UNIVERSIDADE DE LISBOA

Faculdade de Ciências

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

12º ANO

Números Complexos

Armando Machado

2004

REANIMAT

Projecto Gulbenkian de Reanimação Científica da Matemática no Ensino Secundário

FUNDAÇÃO CALOUSTE GULBENKIAN

1. Como apareceram os números complexos.

Recordemos que uma equação de segundo grau na incógnita x é uma equação que se pode escrever na forma

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

com a, b e c números reais e $a \neq 0$, e que as soluções, quando existirem, de uma tal equação são dadas pela *fórmula resolvente*

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

De facto, a fórmula resolvente não só nos indica quais as soluções, quando elas existem, como nos permite reconhecer se essas soluções existem ou não: Se $b^2 - 4ac < 0$, não existem soluções, uma vez que os números negativos não têm raíz quadrada; se $b^2 - 4ac = 0$, a equação tem uma única solução; se $b^2 - 4ac > 0$, a equação tem duas soluções.

No século XVI a resolução das equações do segundo grau era já bem conhecida e procurava-se uma fórmula que permitisse resolver as equações do terceiro grau, isto é, as equações que se podem escrever na forma

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

com a, b, c e d números reais e $a \neq 0$. O facto de se estar em presença de um problema claramente mais complicado que o levantado pelas equações do segundo grau levou os matemáticos dessa época a procurar simplificar a equação antes de a tentar resolver: Em primeiro lugar, dividindo ambos os membros da equação pelo coeficiente a do termo com x^3, eram conduzidos a uma equação equivalente com um tal coeficiente igual a 1. Bastava-lhes assim procurar resolver as equações do tipo

$$x^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

Em segundo lugar, tomando $y = x + \frac{b}{3}$ ou seja, fazendo uma substituição $x = y - \frac{b}{3}$, foram conduzidos à equação na variável y

$$(y - \frac{b}{3})^3 + b(y - \frac{b}{3})^2 + c(y - \frac{b}{3}) + d = 0$$

que, depois de desenvolvida e simplificada, se escrevia na forma equivalente

$$y^3 + py + q = 0,$$

onde $p = -\frac{b^2}{3} + c$ e $q = \frac{2b^3}{27} - \frac{bc}{3} + d$ (o objectivo era precisamente anular o coeficiente do termo com y^2). As soluções da equação de partida podiam então ser obtidas subtraindo $\frac{b}{3}$ às soluções da "equação incompleta" na variável y.

Exercício 1. Desenvolva e simplifique o primeiro membro da equação

$$(y - \frac{b}{3})^3 + b(y - \frac{b}{3})^2 + c(y - \frac{b}{3}) + d = 0$$

de modo a concluir que ela se pode escrever na forma $y^3 + py + q = 0$, com p e q dados por $p = -\frac{b^2}{3} + c$ e $q = \frac{2b^3}{27} - \frac{bc}{3} + d$.

No fim da primeira metade do século XVI foi finalmente descoberta, por algebristas italianos das universidades de Bolonha e Milão, uma fórmula que, quando fizer sentido, fornece uma das soluções da equação do terceiro grau

$$y^3 + py + q = 0,$$

a saber

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Esta fórmula é conhecida por "fórmula de Cardano"[1].

Exercício 2. Notemos, para fixar ideias,

$$A = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}, \quad B = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

supondo, é claro, que as expressões nos segundos membros fazem sentido, isto é que $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \geq 0$.[2]

a) Mostre que $A^3 + B^3 = -q$.

b) Mostre que $AB = -\frac{p}{3}$.

c) Utilize as conclusões de a) e b) e o desenvolvimento de $(A + B)^3$ (binómio de Newton) para demonstrar a fórmula de Cardano, isto é, para concluir que $y = A + B$ é efectivamente uma solução da equação $y^3 + py + q = 0$.

A fórmula de Cardano, apesar do seu interesse teórico, levanta algumas questões:

A primeira tem a ver com o facto de que, como sabemos do estudo das funções polinomiais de grau 3, uma equação do terceiro grau pode ter 1, 2 ou 3 soluções; no entanto, a fórmula da Cardano só dá uma dessas soluções. Porque será que essa solução há-de ter mais direitos que as outras?

Examinemos um caso concreto:

Exercício 3. Considere a equação do terceiro grau $x^3 - 3x - 2 = 0$.

a) Verifique que a fórmula de Cardano conduz à solução 2 desta equação.

b) Utilize a raíz 2 do polinómio $x^3 - 3x - 2$ para o decompor como produto de dois polinómios de grau inferior e, a partir dessa decomposição, determine as restantes soluções da equação considerada.

c) Utilize a sua calculadora gráfica para interpretar geometricamente as soluções obtidas (conferir com a figura 1 adiante).

Uma segunda característica desagradável da fórmula de Cardano é a sua tendência para mascarar soluções simples. Pensemos, por exemplo, na equação

$$x^3 - 2x + 4 = 0.$$

Utilizando a calculadora gráfica para tentar prever o que poderão ser as soluções desta equação,

---

[1]Associa-se habitualmente a descoberta desta fórmula a Scipione del Ferro ou a Tartaglia, mas ela foi divulgada por Cardano em 1545.

[2]Convém recordar que só os números reais não negativos é que têm raíz quadrada mas que, pelo contrário, todos os números reais têm raíz cúbica.

obtemos um gráfico como o da figura 2.

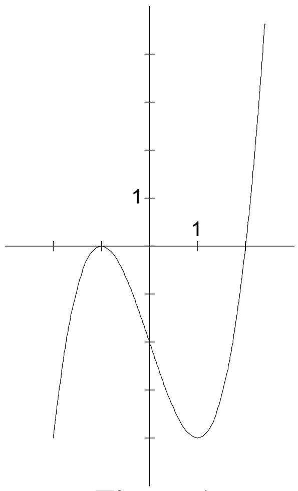

Figura 1

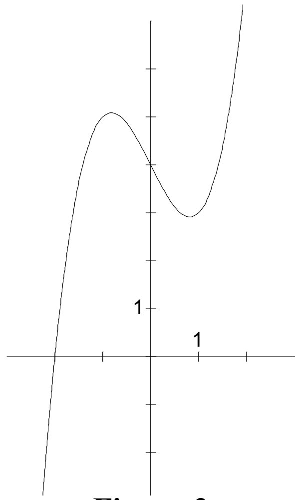

Figura 2

Do exame do gráfico somos levados a concluir que a equação tem apenas uma solução, que parece ser -2. Por substituição na equação, concluímos que -2 é efectivamente a solução. É claro que, não havendo neste caso outra solução, a fórmula de Cardano deve conduzir à solução -2. Ora, aplicando-a, obtemos as seguintes expressões para a solução:

$$
\begin{aligned}
&\sqrt[3]{-2+\sqrt{4-\frac{8}{27}}}+\sqrt[3]{-2-\sqrt{4-\frac{8}{27}}}= \\
&=\sqrt[3]{-2+\sqrt{\frac{100}{27}}}+\sqrt[3]{-2-\sqrt{\frac{100}{27}}}= \\
&=\sqrt[3]{-2+\frac{10}{3\sqrt{3}}}+\sqrt[3]{-2-\frac{10}{3\sqrt{3}}}= \\
&=\sqrt[3]{-2+\frac{10\sqrt{3}}{9}}+\sqrt[3]{-2-\frac{10\sqrt{3}}{9}}\,.
\end{aligned}
$$

Apesar de todas as tentativas de simplificação, não parece existir nenhum processo simples directo de verificar que a expressão anterior é igual a -2. No entanto, ela é igual a -2, visto que sabemos que a expressão fornece uma raíz e que -2 é a única raíz!

