintes funções são monótonas e os intervalos em que têm um tipo definido de concavidade. Esquematizar os gráficos.

(a) $2x^2 - 3x + 1$; (b) $x^3 + x$; (c) $x^3 - x$

(d) $\sqrt{x-1}$; (e) $\sqrt{1+x^2}$; (f) $\dfrac{1}{1+x^2}$;

(g) $\dfrac{x}{1+x^2}$.

$\boxed{2}$ Seja f uma função estritamente crescente num intervalo I. Se f tem a concavidade para cima, que se pode afirmar sobre a sua inversa f^{-1} quanto ao sentido da concavidade? (Utilizar um esquema gráfico para dar a resposta.)

E se f, em vez de ser estritamente crescente, for estritamente decrescente?

$\boxed{3}$ Seja f uma função cuja derivada f' é crescente no intervalo I. Mostrar que, fixado um ponto $a \in I$,

$$f(x) \geqslant f(a) + f'(a)(x - a) \quad \forall x \in I$$

(isto é, o gráfico de f em I fica acima do da tangente no ponto $(a, f(a))$.

Sugestão: Estudar a função $g(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)$.

Capítulo 2

O teorema do valor intermédio

2.1 O teorema do valor intermédio e a localização dos zeros de funções contínuas

Quando estudámos o conceito de continuidade, observámos que, de um ponto de vista ingénuo, uma função contínua num intervalo pode caracterizar-se pelo facto de o seu gráfico não apresentar rupturas ou saltos. Esta ideia permite-nos aceitar a validade do seguinte teorema.

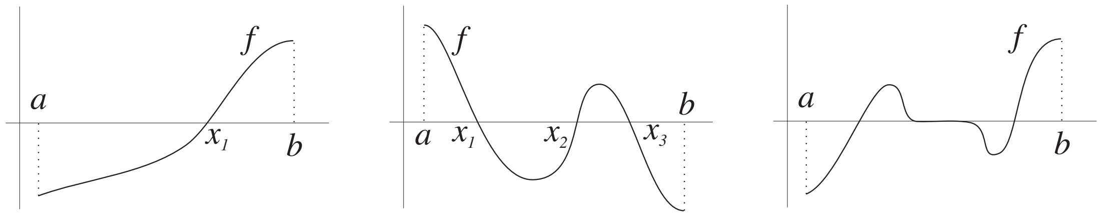
Facto 2.1.1 (Teorema do valor intermédio) [1] *Seja* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *uma função contínua no intervalo* $[a,b]$*. Então, se* $f(a)$ *e* $f(b)$ *têm sinais contrários, isto é:*

$$f(a)f(b) < 0,$$

podemos concluir que f *tem uma raiz em* $]a,b[$*, isto é, há um número* $x \in]a,b[$ *tal que*

$$f(x) = 0. \qquad \blacksquare$$

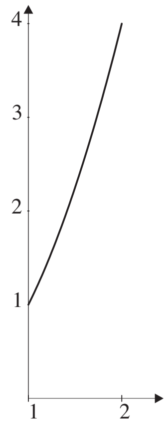
As figuras seguintes ilustram o teorema.

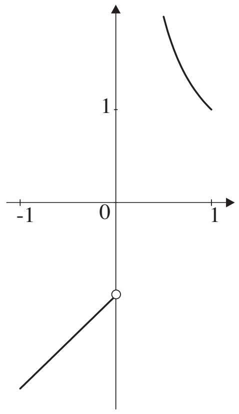


[1]Habitualmente referido como *Teorema de Bolzano*. Enunciado por Stevin, matemático belga, no final do século XVI. As primeiras demonstrações do teorema devem-se a Bolzano (matemático e filósofo checoslovaco) e Cauchy (matemático francês) no primeiro quartel do século XIX.

No primeiro caso a função f tem exactamente uma raiz, no segundo caso, a função f tem três raizes e no terceiro a função f tem uma infinidade de raizes em $]a,b[$.

A "justificação" ingénua deste facto é simples: se o gráfico não apresenta rupturas e se os pontos $(a,f(a)),(b,f(b))$ estão em semiplanos distintos determinados pelo eixo $0x$, então necessariamente o gráfico terá *pelo menos um ponto* $(x,f(x))$ *nesse eixo*, o que corresponderá à situação $f(x)=0$.[2]





Por outro lado, é também claro que uma função para a qual uma das hipóteses não se verifica, não tem de possuir raizes em $]a,b[$. É o caso de x^2 em $[1,2]$, e é o caso de

$$f(x)=\begin{cases} x-1 & \text{se } -1\leqslant x<0\\ \dfrac{1}{x} & \text{se } 0\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

no intervalo $[-1,1]$.
O que falha num caso e noutro?

Este teorema tem uma importância central na teoria das funções reais. Na verdade, é um poderoso ustensílio para *demonstrar a existência de raizes* de uma equação

$$f(x)=0$$

onde f é função contínua. E até veremos que o teorema permite *determinar aproximações de uma raiz* com erro arbitrariamente pequeno!

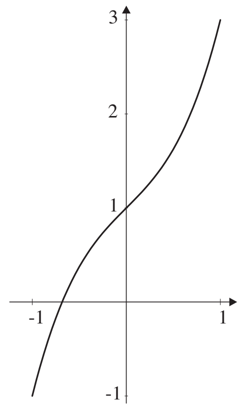
EXEMPLO 2.1.1. Consideremos a equação do 3º grau

$$x^3+x+1=0. \tag{2.1}$$

Como a função $f(x)=x^3+x+1$ é contínua (é um polinómio!) e temos

$$f(-1)=-1<0,\quad f(0)=1>0$$

então o teorema garante que (2.1) tem uma raiz c entre -1 e 0.



[2]Não faremos aqui uma demonstração do teorema. Poderíamos fazê-la com base no teorema da sucessão monótona (**11**, Facto 2.8.1). No entanto, algumas ideias fundamentais da demonstração estão descritas, com vista a outro fim, nos exemplos 2.1.1 e 2.1.2.

Além disso, como $x^3 + x + 1$ é estritamente crescente, essa raiz é única! Se representarmos por c a raiz teremos, pois,

$$-1 < c < 0. \tag{2.2}$$

Dividamos agora o intervalo $[-1, 0]$ em dois intervalos por meio do ponto médio: a raiz c pertence certamente a um dos dois intervalos

$$\left[-1, -\frac{1}{2}\right], \qquad \left[-\frac{1}{2}, 0\right].$$

Como

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{1}{2} + 1 > 0,$$

o teorema garante que f tem uma raiz no primeiro dos intervalos. Assim, podemos afirmar que a raiz procurada tem a seguinte localização mais precisa

$$-1 \;<\; c \;<\; -\frac{1}{2}\cdot \tag{2.3}$$

Procedendo do mesmo modo com o intervalo $\left[-1, -\frac{1}{2}\right]$, passamos a considerar os dois intervalos

$$\left[-1, -\frac{3}{4}\right] \quad \text{e} \quad \left[-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}\right]$$

e calculamos

$$f\left(-\frac{3}{4}\right) = \left(-\frac{3}{4}\right)^3 - \frac{3}{4} + 1 < 0.$$

Agora é no 2º dos novos intervalos que devemos procurar a raiz, visto que é nas extremidades desse intervalo que f toma valores de sinais contrários:

$$-\frac{3}{4} \;<\; c \;<\; -\frac{1}{2}\cdot$$

Prosseguindo este processo, conseguimos enquadrar a raiz c entre duas sucessões de números, que constituirão aproximações de c por defeito e por excesso, respectivamente, e podemos conseguir que o erro obtido na aproximação seja tão pequeno quanto quisermos. Organizemos os cálculos de modo seguinte: de cada vez que subdividimos um intervalo, calculamos o valor de f no ponto médio e passamos a considerar o novo intervalo, resultante da divisão ao meio do anterior, em cujos extremos f tem valores de sinais contrários. Este procedimento é iterado (repetido) tantas vezes quantas desejarmos.

Intervalo	Ponto médio	Valor de f no ponto médio	Localização de c
$[-1, 0]$	-0.5	0.375	$-1 < c < -0.5$
$[-1, -0.5]$	-0.75	-0.171875	$-0.75 < c < -0.5$
$[-0.75, -0.5]$	-0.625	0.130859	$-0.75 < c < -0.625$
$[-0.75, -0.625]$	-0.6875	-0.012451	$-0.6875 < c < -0.625$
$[-0.6875, -0.625]$	-0.65625	0.061127	$-0.6875 < c < -0.65625$
$[-0.6875, -0.65625]$	-0.671875	0.024830	$-0.6875 < c < -0.671875$
$[-0.6875, -0.671875]$	-0.6796875	0.006314	$-0.6875 < c < -0.6796875$
$[-0.6875, -0.6796875]$	-0.68359375	-0.003037	$-0.68359375 < c < -0.6796875$
$[-0.68359375, -0.6796875$	-0.681640625	0.001646	$-0.68359375 < c < -0.681640625$
$[-0.68359375, -0.681640625]$	-0.6826171875	-0.000694	$-0.6826171875 < c < -0.681640625$

Este processo permitiu construir 10 intervalos

$$[c_1, c_1'] \supset [c_2, c_2'] \supset \cdots \supset [c_{10}, c_{10}'].$$

Ao fim destas etapas, concluímos que a raiz c satisfaz as desigualdades

$$c_{10} = -0.6826171875 \; < \; c \; < \; -0.681640625 = c_{10}'$$

o que significa:

1°) que no desenvolvimento decimal de c temos

$$c = -0.68\ldots$$

com os algarismos indicados correctos;

2°) que $|c - c_{10}| < c_{10}' - c_{10} = 0.0009765625$ e

$$|c - c_{10}'| < c_{10}' - c_{10} = 0.0009765625,$$

ou, dito doutro modo: c_{10} e c_{10}' são valores aproximados de c com erro inferior a 10^{-3}.

Prosseguindo o processo até uma etapa conveniente, poderíamos obter tantas casas decimais correctas quanto desejássemos.

O método indicado é usualmente referido como um *método de bissecção* por ser baseado em sucessivas divisões de intervalos através do ponto médio.

Não é difícil reconhecer que o método descrito constroi duas *sucessões* numéricas que são as que surgem nas colunas esquerda e direita. Uma é crescente, outra decrescente, e *ambas têm limite* igual a c.

É claro que o método poderia *terminar* se numa dada etapa de subdivisão o valor da função $f(x)$ no ponto obtido fosse 0. Nesse caso teríamos obtido o valor exacto da raiz. No caso analisado isto não acontece, porque a equação $x^3 + x + 1 = 0$ não tem raizes racionais[3], enquanto os pontos de subdivisão fornecidos pelo método são, evidentemente, racionais.

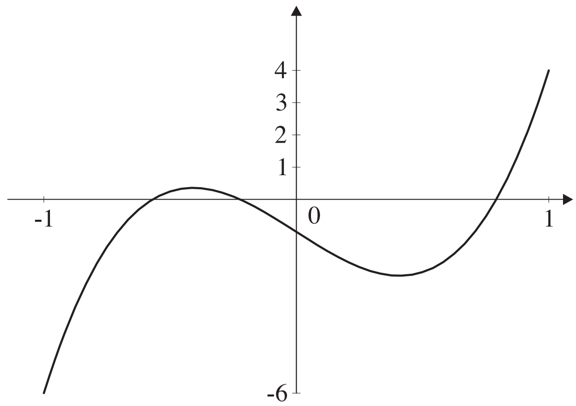
EXEMPLO 2.1.2. Apliquemos as mesmas ideias ao cálculo de uma raiz da equação

$$10x^3 - 5x - 1 = 0.$$

Agora temos $f(x) = 10x^3 - 5x - 1$, e vamos partir do intervalo $[-1, 1]$ sendo

$$f(-1) = -6, \quad f(1) = 4.$$

Então f tem pelo menos uma raiz c em $[-1, 1]$ (na verdade tem 3 raizes)!



O esquema de subdivisão descrito anterioremente conduz a

intervalo	ponto médio	valor de f no ponto médio	localização de c
$[-1, 1]$	0	-1	$0 < c < 1$

e, prosseguindo, encontrar-se-á a *única* raiz c de f que fica no intervalo $[0, 1]$. Se pretendermos aproximações de uma das outras raizes teremos de partir não do intervalo $[-1, 1]$, mas de outro intervalo mais pequeno onde a raiz procurada seja a única existente.

O Teorema do valor intermédio é muitas vezes enunciado e aplicado sob forma ligeiramente diferente:

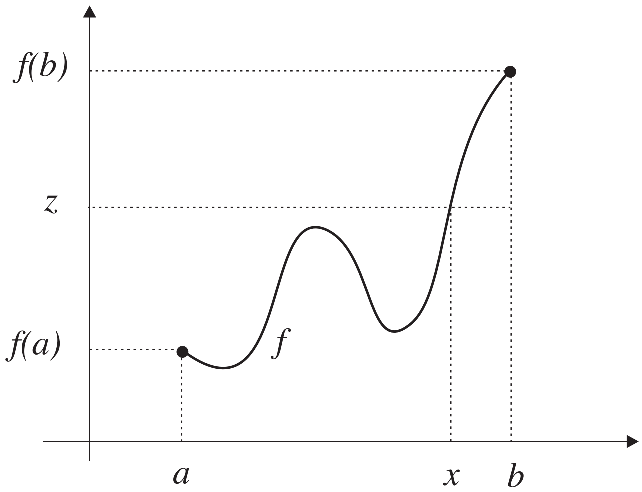
[3] Esta afirmação não é muito difícil de demonstrar, utilizando a mesma ideia que se aplica à equação $x^2 = 2$.

Facto 2.1.2 *Seja* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *uma função contínua. Seja* z *um número tal que*

$$f(a) < z < f(b) \quad \textit{ou} \quad f(b) < z < f(a).$$

Então, existe $x \in]a, b[$ *tal que*

$$f(x) = z.$$



(Por outras palavras: um número z que fica situado *entre* os valores de f nos pontos a e b é necessariamente elemento do contradomínio de f.)

Demonstração. Para fixar ideias, tomemos o primeiro caso previsto na hipótese: $f(a) < z < f(b)$. Considerando a função $g : [a, b] \to \mathbb{R}$

$$g(x) = f(x) - z$$

ela é também contínua, e

$$g(a) = f(a) - z < 0, \qquad g(b) = f(b) - z > 0.$$

Pelo enunciado do Facto 2.1.1 obtemos a existência de $x \in]a, b[$ tal que $g(x) = 0$, isto é, $f(x) = z$. No caso em que $f(a) > z > f(b)$, a demonstração é análoga. ■

Exercícios da Secção 2.1

$\boxed{1}$ A função x^4-3x+1 tem dois zeros no intervalo $[0,2]$. Determinar aproximações de ambos com três casas decimais correctas, usando uma calculadora gráfica.

$\boxed{2}$ Determinar a raiz da equação $\operatorname{sen} x = \frac{x}{2}$ no intervalo $\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$ com uma casa decimal correcta.

$\boxed{3}$ Determinar o zero de

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}=0$$

no intervalo $]0,1[$ com duas casas decimais correctas.

$\boxed{4}$ Dar exemplo de uma função f nas condições seguintes ou explicar porque não é possível dar o exemplo.

(a) f é contínua em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ e toma apenas os valores 1 e -1.

(b) f é contínua em $\mathbb{R}$ e toma apenas os valores 1 e -1.

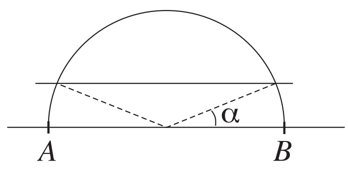
(c) f é contínua em $[-1,0[\cup]0,1]$ e só toma 3 valores distintos.

(d) f é contínua em $[0,1]$, não é constante, e só toma valores irracionais.

$\boxed{5}$ Que pode afirmar-se a respeito de uma função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ contínua que só toma valores inteiros?

$\boxed{6}$ De entre todos os círculos cujos raios são menores ou iguais a 10, mostrar que há um cuja área é 200.

$\boxed{7}$ É dado um semicírculo de diâmetro AB. Mostrar que existe uma recta paralela a AB que o divide em duas figuras com áreas iguais.



Sugestão: Exprimir a área da porção de semicírculo que fica abaixo da recta em função do ângulo α representado na figura.

$\boxed{8}$ Seja $f:[0,1]\to[0,1]$ contínua. Mostrar que existe $x\in[0,1]$ tal que $x=f(x)$.

2.2 Uma aplicação do teorema do valor intermédio: contradomínios

É com base no teorema do valor intermédio que fazemos a efectiva determinação do contradomínio de uma função contínua.

EXEMPLO 2.2.1. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma funçao *contínua*. Suponhamos que $f(0) = 30$ e $f(2) = -1$. Com estes dados, podemos garantir que qualquer número z entre -1 e 30 é valor de f, ou seja, pertence ao contradomínio. Assim, ficamos a saber que o contradomínio de f contém o intervalo $[-1, 30]$ (podendo conter outros elementos).

O argumento usado no exemplo anterior é susceptível de fornecer um resultado bem mais geral:

Facto 2.2.1 *Seja I um intervalo de $\mathbb{R}$ e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então, o contradomínio de f é um intervalo.*

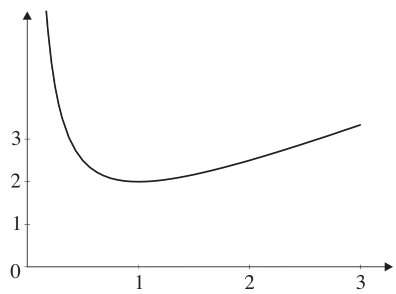
Demonstração. Para provarmos que um conjunto de números reais C é intervalo, temos simplesmente que verificar que:

- dados dois elementos distintos de C, qualquer número situado entre eles ainda pertence a C.

Ora, dados dois elementos distintos do contradomínio de f, digamos $f(a)$ e $f(b)$, com a, $b \in I$, um deles é maior que o outro; suponha-se, para fixar ideias, $a < b$ e $f(a) > f(b)$. A restrição $f|_{[a,b]}$ é obviamente contínua. Então, pelo Facto 2.1.2, qualquer número z tal que $f(b) < z < f(a)$ é valor de $f|_{[a,b]}$; logo, z pertence ao contradomínio de f. ∎

A combinação deste teorema com o cálculo de limites fornece também conclusões interessantes.

EXEMPLO 2.2.2. A função $f(x) = x + \frac{1}{x}$, definida em $]0, +\infty[$, tem o valor mínimo 2 atingido em $x = 1$. (Ver **11**, Exemplo 1.1.3 ou efectuar o cálculo do mínimo a partir do estudo da derivada.) E sabemos que



$$\lim_{x\to 0^+}\left(x + \frac{1}{x}\right) = +\infty, \quad \lim_{x\to +\infty}\left(x + \frac{1}{x}\right) = +\infty. \qquad (2.4)$$

Assim, o contradomínio de f contém números tão grandes quanto quisermos; contém, por exemplo, um número superior a 10^8.

Logo, como a função é contínua, o seu contradomínio conterá necessariamente o intervalo $[2, 10^8]$. O que se disse para 10^8 repete-se com outro número qualquer, por muito grande que seja; conclui-se que o contradomínio de f contém o intervalo $[2, A]$ qualquer que seja $A > 2$. Logo, o contradomínio de f é $[2, +\infty[$.

Na verdade, o facto de f ter mínimo 2 e (2.4) permite afirmar que a equação

$$f(x) = z$$

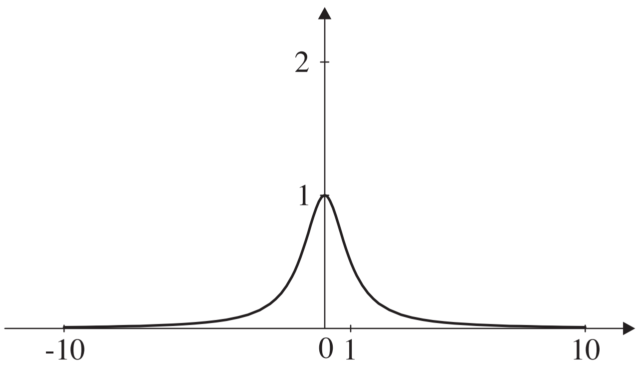
tem:

- 2 soluções se $z > 2$ (uma solução entre 0 e 1 e outra > 1);

- 1 solução se $z = 1$;

- nenhuma solução se $z < 1$.

EXEMPLO 2.2.3. A função $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ tem valor máximo $f(0) = 1$ (que corresponde ao valor que torna o denominador mínimo).



Como

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0,$$

há valores de f tão próximos de zero quanto quisermos: por exemplo, há valores de f inferiores a 10^{-8}. Concluímos que o contradomínio de f contém o intervalo $]10^{-8}, 1]$. E do mesmo modo se conclui que o contradomínio de f contém qualquer intervalo

$$]\delta, 1]$$

onde $0 < \delta < 1$. Logo, o contradomínio de f contém $]0, 1]$, e como não tem elementos negativos ou nulos, o contradomínio de f *é o intervalo* $]0, 1]$.

Com argumentos perfeitamente semelhantes aos utilizados nos exemplos precedentes conclui-se o seguinte

Facto 2.2.2 *Seja* $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ *uma função contínua no intervalo aberto* $]a, b[$ *e*

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L_1, \qquad \lim_{x \to b^-} f(x) = L_2.$$

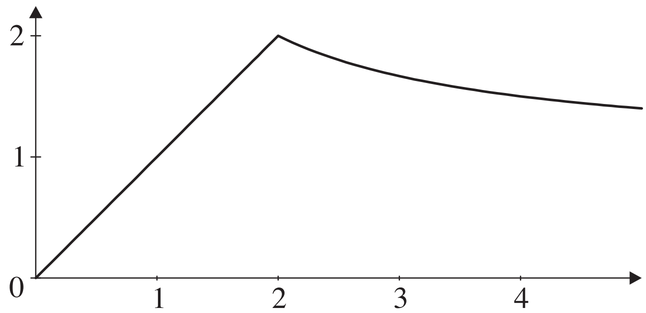
Então o contradomínio de f *contém o intervalo aberto de extremos* L_1*,* L_2*.*

OBSERVAÇÕES. 1) No enunciado anterior, a pode ser $-\infty$, b pode ser $+\infty$ e tanto L_1 como L_2 podem ser $+\infty$ ou $-\infty$.