Exercício 4. a) Utilize a sua calculadora para determinar o valor aproximado da expressão $\sqrt[3]{-2+\frac{10\sqrt{3}}{9}}+\sqrt[3]{-2-\frac{10\sqrt{3}}{9}}$ e repare que a resposta é simplesmente -2.
b) Será que o valor obtido na calculadora pode ser considerado como uma prova de que a expressão na alínea a) é exactamente igual a 2?
c) Calcule e simplifique o cubo das expressões $-1+\frac{\sqrt{3}}{3}$ e $-1-\frac{\sqrt{3}}{3}$ e utilize os resultados obtidos para simplificar a expressão na alínea a).[3]

Examinemos enfim uma última dificuldade levantada pela fórmula de Cardano e que acabou por revelar-se de grande utilidade por ter originado o aparecimento de um novo instrumento matemático de grande importância, que estudaremos em breve, a teoria dos números complexos.

[3] Assim até parece fácil simplificar a expressão… No entanto não havia razões para advinhar quais os candidatos a raíz cúbica.

Pensemos na equação do terceiro grau

$$x^3 - 7x + 6 = 0$$

e vejamos qual a solução desta equação que é proposta pela fórmula de Cardano. Obtemos então para a solução a expressão

$$\sqrt[3]{-3 + \sqrt{9 - \frac{343}{27}}} + \sqrt[3]{-3 - \sqrt{9 - \frac{343}{27}}} =$$
$$= \sqrt[3]{-3 + \sqrt{-\frac{100}{27}}} + \sqrt[3]{-3 - \sqrt{-\frac{100}{27}}}\,.$$

Mas isto é muito estranho! Os números negativos não têm raíz quadrada e portanto a expressão anterior não tem significado. Ela não define assim nenhuma solução da equação! Podíamos pensar que estávamos em presença de uma situação análoga à da equação do segundo grau, em que o aparecimento da raíz quadrada de um número negativo na fórmula resolvente indicava a inexistência de solução. Mas não, nós sabemos que, no caso das equações do terceiro grau, existe sempre solução. Utilizando, como antes, a calculadora gráfica para tentar prever o que poderão ser as soluções desta equação, obtemos um gráfico como o da figura 3.

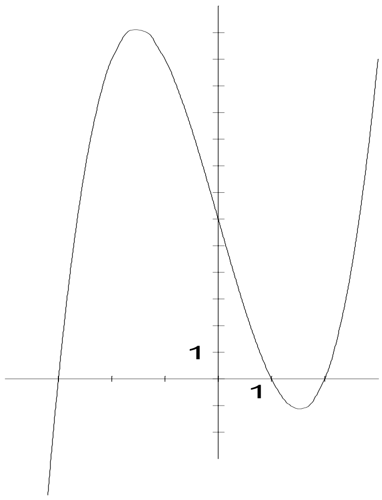

Figura 3

Do exame do gráfico somos levados a conjecturar a existência de três soluções, aproximadamente -3, 1 e 2. Substituindo na equação concluímos que, efectivamente -3, 1 e 2 são as soluções da equação. No entanto, neste caso, a fórmula de Cardano não fornece nenhuma das três soluções, uma vez que envolve a raíz quadrada de um número negativo.[4]

Os matemáticos italianos do século XVI recusaram-se a aceitar que a fórmula de resolução da equação do terceiro grau, obtida com tanta dificuldade, pudesse falhar desta maneira. A forma que encontraram de tornear o problema foi a de imaginar que, para além dos números reais que todos conhecemos, deviam existir uma espécie de "fantasmas" que ninguém via mas com os quais era possível trabalhar, usando, em particular, as mesmas operações que se usavam no quadro dos números reais. Os números reais negativos passariam a ter raízes quadradas, que seriam

[4]Ironicamente, pode verificar-se que é exactamente no caso em que a equação tem mais soluções que a fórmula de Cardano não fornece nenhuma delas.

"fantasmas" e não números reais, e a fórmula de Cardano, apesar de nos passos intermédios passar por alguns "fantasmas", devia, depois de todas as operações feitas, conduzir a uma das soluções.

A aceitação dos novos números, a que hoje se dá o nome de *números complexos*, não foi pacífica na comunidade matemática mas a riqueza das suas aplicações foi-os impondo pouco a pouco. Só mais de dois séculos mais tarde, no início do século XIX, os novos números passaram a ser aceites sem restrições, graças, em particular, à sua interpretação geométrica, como pontos ou vectores dum plano, que teremos ocasião de examinar adiante.

2. Os números complexos dum ponto de vista axiomático.

Vamos estudar nesta secção os números complexos de um ponto de vista axiomático. Quer isso dizer que não nos preocupamos em saber exactamente o que são os números complexos, vamos simplesmente supôr que eles existem e que no seu contexto estão definidas operações, como a soma e a multiplicação, análogas às definidas no contexto do números reais. Explicitamos então algumas propriedades que admitimos que essas operações vão verificar (os axiomas). Em seguida examinaremos algumas propriedades que podem ser deduzidas daquelas que foram admitidas. De certo modo, colocamo-nos na posição dos matemáticos italianos que primeiro estudaram os números complexos, no século XVI, apesar de não nos preocuparmos em seguir exactamente os seus passos.[5]

Axioma 1. Vamos supor que os números complexos constituem um conjunto $\mathbb{C}$, que contém o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, e que estão definidas em $\mathbb{C}$ duas operações, adição e multiplicação, notadas respectivamente $+$ e $\times$, que estendem as operações correspondentes nos números reais.

Repare-se que, quando dizemos que estas operações estendem as correspondentes operações nos números reais, estamos a significar que, dados dois números reais, a sua soma e o seu produto como números complexos coincidem com a sua soma e o seu produto como números reais.

Axioma 2. Vamos supor que, tal como já acontecia no quadro dos números reais, a adição e a multiplicação verificam as propriedades comutativa e associativa e que, além disso, a multiplicação goza da propriedade distributiva relativamente à adição.

Usando as letras z e w, eventualmente acompanhadas de plicas, como variáveis associadas a números complexos, as propriedades comutativas traduzem as identidades

$$z+w=w+z, \quad z\times w=w\times z,$$

as propriedades associativas correspondem às identidades

$$(z+z')+z''=z+(z'+z''), \quad (z\times z')\times z''=z\times(z'\times z'')$$

e a propriedade distributiva é expressa pelas identidades

$$z\times(w+w')=(z\times w)+(z\times w'), \quad (z+z')\times w=(z\times w)+(z'\times w).$$

Tal como já acontecia no quadro dos números reais, a propriedade associativa permite utilizar sem ambiguidade as notações $z+z'+z''$ e $z\times z'\times z''$, assim como as notações análogas com mais de três parcelas ou factores. Também se usam no quadro dos números complexos as mesmas

[5]O primeiro matemático que estudou os números complexos de forma sistemática foi Bombelli, da Universidade de Bolonha.

convenções de dispensa de parênteses e de omissão do sinal $\times$ que são habituais no contexto dos números reais. Por exemplo, $z \times w + w'$ significa $(z \times w) + w'$, e não $z \times (w + w')$, e zw é o mesmo que $z \times w$.

Axioma 3. O número real 0 continua a ser um elemento neutro da adição e um elemento absorvente da multiplicação em $\mathbb{C}$. O número real 1 continua a ser um elemento neutro da multiplicação em $\mathbb{C}$.

O axioma precedente afirma que, para os números complexos z, continuam a ser válidas as identidades

$$z + 0 = z, \quad 0 \times z = 0, \quad 1 \times z = z.$$

As potências de expoente natural de um número complexo z definem-se do mesmo modo que no contexto dos números reais: $z^1 = z$, $z^2 = z \times z$ e, em geral, z^n designa o produto de n factores iguais a z.

Vamos agora verificar que, tal como o que acontece no quadro dos números reais, é possível definir o simétrico dum número complexo e a diferença de dois números complexos. Repare-se que, para isso, não necessitamos de nenhum axioma novo. Começamos com duas definições:

Se $z \in \mathbb{C}$, chamamos *simétrico* de z ao número complexo, que notamos $-z$, definido por

$$-z = (-1) \times z.$$

Se $z, w \in \mathbb{C}$, define-se a *diferença* $w - z$ pela fórmula

$$w - z = w + (-z).$$

É claro que, quando os números complexos em questão forem reais, o simétrico de z e a diferença $w - z$ definidos atrás coincidem com os correspondentes conceitos já conhecidos nesse caso (as nossas definições estendem as já conhecidas). Convirá também verificar que as definições anteriores são equivalentes às definições usuais de simétrico (como único elemento que somado com o dado dá 0) e de diferença $w - z$ (como único elemento que somado com z dá w). Destaquemos esses resultados, que, em rigor, teriam que ser provados:

Se $z \in \mathbb{C}$, o seu simétrico $-z$ é o único número complexo que somado com z dá 0. Se $z, w \in \mathbb{C}$, $w - z$ é o único número complexo que somado com z dá w.