2) O contradomínio de f pode ser "maior" que o intervalo indicado, como se observa com a função contínua

$$f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leqslant 2 \\ \dfrac{2}{x} + 1, & x \geqslant 2 \end{cases}$$

cujo contradomínio é $]0, 2]$, apesar de se ter $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$.



No entanto, *para uma função* f *estritamente monótona*, não é dificil reconhecer que, nas condições do Facto 2.2.2, o contradomínio de f é *exactamente* o intervalo de extremos L_1, L_2

Exercícios da Secção 2.2

$\boxed{1}$ Dizer quais são os contradomínios das funções

$$x^2 - x; \qquad \frac{x}{x+1}; \qquad 3x + \frac{10}{x} \text{ (definida em }]0, +\infty[); \qquad \sqrt{1 + x^2}; \qquad \frac{x^2}{1 + x^2}.$$

$\boxed{2}$ Uma função contínua f, com domínio $\mathbb{R}$, tem um valor máximo absoluto igual a 10 e além disso

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1, \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

Quais das afirmações seguintes são verdadeiras?

- O contradomínio de f contém o intervalo $[0, 10]$.
- O contradomínio de f contém o intervalo $[1, 10]$.
- A equação
$$f(x) = 0$$
tem pelo menos duas soluções.
- A equação
$$f(x) = 3$$
tem pelo menos duas soluções.

2.3 Outra aplicação do teorema do valor intermédio: resolução de inequações

O teorema do valor intermédio permite reduzir a resolução de inequações do tipo

$$f(x) > 0$$

onde f é uma função contínua num intervalo I, à resolução da equação

$$f(x) = 0$$

no mesmo intervalo.

EXEMPLO 2.3.1. Suponhamos que se pretende resolver

$$\frac{x}{\sqrt{1+x}} > 1.$$

Esta equação é equivalente a

$$\frac{x}{\sqrt{1+x}} - 1 > 0$$

e vamos considerar a equação associada

$$\frac{x}{\sqrt{1+x}} - 1 = 0$$

que não é dificil de resolver: ela equivale, sucessivamente, a

$$x = \sqrt{1+x}, \qquad x^2 = 1+x, \qquad x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

e é facil constatar que apenas $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ é raiz da equação inicial. Ora, se consideramos o seguinte quadro de valores da função $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x}} - 1$ no intervalo $]-1, +\infty[$

x	0	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	8
$f(x)$	-1	0	$5/3$

podemos concluir que o quadro de sinais de f é

x	-1		$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

Com efeito, se no intervalo $\left]-1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right[$ f não mantivesse sempre o sinal $-$, então, pelo teorema do valor intermédio, deveria ter uma raiz nesse intervalo; mas tal raiz não existe. Logo, todos os valores de $f(x)$ são negativos quando x percorre $\left]-1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right[$. Argumento análogo é aplicável ao intervalo $\left]\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right[$.

Exercícios da Secção 2.3

$\boxed{1}$ Resolver as inequações:

$$x^2 - 5x + 6x < 0; \qquad x^3 - 4x > 0; \qquad x^5 - 4x > 0; \qquad x > \sqrt{x+2}.$$

$\boxed{2}$ De uma função $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ sabemos que

f é contínua;

$f(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 1$ ou $x = 3$;

$f(2) = 10$;

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$;

$f(10) = -1$.

Qual é o conjunto solução de $f(x) < 0$?

Capítulo 3

Função exponencial e função logarítmica

3.1 Introdução

Quando um automóvel viaja de Lisboa a Madrid a 80 km/h, estando já no instante $t = 0$ a 20 km de Lisboa, sabemos que as distâncias a Lisboa ao fim de 1, 2, 3, ... horas são termos da progressão aritmética

$$100,\ 180,\ 260,\ 340,\ \ldots$$

Estamos perante um fenómeno descrito pela função afim

$$s(t) = 20 + 80t \tag{3.1}$$

que dá a distância a Lisboa (em km) em função do tempo (em horas) e o facto de a tempos igualmente espaçados também corresponderem distâncias igualmente espaçadas (isto é, em progressão aritmética) tem por base a circunstância de a taxa de variação da função modelo (3.1) ser constante:

$$\frac{s(t+h) - s(t)}{h} = 80.$$

Já vimos, através de abundantes exemplos, que a taxa de variação, e mesmo a derivada, de uma função real de variável real está em geral longe de ter um comportamento tão simples: os comportamentos são variados, de acordo com o tipo de função em jogo.

Um tipo de fenómeno, que requer um modelo muito diferente do anterior e na verdade diferente de todos os que até aqui encontrámos, é exemplificado pelo crescimento de uma população em determinadas circunstâncias. Para simplificar, vamos referir-nos esquematicamente a uma população de bactérias em determinada cultura: imaginamos que no instante inicial uma contagem revela que estão presentes

$$Q(0) = 1000$$

bactérias; e que ao fim de 1, 2, 3, ... horas a contagem do número de bactérias conduziu a valores próximos de

$$Q(1) = 1050, \quad Q(2) = 1103, \quad Q(3) = 1158, \ldots$$

Que significado atribuir a esta lei de crescimento? Observemos que as taxas médias de variação da quantidade $Q(t)$

$$\frac{Q(1) - Q(0)}{1 - 0} = 50, \quad \frac{Q(2) - Q(1)}{2 - 1} = 53, \quad \frac{Q(3) - Q(2)}{3 - 2} = 55,$$

representam as seguintes percentagens da quantidade existente na hora anterior:

$$\frac{50}{1000} = 0.05, \qquad \frac{53}{1050} = 0.0505, \quad \frac{54}{1103} = 0.0499.$$

Estamos em presença de uma função $Q(t)$ em que é razoável supôr que as taxas médias de variação correspondentes a intervalos de tempo de uma unidade representam *uma percentagem constante* do valor da função no início do intervalo considerado. Dizemos por isso que a *taxa média de variação percentual* do número de bactérias, referida à unidade de tempo *hora*, é constante e (sensivelmente) igual a 0.05 (ou 5%).

De um modo geral, dada uma função real de variável real, $Q(t)$, podemos falar da sua taxa média de variação percentual no intervalo $[a, b]$ como sendo o cociente entre a taxa média de variação de Q naquele intervalo e o valor $Q(a)$:

$$\frac{Q(b) - Q(a)}{Q(a)(b - a)}$$

No exemplo precedente, a lei que idealmente representa $Q(t)$ para t = 0, 1, 2, 3, ... horas é a progressão geométrica

$$Q(t) = 1000 \times 1.05^t \tag{3.2}$$

Com efeito, supondo que t toma os valores 0, 1, 2, ... estamos a partir do princípio de que

$$\frac{Q(t+1) - Q(t)}{Q(t)} = 0.05$$

ou, o que é o mesmo,

$$\frac{Q(t+1)}{Q(t)} = 1.05.$$

Logo $Q(t)$ é progressão geométrica de razão 1.05 e com termo inicial $Q(0) = 1\,000$.

Suponhamos agora que a fórmula (3.2), válida para os instantes correspondentes a números inteiros de horas ($t = 1, 2, \dots$), é válida também para instantes com menor espaçamento temporal, digamos, as meias horas. Então t pode tomar os valores que dão a sucessão de meias horas

$$t_n = \frac{n}{2} : 0, \quad \frac{1}{2}, \quad 1, \quad \frac{3}{2}, \quad 2, \quad \frac{5}{2}, \cdots \qquad (n = 0, 1, \dots)$$

(note-se que a fórmula tem sentido, pois o cálculo destas potências se reduz ao cálculo de radicais). Como exprimir esta lei de crescimento, adaptada aos novos intervalos temporais, em termos quantitativos? Calculando a taxa média de variação percentual neste caso obtemos

$$\frac{Q(t_{n+1}) - Q(t_n)}{(t_{n+1} - t_n)Q(t_n)} = 2(1.05^{1/2} - 1).$$

Se a lei permanece válida, então isto significa que a taxa média de variação percentual referida a meias-horas tem o valor constante $2 \times (1.050^{1/2} - 1)$. Analogamente, se tomarmos como nova unidade temporal a fracção $\frac{1}{p}$ hora (com p inteiro positivo qualquer) e a lei se mantém válida, isso significa que a taxa média de variação percentual de $Q(t)$ referida a $\frac{1}{p}$ hora é

$$p \times (1.05^{1/p} - 1). \tag{3.3}$$

A sucessão de valores (3.3) *tem limite*. Esta afirmação é verdadeira mas não pode ser justificada neste momento. Contudo, o leitor pode comprovar com o uso de uma calculadora que, para grandes valores de p, os termos da sucessão apresentam uma estabilização a nível das sucessivas casas decimais, e na verdade, podemos escrever

$$\lim_{p\to\infty} p(1.05^{1/p} - 1) = 0.048790\dots$$

estando correctas as casas decimais explicitadas.

O aumento de p para além de qualquer número dado significa que estamos a considerar intervalos de tempo cujo comprimento tende para zero. Se quisermos estender a linguagem para formulação de uma lei que traduza o fenómeno observado, diremos que $Q(t)$ tem uma *taxa de variação percentual (instantânea)* constante e igual a cerca de 0.048790, ou seja, cerca de 4.9%. *A vantagem desta formulação é que não envolve nenhum intervalo de tempo particular.*

Sabemos que a "taxa de variação (instantânea)" não é senão uma derivada. Assim, gostaríamos de afirmar, mais simplesmente:

$$\frac{Q'(t)}{Q(t)} = 0.049.$$

Mas temos um problema importante a resolver antes de escrever esta equação. É que (3.2) só tem sentido para t racional, e portanto não é, verdadeiramente, uma função de variável real definida num *intervalo*. Antes de mais, temos de dar significado ao símbolo que figura no segundo membro de (3.2) para todo o $t \in \mathbb{R}$.

No entanto, vamos observar ainda que com uma modificação conveniente no expoente, funções do tipo (3.2) servem também de modelo a fenómenos em que uma certa quantidade sofre um *decrescimento* (e não um crescimento) descritível em termos semelhantes aos do caso anterior. Refiramos o caso mais simples da *desintegração radioactiva*.

Consideramos uma amostra de substância radioactiva — digamos, o Carbono 14 — e designamos por $R(t)$ a quantidade de substância na amostra no instante t. Ela desintegra-se de tal modo que a taxa média de variação instantânea percentual de $Q(t)$ é constante. (Como cada átomo presente tem a possibilidade de emitir partículas, quanto mais átomos presentes mais desintegração se observa, e na verdade há proporcionalidade entre taxa de variação e quantidade existente.) Um modelo para este fenómeno poderia ser uma função como

$$Q(t) = 50 \times 1.025^{-t} \tag{3.4}$$

onde $Q(t)$ é a massa em determinadas unidades, t é o tempo em anos e $50 = R(0)$ é a quantidade presente no instante inicial de contagem do tempo. Repare-se como, neste caso, as quantidades calculadas em tempos igualmente espaçados (por exemplo, $t = 1, 2, 3, \ldots$ anos) são termos de uma progressão geométrica decrescente, com razão $1.025^{-1} \approx 0.976$:

$$\begin{aligned} 50, \qquad & 50 \times 1.025^{-1} = 48.780, \\ & 50 \times 1.025^{-2} = 47.591, \\ & 50 \times 1.025^{-3} = 46.430, \ldots \end{aligned}$$

Assim, a taxa média de desintegração percentual referida a intervalos de 1 ano é aproximadamente -0.0244 (devemos afectá-la do sinal $-$ porque, representando o numerador da fracção a diferença entre as quantidades existentes em instantes separados de 1 ano, essa diferença é negativa.)

Para termos uma ideia do que poderá ser, neste caso, a taxa instantânea de variação percentual, procedemos como no caso anterior, supondo que a fórmula (3.4) é aplicável a fracções da unidade (ano) arbitrariamente pequenas, e calculando as correspondentes taxas médias de variação percentual.

$$\frac{50 \times 1.025^{-(t_n+1/p)} - 50 \times 1.025^{-t_n}}{\frac{1}{p} \times 50 \times 1.025^{-t_n}} = p\,\left(1.025^{-1/p} - 1\right).$$

Para grandes valores de p, os termos desta sucessão apresentam casas decimais que estabilizam: a sucessão tende para um limite, que é neste caso, aproximadamente

$$-0.0247.$$

3.2 Definições e propriedades básicas

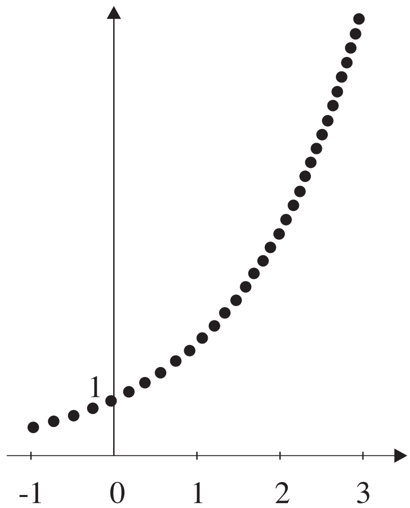
Vamos então debruçar-nos, com algum detalhe, sobre o tipo de funções reais de variável real de que (3.2) é exemplo.

Fixemos um número positivo b, e consideremos a expressão designatória

$$f(x) = b^x. \tag{3.5}$$

Esta tem sentido para nós desde que x seja um número racional.

Por exemplo, se $b = 2$, temos $2^0 = 1$, $\quad 2^{-3} = \dfrac{1}{8}$, $\quad 2^{3/5} = \sqrt[5]{8}$, $\quad 2^{-1/2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\quad 2^{5/2} = \sqrt{32} = 5.657\ldots$,etc.



Alguns valores de 2^x, com x racional

Mas, se x é irracional, não sabemos ainda que significado atribuir ao segundo membro de (3.5). Assim, (3.5) define uma função cujo domínio é apenas o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais; queremos estendê-la a toda a recta real, de modo que faça sentido o cálculo do segundo membro para <u>*todo*</u> o número real x.

Com esse fim, comecemos por recordar propriedades já conhecidas de (3.5) e por chamar a atenção para outras propriedades que ainda não tivemos a ocasião de referir.

Facto 3.2.1 (Leis dos expoentes) *Para quaisquer* $b,\ c > 0$ *e* $x,\ y \in \mathbb{Q}$*: tem-se* $b^0 = 1$, $b^{-x} = \left(\frac{1}{b}\right)^x$, *e*

$$\begin{aligned} b^{x+y} &= b^x \cdot b^y \qquad (\textit{isto é, } f(x+y) = f(x)f(y)); \\ (b^x)^y &= (b^x)^y\,; \\ b^x\,c^x &= (b\,c)^x \end{aligned}$$

Estas propriedades são já nossas conhecidas (ver **11**, Apêndice 4).

Vamos concretizar, por um momento, fixando $b = 2$ na base das potências em análise.

Facto 3.2.2 *A função* 2^x *é estritamente crescente em* $\mathbb{Q}$*, isto é: se* x *e* y *são números racionais e* $x < y$ *então* $2^x < 2^y$*.*

Demonstração. Escrevamos $x = \frac{m}{n}$ e $y = \frac{p}{n}$ onde $m,\ n,\ p$ são inteiros e $n > 0$ (é sempre possível reduzir duas fracções ao mesmo denominador!). Como $x < y$, temos $m < p$; então

(a) Se $0 \leqslant m$, é claro que $2^m < 2^p$.

(b) Se $m < 0 \leqslant p$, $\quad 2^m = \dfrac{1}{2^{|m|}} < 1 \leqslant 2^p$.

(c) Se $m < p < 0$, $\quad 2^m = \dfrac{1}{2^{|m|}} < \dfrac{1}{2^{|p|}} = 2^p$.

Em qualquer dos casos conclui-se $\qquad \sqrt[n]{2^m} < \sqrt[n]{2^p}$. ∎

OBSERVAÇÃO. Este Facto resulta essencialmente de ser $2 > 1$. Se em vez de 2 trabalharmos com uma base positiva < 1 (por exemplo $\frac{1}{2}$), obteremos uma função estritamente decrescente.

Vamos agora dar o passo decisivo de dizer o que é natural entender pelo símbolo 2^x quando x é irracional. Para fixar ideias, consideremos o problema de dizer o que é $2^{\sqrt{3}}$. Recordemos que $\sqrt{3}$ (ou qualquer outro número) pode ser aproximado por sucessões de números racionais, tanto por defeito como por excesso, concretamente:

$$\begin{gathered} 1 < \sqrt{3} < 2 \\ 1.7 < \sqrt{3} < 1.8 \\ 1.73 < \sqrt{3} < 1.74 \\ 1.732 < \sqrt{3} < 1.733 \\ \cdots \qquad \cdots \end{gathered}$$

Se pretendermos que para os novos símbolos valham ainda as propriedades anteriores, então em particular a monotonia deve verificar-se e por isso, seja qual for o significado de $2^{\sqrt{3}}$ como número,

$$
\begin{aligned}
2 < 2^{\sqrt{3}} < 2^2 04 \\
2^{1.7} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1.8} \\
2^{1.73} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1.74} \\
2^{1.732} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1.74} \\
2^{1.732} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1.733} \\
\dots \qquad\qquad \dots
\end{aligned}
$$

Notemos que os membros extremos destas desigualdades são números que têm já um sentido, pois calculem-se através de radicais. Atendendo a que, por exemplo,

$$2^{1.732} = 3.32188\dots \qquad\qquad 2^{1.733} = 3.32418\dots$$

onde as casas decimais explicitadas são correctas, podemos concluir

$$3.32188 < 2^{\sqrt{3}} < 3.32418$$

e em particular

$$2^{\sqrt{3}} = 3.32\dots$$

já com duas casas desimais correctas.

Podemos resumir a ideia exposta do modo seguinte: Se nas desigualdades

$$a_n < \sqrt{3} < b_n$$

a_n (respect. b_n) é a sucessão das aproximações decimais por defeito (respect. por excesso) de $\sqrt{3}$ (lembremos que $a_n \to \sqrt{3}$ e $b_n \to \sqrt{3}$) então

$$2^{a_n} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{b_n} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \tag{3.6}$$

e, na verdade,

$$
\begin{aligned}
2^{\sqrt{3}} &= \lim 2^{a_n} \\
&= \lim 2^{b_n}
\end{aligned} \tag{3.7}
$$

Quer isto dizer que tanto podemos caracterizar o número $2^{\sqrt{3}}$ como o único que satisfaz (3.6) como pelas igualdades (3.7). Mas, atenção: estas igualdades *pressupoem* a existência dos limites das sucessões 2^{a_n}, 2^{b_n}; e de facto eles existem, mas não estudámos os números reais com profundidade suficiente para demonstrar esse facto.

De um modo geral, aceitaremos a seguinte definição de 2^x para x irracional:

enquadrando x entre as sucessões de aproximações racionais de x por defeito (a_n) e por excesso (b_n),

$$a_n < x < b_n \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

diremos que 2^x é o ***único*** número real tal que

$$2^{a_n} < 2^x < 2^{b_n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

ou ainda, é o número obtido como limite das sucessões 2^{a_n} e 2^{b_n}:

$$\begin{aligned} 2^x &= \lim 2^{a_n} \\ &= \lim 2^{b_n}. \end{aligned}$$

Convenhamos que, para já, não nos preocupamos mais com a justificação teórica da correcção desta definição. Então o que importa é que o símbolo 2^x fica com sentido *para todo o* $x \in \mathbb{R}$. Ora isto significa que está definida uma função real de variável real

$$E_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \text{tal que} \quad E_2(x) = 2^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

a que chamamos *(função) exponencial de base 2*.

Uma primeira observação simples sobre esta função é que:

$$\boxed{2^x > 0 \qquad\qquad \forall x \in \mathbb{R}.} \tag{A}$$

Com efeito, 2^x é um número que está, por definição, enquadrado entre números positivos!

Já é menos imediato, mas é verdade, que

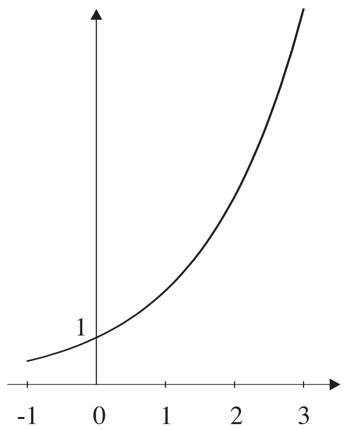
$$\boxed{\begin{array}{c}\text{A função } x \longmapsto E_2(x) = 2^x \text{ é estritamente} \\ \text{crescente em } \mathbb{R}.\end{array}} \tag{B}$$

Esta propriedade é a extensão natural do Facto 3.1.2. Convém ter presente que ela resulta essencialmente de ser $2 > 1$.

Não menos importante é que o modo como definimos 2^x arrasta que se conservem as importantes regras de cálculo conhecidas como *lei dos expoentes*:

$$\boxed{\begin{array}{c} 2^x \cdot 2^y = 2^{x+y}, \\ \text{(em particular } \; 2^x \cdot 2^{-x} = 1 \text{ e} \\ 2^{-x} = \frac{1}{2^x}\text{)} \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}. \end{array}} \tag{C}$$

O gráfico da função 2^x sugere ainda duas importantes propriedades:



$$\boxed{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} 2^x = +\infty \\ \text{e} \\ \lim\limits_{x\to-\infty} 2^x = 0 \end{array}} \qquad (D)$$

Com efeito: já sabemos que a *sucessão* 2^n $(n \in \mathbb{N})$ é um infinitamente grande; ora, para $x \in \mathbb{R}$ temos, em virtude de (B)

$$x \geqslant n \Rightarrow 2^x \geqslant 2^n$$

e, por isso, 2^x torna-se superior a qualquer número dado desde que x seja suficientemente elevado. Isto prova a primeira afirmação. Quanto à segunda, basta observar que

$$2^x = \frac{1}{2^{-x}}$$

e, quando $x \to -\infty$, temos $-x \to +\infty$.