Tendo em vista o estudante mais interessado, vejamos como as afirmações que acabamos de destacar podem ser justificadas. Mostremos que $w - z$ é o único número complexo que somado com z dá w. Para isso, começamos por mostrar que $w - z$ verifica essa condição: Ora, podemos escrever

$$\begin{aligned}(w - z) + z &= w + (-z) + z = w + (-1) \times z + 1 \times z = \\ &= w + ((-1) + 1) \times z = w + 0 \times z = w + 0 = w,\end{aligned}$$

que é exactamente o que pretendíamos. Falta-nos ainda verificar que não há mais nenhum número complexo, além de $w - z$, que verifica a propriedade referida. Para isso, supomos que u era um número complexo tal que $u + z = w$ e tentamos provar que u tem que ser igual a $w - z$. Ora, partindo de $u + z = w$, podemos somar $-z$ a ambos os membros e obtemos sucessivamente

$$\begin{aligned}&u + z + (-z) = w + (-z),\\ &u + 1 \times z + (-1) \times z = w - z\\ &u + (1 + (-1)) \times z = w - z\\ &u + 0 \times z = w - z\end{aligned}$$

$$u + 0 = w - z$$
$$u = w - z,$$

como queríamos. Como caso particular do que acabamos de provar, obtemos a caracterização do simétrico: $-z = 0 + (-z) = 0 - z$ é o único número complexo que somado com z dá 0.

Exercício 5. Examine com atenção as demonstrações anteriores, de modo a descobrir quais os axiomas que foram sendo aplicados.

Exercício 6. Demonstre a seguinte *lei do corte* para a adição de números complexos: Se $w + z = w' + z$, então $w = w'$.

Exercício 7. Demonstre a seguinte propriedade distributiva da multiplicação relativamente à subtracção:

$$z \times (w - w') = z \times w - z \times w'.$$

Até agora os axiomas que apresentámos apenas afirmavam que os números complexos são semelhantes aos números reais; em rigor até podia acontecer que não existissem números complexos para além dos reais. O próximo axioma é o que vai garantir a existência de números complexos que não são reais, de facto aqueles que estiveram na origem do aparecimento dos novos números.

Axioma 4. Existe um número complexo, que notaremos i, para o qual se tem

$$i^2 = i \times i = -1.$$

Repare-se que **o número complexo i não é real**, uma vez que nós sabemos que não existe nenhum número real cujo quadrado seja negativo. Recordemos a demonstração de que não existe nenhum número real cujo quadrado seja menor que 0, para verificar por que razão essa demonstração não se aplica no contexto dos números complexos (se se aplicasse, o axioma 4 seria contraditório com os anteriores).

Se x é um número real arbitrário, sabemos que, ou $x \geq 0$ ou $x \leq 0$. No primeiro caso a propriedade que relaciona a multiplicação com a relação de ordem implica que $x^2 = x \times x \geq x \times 0 = 0$; no segundo caso essa mesma propriedade implica que $x^2 = x \times x \geq x \times 0 = 0$. Em qualquer dos casos tem-se assim $x^2 \geq 0$, ou seja, x^2 nunca é negativo.

A razão por que esta demonstração não se aplica no quadro dos números complexos está em que, no contexto destes, não está definido o conceito de "ser maior que": Não dizemos o que é um número complexo ser maior que outro, nem o que é um número complexo ser maior que 0, salvo quando os números complexos envolvidos forem números reais. De facto, a demonstração atrás mostra que não é possível definir uma conceito de "ser maior que" no contexto dos números complexos, de modo que se continuem a verificar as propriedades usuais de compatibilidade com a multiplicação.

Exercício 8. a) Verifique que $-i$, tal como i, é uma raíz quadrada de -1 (a definição de raíz quadrada é análoga à que conhece no contexto dos números reais)
b) Determine um número complexo que seja raíz quadrada de -9. Generalizando o que acaba de fazer, mostre que, no quadro dos números complexos, todos os números reais têm raíz quadrada[6].

[6]Verificaremos em breve que, mais geralmente, todos os números complexos têm raíz quadrada.

Vamos introduzir agora um último axioma, que, intuitivamente, garante que "não há mais números complexos do que os estritamente necessários". Com efeito, se a e b são números reais, podemos considerar sucessivamente os números complexos $bi = b \times i$ e $a + bi$; o que o axioma afirma é que qualquer número complexo pode ser escrito nessa forma (costuma-se então dizer que o número complexo está escrito *na forma algébrica*).

Axioma 5. Qualquer que seja $z \in \mathbb{C}$, existem números reais a e b tais que $z = a + bi$.

O axioma anterior deixa um problema em aberto: Será que um mesmo número complexo se pode escrever de mais que um modo na forma $a + bi$? Por exemplo, seria possível que um certo número complexo se escrevesse simultaneamente na forma $2 + 3i$ e $-1 + 5i$? Se assim fosse, tinha-se portanto $2 + 3i = -1 + 5i$, de onde se deduzia, somando $1 - 3i$ a ambos os membros, que $3 = 2i$ e portanto também, multiplicando ambos os membros pelo real $\frac{1}{2}$, que $\frac{3}{2} = i$; mas isto é absurdo, uma vez que já sabemos que i não é um número real, e portanto não pode ser igual a $\frac{3}{2}$.

O raciocínio que acabamos de fazer, neste caso particular, pode ser feito numa situação mais geral. Suponhamos que a, b, c, d são números reais e que se tem $a + bi = c + di$. Somando a ambos os membros $-a - di$, deduzimos a igualdade $bi - di = c - a$, ou seja $(b - d)i = c - a$. Se fosse $b - d \neq 0$, a igualdade anterior conduzia a um absurdo, visto que, multiplicando ambos os membros pelo real $\frac{1}{b-d}$, obtínhamos $i = \frac{c-a}{b-d}$, o que contrariava o facto de i não ser real. Concluímos assim que tem que ser $b - d = 0$, e portanto também $c - a = 0 \times i = 0$, ou seja, $b = d$ e $a = c$. Acabámos portanto de provar o facto importante seguinte:

Dados números reais a, b, c e d tais que $a + bi = c + di$, tem-se necessariamente $a = c$ e $b = d$.

Em geral, quando $z = a + bi$, com a e b números reais, dizemos que a é a *parte real* de z e que b é o *coeficiente da parte imaginária* de b, e notamos

$$a = \mathrm{Re}(z), \quad b = \mathrm{Im}(z).$$

Dá-se o nome de *imaginários puros* aos números complexos cuja parte real é 0, isto é, àqueles que se podem escrever na forma bi, com $b \in \mathbb{R}$.

Repare-se que o número 0 é simultaneamente real e imaginário puro, uma vez que também se pode escrever na forma $0 = 0 \times i$.

Exercício 9. Combinando o axioma 5 com o facto que acabamos de estabelecer, vemos que qualquer número complexo pode ser escrito, de maneira única, na forma $a + bi$, com a e b números reais. Para cada um dos números complexos a seguir indicados, indique quais os valores de a e b correspondentes:

a) π; **b)** $-2i$; **c)** $(1 + 2i) + (-2 - i)$;

d) $(1 + 2i) \times (-1 + 3i)$; **e)** $(1 + i)^2$; **f)** $(-1 + \sqrt{3}\, i)^3$.

Exercício 10. Escreva na forma algébrica as seguintes potências de i:

a) i^3; **b)** i^4; **c)** i^8; **d)** i^{25}; **e)** i^{102}; **f)** i^{2003}.

Generalizando o método que decerto seguiu, para calcular algumas das potências referidas, explicite uma regra prática para calcular as potências de expoente natural de i.

Exercício 11. Determine as raízes quadradas do número complexo $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i$, isto é, os números complexos $z = x + yi$, com $x, y \in \mathbb{R}$, tais que $z^2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i$. Não se assuste com o sistema de duas equações do segundo grau nas incógnitas x e y, que vai obter.

Vamos agora examinar, no contexto dos números complexos, o problema da divisão, como operação inversa da multiplicação. Tal como já acontecia no contexto dos números reais, a divisão só vai estar definida no caso em que o divisor é diferente de 0.

Do mesmo modo que, para tratarmos do problema da subtração, começámos por definir o simétrico dum número complexo, vamos agora examinar o que vai ser o inverso de um número complexo não nulo. Como passo auxiliar começamos por definir o conjugado de um número complexo.

> Se $z \in \mathbb{C}$, definimos o seu conjugado $\overline{z}$ como sendo o número complexo que tem a mesma parte real e coeficiente da parte imaginária simétrico. Por outras palavras, se $z = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$, tem-se $\overline{z} = a - bi$.

Repare-se que o número complexo z é real se, e só se, $\overline{z} = z$.

Uma das razões da importância do complexo conjugado está no facto de a soma e o produto de um número complexo com o seu conjugado serem ambos números reais. Mais precisamente, sendo $z = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$, tem-se

$$\begin{aligned} z + \overline{z} &= a + bi + a - bi = 2a, \\ z \times \overline{z} &= (a + bi) \times (a - bi) = a \times (a - bi) + bi \times (a - bi) = \\ &= a^2 - abi + abi - b^2 i^2 = a^2 + b^2. \end{aligned}$$

A fórmula para o produto é especialmente importante, uma vez que ela nos mostra que, não só concluímos que $z \times \overline{z}$ é um número real, como podemos afirmar que $z \times \overline{z} \geq 0$, tendo-se mesmo $z \times \overline{z} > 0$ no caso em que $z \neq 0$ (nesse caso um dos números reais a e b é diferente de 0, e portanto o seu quadrado é maior que 0). Quando z é um número complexo diferente de 0 é agora muito fácil determinar um número complexo que multiplicado por z dá 1: Tem-se, com efeito,

$$z \times \left(\frac{1}{a^2 + b^2} \times \overline{z}\right) = \frac{1}{a^2 + b^2} \times z \times \overline{z} = 1.$$

> Se $z = a + bi$ é um número complexo diferente de 0, onde $a, b \in \mathbb{R}$, define-se o seu *inverso* z^{-1} como sendo o número complexo
>
> $$z^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2} \times \overline{z},$$
>
> tendo-se então, como verificámos atrás, $z \times z^{-1} = 1$.

Podemos agora definir o quociente de um número complexo w por um número complexo $z \neq 0$ e verificar que o quociente assim definido pode ser caracterizado pela propriedade a que estamos habituados no contexto dos números reais.

Se $w, z \in \mathbb{C}$, com $z \neq 0$, define-se o quociente $\frac{w}{z}$ pela fórmula

$$\frac{w}{z} = w \times z^{-1}.$$

Pode então provar-se que $\frac{w}{z}$ é o único número complexo que multiplicado por z dá w. Em particular $\frac{1}{z} = 1 \times z^{-1} = z^{-1}$ é o único número complexo que multiplicado por z dá 1.

Como fizémos no caso da subtracção, para provarmos a afirmação anterior, temos que verificar duas coisas: Em primeiro lugar $\frac{w}{z}$ verifica a propriedade referida, uma vez que

$$\frac{w}{z} \times z = w \times z^{-1} \times z = w \times 1 = w;$$

Em segundo lugar temos que provar que $\frac{w}{z}$ é o único número complexo que verifica essa propriedade e, para isso, supomos que u era um número complexo que verifica a propriedade $u \times z = w$ e deduzimos que tem que ser

$$u = u \times 1 = u \times z \times z^{-1} = w \times z^{-1} = \frac{w}{z}.$$

Outra das consequências importantes das propriedades precedentes é o facto de, no contexto dos números complexos, continuarem a ser válidas a lei do corte e a propriedade do anulamento de um produto. Recordemos o enunciado destas propriedades e justfiquemo-las.

Lei do corte: $z, w, w' \in \mathbb{C}$, com $z \neq 0$ e $z \times w = z \times w'$, tem-se $w = w'$.

Para justificarmos esta propriedade basta multiplicarmos ambos os membros da igualdade $z \times w = z \times w'$ por z^{-1}, obtendo-se $z^{-1} \times z \times w = z^{-1} \times z \times w'$ e portanto sucessivamente $1 \times w = 1 \times w'$ e $w = w'$.

Lei do anulamento do produto: Dados $z, w \in \mathbb{C}$, tem-se $z \times w = 0$ se, e só se, $z = 0$ ou $w = 0$.

Já sabemos que, se $z = 0$ ou $w = 0$, então $z \times w = 0$ (0 é um elemento absorvente da multiplicação). O que falta ver é que, se supusermos que $z \times w = 0$, tem que ser $z = 0$ ou $w = 0$, ou seja, que, se $z \neq 0$, então $w = 0$. Ora, isso resulta, por exemplo, da lei do corte, uma vez que se tem

$$z \times w = 0 = z \times 0.$$

Exercício 12. a) Mostre que, se $z \neq 0$ e $w \neq 0$, então $(zw)^{-1} = z^{-1}w^{-1}$.
b) Deduza daqui, pelo método de indução, que, para cada número natural n,

$$(z^n)^{-1} = (z^{-1})^n$$

(o valor comum é, por definição, e tal como nos números reais, a potência de expoente negativo z^{-n}, continuando a definir-se $z^0 = 1$).

Exercício 13. Mostre que, no quadro dos números complexos, continua a ser válida a seguinte propriedade das "fracções": Se multiplicarmos ambos os membros de uma fracção por um mesmo número complexo, diferente de 0, não alteramos o respectivo valor; por outras palavras, dados números complexos w, z, z', com $z \neq 0$ e $z' \neq 0$, tem-se

$$\frac{w}{z} = \frac{w \times z'}{z \times z'}.$$

A propriedade que acabamos de referir é aplicada com frequência em várias situações. Uma delas é no cálculo prático do quociente de dois números complexos $\frac{w}{z}$ sem precisarmos de saber de cor a fórmula para z^{-1} utilizada na respectiva definição. Expliquemos, com um exemplo, o método que é costume seguir: Suponhamos que queremos calcular, na forma algébrica, o quociente $\frac{1+i}{2-i}$. O que fazemos é multiplicar ambos os membros da fracção pelo conjugado do denominador, de forma a ficarmos na situação mais simples em que o denominador é um número real:

$$\frac{1+i}{2-i} = \frac{(1+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{2+i+2i+i^2}{4+2i-2i-i^2} = \frac{1+3i}{5} = \frac{1}{5} + \frac{3}{5}i.$$

Exercício 14. Determine na forma algébrica o seguintes quocientes:
a) $\dfrac{13}{3-2i}$, **b)** $\dfrac{1-2i}{i}$.

Exercício 15. Se $z \in \mathbb{C}$, chamam-se raízes quadradas de z aos números complexos w tais que $w^2 = z$.
a) Mostre que 0 tem uma única raíz quadrada, a saber o próprio 0.
b) Mostre que, se $z \neq 0$ e w é uma raíz quadrada de z, então z tem precisamente duas raízes quadradas, a saber w e $-w$. **Sugestão:** Repare que, para cada número complexo u, tem-se $u^2 - z = (u-w)(u+w)$.
c) Generalizando o que fez no exercício 11, mostre que qualquer número complexo $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ tem uma raíz quadrada.[7]

No exercício anterior verificámos que todo o número complexo $z \neq 0$ tem duas raízes quadradas. Apesar disso, evita-se, sempre que possível, escrever a expressão $\sqrt{z}$, com a excepção do caso em que z é um número real maior ou igual a 0. Com efeito, constata-se que não existe nenhum processo razoável de escolher, para qualquer z, qual das duas raízes quadradas deve ser designada por $\sqrt{z}$ (no caso em que $z \in \mathbb{R}$ e $z \geq 0$, $\sqrt{z}$ continuará a designar a raíz quadrada que é maior ou igual a 0). Quando tivermos, mesmo assim, necessidade de utilizar o símbolo $\sqrt{z}$, fora do quadro em que z é um real maior ou igual a 0, estará subentendido que ele designa uma das duas raízes quadradas de z, que foi escolhida mas não se está a explicar qual é.