É também importante (mas a demonstração não é das mais simples) que

$$\boxed{\text{A função } E_2(x) = 2^x \text{ é contínua em } \mathbb{R}.} \qquad (E)$$

Com base em (D), (B), (E) e invocando o Facto 2.2.2 e a observação que o segue, podemos concluir:

$$\boxed{\text{O contradomínio de } 2^x \text{ é }]0, +\infty[.} \qquad (F)$$

O que fizemos para definir 2^x pode repetir-se com o número 2 substituído por outro número $b > 0$ qualquer. (Há que ter o cuidado de distinguir o caso $b > 1$ do caso $b < 1$ pois a enquadramentos de x correspondem enquadramentos de b^x no mesmo sentido no 1º caso, e em sentidos contrários no 2º — recordar a observação a seguir ao Facto 3.1.2.) Assim damos sentido ao número b^x para cada real $b > 0$ e cada real x. Podemos então definir a *função exponencial de base* b como a função

$$E_b : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ tal que } E_b(x) = b^x, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(i) Se $b = 1$, é claro que, sem surpresas,

$$1^x = 1 \qquad\qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

e a *função exponencial de base 1* fica pouco interessante (é constante, e o que há a dizer sobre ela acaba aqui).

(ii) Se $b > 1$, a função E_b tem as propriedades (A), (B), (C), (D), (E) e (F) com o número 2 substituído pelo número b.

E, já que temos muitas bases à disposição, registemos que valem também as regras operatórias

$$\boxed{\begin{aligned} & b^x \cdot c^x = (bc)^x \\ & (b^x)^y = b^{xy} \qquad \forall b > 0,\, c > 0,\, x \in \mathbb{R}. \end{aligned}} \tag{G}$$

(iii) Se $0 < b < 1$, a função E_b tem as propriedades (A), (B), (C), (D), (E) e (F) com as alterações seguintes:

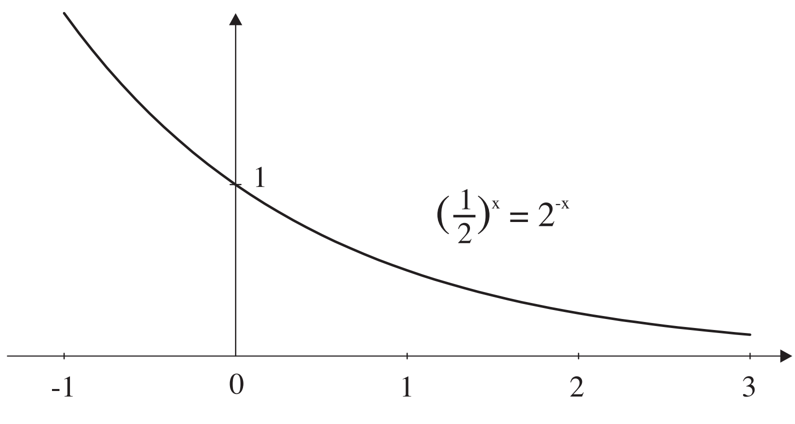
em (B) — *crescente* passa a *decrescente*;

em (D) — trocam-se os papéis de $+\infty$ e $-\infty$.

E é fácil de compreender porquê: de acordo com (G)

$$b^x = \frac{1}{\left(\frac{1}{b}\right)^x} = \left(\frac{1}{b}\right)^{-x};$$

quando $0 < b < 1$ temos $\frac{1}{b} > 1$. O gráfico de b^x é o que resulta do de $\left(\frac{1}{b}\right)^x$ por reflexão no eixo das ordenadas.



Com a série de factos seguintes, daremos a justificação teórica de propriedades da função exponencial, anteriormente apenas enunciadas.

Facto 3.2.3 $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{n}} = 1,$ *e* $\lim 2^{-\frac{1}{n}} = 1.$

Demonstração. Ponhamos

$$2^{\frac{1}{n}} = 1 + h_n. \tag{3.8}$$

Então $h_n > 0$, e utilizando **11, Facto Ap5.1**, obtemos

$$2 = (1 + h_n)^n \geqslant 1 + h_n n$$

pelo que:

$$0 < h_n \leqslant \frac{2-1}{n} = \frac{1}{n}\cdot$$

Pelo teorema das sucessões enquadradas, vem $\lim h_n = 0$ e de (3.8) conclui-se logo o primeiro resultado. O segundo é consequência imediata do primeiro, porque

$$2^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{n}}}$$

■

Facto 3.2.4 *Se x_n é uma sucessão de números racionais e $x_n \to 0$, então*

$$2^{x_n} \to 1.$$

Demonstração. Dado arbitrariamente $\delta > 0$, pelo Facto 3.2.3 há um número $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$1 - \delta < 2^{-1/p} < 2^{1/p} < 1 + \delta.$$

Depois, como $x_n \to 0$, há um número $q \in \mathbb{N}$ tal que

$$-\frac{1}{p} < x_n < \frac{1}{p} \quad \text{se } n \geqslant q.$$

Logo, se $n \geqslant q$

$$2^{-1/p} < 2^{x_n} < 2^{1/p}$$

e portanto todos os termos 2^{x_n} com $n \geqslant q$ são valores aproximados de 1 com erro que não excede δ. ■

Facto 3.2.5 *Se x_n é sucessão de números racionais e $x_n \to x$, com x racional, então*

$$2^{x_n} \to 2^x.$$

Demonstração. Tem-se $x_n - x \to 0$ e pelo Facto 3.2.4

$$2^{x_n - x} \to 1.$$

Mas $2^{x_n - x} = \frac{2^{x_n}}{2^x}$, e por isso

$$2^{x_n} = 2^x \cdot 2^{x_n - x} \to 2^x \cdot 1 = 2^x.$$

■

Facto 3.2.6 *Seja x um número irracional e x_n uma sucessão* qualquer *de racionais tal que $x_n \to x$. Então*

$$2^x = \lim 2^{x_n}.$$

Demonstração. Considerando, por exemplo, a sucessão a_n em (3.6), temos $x_n \to x$, $a_n \to x$, e por isso

$$x_n - a_n \to 0, \qquad \text{pelo que} \qquad 2^{x_n - a_n} \to 1$$

em virtude do Facto 3.2.4. Então, por definição de 2^x:

$$2^{x_n} = 2^{x_n - a_n} \cdot 2^{a_n} \to 1 \cdot 2^x = 2^x.$$

■

Facto 3.2.7 (Leis dos expoentes) *Para* quaisquer *números reais x, y*

$$2^{x+y} = 2^x \cdot 2^y.$$

Demonstração. Sejam a_n (respect. $\bar{a}_n$) as sucessões de aproximação decimal, por defeito, de x (respect. y). Então, sabemos que

$$2^{a_n + \bar{a}_n} = 2^{a_n} \cdot 2^{\bar{a}_n}. \tag{3.9}$$

Ora, temos $a_n \to x$, $\bar{a}_n \to y$ e $a_n + \bar{a}_n \to x + y$; logo, aplicando o Facto 3.2.6 e limites a ambos os membros de (3.9)

$$2^{x+y} = 2^x \cdot 2^y.$$

■

Corolário 3.2.1 $2^{-x} = \dfrac{1}{2^x}\cdot$

Facto 3.2.8 *A função 2^x só toma valores positivos e é estritamente crescente em $\mathbb{R}$.*

Demonstração. Se $x \in \mathbb{Q}$, é claro que $2^x > 0$.

Se $x < y$ são números reais arbitrários, tomemos a, $b \in \mathbb{Q}$ tais que[1]

$$x < a < b < y.$$

Seja $\bar{x_n}$ a sucessão de aproximações decimais por excesso de x e y_n a sucessão de aproximações decimais por defeito de y. Então, para n suficientemente grande

$$x < x_n < a < b < y_n < y$$

e por isso

$$2^x = \lim 2^{x_n} \leqslant a < b \leqslant \lim 2^{y_n} = 2^y.$$

Resulta que, se $x \in \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{Q}$ é tal que $a < x$, temos $2^x > 2^a > 0$. ■

[1]É fácil constatar que entre dois números reais quaisquer há sempre um racional, mas não detalhemos aqui a teorização do assunto. O leitor poderá pensar em termos de dízimas ...

Facto 3.2.9 *Se x_n é uma sucessão qualquer de números reais e $x_n \to 2$, então $2^{x_n} \to 2^x$. Isto é, a função 2^x é contínua em $\mathbb{R}$.*

Demonstração. Esolhamos uma sucessão y_n de números racionais tal que

$$x_n < y_n < x_n + \frac{1}{n}$$

de modo que $y_n \to x$. Por isso,

$$2^{y_n} \to 2^x$$

(pelos Factos 3.2.5 e 3.2.6). Mas

$$2^{x_n} < 2^{y_n} < 2^{x_n + 1/n} = 2^{x_n} \cdot 2^{1/n}$$

e portanto

$$2^{y_n} 2^{-1/n} < 2^{x_n} < 2^{y_n}.$$

O teorema das sucessões enquadradas implica então $2^{x_n} \to 2^x$. ∎

O que se prova com a base 2 pode repetir-se com outra base positiva qualquer.

Assim, se $b > 0$ é dado e $x \in \mathbb{R}$, o símbolo b^x pode ser entendido como

$$\boxed{b^x = \lim b^{x_n}}$$

onde x_n é uma sucessão qualquer (de números racionais) tal que $x_n \to x$.

Para referência futura registemos que:

A função $x \mapsto b^x$, assim definida em $\mathbb{R}$, é contínua; é estritamente crescente (respect. decrescente) se $b > 1$ $(b < 1)$ e satisfaz as leis dos expoentes se b, c são números positivos e x, $y \in \mathbb{R}$:

(i) $b^{x+y} = b^x \cdot b^y$,

(ii) $b^x \cdot c^x = (bc)^x$,

(iii) $(b^x)^y = b^{xy}$.

Demonstração. (i) Se x é racional, (ii) é bem conhecida. Se x é irracional, considerando $x_n \to x$ com $x_n \in \mathbb{Q}$ temos

$$b^{x_n} \cdot c^{x_n} = (bc)^{x_n}$$

e, por passagem ao limite e definição, obtemos (ii).

(ii) Se x e y são racionais, (iii) é bem conhecida. Se y é racional, e se x_n é uma sucessão de racionais com $\lim x_n = x$, então

$$b^{x_n} \longrightarrow b^x$$

e, como a função $g(z) = z^y$ é contínua, temos

$$(b^{x_n})^y \longrightarrow (b^x)^y .$$

Mas

$$(b^{x_n})^y = b^{x_n y} \longrightarrow b^{xy}$$

visto que $x_n y \to xy$. Logo, $(b^x)^y = b^{xy}$.

Se y não é racional, tomando y_n, sucessão de racionais, tal que $y_n \to y$, obtemos sucessivamente

$$\begin{aligned} (b^x)^{y_n} &= b^{xy_n} \qquad \text{(pelo que acabamos de demonstrar)}, \\ \lim (b^x)^{y_n} &= \lim b^{xy_n}, \\ (b^x)^y &= b^{xy}. \end{aligned}$$

■

As propriedades básicas das funções exponenciais permitem-nos efectuar cálculos algébricos e resolver certas equações e inequações, como ilustram os seguintes exemplos.

EXEMPLO 3.2.1. Factorizar $3^{2x} - 3^{-2x}$, com $x \in \mathbb{R}$: observando que

$$3^{2x} = (3x)^2, \qquad 3^{-2x} = (3^{-x})^2$$

temos, simplesmente,

$$3^{2x} - 3^{-2x} = (3^x + 3^{-x})(3^x - 3^{-x}).$$

EXEMPLO 3.2.2. Resolver a equação $5^{2x} = 5^x$. Escrevendo a equação na forma

$$(5x)^2 = 5^x$$

e atendendo a que $5^x > 0$, vemos que ela é eauivalente a

$$5^x = 1$$

o que equivale a $x = 0$.

EXEMPLO 3.2.3. Quais são as soluções da inequação

$$16^x < 8 \cdot 2^x\,?$$

Como $16^x = 2^{4x}$, obtemos, sucessivamente

$$2^{4x} < 8 \cdot 2^x,$$
$$2^{3x} < 8$$

(miltiplicando ambos os membros por 2^{-x}),

$$3x < 3$$

(porque a função $t \mapsto 2^t$ é estritamente crescente),

$$x < 1.$$

Consideremos uma função do tipo

$$f(x) = Cb^x$$

onde C é uma constante real e $b > 0$. Então é fácil constatar as seguintes propriedades que revelam características importantes do comportamento das exponenciais:

> Quando x percorre os termos de uma progressão aritmética, $f(x)$ percorre os termos de uma progressão geométrica.

Com efeito, se

$$x = x_0 + nk \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

(progressão aritmética de 1º termo x_0 e razão k) temos

$$f(x_0 + nk) = Cb^{x_0+nk} = Cb^{x_0}(b^k)^n$$

(progressão geométrica de 1º termo Cb^{x_0} e razão b^k.)

> A taxa média de variação percentual de f toma o mesmo valor em todos os intervalos com um comprimento dado.

Na realidade, a taxa média de variação percentual no intervalo $[a, a+h]$ de *comprimento* h é

$$\frac{Cb^{a+h} - Cb^a}{hCb^a} = \frac{Cb^a(b^h - 1)}{hCb^a} = \frac{b^h - 1}{h}\,;$$

como se vê, depende só de h, não de a.

Exercícios da Secção 3.2

$\boxed{1}$ Verificar que há funções da forma $y = Cb^x$ com as tabelas de valores

x	2	4	6	8
y	4	36	324	2916

x	2	4	6	8
y	10	1	0.1	0.01

$\boxed{2}$ Construir, a partir do gráfico de b^x, com $b > 1$, o gráfico de $2b^{-x}$.

$\boxed{3}$ Fazer esquema dos gráficos de

$$3^{x+2} \qquad 3^{1-x} \qquad 0.2^{x-1}$$

$\boxed{4}$ Determinar $5^{\sqrt{2}}$ com duas casas decimais correctas usando a calculadora apenas para cálculos com potências de expoente racional.

$\boxed{5}$ Resolver as equações e inequações

$$9^x = 3, \quad 10^x = 0.001; \quad \left(3^{2x} \cdot 3^2\right)^4 = 27; \quad 10^{4x} = 10^{x+1}; \quad 2^{3x+1} < 2^{x+4}; \quad 2^x < \frac{2}{1+2^x} \cdot$$

$\boxed{6}$ Completar as decomposições em factores seguintes

$$\begin{aligned} 10^{x+h} - 10^x &= 10^x \cdot (\qquad) \\ 2^x + 2^{-x} &= 2^x \cdot (\qquad) \\ 9^x - 1 &= (3^x - 1) \cdot (\qquad) \\ 10^x - 1 &= (10^{x/2} + 1) \cdot (\qquad) \end{aligned}$$

$\boxed{7}$ Escrever $\dfrac{2^x - 1}{2^x + 1}$ como fracção em que o numerador seja $1 - 2^{-x}$.

$\boxed{8}$ Simplificar $\dfrac{2^{2x} - 1}{2^x + 1} \cdot$

3.3 Função logarítmica. Derivação das funções exponenciais e logarítmicas

Fixemos uma base $b > 1$. Sabemos que a função exponencial

$$E_b(x) = b^x$$

é estritamente crescente e contínua, e tem como imagem $]0, +\infty[$. Então ela tem uma inversa, que designamos por *função logarítmica de base* b e representamos por $\log_b$. Trata-se de uma função

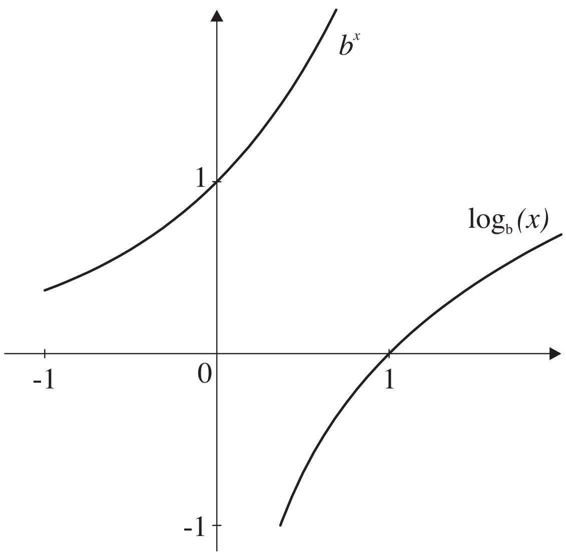
$$\log_b :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$$

caracterizada por

$$\log_b(x) = y \quad \Longleftrightarrow \quad x = b^y.$$

O valor $\log_b(x)$ em x chama-se *logaritmo de* x (*na base* b) e o gráfico de $\log_b$ obtém-se reflectindo o de E_b relativamente à recta $y = x$. Por definição tem-se, pois:

$$\boxed{\log_b(b^y) = y; \qquad b^{\log_b(x)} = x \qquad \forall x > 0,\ \forall y \in \mathbb{R}.}$$



Em particular:

$\log_b 1 = 0$
$\log_b b = 1.$
$\log_b(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1.$
$\log_b(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1.$
O contradomínio de $\log_b(x)$ é $\mathbb{R}$.

As propriedades da função logarítmica obtêm-se facilmente a partir das da exponencial. Em primeiro lugar, observemos que, tal como a exponencial, também $\log_b$ é estritamente crescente; mas, como o seu gráfico evidencia, cresce de modo "muito mais lento" do que a exponencial (esta ideia será retomada adiante em termos mais precisos).

Por outro lado, as propriedades dos expoentes têm uma interessante contrapartida no modo como $\log_b$ se comporta com os produtos e as potências.

Temos
$$\log_b(xy) = \log_b(x) + \log_b(y) \quad \forall x, y > 0.$$
E, se $c > 0$,
$$\log_b(c^x) = x \log_b c.$$

Como
$$b^{\log_b(x)+\log_b(y)} = b^{\log_b(x)} \cdot b^{\log_b(y)} = xy,$$
concluímos imediatamente a 1^{a} igualdade. Do mesmo modo, a 2^{a} resulta de
$$b^{x \log_b c} = (b^{\log_b c})^x = c^x.$$

E, em consequência,

Para todo o x, $y > 0$
$$\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b x - \log_b y$$
e, em particular
$$\log_b\left(\frac{1}{y}\right) = -\log_b y.$$

Porque
$$\begin{aligned}\log_b\left(\frac{x}{y}\right) &= \log_b(x \cdot y^{-1}) = \log_b(x) + \log_b(y^{-1})\\ &= \log_b(x) - \log_b(y).\end{aligned}$$
em consequência das duas propriedades anteriores.

Podemos dizer, em linguagem um pouco mais vaga, que os logaritmos "transformam produtos em somas, cocientes em diferenças, expoentes em factores".

Que diferencia então as exponenciais uma das outras? Por exemplo, se compararmos 2^x e 3^x, podemos dizer que, apesar de terem muitas características em comum (são estritamente crescentes, valem 1 em $x = 0$, verificam as leis de expoentes ...), são obviamente distintas porque:

— em $x = 1$, uma vale 2 e outra vale 3;

— 3^x tende para $+\infty$ "com maior rapidez que" 2^x, visto que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3^x}{2^x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^x = +\infty.$$

Mas um elemento de distinção crucial entre as funções exponenciais é o valor da sua derivada no ponto $x = 0$.

Facto 3.3.1 *A função exponencial de base b tem derivada na origem.*

Esta afirmação é verdadeira mas não pode ser aqui demonstrada. Repare-se que estamos a afirmar que existe o limite

$$\lim_{h\to 0} \frac{b^x - 1}{h} = E_b'(0).$$

Facto 3.3.2 *A função exponencial de base b tem derivada em todos os pontos, e a derivada é proporcional à função:*

$$E_b'(x) = E_b'(0)E_b(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Demonstração. Tem-se

$$\begin{aligned} E_b'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{b^{x+h} - b^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{b^x(b^h - 1)}{h} = b^x \lim_{h\to 0} \frac{b^h - 1}{h} \\ &= E_b'(0)E_b(x). \end{aligned}$$

■

Este facto, que pode ser reenunciado como

$$\frac{E_b'(x)}{E_b(x)} = E_b'(0) \ (= \text{ constante})$$

mostra que *cada função exponencial tem taxa de variação instantânea percentual constante*, e por isso é, em princípio, modelo adequado para a descrição dos fenómenos referidos na abertura deste capítulo.

Vemos que a constante de proporcionalidade entre $E_b'(x)$ e $E_b(x)$ é $E_b'(0)$. Ela depende, pois, de b, mas sem conhecimentos mais profundos não nos é possível explicitar essa dependência. Para compreendermos, no actual nível de estudos, a estrutura das funções exponenciais, vai ser necessário, mais uma vez, *aceitar sem demonstração* a afirmação seguinte:

Facto 3.3.3 *Há uma base, que representamos por e, tal que*

$$E_e'(0) = 1$$

e portanto

$$E_e'(x) = E_e(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Este enunciado tem a maior relevância na teoria da função exponencial, como se irá tornando claro. Explicitado de outro modo, ele significa que:

Há um número (representado por e) que tem a propriedade

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

e por isso a função exponencial de base e tem a propriedade de ser igual à sua própria função derivada:

$$\text{Se } f(x) = e^x, \quad \text{então} \quad f'(x) = e^x, \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

E em consequência da regra de derivação da função composta, temos: se $g(x)$ é uma função com derivada num dado intervalo e $f(x) = e^{g(x)}$, então

$$f'(x) = e^{g(x)} \cdot g'(x).$$

Em particular, se f é definida por uma expressão do tipo

$$f(x) = Ce^{\alpha x} \tag{$*$}$$

onde C e α são constantes, então

$$f'(x) = C\alpha e^{\alpha x} = \alpha f(x)$$

e conclui-se (quando $C \neq 0$)

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \alpha$$

o que significa que todas as funções da forma $(*)$ têm taxa de variação percentual constante.