Como exemplo do tipo de problemas que é levantado por estas indeterminações, façamos a pergunta se a igualdade[8] $i = \sqrt{-1}$ é verdadeira ou falsa. A resposta é: Não sabemos. Com efeito, i é uma das duas raízes quadradas de -1, mas $-i$ é outra, pelo que é tão legítimo escrever $i = \sqrt{-1}$ como $-i = \sqrt{-1}$ e não queremos decerto deduzir daqui que $i = -i$!

Exercício 16. Dado um número complexo geral z, quais das seguintes afirmações podem ser garantidas como verdadeiras ou como falsas e quais têm um valor de verdade que não se pode determinar?
a) $(\sqrt{z})^2 = z$;
b) $\sqrt{z^2} = z$;
c) $i = \sqrt{-1} \vee i = -\sqrt{-1}$.[9]
d) $\sqrt{1+i} = i$.

[7]Encontraremos na próxima secção um processo mais simples de verificar que qualquer número complexo tem uma raíz quadrada.
[8]Por alguns autores apresentada como "definição" de i.
[9]quando a mesma raíz quadrada aparece duas vezes numa certa expressão, fica subentendido que ela se refere nas duas posições ao mesmo valor.

3. Interpretação geométrica dos números complexos. A forma trigonométrica dos números complexos.

Tendo em conta o que estudámos na secção precedente, podemos considerar uma correspondência biunívoca entre o conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos e o conjunto $\mathbb{R}^2$ dos pares ordenados de números reais, correspondência que a cada número complexo z associa o par ordenado (x, y) tal que $z = x + yi$.

A correspondência biunívoca que acabamos de referir recorda-nos decerto uma situação análoga, já estudada no décimo ano:

Fixemos, com efeito, um referencial dum plano, determinado por uma origem O e por dois vectores $\overrightarrow{e_x}$ e $\overrightarrow{e_y}$. Sabemos então que o conjunto $\mathbb{R}^2$ dos pares de números reais está em correspondência biunívoca tanto com o conjunto dos vectores do plano como com o conjunto dos pontos do plano. Essas correspondências associam a cada par (x, y) o vector e o ponto com aquelas coordenadas.

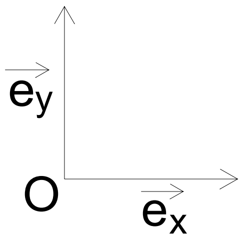

Figura 4

Combinando as duas situações, constatamos que o conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos, pode ser posto em correspondência biunívoca tanto com o conjunto dos vectores do plano como com o conjunto dos ponto do plano. Essas correspondências associam naturalmente a cada número complexo $z = x + yi$, com $x, y \in \mathbb{R}$, o vector $\overrightarrow{u}$ e o ponto P cujas coordenadas são (x, y) (tem-se assim $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OP}$).

No contexto precedente, dizemos que o ponto $P \leftrightarrow (x, y)$ é o *afixo* do número complexo $z = x + iy$ e que o vector $\overrightarrow{u} \leftrightarrow (x, y)$ é o seu *afixo vectorial*.

As correspondências biunívocas, que acabamos de referir, pressupõem a fixação do referencial do plano e, para assegurar a validade de algumas conclusões que obteremos adiante, **suporemos sempre que os vectores $\overrightarrow{e_x}$ e $\overrightarrow{e_y}$ são ortogonais e de norma igual a 1**. É também costume, embora não seja indispensável, escolher o referencial de forma que, para rodarmos $\overrightarrow{e_x}$ para $\overrightarrow{e_y}$ pelo caminho mais curto, nos desloquemos "para a esquerda".[10] Em qualquer caso, neste contexto, consideramos sempre que o sentido directo é o correspondente à rotação mais curta de $\overrightarrow{e_x}$ para $\overrightarrow{e_y}$.

Exercício 17. Determine, no contexto da figura 4, o afixo e o afixo vectorial de cada um dos seguintes números complexos:

a) $1 - 2i$; **b)** $-2 + i$; **c)** 1; **d)** i.

[10] Por outras palavras, temos um referencial ortonormado directo. Como já tivémos ocasião de referir em anos anteriores, a afirmação sobre os comprimentos pressupõe a fixação de uma unidade de comprimento e a noção de "esquerdo e direito" tem um significado relativo, que varia com a "posição do observador".

Exercício 18. Determine os números complexos cujos afixos vectoriais são vectores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$, assinalados na figura 5. Quais os pontos do plano que são afixos desses números complexos?

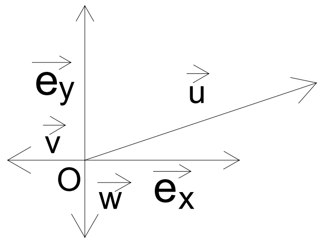

Figura 5

A representação geométrica dos números complexos por pontos do plano, descoberta no início do século XIX, teve grande importância histórica, em particular por ajudar muitos matemáticos renitentes a aceitar os números complexos como algo que existia verdadeiramente. Um dos matemáticos associados a essa descoberta é o suíço Argand e ainda hoje se costuma chamar *plano de Argand* (ou, simplesmente, *plano complexo*) a um plano em que se fixou um referencial ortonormado, com o objectivo de representar os números complexos.

Para além da importância histórica que referimos, a representação geométrica revelou-se de grande utilidade pelo modo como ela traduz as diferentes noções envolvendo números complexos, em particular as operações que os envolvem.

Como primeiro exemplo de tradução desse tipo, temos a interpretação geométrica da soma de números complexos: Se $z = x + yi$ e $w = a + bi$, então $z + w = (x + a) + (y + b)i$, por outras palavras, a parte real da soma de dois números complexos é a soma das suas partes reais e o coeficiente da parte imaginária da soma de dois números complexos é a soma dos coeficientes das suas partes imaginárias. Por outro lado, também sabemos que a abcissa e a ordenada da soma de dois vectores são respectivamente a soma das abcissas e a soma das ordenadas desses vectores. Juntando estes dois factos chegamos à seguinte conclusão:

O afixo vectorial da soma de dois números complexos é igual à soma dos afixos vectoriais desses números complexos.

As duas propriedades que enunciamos em seguida têm uma justificação inteiramente análoga:

O afixo vectorial da diferença de dois números complexos é igual à diferença dos afixos vectoriais desses números complexos.

O afixo vectorial do produto de um número real a por um número complexo é igual ao produto de a pelo afixo vectorial desse número complexo.

Repare-se que não dizemos nada, de momento, sobre o afixo vectorial do produto de números complexos; isso será feito mais tarde, quando tivermos estudado a forma trigonométrica dos números complexos.

Exercício 19. Na figura 6 o vector $\overrightarrow{z}$ é o afixo vectorial de um certo número complexo z. Determine os afixos vectoriais dos números complexos:

a) $z+2$; **b)** $z-i$; **c)** $-\frac{3}{2}z$.

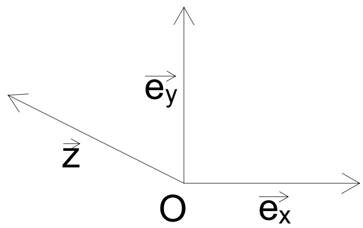

Figura 6

Exercício 20. Na figura 7 os pontos P e Q são os afixos de dois números complexos z e w, respectivamente.
a) Determine o afixo vectorial do número complexo $z-w$, representando-o como uma seta com origem no afixo Q de w.
b) Determine o afixo de $z-w$.

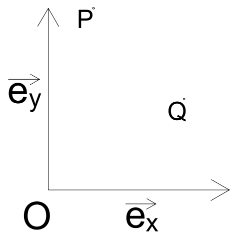

Figura 7

Com frequência, para tornar mais intutiva a representação, assinala-se o afixo e o afixo vectorial de um número complexo com o mesmo símbolo que denota esse número complexo. É também frequente não desenhar explicitamente os vectores $\overrightarrow{e_x}$ e $\overrightarrow{e_y}$, representando apenas os eixos acompanhados de alguma informação que torne claros a unidade de comprimento e os sentidos positivos. As figuras 8 e 9 exemplificam essas convenções.

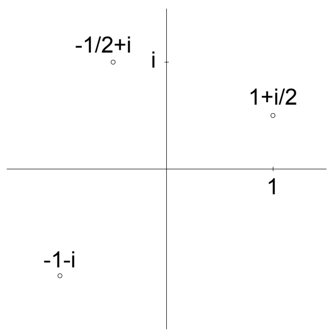

Figura 8

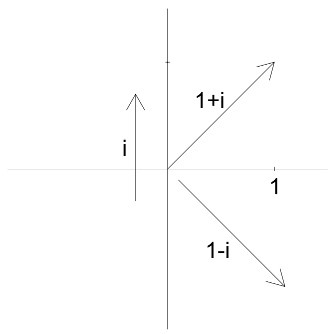

Figura 9

Definimos na secção precedente o *conjugado* de um número complexo $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$, como sendo o número complexo $\overline{z} = x - yi$, que tem a mesma parte real e coeficiente da parte imaginária simétrico. A interpretação geométrica do conjugado é simples: O afixo e o afixo vectorial do conjugado do número complexo z têm a mesma abcissa que os de z e ordenadas simétricas. A conjugação dos números complexos corresponde assim geometricamente à simetria relativamente ao eixo das abcissas:

O afixo e o afixo vectorial do conjugado $\overline{z}$ de um número complexo z são simétricos, relativamente ao eixo das abcissas do afixo e do afixo vectorial de z.

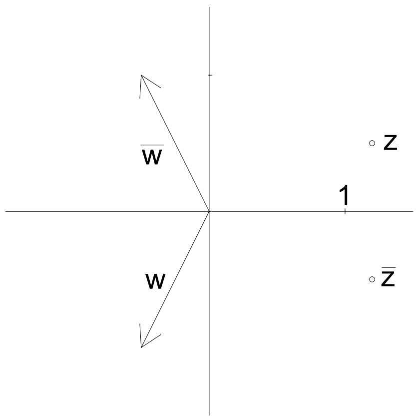

Figura 10

Exercício 21. a) Quais serão os números complexos cujos afixos estão no eixo das abcissas?
b) Interprete a conclusão de a), tendo em conta que os números reais são exactamente os números complexos que coincidem com os respectivos conjugados.
c) Quais serão os números complexos cujos afixos estão no eixo das ordenadas?

Examinamos em seguida duas propriedades importantes dos conjugados dos números complexos. Consideremos então dois complexos $z = x + yi$ e $w = a + bi$.

Se somarmos primeiro os números complexos e considerarmos depois o conjugado do resultado, obtemos sucessivamente

$$\begin{aligned} z + w &= (x + a) + (y + b)i \\ \overline{z + w} &= (x + a) - (y + b)i. \end{aligned}$$

Por outro lado, se começarmos por considerar os conjugados $\overline{z} = x - yi$ e $\overline{w} = a - bi$ dos números complexos e somarmos estes conjugados, obtemos o mesmo resultado:

$$\overline{z} + \overline{w} = (x + a) - (y + b)i.$$

Com a multiplicação, acontece um fenómeno análogo: Tem-se

$$\begin{aligned} z \times w &= (x + yi)(a + bi) = xa + xbi + yai + ybi^2 = \\ &= (xa - yb) + (xb + ya)i \end{aligned}$$

donde

$$\overline{z \times w} = (xa - yb) - (xb + ya)i,$$

e, por outro lado, multiplicando os conjugados, obtemos o mesmo resultado:

$$\begin{aligned} \overline{z} \times \overline{w} &= (x - yi)(a - bi) = xa - xbi - yai + ybi^2 = \\ &= (xa - yb) - (xb + ya)i. \end{aligned}$$

Podemos assim destacar as seguintes conclusões:

O conjugado da soma de dois números complexos é igual à soma dos respectivos conjugados e o conjugado do produto de dois números complexos é igual ao produto dos respectivos conjugados. Tem-se assim:

$$\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}, \quad \overline{z \times w} = \overline{z} \times \overline{w}.$$

A noção de complexo conjugado vai ajudar-nos a estender ao contexto dos números complexos uma noção bem conhecida no quadro dos números reais, a de *módulo* ou *valor absoluto*. Recordemos que, se x é um número real, o seu módulo $|x|$ é o número real maior ou igual a 0 definido por

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

(lembrar que a definição não levanta problema uma vez que, se $x = 0$, ambas as expressões x e $-x$ dão o mesmo valor 0). Esta maneira de definir o módulo não se pode aplicar aos números complexos gerais, uma vez que, como já referimos, para estes não definimos o que é ser ≥ 0 ou ≤ 0. Podemos tentar tirar partido de outra caracterização equivalente do módulo dum número real, a saber da fórmula que bem conhecemos $|x| = \sqrt{x^2}$. Também aqui havia um problema em tentar generalizá-la directamente para definir o módulo dum número complexo, uma vez que, em geral, se $z \in \mathbb{C}$, z^2 é um número complexo, pelo que não sabemos quais das duas raízes devemos considerar na expressão $\sqrt{z^2}$ e, além disso, nenhuma dessas raízes é, em geral, um número real maior ou igual a 0. Há, no entanto, uma pequena adaptação que permite que a nossa ideia funcione, que é a de considerar o produto $z \times \overline{z}$, no lugar de z^2. Essa modificação não altera nada no caso em que z é real, visto que então $\overline{z} = z$. A razão porque esta adaptação resolve o nosso problema está em que, como já observámos, quando construímos o inverso dum número complexo, $z \times \overline{z}$ é sempre um número real maior ou igual a 0, só sendo igual a 0 quando $z = 0$. Com efeito, como já tínhamos observado, se $z = x + yi$, com $x, y \in \mathbb{R}$,

$$z \times \overline{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 - xyi + xyi - y^2i^2 = x^2 + y^2.$$

Podemos finalmente apresentar a definição de módulo de um número complexo, generalizando a de módulo de um número real.

Chama-se módulo do número complexo z ao número real maior ou igual a 0

$$|z| = \sqrt{z \times \overline{z}}.$$

Sendo $z = x + yi$, com $x, y \in \mathbb{R}$, tem-se assim

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Recordando a fórmula que nos dá o comprimento de um vector, a partir das suas coordenadas num referencial ortonormado, a segunda caracterização do módulo, que acabamos de apresentar, conduz-nos à seguinte interpretação geométrica:

O módulo dum número complexo z é igual à norma do seu afixo vectorial, e portanto também à distância à origem do seu afixo.

Exercício 22. Determine os módulos dos seguintes números complexos:
a) $1 + i$; **b)** $3 - 4i$; **c)** i; **d)** -2.

Da caracterização $|z| = \sqrt{z \times \overline{z}}$ do módulo dum número complexo podemos deduzir que, no contexto destes números continua a ser válida uma propriedade bem conhecida no caso dos números reais. Calculemos, com efeito, o módulo do produto de dois números complexos:

$$
\begin{aligned}
|z \times w| &= \sqrt{z \times w \times \overline{z \times w}} = \sqrt{z \times \overline{z} \times w \times \overline{w}} = \\
&= \sqrt{z \times \overline{z}} \times \sqrt{w \times \overline{w}} = |z| \times |w|.
\end{aligned}
$$

Quaisquer que sejam os números complexos z, w, tem-se

$$|z \times w| = |z| \times |w|.$$

Exercício 23. **a)** Mostre que, se $z \in \mathbb{C}$, então o conjugado $\overline{\overline{z}}$, do número complexo $\overline{z}$, é igual a z: $\overline{\overline{z}} = z$.
b) Mostre que se tem $|\overline{z}| = |z|$.
c) Mostre que, se $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, então o conjugado de $\frac{1}{z}$ é $\frac{1}{\overline{z}}$.
d) Mostre que, se $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, então $|\frac{1}{z}| = \frac{1}{|z|}$.