Podemos desde já informar o leitor de que o número e é um dos números com papel mais relevante em Matemática (a par de 0, 1, π, $\ldots$), que é um número irracional e que admite a representação decimal

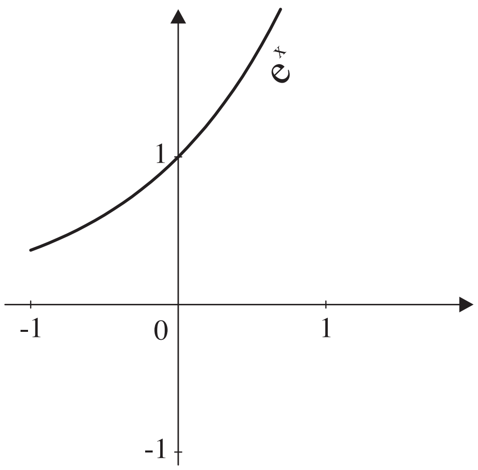
$$e = 2.718\ldots$$

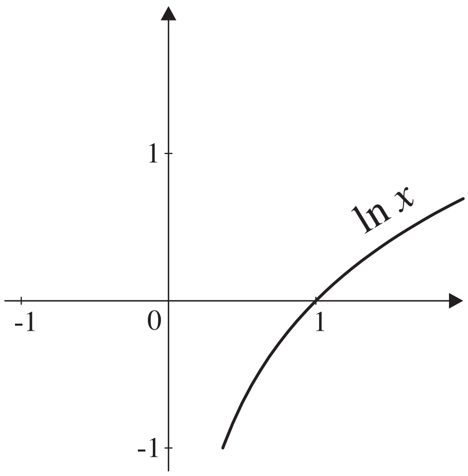
onde as casas indicadas estão correctas.

A função exponencial de base e é tão importante que lhe chamamos, simplesmente, *função exponencial* e todas as máquinas de cálculo a incluem no seu software (a par de outras funções básicas como as potências, o seno, o coseno, a tangente, etc.)

Tratando-se de uma base> 1, a *exponencial* (de base e) é uma função estritamente crescente. A sua função inversa chama-se simplesmente *função logarítmica* e representa-se por $\ln$, de modo que, por definição, $\log_e = \ln$, e

$$\boxed{u = \ln v \iff v = e^u \qquad \forall v > 0, \quad \forall u \in \mathbb{R}.}$$





Registemos propriedades importantes das funções e^x e $\ln x$:

$\ln 1 = 0$;

$\ln e = 1$;

$\ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$;

$\ln x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$;

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$;

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$;

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$;

$\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$.

As duas últimas asserções podem ser consideradas consequência imediata da definição de $\ln$, bastando ter em conta a relação entre os gráficos de e^x e $\ln x$.

Facto 3.3.4 *A derivada da função logarítmica é a função* $\frac{1}{x}$ *:*

$$\ln'(x) = \frac{1}{x} \cdot$$

<u>Demonstração.</u> De acordo com o que vimos na secção 1.5, e já que $y = \ln x$ equivale a $x = e^y$,

$$\ln'(x) = \left. \frac{1}{e^y} \right|_{y = \ln x} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}. \qquad \blacksquare$$

Facto 3.3.5 *A derivada de b^x é $(\ln b)b^x$:*

$$E_b'(x) = (\ln b) \cdot E_b(x),$$

ou

$$(b^x)' = (\ln b)b^x.$$

Demonstração. Por definição de ln, $b = e^{\ln b}$. Então

$$b^x = (e^{\ln \ b})^x = e^{(\ln b)x}$$

e, aplicando a regra de derivação da função composta, obtém-se imediatamemte o resultado.

■

Em particular, $E_b'(0) = \ln b$, o que significa que

$$\lim_{x \to 0} \frac{b^x - 1}{x} = \ln b.$$

Com a mudança de variável $x = \frac{1}{y}$, o mesmo é dizer que

$$\lim_{y \to \pm\infty} y(b^{1/y} - 1) = \ln b.$$

Daqui se conclui que a sucessão

$$n(b^{1/n} - 1) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

tem limite $\ln b$. Podemos agora compreender o significado do número $0.048790\ldots$ que surgiu na Secção 3.1 como limite de (3.3): esse número não é senão $\ln 1.05$.

OBSERVAÇÃO. Podemos agora concluir que, para qualquer base $b > 0$ a função exponencial de base b tem a concavidade para cima, visto que

$$E''{}_b(x) = (\ln b)^2 E_b(x) \geqslant 0.$$

(na verdade, > 0 se $b \neq 1$). Pelo contrário, a função logarítmica $\ln$ tem a concavidade para baixo, visto que

$$\ln''(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} < 0.$$

Facto 3.3.6 *Se $f : I \to \mathbb{R}$ é uma função com derivada no intervalo I e que só toma valores positivos, então*

$$D_x \ln(f(x)) = \frac{f'(x)}{f(x)}\,.$$

Demonstração. Pela regra de derivação da função composta,

$$\begin{aligned} D_x \ln(f(x)) &= D_u \ln u|_{u=f(x)} f'(x) \\ &= \frac{1}{u}\bigg|_{u=f(x)} \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}. \end{aligned}$$

■

EXEMPLOS. $D_x \ln(3x) = \dfrac{3}{3x} = \dfrac{1}{x}$.

$$D_x(\ln x^2) = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x} \cdot$$

EXEMPLO 3.3.1: UMA FÓRMULA BÁSICA. Seja k um número real qualquer, fixado. Então

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+kx)}{x} = k.} \tag{3.10}$$

Com efeito, podemos escrever

$$\frac{\ln(1+kx)}{x} = \frac{\ln(1+kx) - \ln(1+k\cdot 0)}{x-0}$$

que é a taxa de variação da função $f(x) = \ln(1+kx)$ no intervalo de extremos 0, x. Logo, o seu limite quando $x \to 0$ é a derivada desta função no ponto $x = 0$, ou seja, o valor de

$$\frac{k}{1+kx} \quad \text{para } x = 0,$$

que é k.
Como a função exponencial é contínua, de (3.10) resulta, por sua vez,

$$e^{\lim_{x\to 0} \ln(1+kx)/x} = \lim_{x\to 0} e^{\ln(1+kx)/x} \tag{3.11}$$

Pelas leis dos expoentes

$$e^{\ln(1+kx)/x} = \left(e^{\ln(1+kx)}\right)^{1/x} = (1+kx)^{1/x}$$

e obtemos

$$\boxed{\lim_{x\to 0}(1+kx)^{1/x} = e^k.} \tag{3.12}$$

Em particular, se substituirmos em (3.12) a variável x por *qualquer* sucessão, $x_n \to 0$, obtemos

$$\lim(1 + kx_n)^{1/x_n} = e^k.$$

Podemos tomar $x_n = \frac{1}{n}$:

$$\boxed{\lim\left(1 + \frac{k}{n}\right)^n = e^k.} \tag{3.13}$$

Mais concretamente ainda, vemos que o número e pode ser obtido como limite da sucessão $(1 + \frac{1}{n})^n$:

$$\boxed{\lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.}$$

Com argumentos semelhantes, podemos calcular alguns outros limites de funções em que a variável independente surge na base e no expoente de uma potência.

EXEMPLO 3.3.2. Para calcular

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x-1}{3x+1}\right)^x$$

começamos por escrever

$$\left(\frac{3x-1}{3x+1}\right)^x = e^{x\ln\frac{3x-1}{3x+1}};$$

e, atendendo a que

$$\frac{3x-1}{3x+1} = \frac{3x+1-2}{3x+1} = 1 - \frac{2}{3x+1}$$

e à continuidade da função exponencial, temos

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x-1}{3x+1}\right)^x = e^{\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1-\frac{2}{3x+1}\right)}. \tag{$*$}$$

Com a mudança de variável

$$\frac{1}{3x+1} = y, \qquad \text{ou seja} \qquad x = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3y}\,,$$

vem:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1 - \frac{2}{3x+1}\right) &= \lim_{y\to0}\left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{3y}\right)\ln(1-2y)\\ &= \lim_{y\to0}\frac{\ln(1-2y)}{3y}\end{aligned}$$

(visto que $\lim_{y\to0}\left(-\frac{1}{3}\ln(1-2y)\right) = 0$.) A última fracção é a taxa de variação da função $\ln(1-2y)$ (no intervalo de extremos y, 0), dividida por 3, e por isso o valor do limite acima é $-\frac{2}{3}\cdot$ Regressando a ($*$), o valor do limite pedido é $e^{-2/3}$.

Os limites calculados nestes exemplos correspondem à resolução de *indeterminações* (ver o APÊNDICE) uma vez que passamos pelo cálculo do limite de um produto em que um dos factores tende para infinito e o outro tende para zero (é o caso de $x \ln \frac{3x-1}{3x+1}$, quando $x \to +\infty$, no último exemplo).

Se, em vez disso, quisermos calcular

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x-1}{x+1}\right)^x = e^{\lim_{x\to+\infty} x \ln\left(1-\frac{4}{x+1}\right)}$$

não há indeterminação, pois no expoente um dos factores tende para $+\infty$ e o outro para $\ln 3$, que é positivo; conclui-se que o limite pedido é $+\infty$.

Tendo introduzido as funções logarítmicas, somos agora capazes de dar nomes às soluções de mais equações e inequações:

EXEMPLO 3.3.3. Resolver a equação $2^{2x} = 3 \cdot 2^{-x}$. Temos, sucessivamente, as equações equivalentes

$$\begin{aligned} 2^{3x} &= 3, \\ 3x &= \ln_2 3, \\ x &= \frac{1}{3}\ln_2 3 \ \left(= \ln_2 \sqrt[3]{3}\right). \end{aligned}$$

EXEMPLO 3.3.4. Para resolver $e^{2x} + e^x - 6 = 0$, observamos que, com $u = e^x$, esta equação se transforma na equação quadrática

$$u^2 + u - 6 = 0$$

cujas raizes são $u = -3$, $u = 2$. Como u é valor da exponencial, necessariamente $u = 2$ e então $e^x = 2$, $x = \ln 2$.

EXEMPLO 3.3.5. Para resolver a inequação

$$\ln(1+x) - \ln x > 3$$

podemos proceder à seguinte série de passos:

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{1+x}{x}\right) &> 3, \\ \frac{1+x}{x} &> e^3, \\ 1+x &> e^3 x \end{aligned}$$

(porque só nos interessam valores positivos de x),

$$0 < x < \frac{1}{e^3 - 1}.$$

Terminamos esta secção observando que, a partir de agora, podemos considerar *funções potência com expoente real qualquer*. Já sabemos o significado de funções como x^3, $x^{5/2}$, $x^{-3/7}$, ... Mas agora tem também sentido uma função como

$$x^{\sqrt{2}}.$$

(Note-se a diferença para as funções exponenciais: aqui a variável independente é a *base* e não o *expoente* da potência.)

A definição e o tratamento de uma tal função faz-se reduzindo-a a exponenciais adequadas. De uma maneira geral, a função

$$f(x) = x^\alpha$$

em que α é uma constante real, tem domínio $]0, +\infty[$ e pode exprimir-se como

$$x^\alpha = (e^{\ln x})^\alpha = e^{\alpha \ln x}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}(x^\alpha)' &= (e^u)'|_{u=\alpha \ln x} \cdot (\alpha \ln x)' \\ &= e^{\alpha \ln x} \cdot \frac{\alpha}{x} \\ &= x^\alpha \frac{\alpha}{x},\end{aligned}$$

ou seja:

$$\boxed{(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}.}$$

Uma consequência importante de **11**, Facto 4.7.3 é o seguinte

Facto 3.3.7 *Se f é uma função real definida no intervalo I e se*

$$f'(x) = 0 \qquad \forall x \in I$$

então f é constante *em I.*

Efectivamente, na nossa hipótese é verdade que $f' \geqslant 0$ em I e também que $f' \leqslant 0$ em I, pelo que se conclui que f é crescente em I e decrescente em I. A conclusão, como é facil de ver, só pode ser que f é constante em I.

Este facto permite-nos ir mais longe na caracterização das funções de tipo exponencial. Como já observámos, qualquer função definida em $\mathbb{R}$ por uma expressão designatória

$$Ce^{\alpha t}$$

onde C e α são constantes, tem taxa de variação percentual constante. Mais precisamente, ela tem a propriedade de ser uma função $Q(t)$ para a qual

$$\frac{Q'(t)}{Q(t)} = \alpha \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

(se $C \neq 0$), ou, escrito de outro modo

$$Q'(t) = \alpha Q(t) \qquad \forall t \in \mathbb{R} \tag{3.14}$$

(e sob esta forma já podemos incluir o caso $C = 0$).

Ora, tem todo o sentido que nos interroguemos: serão as funções de tipo exponencial as únicas com a propriedade (3.14)? Não haverá outras funções reais de variável real que possam servir de modelo aos fenómenos com taxa de variação percentual constante? Estamos agora em condições de dar uma resposta:

Facto 3.3.8 *Seja $Q(t)$ uma função com domínio $\mathbb{R}$, com derivada em todos os pontos, e satisfazendo* (3.14)*. Então há um número $C \in \mathbb{R}$ tal que*

$$Q(t) = Ce^{\alpha t} \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

(Por outras palavras: não há outras funções, além das de tipo exponencial, com a propriedade (3.14)*).*

Demonstração. Seja $Q(t)$ função com a propriedade (3.14) e construamos outra função g definida como

$$g(t) = Q(t)e^{-\alpha t}.$$

Temos, para cada $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} g'(t) &= Q'(t)e^{-\alpha t} - \alpha e^{-\alpha t}Q(t) \\ &= e^{-\alpha t}(Q'(t) - \alpha Q(t)) = e^{-\alpha t} \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

em virtude da hipótese. Logo, utilizando o facto anterior, concluímos que g é constante, ou seja, que há um número $C \in \mathbb{R}$ tal que

$$g(t) = C \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Isto significa

$$Q(t)e^{-\alpha t} = C \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

e, finalmente,

$$Q(t) = Ce^{\alpha t} \qquad \forall t \in \mathbb{R}. \qquad \blacksquare$$

Exercícios da Secção 3.3

$\boxed{1}$ Calcular:

$$\log_2 64; \qquad \log_8 8; \qquad \log_2 8; \qquad \log_{10} 10\,000;$$

$$\log_7 \frac{1}{7}; \qquad \log_{32} \frac{1}{2}; \qquad \log_{10} 100^{-3}; \qquad \log_{25} \sqrt{5};$$

$$\log_{2/3} \frac{4}{9}; \qquad \log_{\sqrt{3}} 9; \qquad \log_3 \frac{1}{81};$$

$\boxed{2}$ Resolver as equações:

$$3 \cdot \log_8(2x+15) = 7; \qquad 2 \cdot 10^x + 0.5 = 7.22;$$
$$3 \cdot 2^{5t} = 100; \qquad \ln(5x-10) = 0.8;$$
$$\log_3 x = 4; \qquad e^{x+1} - 20 = 4;$$
$$\log_x 2 = \log_3 x; \qquad \ln x + \ln(x+1) = 1;$$
$$\ln(2x) - \ln(2x+1) = 0; \qquad \ln(3x+1) - \ln(3x) = 2;$$
$$2\log_5 x + \log_5(5x) = 3.$$

$\boxed{3}$ Resolver as inequações:

$$2^x > 0; \qquad 2^x > 1; \qquad 2^x < 8; \qquad 2^{3x} - 4 < 0;$$
$$e^x > 2; \qquad e^{2x-1} < -1; \qquad e^{2x} - 2^x < 0; \qquad \ln x < \ln(1-2x).$$

$\boxed{4}$ Simplificar:

$$\ln e^3; \qquad \ln e^{-1};$$
$$e^{4\ln 3}; \qquad \log_{10}(\log_{10} 10);$$
$$\tfrac{3}{2}\ln 4 - 3\ln 2; \qquad \ln 2 - \ln x + \ln 7.$$

$\boxed{5}$ Determinar o número k tal que, para a função $f(x) = Cb^x$:

(a) $f(x+k) = 2f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$,

(b) $f(x+k) = 3f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$.

$\boxed{6}$ Determinar as derivadas das funções seguintes:

$$e^{2x}; \qquad 3^x; \qquad 5^{2x};$$
$$e^{x^2}; \qquad xe^x; \qquad xe^{-x};$$
$$(x+1)e^{-x^2}; \qquad xe^{2x+1}; \qquad \frac{1}{2}(e^x + e^{-x});$$
$$\log(2x+1); \qquad x\ln x; \qquad \ln(1+x^2);$$
$$(\log(1-x))^2; \qquad [e^{-2x}(1+e^{3x})]^{10}; \qquad (2x+1)^{\sqrt{3}}.$$

$\boxed{7}$ $\dfrac{\ln x + 1}{x}$ tem um extremo relativo para $x > 0$. Determinar o seu valor. É um máximo relativo?

$\boxed{8}$ Determinar máximos e mínimos (relativos, absolutos) das funções seguintes:

$$(1+x)e^{-x}; \qquad \frac{2x-1}{e^{3x}}; \qquad \frac{(x-1)^2}{e^{x/4}}; \qquad x - \ln x; \qquad \frac{x}{1-\ln x}.$$

$\boxed{9}$ Para que valor de α é a recta $y = \alpha x$ tangente ao gráfico de $y = e^x$? A partir do conhecimento do gráfico da função exponencial, que conclusões se podem tirar sobre o número de soluções da equação

$$e^x = \alpha x$$

em termos de α?

$\boxed{10}$ Estudar, quanto a existência de extremos, relativos ou absolutos, de assíntotas, e ao sentido da concavidade, as funções

(a) $\dfrac{e^x}{x}$, com domínio $]o, +\infty[$;

(b) $\dfrac{e^x}{1+e^x}$, definida em $\mathbb{R}$; $\dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$, definida em $\mathbb{R}$;

(c) $\dfrac{\ln x}{x}$, definida em $]0, +\infty[$;

(d) $x^2 - \ln x$, definida em $]0, +\infty[$.

$\boxed{11}$ Qual é maior: $4^{\sqrt{3}}$ ou $4.1^{\sqrt{3}}$?
(Sugestão: a função $x^{\sqrt{3}}$ é monótona ?)

$\boxed{12}$ Qual é maior: $\sqrt[7]{7}$ ou $\sqrt[8]{8}$?

$\boxed{13}$ Qual é maior: $0.1^{0.1}$ ou $0.1^{0.2}$?

3.4 Exemplos de aplicação das funções exponenciais e logarítmicas

EXEMPLO 3.4.1. Uma população de moscas da fruta evoluiu de acordo com o seguinte quadro:

Dia	Nº de elementos da população
0	200
10	380
20	722
30	1371
...	...

Como a tempos em progressão aritmética correspondem valores em progressão [aproximadamente] geométrica, somos levados a supôr que a lei de crescimento desta população faz intervir uma função exponencial. Se assumirmos que essa função é do tipo

$$N(t) = Ce^{kt}$$

onde t é o tempo em dias e $N(t)$ a população no tempo t, temos

$$N(0) = Ce^0 = C$$

e por isso

$$C = 200.$$

Por outro lado, como

$$N(10) = 200e^{10k}$$

temos

$$\begin{aligned}
&200e^{10k} = 380 \\
&e^{10k} = 1.9 \\
&10k = \ln 1.9 \approx 0.64185 \\
&k \approx 0.064.
\end{aligned}$$

Assim, a função procurada será

$$N(t) = 200e^{0.064t}.$$

EXEMPLO 3.4.2. Examinando o seguinte quadro do recenseamento da população dos Estados Unidos, somos tentados a utilizar como modelo de crescimento populacional, pelo menos no período temporal indicado, uma função exponencial.

Ano	Nº População (milhões)
1790	3.93
1800	5.31
1810	7.24
1820	9.64
1830	12.87
1840	17.07
1850	23.19
1860	31.44
1870	39.82
1880	50.16
1890	62.95
...	...

Se essa função é

$$N(t) = Ce^{kt}$$

onde t é o tempo em anos e t= 0 corresponde a 1790, obtemos, a partir dos primeiro e último dados

$$3.93 = N(0) = C$$
$$62.95 = N(100) = Ce^{100k} = 3.93e^{100k}$$

de onde

$$k = \frac{1}{100} \ln \frac{62.95}{3.93} = 0.027737$$

e portanto

$$N(t) = 3.93e^{0.027737t}$$

Esta fórmula dá uma aproximação razoável dos resultados do recenseamento no período temporal indicado, como o leitor pode comprovar com o auxílio da calculadora, mas é claramente inadequada para tempos posteriores. Por exemplo, em 1920 a população dos Estados Unidos era de 105 milhões, e a fórmula prevê mais de 144 milhões; em 1990, a população era de 250 milhões e a fórmula prevê mais de 1 bilião...

EXEMPLO 3.4.3. Sabe-se que uma substância radioactiva sofre desintegração de tal modo que a taxa de variação (instantânea) da quantidade de substância é proporcional à quantidade presente. Assim, se $m(t)$ é a massa de uma amostra existente no instante t, temos

$$m'(t) = -\lambda m(t)$$

onde $\lambda > 0$ (a constante de proporcionalidade, $-\lambda$, é negativa porque $m(t)$ é decrescente). Sabemos que funções do tipo

$$m(t) = Ce^{-\lambda t}$$

gozam desta propriedade, visto que $(Ce^{-\lambda t})' = Ce^{-\lambda t} \cdot (-\lambda)$, e portanto é natural que as usemos como modelo no fenómeno de desintegração radioactiva.
Nesta expressão, $C = m(0)$ representa a quantidade de substância presente no tempo $t = 0$. A constante λ é característica da substância e costuma ser referida como *constante de desintegração*.
Para que $m(t)$ se reduza a metade tem de decorrer um tempo T tal que

$$m(t+T) = \frac{1}{2}m(t)$$

ou seja,

$$Ce^{-\lambda t - \lambda T} = \frac{1}{2}Ce^{-\lambda t}$$

de onde concluímos

$$-\lambda T = -\ln 2$$

isto é,

$$T = \frac{1}{\lambda}\ln 2 \approx \frac{0.693}{\lambda}\,.$$

Este é o *tempo médio de vida* da substância em causa. Repare-se que depende apenas de λ e não de t, o que está de acordo com o facto de tempos igualmente espaçados produzirem quantidades em progressão geométrica (decrescente).

EXEMPLO 3.4.4. Quando um objecto arrefece num meio onde a temperatura θ é constante, a evolução da sua temperatura no tempo obedece à *lei de Newton do arrefecimento*: a taxa de variação da temperatura do objecto é proporcional à diferença entre a temperatura do objecto e a temperatura (θ) do meio envolvente. Representando por $T(t)$ a função que descreve a temperatura T do objecto (em °C) em cada instante t (referido a minutos, por exemplo), a lei que enunciámos significa que

$$T'(t) = -k(T(t) - \theta).$$

É fácil verificar que qualquer função do tipo

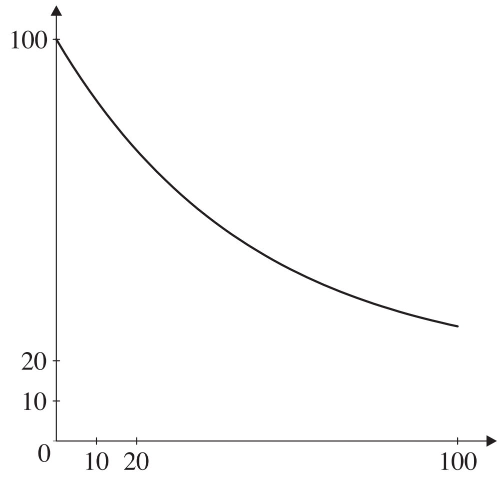
$$T(t) = \theta + Ce^{-kt}$$

satisfaz esta lei, e por isso é natural usar esta família de funções como modelo de fenómenos simples de arrefecimento. (Ver exercício 19.)
Se, por exemplo, introduzimos uma chávena de água a ferver (isto é, a 100°C) numa sala cuja temperatura se conserva a 18°C, e se o arrefecimento obedece à lei de Newton, podemos calcular

$$T(0) = 100 = 18 + C,$$

isto é,

$$C = 82.$$



Suponhamos que ao fim de 5 minutos a temperatura desceu para 92°C:

$$T(5) = 92 = 18 + 82e^{-5k}.$$

Esta equação permite-nos calcular k:

$$e^{-5k} = \frac{74}{82} = 0.902439\ldots;$$
$$k = \frac{-\ln(0.902439\ldots}{5} = 0.02053.$$

Agora é possível prever, por exemplo, ao fim de quanto tempo se atinge a temperatura de 50°C ...

EXEMPLO 3.4.5: JUROS COMPOSTOS. A maneira mais simples de definir o juro correspondente a um determinado capital C é especificar a taxa de juro r, normalmente expressa em percentagem, e o período de tempo a que se refere.
Por exemplo, o capital de 5000 Euros, com taxa de 4% ao ano, rende após um ano o juro de

$$5\,000 \times 0.04 = 200 \text{ Euros.}$$

Quando o juro obtido é adicionado ao capital e a mesma definição de juro se mantém, dizemos que o juro é capitalizado anualmente. No caso precedente, o novo capital ao fim de um ano é

$$5\,000 + 200 = 5\,200 \text{ Euros}$$

e o juro que lhe corresponde um ano depois é

$$5\,200 \times 0.04 = 208 \text{ Euros.}$$

Ao fim de dois anos, o capital acumulado é

$$5\,200 + 208 = 5\,408 \text{ Euros,}$$

e o processo pode repetir-se.
No caso geral, o capital acumulado ao fim de 1, 2, 3, ... anos é dado pelas expressões

$$C + Cr = C(1 + r)$$
$$C(1 + r) + C(1 + r)r = C(1 + r)^2,$$
$$C(1 + r)^3, \ldots$$

e, de um modo geral, ao fim de t anos

$$C(1 + r)^t.$$

Mas outras convenções são possíveis, e frequentes, sobre o modo como os juros são capitalizados. Por exemplo, quando se convenciona que a taxa de juro r é anual mas os juros são adicionados semestralmente, os períodos de tempo que contam são os semestres e a percentagem com que se trabalha é $r/2$, correspondente, por convenção, a meio ano. Assim, ao fim de s *semestres*, o capital acumulado é

$$C\left(1 + \frac{r}{2}\right)^s$$

o que significa que, ao fim de t anos (já que convém fazer a comparação entre os resultados na mesma unidade de tempo)

$$C\left(1 + \frac{r}{2}\right)^{2t}.$$

E, se em vez de dividirmos o ano em semestres para efeito de creditar juros, o dividirmos em trimestres, obtemos do mesmo modo um capital de

$$C\left(1 + \frac{r}{4}\right)^{4t}$$

ao fim de t anos.

Os economistas utilizam também com frequência uma outra definição para o cálculo do efeito de capitalização. À semelhança dos casos anteriores, se imaginarmos o ano dividido num grande número n de partes iguais, obtemos

$$C\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} \tag{3.15}$$

como valor capitalizado ao fim de t anos. (Por exemplo, poderíamos escolher $n = 365$ e falaríamos de capitalização diária, sempre sob a convenção de r ser uma taxa anual.) Como a subdivisão do ano pode aumentar indefinidamente, é mais natural tomar, em vez de uma das particulares expressões (3.15), o valor de que elas são aproximações com erro arbitrariamente pequeno, quando n é suficientemente elevado. Falaremos então de *capitalização contínua*.

No exemplo precedente, com $C = 5\,000$ e $r = 0.04$, observemos que o valor de (3.15) para $t = 1$ é, de acordo o valor de n, dado pelo seguinte quadro:

n	$5\,000\left(1+\dfrac{0.04}{n}\right)^{n}$ (*)
1	5 200
2	5 202
3	5 202.68
4	5 203.02
12	5 203.70
365	5 204.04
1 000	5 204.05
10 000	5 204.05

((*) Valores aproximados aos cêntimos)

Há, pois, um aumento de capital acumulado à medida que aumenta o número de subdivisões da unidade temporal para efeito de capitalização; mas constata-se que os valores obtidos parecem tender para um valor definido. A razão deste facto está nas propriedades da sucessão (3.15). Demonstrámos em (3.13) que

$$\lim\left(1+\frac{r}{n}\right)^{n} = e^{r}$$

e, por isso,

$$\boxed{\lim C\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt} = C\lim\left[\left(1+\frac{r}{n}\right)^{n}\right]^{t} = Ce^{rt}.} \tag{3.16}$$

Os termos de (3.15) constituem, pois, valores aproximados de Ce^{rt} com erro arbitrariamente pequeno, desde que n seja suficientemente grande. Por isso, é mais prático considerar, não um termo particular de (3.15), mais sim *o seu limite* como definição do capital acumulado.

Voltando ao mesmo exemplo, o cálculo da expressão do segundo membro de (3.16) com $C = 5\,000$, $r = 0.04$ e $t = 1$ dá

$$5000 \times e^{0.04} = 5204.053871\ldots$$

Podemos, pois, dizer que o capital de 5 000 Euros, com *capitalização contínua*, à taxa anual de 4%, gera ao fim de um ano o capital de 5 204.05 Euros, com aproximação a cêntimos (e que, para efeito desta aproximação, a capitalização em milésimos de ano já conduz ao mesmo resultado).

De um modo geral, e tendo em vista o cálculo anterior, toma-se

$$C\,e^{rt}$$

como valor do capital gerado, ao fim do tempo t (anos) por um capital inicial C, em condições de capitalização contínua e taxa de juro anual r.

Exercícios da Secção 3.4

$\boxed{1}$ Uma população de bactérias evolui em função do tempo (em horas) de acordo com uma lei do tipo

$$N(t) = N_0 e^{kt} \tag{$*$}$$

(a) Se no instante inicial há aproximadamente 5 000 bactérias e passadas 4 horas contamos cerca de 100 000, determinar a expressão designatória $(*)$.

(b) Se apenas soubermos que a população duplica ao fim de 2 horas, que parâmetro em $(*)$ podemos determinar: N_0 ou k?

$\boxed{2}$ O Carbono 14 sofre desintegração radioactiva de acordo com a fúrmula

$$Q(t) = Q_0 e^{-0.00012t}$$

(com o tempo referido a anos). Uma amostra vegetal descoberta numa gruta pré-histórica contém apenas 20% de Carbono 14 esperado em plantas vivas. Qual é a idade aproximada da amostra?

$\boxed{3}$ Um determinado capital é investido à taxa de 4% sendo os juros compostos continuamente. Quanto tempo é necessário para que o capital inicial triplique?

$\boxed{4}$ Pretende-se investir capital à taxa de 5%, com juros compostos continuamente, de modo a receber um total de 20 000 Euros ao fim de 8 anos. Que capital é necessário investir?

$\boxed{5}$ Uma pequena barra metálica à temperatura de 150°C é imersa num grande recipiente com agua a 5°C, cuja temperatura é mantida. Passados 2 minutos, verifica-se que a temperatura da barra é 60°C. Ao fim de quanto tempo terá a temperatura da barra atingido 10°C?

$\boxed{6}$ A um indivíduo é ministrada uma injecção de 250 mg de antibiótico no instante $t = 0$. Supondo que a quantidade de antibiótico (em mg) presente no sangue após t horas verifica

$$f(t) = 250e^{-0.7t}.$$

Qual é a taxa de decréscimo inicial de $f(t)$ (isto é, $f'(0)$)? Ao fim de quanto tempo é o antibiótico injectado reduzido a 10% da quantidade inicial?

$\boxed{7}$ Uma cultura de bactérias cresce de acordo com uma lei exponencial ($Q(t) = Ce^{kt}$) e triplica em cada hora. Se no instante inicial ($t = 0$) estão presentes 10^6 bactérias, ao fim de quantas horas estarão presentes 10^8 bactérias? Qual é a taxa de crescimento (instantânea) da população de bactérias ao fim de uma hora?

$\boxed{8}$ O césio sofre decomposição radioactiva de acordo com uma lei do tipo $Q(t) = Ce^{-0.023t}$ com o tempo medido em anos. Determinar o período de meia-vida do césio.

$\boxed{9}$ Uma amostra de origem vegetal encontrada numa gruta contém apenas 30% do Carbono 14 encontrado na planta viva. Qual é a idade aproximada da amostra? (Ver os dados do exercício 2.)

$\boxed{10}$ Uma bactéria que causa infecção urinária reproduz-se de tal modo que a população duplica em cada quarto de hora. A infecção é detectada quando estão presentes no aparelho urinário 10^8 indivíduos da população. Uma pessoa infectada nestas condições começa a beber água e passado certo tempo t_0 esvazia a bexiga, eliminando 85% das bactérias. Mas verificou-se, após o esvaziamento, que se mantém presente uma população de 10^8 indivíduos. Determinar t_0. (Supõe-se que a evolução da população bacteriana verifica uma lei exponencial como no exercício 7.)

$\boxed{11}$ Durante os anos 90, o preço médio de um apartamento de determinado tipo em Lisboa variou de 40 000 € (1990) a 100 000 € (1999). Supondo que o preço sofreu uma taxa de variação percentual constante, isto é, que satisfaz uma lei do tipo

$$P(t) = P_0 e^{kt} \qquad (t \text{ em anos}),$$

determinar P_0 e k e dizer em que data o preço inicial duplicou.

$\boxed{12}$ Um capital inicial de 10 000 € em 1990, valorizado por juros compostos continuamente, valia 14 000 € em 2000. Qual é a taxa de juro anual neste investimento?

$\boxed{13}$ Um capital inicial de 5 000 € é investido a 5% ao ano durante 4 anos. Os juros são compostos trimestralmente. Seria preferível para o investidor contratar uma taxa de juro de 4.8% ao ano, com juros compostos continuamente?

$\boxed{14}$ Quando um parequedista salta de um avião, a velocidade adquirida é dada, aproximadamente, em função do tempo por uma função do tipo

$$v(t) = M(1 - e^{-kt}) \qquad (t \geqslant 0)$$

com M, $k > 0$. Supondo que, em certas unidades, $M = 10$ e $k = 0.3$, esquematizar o gráfico de v em $[0, +\infty[$. Observar que a função tem uma assíntota horizontal. À constante $M = 10$ chama-se *velocidade terminal*. Que interpretação analítica se pode dar a esta designação? Quanto tempo deve decorrer a partir do início da queda para que a velocidade exceda o valor 7?

$\boxed{15}$ Um viveiro suporta até 2 000 peixes. Um estudo da lei de crescimento da população de peixes sugere que um bom modelo para o seu número em função do tempo é

$$N(t) = \frac{2\,000}{1 + ce^{-4t}} \qquad (t \text{ em semanas})$$

onde c é uma constante.

Se se inicia a criação no instante $t = 0$, com 50 peixes, quanto tempo deve decorrer para que a população atinja o número de 1 500?

$\boxed{16}$ Um modelo simples de propagação de uma infecção por contágio numa cidade com 1 milhão de habitantes é dado pela função que dá o número de infectados em função do tempo

$$I(t) = \frac{10^6}{1 + ce^{-kt}} \qquad (t \text{ em semanas})$$

onde c, k são constantes. No início do controlo da infecção $(t = 0)$ registam-se 100 casos, e ao fim de duas semanas conhecem-se *450 novos* casos. Se o modelo é aplicável, quantos infectados são de esperar ao fim de 3 semanas?

$\boxed{17}$ Suponhamos que após administração oral de um certo medicamento (no instante $t = 0$), a quantidade de medicamento no sangue é dada em função do tempo por

$$f(t) = 300(e^{-0.4t} - e^{-t}) \qquad (t \text{ em horas}).$$

Quando é que a quantidade de medicamento no sangue atinge o valor máximo? Em que intervalo de tempo se mantém a quantidade de substância superior a 80 unidades? Em que instante está a quantidade de substância a descrescer com maior rapidez?

$\boxed{18}$ Um estudo de mercado mostra que o número de exemplares de um dado modelo de automóvel que se pode esperar vender é dado, aproximadamente, em função do preço, pela função

$$N(p) = 6\,540e^{-0.3p} - 1.13p + 45 \qquad 10 \leqslant p \leqslant 20$$

(p expresso em 10^3 € e $N(p)$ em milhares).

Estudar a função $pN(p)$ e descrever o seu significado.

$\boxed{19}$ Verificar que, sendo θ, C e k constantes, a função

$$T(t) = \theta + Ce^{-kt}$$

tem a propriedade:

$$T'(t) = -k(T(t) - \theta) \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

3.5 Comparação do comportamento das funções exponenciais e logarítmicas com o dos polinómios

Já vimos que e^x é uma função estritamente crescente e que $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$. Ora, qualquer função polinomial

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$$

com coeficiente $a_n > 0$ tem também a propriedade

$$\lim_{x\to+\infty} p(x) = +\infty.$$

No entanto, vamos ver que há diferenças importantes, que podemos quantificar, no modo como e^x e um polinómio se comportam para *grandes* valores de x. Comecemos pelo seguinte

EXEMPLO 3.5.1. A função $\frac{e^x}{x}$ é crescente no intervalo $[1, +\infty[$. Com efeito,

$$\left(\frac{e^x}{x}\right)' = \frac{xe^x - e^x}{x^2} = \frac{e^x}{x}\left(1 - \frac{1}{x}\right) > 0$$

em $]1, +\infty[$. Daqui deduzimos

$$\frac{e^x}{x} > e \qquad \text{sempre que } x > 1.$$

Em particular

$$\boxed{e^x > ex \qquad \text{para } x > 1}$$

Este argumento simples pode repetir-se com $\frac{e^x}{x^2}$, $\frac{e^x}{x^3}$, $\ldots$ e de um modo geral com $\frac{e^x}{x^n}$, onde $n \in \mathbb{N}$ é um inteiro dado. Efectivamente a derivada

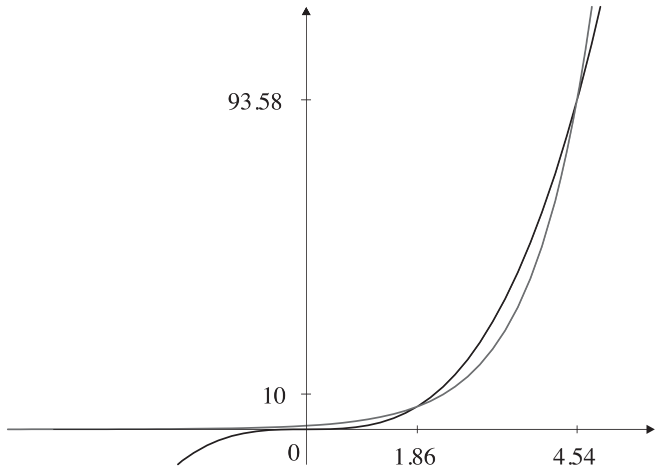
$$\left(\frac{e^x}{x^n}\right)' = \frac{x^n e^x - nx^{n-1}e^x}{x^{2n}} = \frac{e^x}{x^n}\left(1 - \frac{n}{x}\right)$$

é positiva para $x > n$ e concluímos

$$\frac{e^x}{x^n} > \frac{e^n}{n^n} \qquad \text{para } x > n$$

ou ainda

$$\boxed{e^x > \left(\frac{e}{n}\right)^n x^n \qquad \text{para } x > n.}$$



Podemos, pois, afirmar que, para grandes valores de x, a exponencial e^x excede os valores de um dado polinómio de grau n. O coeficiente $\left(\frac{e}{n}\right)^n$ não é particularmente importante no contexto que nos interessa e basta-nos registar que:

Facto 3.5.1 *Dado $n \in \mathbb{N}$, há um coeficiente $c_n > 0$ tal que*

$$\boxed{e^x > c_n\, x^n \quad \textit{para} \quad x > n.} \tag{3.17}$$

Consequência 3.5.2 *Dado $n \in \mathbb{N}$,*

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty.} \tag{3.18}$$

<u>Demonstração</u>. Usando (3.17) com $n+1$ em lugar de n, temos $e^x > c_{n+1}x^{n+1}$, para $x > n+1$, e então

$$\frac{e^x}{x^n} > c_{n+1}x \qquad \text{para } x > n+1.$$

Como $c_{n+1}x$ é infinitamente grande positivo quando $x \to +\infty$, o mesmo se passa com $\frac{e^x}{x^n}$ e conclui-se o resultado. ∎

EXEMPLO 3.5.2. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x}}{x^4+1} = +\infty$, porque, com a mudança de variável $2x = y$,

$$\frac{e^{2x}}{x^4+1} = \frac{e^y}{y^4/16+1} = \frac{16e^y}{y^4+16}\,.$$

Ora,

$$\lim_{y \to +\infty} \frac{e^y}{y^4} = +\infty$$

e portanto, já que

$$\frac{16e^y}{y^4+16} = \frac{e^y}{y^4} \cdot \frac{16y^4}{y^4+16}$$

e

$$\lim_{y\to^+\infty} \frac{16y^4}{y^4+16} = 16,$$

concluímos que efectivamente

$$\lim_{y\to+\infty} \frac{16e^y}{y^4+16} = +\infty.$$

O limite (3.18) permite, por sua vez, calcular outros limites notáveis que relacionam exponenciais, polinómios e logaritmos, como vamos agora mostrar:

Facto 3.5.3 $\boxed{\text{Se } n \in \mathbb{N}, \quad \lim_{x\to+\infty} (x^n e^{-x}) = 0.}$

Demonstração. Basta observar que

$$x^n e^{-x} = \frac{x^n}{e^x} = \frac{1}{e^x/x^n} \cdot$$

■

Facto 3.5.4 $\boxed{\text{Se } n \in \mathbb{N}, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x^n} = 0.}$

Demonstração. Escrevendo $\log x = y$, temos

$$\frac{\ln x}{x^n} = \frac{y}{(e^y)^n} = \frac{y}{e^{ny}} < \frac{y}{e^y}$$

e

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = \lim_{y\to+\infty} \frac{y}{e^{ny}} = 0$$

visto que $\frac{y}{e^y}$ é infinitésimo quando $y \to +\infty$ em virtude do facto anterior. ■

Facto 3.5.5 *Se $\alpha > 0$ é dado,*

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \ln x = 0.}$$

Demonstração. Com $\ln x = y$,

$$x^\alpha \ln x = e^{\alpha y} \cdot y;$$

com $\alpha y = -z$,

$$e^{\alpha y} \cdot y = \left(\frac{-1}{\alpha}\right) e^{-z} z$$

e temos sucessivamente

$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \ln x = \lim_{y\to -\infty} e^{\alpha y} y = \lim_{z\to +\infty} \left(-\frac{1}{\alpha}\right) e^{-z} z = 0$$

em virtude do Facto 3.5.3. ■

Podemos resumir, de uma maneira vaga mas expressiva, os resultados da Consequência 3.5.2 e dos Factos 3.5.3, 3.5.4 e 3.5.5 dizendo que:

- quando $x \to +\infty$, e^x tende para $+\infty$ com maior rapidez que qualquer polinómio;
- quando $x \to +\infty$, $\ln x$ tende para $+\infty$ com rapidez inferior à dos polinómios;
- quando $x \to 0^+$, $1/\ln x$ tende para 0 com rapidez inferior à das potências x^α (com $\alpha > 0$).

Exercícios da Secção 3.5

$\boxed{1}$ Determinar os limites seguintes:

$$\lim_{x\to -\infty} e^x(x^2+5x-1)\,; \qquad \lim_{x\to \pm\infty} \frac{e^{-3x}}{1+x^2}\,;$$

$$\lim_{x\to 0^\pm} x e^{\frac{1}{x}}\,; \qquad \lim_{x\to \pm\infty} (e^x - 10x^2)\,;$$

$$\lim_{x\to \pm\infty} e^{\frac{x}{x+1}}(1-2x^2)\,; \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(1+x^2)^2}{1+x}\,;$$

$$\lim_{x\to o^+} \sqrt{x}\ln x\,; \qquad \lim_{x\to +\infty} (x - \ln x).$$

Capítulo 4

As Funções Trigonométricas

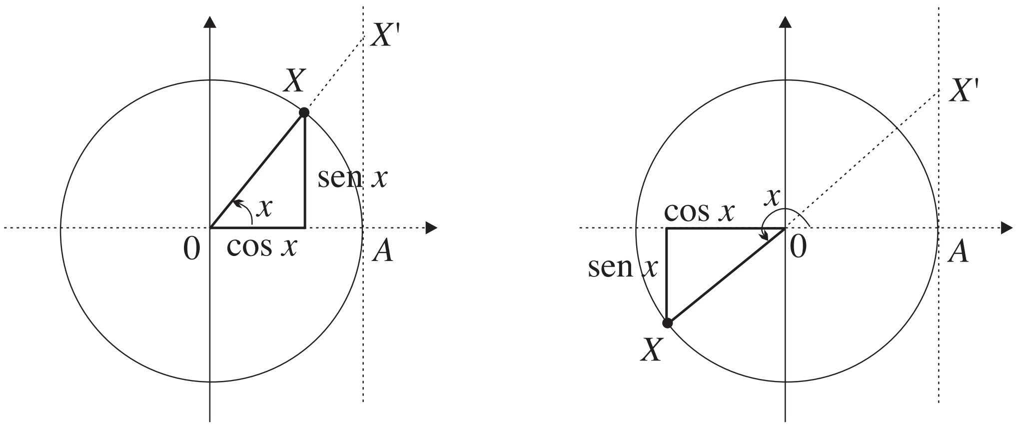
4.1 Revisão

As funções *seno* e *coseno*, cujas expressões designatórias representamos simbolicamente por

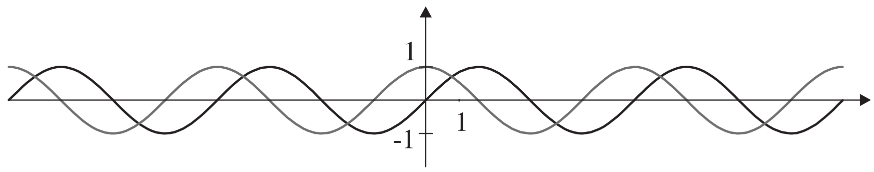
$$\operatorname{sen} x, \qquad \cos x \tag{4.1}$$

são já nossas conhecidas do estudo da Geometria no 11º ano. As expressões (4.1) representam o seno e o coseno de um ângulo generalizado cuja medida em radianos é o número x, que pode assumir qualquer valor real.