Exercício 24. Mostre que, quaisquer que sejam $z, w \in \mathbb{C}$, tem-se

$$|z + w| \leq |z| + |w|.$$

Sugestão: Reduza esta desigualdade à desigualdade análoga que envolve dois vectores $\overrightarrow{x}$ e $\overrightarrow{w}$ do plano ou do espaço: $\|\overrightarrow{z} + \overrightarrow{w}\| \leq \|\overrightarrow{z}\| + \|\overrightarrow{w}\|$. Justifique esta última com a ajuda da desigualdade bem conhecida entre os comprimentos dos três lados de um triângulo

Exercício 25. Determine no plano de Argand o conjunto dos afixos dos números complexos de módulo 2.

Exercício 26. Determine no plano de Argand os conjuntos dos afixos dos números complexos z que verificam cada uma das seguintes condições:
a) $|z - i| = 1$. **Sugestão:** Repare que o afixo vectorial de $z - i$ é o vector com origem em i e extremidade z e interprete, por esse facto, o significado geométrico de $|z - i|$.
b) $|z + i| \leq 1$. **Sugestão:** Repare que $z + i = z - (-i)$.
c) $|z + \frac{1}{2}| = |z - i|$.
d) $|z - 1| = 1 \wedge |z| < |z - 1 - i|$.
e) $|z| \leq 1 \vee |z - i| = 1$.
f) $|z - i| \leq |z - 1| \leq |z + i|$.

No contexto do exercício precedente, podemos considerar que os subconjuntos do plano de Argand são determinados pelas condições envolvendo o número complexo z. No exercício seguinte propomos o problema recíproco: São dados certos subconjuntos do plano de Argand e procuramos determinar condições, envolvendo a variável complexa z, que definam esses subconjuntos.

Exercício 27. Procure, para cada um dos subconjuntos do plano de Argand sugeridos nas figuras 11 a 14, uma condição envolvendo a variável complexa z, que determine esse conjunto.

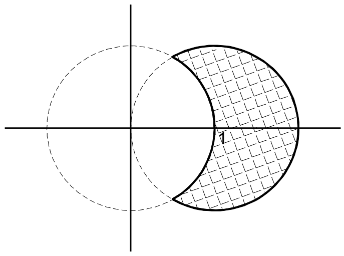

Figura 11

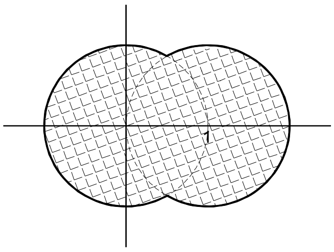

Figura 12

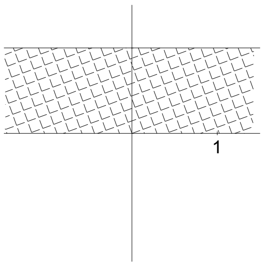

Figura 13

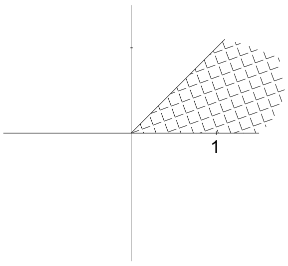

Figura 14

Vamos agora estudar a noção de argumento de um número complexo diferente de 0, que começamos por definir a partir da representação geométrica do número complexo no plano de Argand.

> Dado um número complexo $z \neq 0$, consideremos no plano de Argand a semirecta de origem O que contém o afixo de z. Chamamos *argumento* de z a qualquer dos ângulos de movimento que conduz do semi-eixo positivo das abcissas à semi-recta referida.

Nas figuras 15 a 17 estão sugeridos três argumentos para o número complexo $z = 1 + i$, a saber, usando o radiano como unidade de medida, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{9\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2\pi$ e $-\frac{7\pi}{4} = \frac{\pi}{4} - 2\pi$.

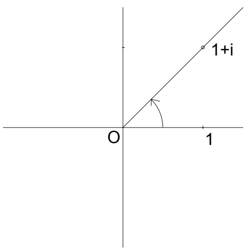

Figura 15

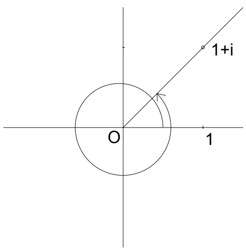

Figura 16

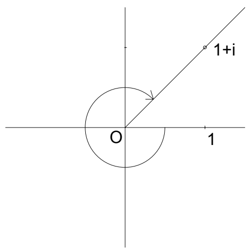

Figura 17

O argumento de um número complexo não nulo tem assim o mesmo tipo de indeterminação que já apareceu no estudo do décimo primeiro ano quando se referiram os ângulos de movimento que podem levar de uma posição de uma semirecta para outra, com a mesma origem:

> Se α é um argumento do número complexo não nulo z, então os diferentes argumentos de z são precisamente os números da forma $\alpha + k \times 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$. [11]

[11] Lembrar que o argumento é um ângulo e que, portanto, quando nenhuma outra unidade for indicada, está subentendido que a unidade considerada é o radiano (360° corresponde a 2π).

Repare-se que, uma vez que um dado número complexo admite vários argumentos, não faz sentido usarmos uma expressão do tipo "**o** argumento de z" devendo preferir-se uma do tipo "**um** argumento de z".

Pelo contrário, uma vez que, dado $r > 0$, em cada semi-recta de origem O existe um único ponto da semi-recta à distância r de O, podemos dizer que o módulo e um dos argumentos determinam completamente um número complexo. Mais precisamente:

> Dados $r > 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, existe um único complexo de módulo r que admite α como um dos seus argumentos.

Exercício 28. a) Por que razão só se definiu a noção de argumento para os números complexos diferentes de 0?
b) Determine um número complexo w com os mesmos argumentos que $z = 2 + 3i$ mas diferente de z.
c) Quais os argumentos dos números reais positivos?
d) Se α é um dos argumentos de um número complexo z, determine dois argumentos diferentes do número complexo $-3z$.
e) Se α é um dos argumentos de um número complexo z, determine um argumento do número complexo conjugado $\overline{z}$.

Vamos agora estudar o modo de determinar um argumento particular de um número complexo dado na forma algébrica $z = x + yi$ e, reciprocamente, o de determinar, na forma algébrica, um número complexo do qual se conhece o seu módulo e um dos seus argumentos.

Consideremos primeiro um número complexo $z = x + yi$ de módulo 1, portanto com $x^2 + y^2 = 1$. O afixo de z está portanto na circunferência de centro O e raio 1, ou seja, no círculo trigonométrico. O que estudámos no décimo primeiro ano diz-nos então que, sendo α um dos argumentos de z, isto é, um dos ângulos de movimento que conduz à semi-recta definida pelo afixo, tem-se, por definição, $\cos(\alpha) = x$ e $\operatorname{sen}(\alpha) = y$. Em resumo, podemos dizer que:

> O número complexo z de módulo 1 que admite α como um dos seus argumentos é
> $$z = \cos(\alpha) + \operatorname{sen}(\alpha)\, i.$$

É agora muito fácil estender o enunciado precedente de forma a considerar números complexos com módulo $r > 0$ arbitrário. Basta, com efeito, reparar que, multiplicando por r um número complexo de módulo 1, obtemos um número complexo de módulo r que admite os mesmos argumentos que o primeiro (o seu afixo está na mesma semi-recta com origem O). Concluímos assim que:

> Se $r > 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, o número complexo de módulo r que admite α como um dos seus argumentos é
> $$z = r\,(\cos(\alpha) + \operatorname{sen}(\alpha)\, i).$$
> Costuma dizer-se que esta é a *forma trigonométrica* do número complexo.