Recordemos que os valores do seno e do coseno se "lêm" facilmente no círculo trigonométrico:



se o ângulo generalizado de medida x é determinado pela semirecta OX (com respeito ao semi eixo positivo das abcissas), em que $||0X|| = 1$, $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ são, respectivamente, a ordenada e a abcissa de X. Recordemos também os gráficos destas funções, que evidenciam que:



(a) $\operatorname{sen} x$ é ímpar e $\cos x$ é par:

$$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x, \qquad \cos(-x) = \cos x \qquad\qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

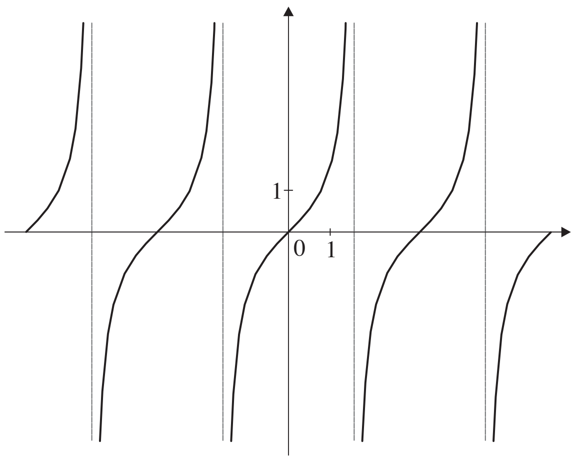
e ainda que $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ são *periódicas* com período 2π:

$$\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen} x, \qquad \cos(x + 2\pi) = \cos x \qquad\qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

É também muito importante o papel da função *tangente*:

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

definida no conjunto união dos intervalos cujos extremos são os números da forma $\frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. O valor de $\tan x$ também se lê facilmente no círculo trigonométrico: é o comprimento do segmento AX'.



A função tangente tem, obviamente, o período 2π, mas é curioso verificar que na realidade tem um período mais pequeno, precisamente π. Na verdade, resulta das fórmulas para o cálculo do seno e do coseno de uma soma (**GEOM 11**, págs. 55-56):

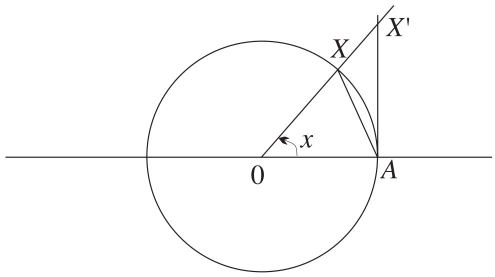
$$\begin{aligned}\tan(x + \pi) &= \frac{\operatorname{sen}(x + \pi)}{\cos(x + \pi)} = \frac{\operatorname{sen} x \cdot \cos \pi + \cos x \cdot \operatorname{sen} \pi}{\cos x \cdot \cos \pi - \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} \pi} = \\ &= \frac{-\operatorname{sen} x}{-\cos x} = \tan x\end{aligned}$$

(alternativamente, é fácil reconhecer, no círculo trigonométrico, que $\operatorname{sen}(x+\pi) = -\operatorname{sen} x$ e $\cos(x+\pi) = -\cos x$).

Recordemos também (**GEOM 11**, pág. 36) que

$$\operatorname{sen} x < x < \tan x \qquad \forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\tag{4.2}$$

Esta dupla desigualdade obteve-se comparando a área do triângulo $0AX$, do sector circular $0AX$ e do triângulo OAX' representados na figura junta.



Exercícios da Secção 4.1

$\boxed{1}$ Verificar que se tem, para todo o x que dá sentido às expressões:

$$\operatorname{sen}^2 x + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - \cos^2 x;$$
$$\frac{2\operatorname{sen}^2 x - 1}{\cos^2 x} = \tan^2 x + \cos x;$$
$$\cos^4 x - \operatorname{sen}^4 x = \cos 2x;$$
$$\operatorname{sen}^2 x - \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{\cos^2 x - 2}{\tan^2 x} \; .$$

$\boxed{2}$ Resolver as equações e inequações seguintes:

$$\operatorname{sen} x = \cos x;$$
$$\frac{\operatorname{sen}^2 t}{1-\cos t} = 1 - \cos t;$$
$$\operatorname{sen} 2t = \operatorname{sen} 4t;$$
$$\operatorname{sen} x < \cos x, \text{ em } [o, 2\pi];$$
$$\operatorname{sen} x < \cos 2x, \text{ em } [o, \pi].$$

(Observação: $\operatorname{sen} x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$.)

4.2 Limites trigonométricos. Continuidade e derivadas das funções trigonométricas

Comecemos por observar o facto simples seguinte:

Facto 4.2.1 (limite de função enquadrada) *Sejam f, g, h funções definidas em I ou $I \setminus \{a\}$, onde I é um intervalo, tais que*

$$f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x) \qquad \forall x \in I \setminus \{a\}$$

e

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x).$$

Então o $\lim_{x \to a} g(x)$ existe e é igual aos anteriores.

(Em palavras menos técnicas: uma função enquadrada entre duas funções que têm o mesmo limite quando $x \to a$, tem limite igual ao daquelas quando $x \to a$.)

Demonstração. Seja $x_n \in I \setminus \{a\}$ uma sucessão com $x_n \to a$. Pela hipótese, $f(x_n) \to L$, $h(x_n) \to L$ e

$$f(x_n) \leqslant g(x_n) \leqslant h(x_n).$$

Ora, de acordo com (**11**, Facto 2.4.13), tem-se também

$$g(x_n) \to L.$$

Como isto se passa para qualquer sucessão x_n nas condições referidas, conclui-se $\lim_{x \to a} g(x) = L$ (ver **11**, Facto 3.1.8). ■

Podemos agora estudar as propriedades de continuidade das funções trigonométricas.

Facto 4.2.2 *As funções seno, coseno e tangente são contínuas.*

Demonstração. PASSO 1: $\boxed{\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} x = 0.}$

Se $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, então $0 < -x < \frac{\pi}{2}$, e por isso, de acordo com (4.2), $\operatorname{sen}(-x) < -x$; mas $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$ e então vem $\operatorname{sen} x > x$. Em resumo,

$$-|x| < \operatorname{sen} x < |x| \quad \text{ se } x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\setminus \{0\}.$$

Ora, sabemos que $|x|$ é uma função contínua, e portanto

$$\lim_{x \to 0} |x| = 0, \qquad \lim_{x \to 0} (-|x|) = 0.$$

A conclusão resulta imediatamente do facto anterior, relativo à função enquadrada.

PASSO 2: Para qualquer número a, tem-se

$$\boxed{\lim_{x \to a} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a.}$$

Temos

$$\lim_{x \to a} \operatorname{sen} x = \lim_{h \to 0} \operatorname{sen}(a+h)$$

(por mudança de variável, $x = a + h$). Por outro lado

$$\operatorname{sen}(a+h) = \operatorname{sen} a \cos h + \cos a \operatorname{sen} h \tag{4.3}$$

Para calcularmos $\lim_{h \to 0} \cos h$ observemos que só nos interessam valores de h próximos de 0; em particular podemos considerar $-\frac{\pi}{2} < h < \frac{\pi}{2}$, e então

$$\cos h = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 h}.$$

Pelo passo 1 e pela continuidade da função raiz quadrada,

$$\lim_{h \to 0} \cos h = \sqrt{1 - 0^2} = 1.$$

Voltando a (4.3) podemos agora concluir

$$\lim_{h \to 0} \operatorname{sen}(a+h) = \operatorname{sen} a \cdot 1 + \cos a \cdot 0 = \operatorname{sen} a.$$

PASSO 3: Para qualquer número a, tem-se

$$\boxed{\lim_{x \to a} \cos x = \cos a.}$$

Basta ter em conta que

$$\cos x = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

e, pelo que já provámos

$$\lim_{x \to a} \cos x = \lim_{x \to a} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos a.$$

Os passos 2 e 3 mostram a continuidade do seno e do coseno. Quanto à função tangente, basta recordar que o cociente de duas funções contínuas é contínua (**11**, Facto 3.1.4). ■

Um outro limite que tem uma importância fundamental e envolve funções trigonométricas é o seguinte:

Facto 4.2.3 $\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \cdot}$

Demonstração. Se $0 < x < \frac{\pi}{2}$, resulta de (4.2)

$$1 < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{1}{\cos x} \cdot \tag{4.4}$$

Na verdade, como as funções $\frac{x}{\operatorname{sen} x}$ e $\frac{1}{\cos x}$ são pares, a desigualdade (4.4) é válida para todo o $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\setminus \{0\}$. Como $\lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1} = 1$, a função $\frac{x}{\operatorname{sen} x}$ está enquadrada entre duas que têm limite 1 quando $x \to 0$ e, por isso,

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{sen} x} = 1.$$

Passando ao inverso aritmético, concluimos

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \frac{1}{\lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{sen} x}} = 1. \qquad \blacksquare$$

Podemos agora calcular as derivadas das funções trigonométricas:

Facto 4.2.4 *Tem-se*

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{sen}'(x) &= \cos x \\ \cos'(x) &= -\operatorname{sen} x \\ \tan'(x) &= 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \end{aligned}}$$

Demonstração. Calculemos a taxa de variação para a função seno no intervalo de extremos x e $x + h$:

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h} &= \frac{\operatorname{sen} x \cdot \cos h + \cos x \operatorname{sen} h - \operatorname{sen} x}{h} \\ &= \operatorname{sen} x \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \frac{\operatorname{sen} h}{h}. \end{aligned}$$

Então

$$\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h} = \operatorname{sen} x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h}$$

e, em virtude de 4.2.3 — 4.2.4, obtém-se

$$\operatorname{sen}'(x) = \cos x.$$

A derivada do coseno obtém-se agora por translacção: uma vez que

$$\cos x = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

vem

$$\cos'(x) = -\text{sen}'\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\text{sen}\, x.$$

Finalmente, para a função tangente basta aplicar a regra da derivação de um cociente:

$$\begin{aligned}\tan'(x) &= \frac{\cos x \cdot \cos x - \text{sen}\, x \cdot (-\text{sen}\, x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \text{sen}^2 x}{\cos^2 x} \\ &= 1 + \tan^2 x.\end{aligned}$$

E por outro lado,

$$1 + \tan^2 x = 1 + \frac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \text{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}\,.$$

■

Em consequência deste resultado e da regra de derivação da função composta, temos

$$\boxed{\begin{aligned}(\text{sen}\, u(x))' &= u'(x)\cos u(x) \\ (cos u(x))' &= -u'(x)\text{sen}\, u(x) \\ (\tan u(x))' &= -\frac{u'(x)}{\cos^2 u(x)}\end{aligned}}$$

sempre que $x \mapsto u(x)$ é uma função derivável (e, no caso da última fórmula, a composição $\tan u(x)$ tem sentido).

EXEMPLO 4.2.1. $(\text{sen}\,(2x))' = 2\cos 2x.$

Exercícios da Secção 4.2

$\boxed{1}$ Determinar as derivadas das funções seguintes:

$$\begin{array}{ll} 3\,\text{sen}\, x - 5\cos x; & \text{sen}^2 x - x; \\ x\,\text{sen}\, x; & x\tan(3x); \\ \text{sen}\,(4x) - \cos(3x); & x^2\tan(3x+1); \\ \tan(2x). & \end{array}$$

$\boxed{2}$ Determinar os extremos relativos das funções seguintes:

$$\begin{array}{ll} \cos x; & \text{sen}\, x - \cos x; \\ \text{sen}\, x - \sqrt{3}\cos x; & x + 2\text{sen}\, x; \\ \cos^2 x; & \tan x - 2x. \end{array}$$

$\boxed{3}$ Estudar a função $\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ em $]0, 4\pi]$.

$\boxed{4}$ Determinar o valor máximo e o valor mínimo de $2\cos x - \operatorname{sen} x$ no intervalo $[0, \pi]$.

$\boxed{5}$ Explicar porque é que podemos afirmar sem grandes cálculos que

$$\frac{2}{3} \leqslant \frac{3 + \operatorname{sen} x}{2 + \operatorname{sen} x} \leqslant 4 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

e, com um pouco mais de trabalho, que

$$1.3 \leqslant \frac{3 + \operatorname{sen} x}{2 + \operatorname{sen} x} \leqslant 1.7 \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(Utilizar uma calculadora para procurar valores aproximados do máximo e do mínimo da função).

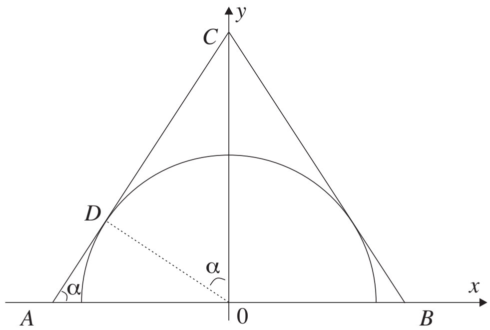
$\boxed{6}$ Que valor se deve atribuir à função $\dfrac{x(2+x)}{\operatorname{sen} x}$ no ponto 0 para a prolongar como função contínua ao intervalo $]-\pi, \pi[$? É possível prolongá-la como função contínua a $[-\pi, \pi]$?

$\boxed{7}$ Estudar a existência de assíntotas verticais das funções

$$\frac{\operatorname{sen} 2x}{x}\,; \qquad \frac{\operatorname{sen} 2x}{x^2}\,; \qquad \frac{\operatorname{sen} 2x}{\sqrt{x}}\,; \qquad \frac{\tan x}{x^3}\,.$$

4.3 Aplicações à resolução de problemas envolvendo questões de geometria

EXEMPLO 4.3.1. Consideremos a semicircunferência de raio 1 centrada na origem de coordenadas de um sistema ortonormado. De um ponto do eixo $0y$ traçam-se tangentes à semicircunferência, e constrói-se um triângulo isósceles que tem os lados nas tangentes e no eixo $0x$.



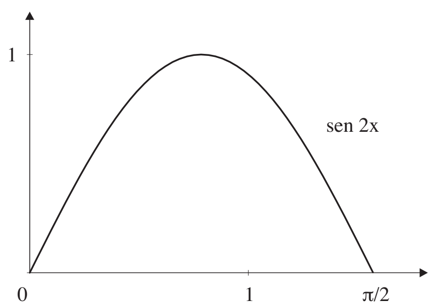
Dos triângulos assim obtidos, qual tem área mínima?
É cómodo utilizar como parâmetro do problema o ângulo de uma das tangentes com o eixo $0x$. Com a notação da figura, em que D é um dos pontos de tangência, tem-se $\measuredangle\, DOC = \alpha$ e por isso

$$AO = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}, \qquad OC = \frac{1}{\cos\alpha}\cdot$$

Como a área do triângulo ABC é $AO \times OC = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}$, trata-se de ver quando é mínima a função

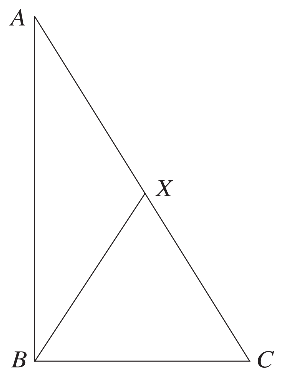
$$\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha} = \frac{2}{\operatorname{sen}2\alpha}$$

com domínio $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.



Como $\operatorname{sen}2\alpha > 0$ para $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, a referida função é mínima quando $\operatorname{sen}2\alpha$ é máxima, o que ocorre para $\alpha = \frac{\pi}{4}\cdot$ Portanto, o triângulo de área mínima pedido é o que é rectângulo em C.

EXEMPLO 4.3.2. Num triângulo ABC, rectângulo em B, se X é o ponto médio do lado AC então $\measuredangle XBC = \measuredangle C$.
Porque, da lei dos senos deduzimos (designando $\alpha = \measuredangle XBC$)



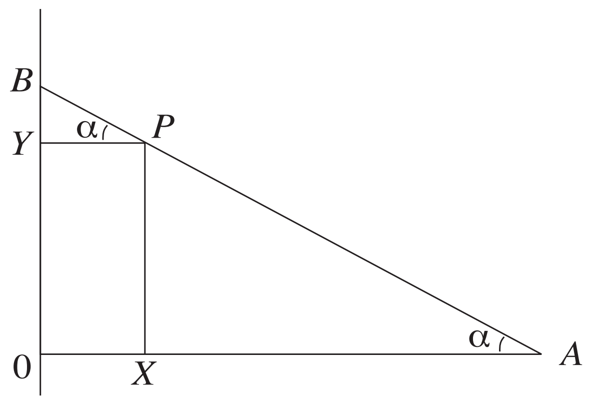
$$\frac{BX}{\operatorname{sen} C} = \frac{XC}{\operatorname{sen} \alpha}, \quad \frac{BX}{\cos C} = \frac{XA}{\cos \alpha}$$

e, como $XC = XA$,

$$\frac{\operatorname{sen} C}{\cos C} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}$$

ou, finalmente, $C = \alpha$ (porque C e α são ângulos do 1º quadrante).

EXEMPLO 4.3.3. Um ponto P dista dos lados de um ângulo recto 2 unidades e 1 unidade respectivamente.



De todos os triângulos que têm dois dos lados nos lados do ângulo recto e o terceiro lado a passar por P, qual tem área mínima?
Escolhamos como parâmetro o ângulo α da recta que passa por P com um dos lados do ângulo recto. Como

$$\frac{PX}{XA} = \tan \alpha = \frac{BY}{YP}$$

e $PX = 2$, $YP = 1$, a área do triângulo $0AB$ é

$$2 + \frac{2}{\tan \alpha} + \frac{\tan \alpha}{2}.$$

Os valores admissíveis para α são os do intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Trata-se de ver quando é a função $f(\alpha) = \frac{2}{\tan \alpha} + \tan \alpha$ mínima neste intervalo. Ora

$$
\begin{aligned}
f'(\alpha) &= -\frac{2}{\tan^2\alpha}(1+\tan^2\alpha) + \frac{(1+\tan^2\alpha)}{2} \\
&= (1+\tan^2\alpha)\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{\tan^2\alpha}\right) = (1+\tan^2\alpha)\frac{\tan^2\alpha - 4}{2\tan^2\alpha}
\end{aligned}
$$

e obtemos o quadro de variação

α	0		$\alpha_0 = 1.107\ldots$		$\pi/2$
$f'(\alpha)$		$-$	0	$+$	
$f(\alpha)$		$\searrow$		$\nearrow$	

concluindo-se que o mínimo é atingido quando $\alpha = \alpha_0 = 1.107\ldots$ (medida em radianos do ângulo α_0 do primeiro quadrante tal que $\tan\alpha_0 = 2$).

EXEMPLO 4.3.4. Determinar o valor máximo de $f(x) = 4\cos x \operatorname{sen} x + \cos x$ no intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
Como

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 4(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) - \operatorname{sen} x \\
&= 4(1 - 2\operatorname{sen}^2 x) - \operatorname{sen} x = -8\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x + 4.
\end{aligned}
$$

Para determinar as possíveis raizes de $f'(x)$ em $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, começamos por resolver

$$8 \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 4 = 0$$

(que é equação do 2^{o} grau na incógnita $\operatorname{sen} x$) e obtemos

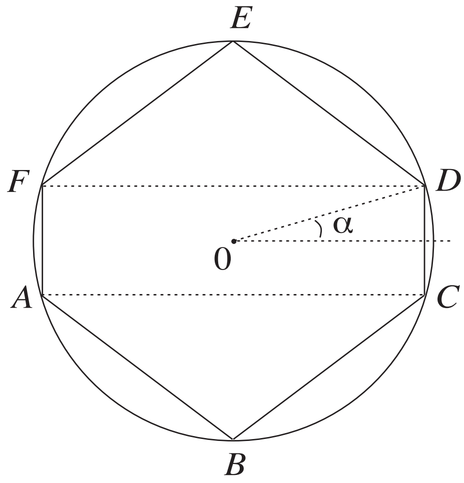
$$\operatorname{sen} x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+128}}{16} = \frac{\sqrt{129}-1}{16} \approx 0.647$$

(a solução correspondente ao sinal $-$ não interessa ao problema, pois $\operatorname{sen} x \geqslant 0$ no intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$). Como $f'(0) = 4 > 0$ e $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -5 < 0$, concluimos que f tem o quadro de variação

x	0		0.704		$\pi/2$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

(basta ter em conta que $f'(0) = 4$ e $f'(\pi/2) = -5$). Conclui-se que há máximo para $x_0 \approx 0.704$, a que corresponde $\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{129}-1}{16} \approx 0.647$ e $f(x_0) \approx 2.621$. Nesta aproximação às milésimas, as duas primeiras casas decimais são correctas.

EXEMPLO 4.3.5. Numa circunferência de raio 1 inscreve-se um hexágono $ABCDEF$ de modo que $AF = CD$ e $AB = BC = DE = EF$. Qual dos hexágonos nestas condições tem área máxima?



O hexágono consta da justaposição de um rectângulo $(ACDF)$ e dois triângulos isósceles iguais $(FDE$ e $ABC)$. Tomemos como parâmetro definidor do hexágono o ângulo α entre OD e o diâmetro da circunferência que é paralelo a FD (e AC). As dimensões do rectângulo são

$$2\cos\alpha, \qquad\qquad 2\,\mathrm{sen}\,\alpha$$

e a altura dos triângulos é

$$1-\mathrm{sen}\,\alpha$$

de modo que a área do hexágono é dada, em termos de α, pela função

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= 4\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha + 2\cos\alpha(1-\mathrm{sen}\,\alpha) \\ &= 2\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha + 2\cos\alpha \end{aligned}$$

no domínio $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$. Temos

$$\begin{aligned} f'(\alpha) &= 2\cos^2\alpha - 2\,\mathrm{sen}^2\alpha - 2\,\mathrm{sen}\,\alpha \\ &= 2 - 4\,\mathrm{sen}^2\alpha - 2\,\mathrm{sen}\,\alpha. \end{aligned}$$

Procuremos as raizes de $f'(\alpha)=0$:

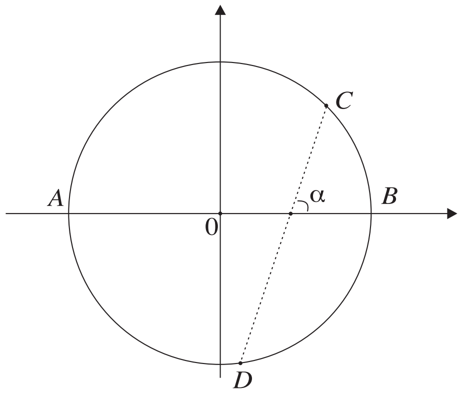
$$\begin{aligned} 2\,\mathrm{sen}^2\alpha + \mathrm{sen}\,\alpha - 1 = 0 &\Leftrightarrow \mathrm{sen}\,\alpha = \frac{-1+\sqrt{1+8}}{4} \\ &\Leftrightarrow\ \mathrm{sen}\,\alpha = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

O quadro de variação de f é

α	0		$\pi/6$		$\pi/2$
$f'(\alpha)$		$+$	0	$-$	
$f(\alpha)$		$\nearrow$		$\searrow$	

e concluímos que a área é máxima quando $\alpha = \frac{\pi}{6}$, isto é, quando o hexágono é regular.

EXEMPLO 4.3.6. Consideremos um círculo de raio 1, um seu diâmetro AB e um ponto M do diâmetro à distância $\frac{1}{2}$ do centro. Uma corda que passe por M e encontre a circunferência em pontos C, D distintos de A, B determina um quadrilátero $ACBD$. De todos estes possíveis quadriláteros, qual tem área máxima?



Coloquemos a circunferência num referencial ortonormado de origem 0, de modo que

$$A = (-1, 0), \quad B = (1, 0) \quad \text{e } M = \left(\frac{1}{2}, 0\right).$$

Tomemos como parâmetro do problema o ângulo α da corda CD com o diâmetro AB.
Se representermos por h_1 e h_2 as alturas dos triângulos ABC e ABD, a área do quadrilátero $ABCD$ é

$$\frac{1}{2} \times 2 \times (h_1 + h_2) = h_1 + h_2.$$

Ora, h_1 e h_2 são (os valores absolutos d)as ordenadas dos pontos de intersecção da corda com a circunferência. Estes pontos são soluções do sistema

$$\begin{cases} y = (\tan \alpha) \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

e, já que estamos interessados nas suas ordenadas, observemos que estas são as soluções da equação

$$\left(1 + \frac{1}{\tan^2 \alpha}\right) y^2 + \frac{1}{\tan \alpha} \cdot y - \frac{3}{4} = 0.$$

ou

$$y^2 + \cos \alpha \cdot \operatorname{sen} \alpha \, y - \frac{3}{4} \operatorname{sen}^2 \alpha = 0.$$

Das soluções, uma é positiva (y_1) e outra é negativa (y_2), e por isso,

$$\begin{aligned} h_1 + h_2 = y_1 - y_2 &= \frac{1}{2}\sqrt{cos^2\alpha \operatorname{sen}^2\alpha + 3\operatorname{sen}^2\alpha} \\ &= \frac{1}{2}\operatorname{sen}\alpha\sqrt{cos^2\alpha + 3} = \frac{1}{2}\operatorname{sen}\alpha\sqrt{4 - \operatorname{sen}^2\alpha}. \end{aligned}$$

Trata-se, pois, de saber quando esta função atinge o valor máximo, variando α no intervalo $\left]0, \frac{\pi}{?}\right[$. Evitaremos cálculos mais complicados se estudarmos, em vez dela, a função

$$g(u) = u\sqrt{4 - u^2}, \qquad u \in [0, 1]$$

que tem os mesmos valores da anterior (substituindo $u = \operatorname{sen}\alpha$). Ora,

$$g'(u) = \sqrt{4 - u^2} - \frac{u^2}{\sqrt{4 - u^2}} = \frac{4 - 2u^2}{\sqrt{4 - u^2}}$$

e concluímos que

$$g'(u) > 0 \quad \forall u \in [0, 1].$$

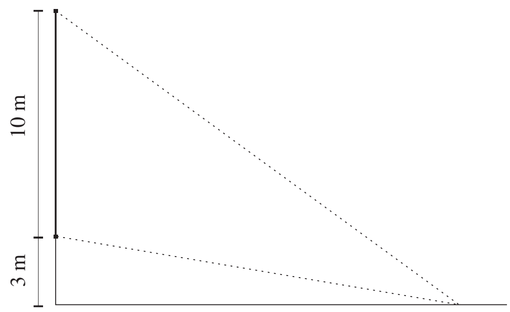
Então, no intervalo $[0, 1]$ g é estritamente crescente, sendo 0 seu máximo

$$g(1) = 2$$

o que é o mesmo do que afirmar que a área máxima do quadrilátero $ACBD$ se obtém para $\operatorname{sen}\alpha = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$, isto é, quando as diagonais são perpendiculares.

Exercícios da Secção 4.3

$\boxed{1}$ O lado inferior de um ecrã vertical com 10 metros de altura está 3 metros acima do nível dos olhos dos espectadores na plateia de uma sala de cinema



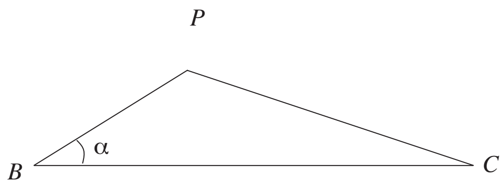
A que distância do plano do ecrã é máximo o ângulo de visibilidade?

$\boxed{2}$ Dos triângulos rectângulos inscritos numa semicircunferência, qual tem perímetro máximo?

$\boxed{3}$ Um farol está a 1 km de uma costa rectilínea. O farol efectua 3 rotações completas por minuto.

A que velocidade varre o feixe de luz a costa no instante em que o ângulo entre o feixe e a costa é 30º?

$\boxed{4}$ No triângulo BPC, o ângulo C mede 30º, e $BC = 1$.



Exprimir o perímetro do triângulo BPC em função do ângulo $\alpha = \measuredangle PBC$ e determinar para que valor de α entre 0 e $\pi/2$ é o perímetro máximo.

Apêndice

O cálculo de limites e suas aplicações: tópicos complementares

1. Formas indeterminadas no cálculo de limites

Na Secção 2.2, já observámos como o cálculo de limites pode ser um auxiliar importante na determinação do contradomínio de uma função.

E vimos, na nossa abordagem inicial da teoria dos limites, como o cálculo do limite de funções fica facilitado graças ao bom comportamento dos limites em face das operações algébricas comuns (ver **11**, Facto 3.2.1 e OBSERVAÇÕES que o seguem).

É frequente, por outro lado, que nos confrontemos com situações em que as propriedades dos limites dadas em **11**, Facto 3.2.1, não são aplicáveis. Assim, se nos for pedido o cálculo de

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{g(x)} \tag{1.1}$$

onde f e g são duas funções tais que

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 1} g(x) = 0, \tag{1.2}$$

nenhuma das alíneas de **11**, Facto 3.2.1. permite prever o resultado. E, efectivamente, tudo pode acontecer, por exemplo:

(a) se $f(x) = 3(x-1)$ e $g(x) = (x-1)$, é claro que o limite (1.1) vale 3;

(b) se $f(x) = (x-1)^2$ e $g(x) = (x-1)$, o limite (1.1) é 0;

(c) se $f(x) = x-1$ e $g(x) = (x-1)^3$, o limite (1.1) é $+\infty$;

(d) se $f(x) = |x-1|$ e $g(x) = (x-1)$, então o limite (1.1) não existe.

Na ausência de um enunciado geral que permita o cálculo do limite (1.1) quando se verifica (1.2), dizemos que estamos perante uma *indeterminação* de tipo 0/0.

EXEMPLO 1.1. O limite que define a derivada de uma função f no ponto a

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

(quando ela é finita) é uma indeterminação de tipo 0/0. Por exemplo, se $f(x) = x^2$,

$$\lim_{x \to a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \lim_{x \to a} (x + a) = 2a.$$

EXEMPLO 1.2. Quando $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ é indeterminação de tipo 0/0 e $f(x)$ e $g(x)$ possuem um factor comum (que tende para zero quando $x \to a$), a eliminação do factor pode permitir o cálculo do limite. Assim, para o cálculo de

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{(x + x^4)}{\sqrt{x^2 + x^3}(1 + x)}$$

observamos que, para todo o $x > 0$,

$$\frac{x + x^4}{\sqrt{x^2 + x^3}(2 + x)} = \frac{x(1 + x^3)}{x\sqrt{1 + x}(2 + x)} = \frac{1 + x^3}{\sqrt{1 + x}(2 + x)}$$

e, por isso,

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x + x^4}{\sqrt{x^2 + x^3}(1 + x)} = \lim_{x \to 0} \frac{1 + x^4}{\sqrt{1 + x}(2 + x)} = \frac{1}{2} \cdot$$

EXEMPLO 1.3. Sendo f e g polinómios, uma indeterminação de tipo 0/0 pode resolver-se por factorização. Assim,

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 + x - 2} &= \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)(x^2 + x + 2)} \\ &= \lim_{x \to 1} \frac{x + 1}{x^2 + x + 2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \cdot \end{aligned}$$

EXEMPLO 1.4. Por vezes, com um pouco de atenção, podemos reconhecer, no cociente cujo limite se quer determinar, a taxa de variação de uma função conhecida, de modo que o limite é a derivada dessa função num ponto determinado. Assim

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\pi/2} \frac{\cos x}{\pi - 2x} &= \lim \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{\cos x - \cos\frac{\pi}{2}}{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)} \\ &= -\frac{1}{2}\cos'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2}\left(-\mathrm{sen}\ \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}\,. \end{aligned}$$

EXEMPLO 1.5. $\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\mathrm{sen}\ x^2}$ é também indeterminação de tipo 0/0. Mas facilmente o calculamos, pois que

$$\frac{x}{\mathrm{sen}\ x^2} = \frac{1}{x}\frac{x^2}{\mathrm{sen}\ x^2}$$

e, como sabemos que $\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{\mathrm{sen}\ x^2} = 1$, vem

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\mathrm{sen}\ x^2} = +\infty.$$

Voltando a (1.1), se

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty(\text{ou } -\infty), \qquad \lim_{x\to a} g(x) = +\infty(\text{ou } -\infty),$$

também não há enunciado geral aplicável. Dizemos então que estamos perante uma indeterminação de tipo ∞/∞.

Já conhecemos indeterminações deste tipo, e como "resolvê-las". Recordemos isso através de dois exemplos:

EXEMPLO 1.6. $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4+5x-1}{3x^4+2x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{5}{x^3}-\frac{1}{x^4}}{3+\frac{2}{x}} = \frac{1}{3}\,.$

EXEMPLO 1.7. $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x^2}}{(1+x^2)^{100}} = +\infty.$

Tratando-se de calcular o limite de um produto

$$\lim_{x\to a} \left(f(x)g(x)\right)$$

pode ocorrer que um dos factores tenda para zero e o outro para infinito. Por exemplo,

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to a} g(x) = +\infty(\text{ou } -\infty).$$

Uma vez mais, não há teorema geral aplicável e por isso falamos, neste caso, de *indeterminação de tipo* $0\cdot\infty$. De resto, é fácil ver que esta situação pode ser vista como indeterminação de tipo 0/0 $\left(f(x)g(x) = \frac{f(x)}{1/g(x)}\right)$ ou de tipo ∞/∞ $\left(f(x)g(x) = \frac{g(x)}{1/f(x)}\right)$.

EXEMPLO 1.8. $\lim_{x\to+\infty}(x^2e^{-x}) = 0$, porque $x^2e^{-x} = \dfrac{x^2}{e^x}$ e em virtude de (3.18)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{P(x)} = +\infty$$

quando $P(x)$ é qualquer polinómio.

EXEMPLO 1.9. Combinando a técnica de mudança de variável com resultados conhecidos, podemos resolver outras indeterminações deste tipo. Assim,

$$\lim_{x\to0^+}\sqrt{x}\ln x = \lim_{y\to0^+} y\ln y^2 = \lim_{y\to0^+}(2y\ln y) = 0.$$

O cálculo do limite de uma soma de duas funções

$$\lim_{x\to a}(f(x) + g(x))$$

também conduz a uma indeterminação quando

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to a} g(x) = -\infty$$

(*indeterminação* $\infty\ -\infty$).

EXEMPLO 1.10.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{1+x^2}\right) &= \lim \frac{(x-\sqrt{1+x^2})(x+\sqrt{1+x^2})}{x+\sqrt{1+x^2}}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{x+\sqrt{1+x^2}} = 0.\end{aligned}$$

EXEMPLO 1.11.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pi/2^-}\left(\tan x - \frac{1}{\cos x}\right) &= \lim_{x\to\pi/2^-}\frac{\operatorname{sen} x - 1}{\cos x - \cos\pi/2}\\ &= \lim_{x\to\pi/2^-}\frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen}\pi/2}{x-\pi/2}\cdot\lim_{x\to\pi/2^-}\frac{x-\pi/2}{\cos x - \cos\pi/2}.\end{aligned}$$

Ora, sabemos que

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen}\pi/2}{x-\pi/2} = \operatorname{sen}'(\pi/2) = 0$$

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{\cos x - \cos\pi/2}{x-\pi/2} = \cos'(\pi/2) = -1$$

e por isso o limite pedido é igual a

$$0\cdot(-1) = 0.$$

Finalmente faremos referência a outros tipos de indeterminação que surgem quando, proposto um cálculo do tipo

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}$$

(onde f é uma função com valores positivos) se tem

$$\lim_{x\to a} f(x) = 1, \qquad \lim_{x\to a} g(x) = +\infty$$

ou

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty, \qquad \lim_{x\to a} g(x) = 0$$
$$\lim_{x\to a} f(x) = 0, \qquad \lim g(x) = 0.$$

Falamos então de indeterminação do tipo 1^∞, ∞^0 ou 0^0. Em todos estes casos, menhum teorema geral é aplicável. No entanto, basta observar que

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$$

e calcular o limite do expoente

$$\lim_{x\to a} (g(x)\ln f(x))$$

(que é, por sua vez, indeterminação de tipo $0\cdot\infty$) e obter

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x\to a}(g(x)\ln f(x))}.$$

EXEMPLO 1.12. Temos

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln x}.$$

Como

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0 \qquad \text{(ver Facto 3.5.5)}$$

concluímos

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = e^0 = 1.$$

EXEMPLO 1.13. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{1+x}\right)^{1/x} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1}{1+x}\right)}$,

e por outro lado

$$\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1}{1+x}\right) = -\frac{1}{x}\ln(1+x) = -\frac{\ln(1+x)-\ln(1+0)}{x},$$

que é, com sinal trocado, a taxa de variação da função $\ln(1+x)$ no intervalo de extremos 0, x. Portanto,

$$\lim \frac{1}{x}\ln\left(\frac{1}{1+x}\right) = -\frac{1}{1+0} = -1.$$

e o valor do limite pedido é e^{-1}.

Exercícios da Secção 1 do Apêndice

$\boxed{1}$ Calcular os limites:

$$\lim_{x\to 1} \frac{1-x^3}{1-x}\,; \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{\operatorname{sen} x}\,;$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x}\,; \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\operatorname{sen} x}\,;$$

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{9+x^2} - x\right)\,; \qquad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)\cdot \tan x\,;$$

$$\lim_{x\to 1^-} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^2}\right) \qquad \lim_{x\to 1^-} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{2x}{1-x^2}\right).$$

2. Limites laterais, continuidade

Muitas vezes, no cálculo de limites de funções, "quando x tende para um dado valor a", a função está definida tanto num intervalo que tem a como extremo direito como noutro que o tem como extremo esquerdo, e podemos considerar valores de x que se aproximam de a tanto quanto quisermos pela esquerda ou pela direita. Assim

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim(x+1) = 2,$$

significando isto que, para *qualquer* sucessão $x_n \to 1$, (com termos $x_n \neq 1$!) se tem

$$\lim_{(n\to\infty)} \frac{x_n^2-1}{x_n-1} = \lim(x_n+1) = 2.$$

Noutros casos, as sucessões aproximantes só têm sentido à direita ou só têm sentido à esquerda do valor para que tendem. Por exemplo,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+\sqrt{x}} = 1$$

só sendo permitidos valores positivos para x: dizemos que se trata de um limite "qundo x tende para zero à direita" e podemos sublinhar o facto usando a notação

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+x} = 1.$$

(Recordar o que tinhamos já dito em **11**, no final da Secção 3.1.)

Mas podemos ter interesse em considerar limites "à direita" (ou "à esquerda", com as modificações óbvias) quando $x \to a$, mesmo que a função esteja definida em intervalos do tipo $]\alpha, a[$ e $]a, \beta[$. Consideremos

$$f(x) = \frac{1-x}{x(1+x)}$$

cujo domínio é $]-\infty, -1[\cup]-1, 0[\cup]0, +\infty[$. "Quando $x \to 0$" (mais precisamente: quando consideramos sucessões $x_n \to 0$ com termos $x_n \neq 0$) os valores de $f(x)$ tornam-se, em valor absoluto, tão grandes quanto queiramos, mas como

$$f(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1-x}{1+x} \cdot$$

e o segundo factor tende para 1, o sinal de $f(x)$ acaba por ser o mesmo que o sinal de x (para x "próximo" de 0). Podemos concluir

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1-x}{x(1+x)} = -\infty, \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{1-x}{x(1+x)} = +\infty.$$

E o que significam estas notações? Significam simplesmente que, no 1º caso, calculámos o "limite quando $x \to 0$" da função f restringida a $]-\infty, 0[$ (melhor: a $]-\infty, -1[\cup]-1, 0[$, pois -1 não faz parte do domínio) e no 2º calculámos o "limite quando $x \to 0$" da função f restringida a $]0, +\infty[$.

Os limites "à esquerda" ou "à direita" são, pois, limites de restrições convenientes da função em causa.

Como definição geral, podemos adoptar a seguinte. Seja f uma função com domínio D; $a \in \mathbb{R}$. Dizemos que

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L \qquad (\text{respect. } \lim_{x\to a^-} f(x) = L)$$

se tiver significado, de acordo com as definições gerais, escrever

$$\lim_{x\to a} f|_{D\cap]a,+\infty[}(x) = L \qquad (\text{respect. } f|_{D\cap]-\infty,a[}(x) = L)$$

EXEMPLO 2.1 Temos

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{1-x}{1+x} = +\infty, \qquad \lim_{x\to -1^-} \frac{1-x}{1+x} = -\infty.$$

Uma mudança de variável pode ser útil para esclarecer este cálculo: faremos

$$x = -1 + h$$

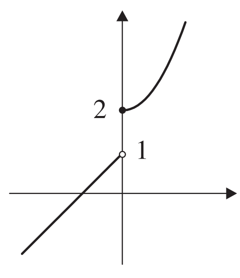
com $h > 0$ no 1º caso e $h < 0$ no 2º. Assim

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{1-x}{1+x} = \lim_{h\to 0^+} \frac{2+h}{h} = +\infty$$

e analogamente se procede para o outro limite.

EXEMPLO 2.2 Se

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x < 0, \\ x^2+2 & \text{se } x \geqslant 0, \end{cases}$$



temos

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0}(x+1) = 1,$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0}(x^2+2) = 2.$$

Existem os dois limites laterais de $f(x)$ quando $x \to 0$, mas são diferentes. Podemos concluir então facilmente que

$$\lim_{x\to 0} f(x)$$

<u>não existe</u>, visto que sucessões $x_n \to 0$ diferentes conduzem a sucessões de valores $f(x_n)$ com limites diferentes!

No entanto, se $a \in \mathbb{R}$ é um número tal que $a \neq 0$, temos, evidentemente

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}(x+1) = a+1 = f(a)$$

se $a < 0$, e

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}(x^2+2) = a^2+2 = f(a)$$

se $a > 0$.

O significado destes resultados é (de acordo com o que já víramos em **11**, Cap. 3) que a função f é contínua em cada ponto $a \neq 0$, mas não é contínua no ponto 0.

EXEMPLO 2.3 Um caso semelhante a este é o da função

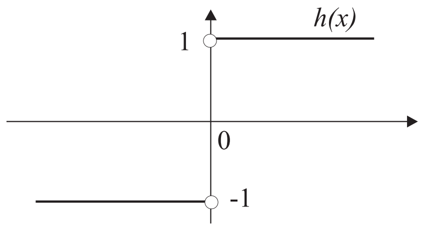
$$h(x) = \frac{|x-1|}{x-1}$$

definida em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, para a qual

$$\lim_{x\to 1^+} h(x) = 1,$$
$$\lim_{x\to 1^-} h(x) = -1$$

porque, na verdade, h pode também ser definida por

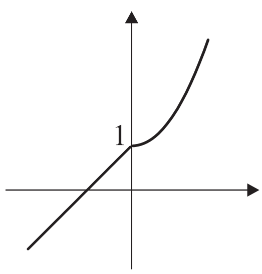
$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 1 \\ -1 & \text{se } x < 1 \end{cases}$$



EXEMPLO 2.4 Pelo contrário, a função

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x < 0, \\ x^2+1 & \text{se } x \geqslant 0, \end{cases}$$

é contínua em todos os pontos.



Na verdade

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0}(x+1) = 1 = f(1),$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0}(x^2+1) = 1 = f(1),$$

pelo que *ambas as restrições*

$$f|_{]-\infty,0]} \qquad \text{e} \qquad f|_{[0,+\infty[}$$

são contínuas. Ora, já dissemos em **11**, Facto 3.1.6, que nestas condições a "colagem" de duas funções contínuas produz uma função contínua.

O conteúdo do exemplo anterior é suficientemente importante para que o registemos sob forma geral, susceptível de ser utilizada em outras situações:

Facto 2.1 *Seja f uma função definida num intervalo I, a um ponto interior de I, e suponhamos que se verifica*

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = f(a).$$

Então a função f é contínua em a. (Em particular, se f já é contínua nos pontos $x \neq a$, f é contínua em I.)

Exercícios da Secção 2 do Apêndice

$\boxed{1}$ Se

$$f(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^x-1} \quad \text{para } x \neq 0,$$

que valor se deve atribuir a f no ponto 0 para prolongar a $\mathbb{R}$ como função contínua?

$\boxed{2}$ As funções seguintes têm como domínio $\mathbb{R}$ privado de um ponto. Atribuir-lhes um valor nesse ponto de modo que a função assim prolongada seja contínua, ou explicar porque é que isso não é possível:

$$f : \mathbb{R}\setminus\{\pi\} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{3x-1}{1+x^2}.$$

$$f : \mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{1-x^3}{1-x+x^2-x^3}.$$

$$f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} \frac{1-x^3}{x-x^2} \text{ se } x<0 \\ x^2-2x-2 \text{ se } x>0 \end{cases}.$$

$$f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-2x}{x-x^2} \text{ se } x<0 \\ x^2-2x-2 \text{ se } x>0 \end{cases}.$$

3. Assíntotas

Recordemos que o conceito de limite intervém na definição e cálculo das assíntotas a um gráfico. Recomendamos a releitura de **11**, Secção 3.3.

Seja f uma função cujo domínio contém um intervalo com o extremo $+\infty$. Dizemos que a recta de equação

$$y = mx + p$$

é *assíntota* (do gráfico) de f quando $x \to +\infty$ se

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - (mx + p)) = 0 \tag{$*$}$$

exprimindo que, para valores de x suficientemente grandes (e positivos), os pontos do gráfico de f e os da recta considerada ficam tão próximos quanto pretendermos. Os valores de m e p calculam-se por

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}, \qquad\qquad p = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - mx) \tag{$**$}$$

Há definições e resultados análogos referentes a $-\infty$.

EXEMPLO 3.1 A função racional

$$f(x) = \frac{2x^2 + 1}{1 - x}$$

pode decompor-se na forma

$$\frac{2x^2 + 1}{1 - x} = -2x - 2 + \frac{3}{1 - x}$$

e reconhecemos imediatamente que a recta

$$y = -2x - 2$$

é assíntota de f quando $x \to +\infty$ e também quando $x \to -\infty$, visto que

$$f(x) - (-2x - 2) = \frac{3}{1 - x} \to 0$$

quando $x \to \pm\infty$. Neste caso a decomposição indicada permitiu-nos prescindir das fórmulas $(**)$.

Vale a pena observar que, afirmar que uma função f tem limite (real) quando $x \to +\infty$, isto é:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = p$$

equivale então a afirmar que a recta

$$y = p$$

(gráfico de função constante) é assíntota de f quando $x \to +\infty$. Dizemos então que f tem uma *assíntota horizontal*. Consideração análoga se pode fazer em relação a $-\infty$.

Finalmente, recordemos também que a recta

$$x = a$$

se diz *assíntota vertical* (do gráfico) de f se pelo menos uma das condições

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty, \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty.$$

se verificar.

Exercícios da Secção 3 do Apêndice

$\boxed{1}$ Quais das seguintes funções têm assíntotas (verticais ou quando $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$)?

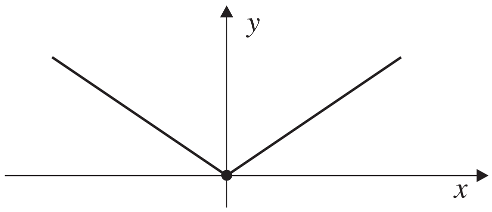
$$3x + 1 - \frac{4}{x}\,; \qquad \frac{x-1}{2x+1}\,; \qquad \frac{x^2}{2x+1}$$

$$\frac{x^3}{2x+1}\,; \qquad \sqrt{x-1}\,; \qquad \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$$

$$\frac{x}{1+\sqrt{x}}\,; \qquad x^2 e^x\,; \qquad x e^{\frac{1}{x}}\,.$$

4. Derivadas laterais

Dissemos, em **11**, Exemplo 4.2.1, que a função módulo, $f(x) = |x|$, não tem derivada no ponto x=0, mas, uma vez que



$$f(x) = -x \qquad \forall x \leqslant 0$$

e

$$f(x) = x \qquad \forall x \geqslant 0$$

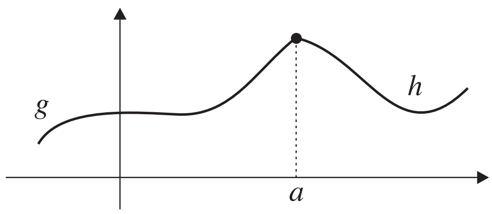
podemos atribuir-lhe uma "derivada à esquerda" em 0 com o valor -1 e uma "derivada à direita" em 0 com o valor 1. Isto é: já que, em $]-\infty, 0]$, f coincide com uma função derivável (a função $-x$) usamos a derivada desta em $x = 0$ para *definir* a *derivada de f à esquerda* em 0. E do mesmo modo para o lado direito.

De um modo geral, consideremos uma função definida por

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{se } x \leqslant a \\ h(x) & \text{se } x \geqslant a \end{cases} \tag{4.1}$$

(em particular, $f(a) = g(a) = h(a)$) e suponhamos que g tem derivada em $]-\infty, a]$ e h tem derivada em $[a, +\infty[$.

Então é fácil reconhecer que f tem derivada em todos os pontos $\bar{x} \neq a$. Com efeito, se $\bar{x} > a$, por exemplo



$$\begin{aligned} f'(\bar{x}) &= \lim_{x \to \bar{x}} \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}} \\ &= \lim_{x \to \bar{x}} \frac{h(x) - h(\bar{x})}{x - \bar{x}} = h'(\bar{x}), \end{aligned}$$

pois que para o cálculo dum limite quando $x \to \bar{x}$ só interessa o comportamento da função numa vizinhança do ponto $\bar{x}$.

No ponto a a derivada de f pode não existir. Mas o que é certo é que podemos ainda calcular

$$\lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = g'(a)$$

e

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{h(x) - h(a)}{x - a} = h'(a)$$

Por isso, afirmamos que f *tem derivada à esquerda em a, igual a* $g'(a)$, e *tem derivada à* *direita em a, igual a $h'(a)$*, E representamo-las com as notações

$$f'_e(a), \qquad f'_d(a)$$

respectivamente, de modo que

$$\boxed{f'_e(a) = g'(a) \qquad\qquad f'_d(a) = h'(a).}$$

Repare-se que podemos interpretar $f'_e(a)$ e $f'_d(a)$ como os declives de duas rectas "semitangentes" ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$.

OBSERVAÇÃO. Se, em particular, $g'(a) = h'(a)$, resulta que f tem derivada em a e

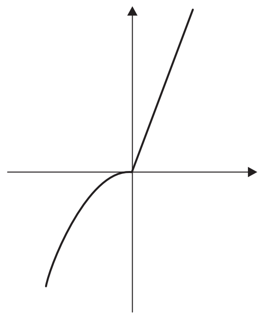
$$f'(a) = g'(a) = h'(a)\ !$$

EXEMPLO 4.1. Para

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{se } x \leqslant 0 \\ 2x & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

tem-se:

$$f'(x) = -2x \qquad \text{se } x < 0$$
$$f'(x) = 2 \qquad \text{se } x > 0$$
$$f'_e(0) = 0, \qquad f'_d(0) = 2.$$

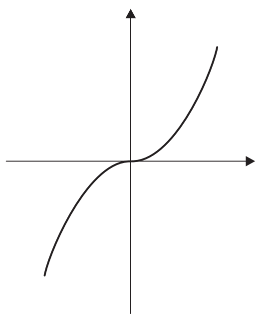


EXEMPLO 4.2. Para

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{se } x \leqslant 0 \\ x^2 & \text{se } x \geqslant 0 \end{cases}$$

tem-se:

$$f'(x) = -2x \qquad \text{se } x < 0$$
$$f'(x) = 2x \qquad \text{se } x > 0$$
$$f'(0) = 0.$$

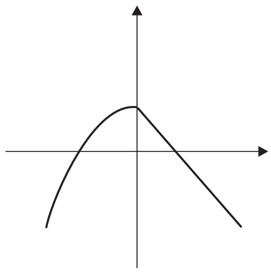


EXEMPLO 4.3. Para

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & \text{se } x \leqslant 0 \\ 2 - x & \text{se } x \geqslant 0 \end{cases}$$

tem-se:

$$\begin{aligned} & f'(x) = -2x \qquad \text{se } x < 0 \\ & f'(x) = -1 \qquad \text{se } x > 0 \\ & f'_e(0) = 0, \qquad f'_d(0) = -1. \end{aligned}$$



Quando uma função f é definida por uma fórmula do tipo (4.1), pode ser fácil detectar em a um extremo relativo, independentemente de existir derivada de f em a. Com efeito: se, por exemplo, g é crescente num intervalo da forma $[\alpha, a]$ e h é decrescente num intervalo da forma $[a, \beta]$, então é claro que $f(a)$ é máximo relativo de f. Analogamente se descreve um critério de mínimo relativo.

Em particular: se, em (4.1), $g'(x) \geqslant 0$ [respect. $\leqslant 0$] $\forall x \leqslant a$ e $h'(x) \leqslant 0$ [respect. $\geqslant 0$] $\forall x \geqslant a$, f tem um máximo [respect. mínimo] absoluto em a.

EXEMPLO 4.4. Nos 3 exemplos anteriores, a função considerada não tem extremos locais, com excepção do último, em que $f(0) = 2$ é máximo absoluto.

Exercícios da Secção 4 do Apêndice

$\boxed{1}$ Calcular as constantes a e b de modo que

$$f(x) = \begin{cases} x + a & \text{se} \quad x \leqslant 0 \\ x^2 + bx & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$$

defina em $\mathbb{R}$ uma função contínua e com derivada em todos os pontos. Que se pode afirmar sobre a monotonia de f ?

$\boxed{2}$ Estudar, quanto a monotonia e extremos relativos, a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se} \quad x \leqslant 0 \\ x - x^2 & \text{se} \quad x \geqslant 0. \end{cases}$$

Uma lista de derivadas para referência rápida

(A variável independente é x)

Função	**Derivada**
x^α	$\alpha\, x^{\alpha-1}$
$f(x)^\alpha$	$\alpha f(x)^{\alpha-1} f'(x)$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
$\sqrt{f(x)}$	$\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$
e^x	e^x
a^x	$(\ln a)a^x$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$e^{f(x)}$	$e^{f(x)} \cdot f'(x)$
$\ln f(x)$	$\frac{f'(x)}{f(x)}$
$\operatorname{sen} x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\operatorname{sen} x$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x$
$\operatorname{sen} f(x)$	$f'(x) \cos f(x)$
$\cos f(x)$	$-f'(x) \operatorname{sen} f(x)$

Uma pequena lista de limites notáveis

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{P(x)} = +\infty \qquad (P(x), \text{ um polinómio})$$

$$\lim_{x\to +\infty} \left(P(x)e^{-x}\right) = 0 \qquad (P(x), \text{ um polinómio})$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

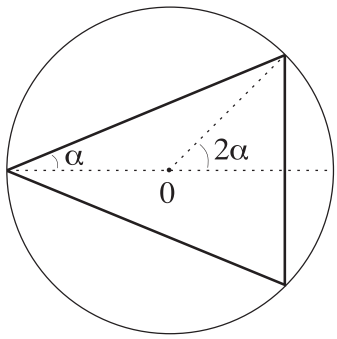
$$\lim_{x\to 0^+} (x^\alpha \ln x) = 0 \qquad (\alpha > 0)$$

$$\lim_{x\to \pm\infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = e^k \qquad (k \in \mathbb{R})$$

Exercícios suplementares

$\boxed{1}$ Dos triângulos isósceles cujo perímetro é 24 cm, qual é o que tem área máxima?

$\boxed{2}$ Considerar um triângulo isósceles inscrito numa circunferência de centro 0 e raio 1.

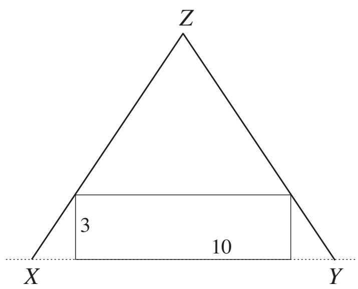


Verificar que o perímetro do triângulo é dado, em função do ângulo α (determinado por um dos lados iguais e pelo diâmetro que passa pelo vértice commun aos lados iguais) por

$$P(\alpha) = 2\text{sen}\, 2\alpha + 4\cos\alpha.$$

Determinar o valor máximo que o perímetro pode tomar.

$\boxed{3}$ É dado um rectângulo cujos lados medem 3 e 10 respectivamente.



Considerar os triângulos isósceles XYZ cuja base está na recta que contém o lado maior do rectângulo e cujos lados iguais passam nos vértices do lado oposto.

Qual é o valor mínimo que a área deste triângulo pode assumir?

$\boxed{4}$ Resolver, utilizando uma calculadora gráfica, o problema análogo ao anterior em que a "área" é substituída por "perímetro".

$\boxed{5}$ (a) Determinar a constante k de modo que a função

$$f(x) = x - k\sqrt{x}$$

tenha o seu valor mínimo no ponto $x = 10$.

(b) Determinar a constante k de modo que a mesma função tenha valor mínimo igual a -1000.

$\boxed{6}$ Determinar as rectas que passam pelo ponto $(1, 0)$ e são tangentes ao gráfico de $y = x^3$.

$\boxed{7}$ Sabendo que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tem as propriedades

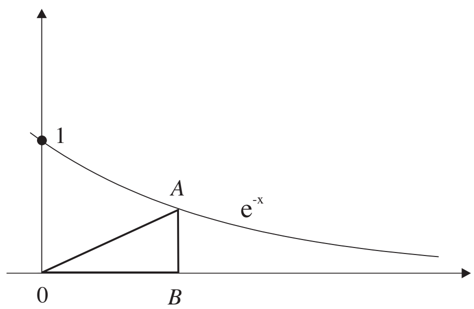
$$f(0) = 0, \qquad f'(0) = 1,$$

qual é o valor de

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}\,? \quad \lim_{x\to 0} \frac{f(2x)}{x}\,? \quad \lim \frac{f(x^2)}{x}\,? \quad \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(-x)}{x}\,?$$

$\boxed{8}$ Calcular p de modo que a recta $y = -x + p$ seja tangente ao gráfico da função $f(x) = \frac{1}{x+1}$ em algum ponto.

$\boxed{9}$ De todos os triângulos rectângulos que têm um vertice (0) na origem das coordenadas, outro (A) no gráfico de $y = e^{-x}$, e outro (B) no pé da perpendicular de A sobre o semi eixo positivo $0x$, qual tem área máxima?



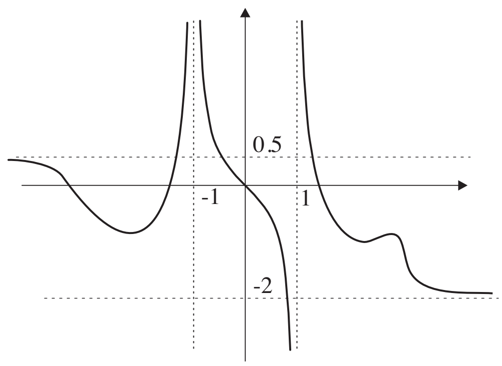
$\boxed{10}$ Quais são as assíntotas das funções

$$\frac{4x^2}{(3x-1)^2}\,? \qquad \frac{x^2(e^{-x}+1)}{1+2x}\,? \qquad \frac{2x}{\sqrt{x^2-1}}\,?$$

$\boxed{11}$ Quais são os sentidos de concavidade dos gráficos das funções seguintes:

$$x - 3x^{1/3}\,; \qquad\qquad x^{2/3} - x^{1/3}\,?$$

$\boxed{12}$ Dada uma função $f : \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \to \mathbb{R}$ com duas assíntotas horizontais e duas assíntotas verticais, cujo gráfico está sugerido ao lado, completar:



$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \cdots\cdots \qquad \lim_{x \to -1^+} f(x) = \cdots\cdots$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \cdots\cdots \qquad \lim_{x \to 1^+} f(x) = \cdots\cdots$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \cdots\cdots \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = \cdots\cdots$$

$\boxed{13}$ Fazer o esquema da representação gráfica de uma função contínua f, com domínio $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, e com as propriedades seguintes:

$$f(3) = 0, \qquad f(0) = 2, \qquad f(-1) = 0, \qquad f(-2) = -1$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$$

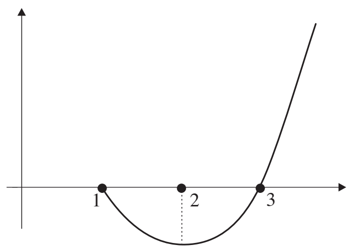
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2, \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0,$$

$$f'(x) \begin{cases} > 0 & \Leftrightarrow \quad x > -2 \text{ e } x \neq 1 \\ < 0 & \Leftrightarrow \quad x < -2 \end{cases}$$

$$f''(x) \begin{cases} > 0 & \Leftrightarrow \quad -4 < x < 1 \\ < 0 & \Leftrightarrow \quad x > 1 \text{ ou } x < -4 \end{cases}$$

$\boxed{14}$ Seja $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ uma função contínua. Sabe-se que f' existe e tem o gráfico cujo esquema se sugere ao lado. (Não há outras mudanças de sinal de f' e o mínimo de f' é atingindo no ponto 2.)

Fazer um esquema da representação gráfica de f, sabendo que $f(1) = 0$.



$\boxed{15}$ Para que valores de h é o conjunto solução da inequação

$$x^3 - 9x \leqslant h$$

(a) um intervalo ? (b) uma união de dois intervalos?

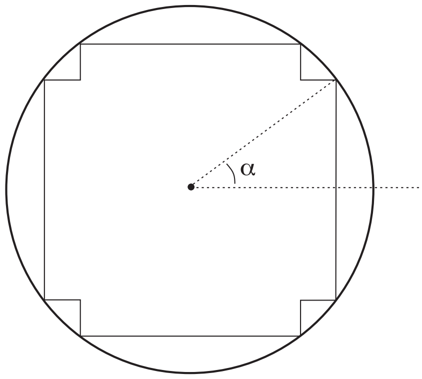
(Sugestão : estudar a função $x^3 - 9x$.)

$\boxed{16}$ Um gerador de corrente com a força electromotriz E e a resistência interna R_i gera na resistência R a potência

$$P = \frac{E^2 R}{(R_i + R)^2}$$

(em consequência da Lei de Ohm). Qual é o valor máximo da potência? (Observar que a variável independente do problema é R).

$\boxed{17}$ Na secção circular (com raio r) do enrolamento de um transformador vai ser inserido um núcleo de ferro formado por lâminas metálicas de secção em cruz (polígono que resulta de um quadrado retirando um quadrado mais pequeno a partir de cada vértice, como a figura sugere; o polígono fica inscrito na circunferência).



Verificar que a área da secção em cruz é dada por

$$A(\alpha) = 4r^2(\operatorname{sen} 2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha)$$

em função do ângulo α determinado pelo raio dirigido a um vértice da cruz e o diâmetro perpendicular a um lado que passa por esse vértice.

Qual é o valor máximo da área da secção em cruz? Que percentagem, com aproximação às décimas, da área do círculo representa esse valor máximo?

$\boxed{18}$ No estudo do mecanismo de biela e manivela em mecânica, surge o problema da determinação da *menor* raiz positiva da equação

$$x^3 - x^2 - x + 0.04 = 0.$$

Determiná-la com três casas decimais correctas.

$\boxed{19}$ No estudo da radiação térmica surge o problema de resolver a equação

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{5} \cdot$$

Determinar a sua raiz positiva com 3 decimais exactas.

$\boxed{20}$ Quando se liga um circuito eléctrico com resistência R e indução L a um gerador de corrente contínua com voltagem V, a intensidade da corrente é dada em função do tempo, a partir do instante $t = 0$ em que se faz a ligação, por

$$i = \frac{V}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right).$$

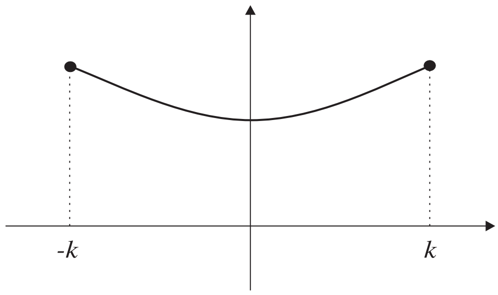
Qual é o valor de $\lim\limits_{t \to +\infty} i(t)$ e que significa este limite?

Quando $t = \dfrac{L}{R}$, que percentagem representa $i(t)$ daquele limite?

$\boxed{21}$ Um cabo pesado homogéneo suspenso pelas extremidades, à mesma altura do solo, adquire a forma do gráfico de uma função do tipo

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) \qquad (*)$$

no intervalo $[-k, k]$ (supõe-se o eixo das abcissas no nível do solo).



Chama-se *flecha* à distância na vertical entre o ponto mais alto e o ponto mais baixo do cabo suspenso, e *envergadura* à distância na horizontal entre as extremidades.

Se a envergadura é 100 metros e a flecha 10 metros, qual é o valor de a na fórmula $(*)$?