Por razões puramente estéticas, a forma trigonométrica do número complexo z com módulo r e com α como um dos argumentos costuma ser escrita

$$z = r\,(\cos(\alpha) + i\,\text{sen}(\alpha)).$$

Com frequência, principalmente no contexto do Ensino Secundário, utiliza-se também a seguinte forma abreviada

$$z = r\,\text{cis}(\alpha)$$

ou ainda, omitindo parênteses,

$$z = r\,\text{cis}\,\alpha.$$ [12]

Exercício 29. a) Determine na forma algébrica o número complexo de módulo 2 que admite $\frac{2\pi}{3}$ como um dos argumentos.
b) Determine na forma algébrica, com aproximação às milésimas da parte real e do coeficiente da parte imaginária, o número complexo de módulo $\sqrt{2}$ que admite $\frac{\pi}{9}$ como argumento.

Ao resolver o exercício precedente, decerto constatou como é simples passar da forma trigonométrica de um número complexo para a sua forma algébrica. O caminho inverso, apesar de não ser tão directo, também não é difícil de percorrer.

Um dos modos de passar da forma algébrica para a forma trigonométrica consiste em começar por determinar o módulo e, em seguida, dividir o número complexo pelo seu módulo. Obtém-se assim um número complexo de módulo 1 com os mesmo argumentos que o primeiro (o afixo está na mesma semi-recta com origem em O). Uma vez que a parte real e o coeficiente da parte imaginária deste número complexo de módulo 1 são respectivamente o co-seno e o seno de qualquer dos seus argumentos, é muito fácil de determinar estes (ou, pelo menos, valores aproximados com o auxílio da calculadora).

Quando apenas pretendemos determinar o argumento de um número complexo $z = x + iy$, cuja parte real x não é nula, existe um caminho porventura mais directo de determinar um argumento α de z, que consiste em lembrar que $\frac{y}{x}$ é o declive da recta que contém o afixo de z, e portanto que $\text{tg}(\alpha) = \frac{y}{x}$, o que nos permite deduzir um valor do argumento, eventualmente com o auxílio da calculadora, tendo em conta o facto de o quadrante do afixo de z ser conhecido a partir dos sinais de x e y.

Exercício 30. Determine o módulo e um argumento particular para cada um dos números complexos seguintes:
a) $1 + \sqrt{3}i$; **b)** $-1+i$; **c)** i; **d)** -2.

Exercício 31. Determine o módulo e um valor aproximado às milésimas de um argumento do número complexo $-3 - 4i$.

A importância principal da representação trigonométrica dos números complexos está na interpretação geométrica da multiplicação destes que vamos encontrar em seguida.

Consideremos então dois números complexos não nulos z e w, o primeiro com módulo r e admitindo α como um dos seus argumentos e o segundo com módulo s e admitindo β como um dos

[12] As letras cis tentam lembrar, respectivamente **c**o-seno, $\boldsymbol{i}$ e **s**eno. No contexto da Matemática mais avançada, em que se define a exponencial de base e e expoente complexo, em vez de $\text{cis}(\alpha)$ utilia-se a expressão, com o mesmo significado, $e^{i\alpha}$.

seus argumentos. Tem-se assim

$$\begin{aligned} z &= r(\cos(\alpha) + i\,\text{sen}(\alpha)) \\ w &= s(\cos(\beta) + i\,\text{sen}(\beta)). \end{aligned}$$

Efectuando a multiplicação, obtemos o resultado seguinte:

$$\begin{aligned} z \times w &= rs(\cos(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\text{sen}(\beta)i + \text{sen}(\alpha)\cos(\beta)i + \text{sen}(\alpha)\text{sen}(\beta)i^2) = \\ &= rs((\cos(\alpha)\cos(\beta) - \text{sen}(\alpha)\text{sen}(\beta)) + i\,(\text{sen}(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\text{sen}(\beta))). \end{aligned}$$

Este resultado pode parecer pouco interessante se não o relacionarmos com duas fórmulas que encontrámos no estudo do décimo primeiro ano, envolvendo o co-seno e o seno da soma de dois ângulos:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) - \text{sen}(\alpha)\text{sen}(\beta) \\ \text{sen}(\alpha + \beta) &= \text{sen}(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\text{sen}(\beta). \end{aligned}$$

Tendo presente estas fórmulas, podemos então escrever

$$z \times w = rs(\cos(\alpha + \beta) + i\,\text{sen}(\alpha + \beta)).$$

Podemos então destacar a seguinte propriedade:

Sendo

$$\begin{aligned} z &= r(\cos(\alpha) + i\,\text{sen}(\alpha)) \\ w &= s(\cos(\beta) + i\,\text{sen}(\beta)), \end{aligned}$$

dois números complexos não nulos, tem-se

$$z \times w = rs(\cos(\alpha + \beta) + i\,\text{sen}(\alpha + \beta)).$$

Por outras palavras, o produto de dois números complexos não nulos tem módulo igual ao produto dos módulos dos dois complexos[13] e admite como argumento a soma de dois argumentos arbitrários destes.

Exercício 32. Considere os números complexos

$$\begin{aligned} z &= \cos(\frac{\pi}{6}) + i\,\text{sen}(\frac{\pi}{6}), \\ w &= \cos(\frac{\pi}{3}) + i\,\text{sen}(\frac{\pi}{3}). \end{aligned}$$

a) Determine, primeiro na forma trigonométrica e seguidamente na forma algébrica, o número complexo $z \times w$.
b) Determine, na forma trigonométrica, o número complexo $\frac{w}{z}$.
Sugestão: Lembre que $\frac{w}{z}$ é o número complexo que multiplicado por z dá w.
c) Determine na forma trigonométrica os números complexos iz e $-z$.
Sugestão: Repare na forma trigonométrica dos números i e -1.

Uma interpretação interessante da forma trigonométrica do produto de dois números complexos corresponde a pensar na interpretação geométrica da multiplicação de um número complexo w pelo número complexo de módulo 1 $\cos(\alpha) + i\,\text{sen}(\alpha)$: Uma vez que obtemos um número complexo

[13]Esta parte da conclusão já era nossa conhecida.

com o mesmo módulo que w e com um argumento igual ao de w somado com α, podemos dizer que a multiplicação corresponde a rodar o afixo de w do ângulo α em torno da origem.

Um caso particular importante da observação anterior é o correspondente à multiplicação por i: Uma vez que $i = \cos(\frac{\pi}{2}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{2})$, podemos dizer que, quando multiplicamos um número complexo por i, rodamos o respectivo afixo em torno da origem de um ângulo recto, no sentido directo.

Exercício 33. Na figura 18 está representado o conjunto dos afixos de um certo conjunto $\mathcal{A}$ de números complexos.
a) Represente na figura o conjunto dos afixos dos números complexos iz, com $z \in \mathcal{A}$.
b) Represente na figura o conjunto dos afixos dos números complexos z tais que $iz \in \mathcal{A}$.

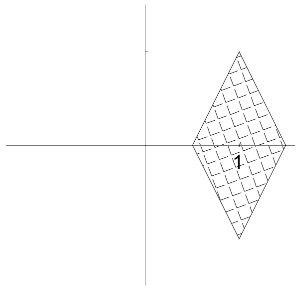

Figura 18

Ao resolver a alínea b) do exercício 32 decerto descobriu como deduzir uma fórmula para o quociente de dois números complexos na forma trigonométrica:

Sendo

$$z = r(\cos(\alpha) + i\,\mathrm{sen}(\alpha)),$$
$$w = s(\cos(\beta) + i\,\mathrm{sen}(\beta)),$$

dois números complexos não nulos, tem-se

$$\frac{z}{w} = \frac{r}{s}(\cos(\alpha - \beta) + i\,\mathrm{sen}(\alpha - \beta)).$$

Por outras palavras, o quociente de dois números complexos não nulos tem módulo igual ao quociente dos módulos dos dois complexos e admite como argumento a diferença de dois argumentos arbitrários destes.

A explicação é simples: Uma vez que $\frac{z}{w}$ é o único número complexo que multiplicado por w dá z, só temos que reparar que o produto dos números complexos

$$\frac{r}{s}(\cos(\alpha - \beta) + i\,\mathrm{sen}(\alpha - \beta))$$
$$s(\cos(\beta) + i\,\mathrm{sen}(\beta))$$

é efectivamente $z = r(\cos(\alpha) + i\,\mathrm{sen}(\alpha))$, e isso é uma consequência da fórmula para o produto de números complexos dados na forma trigonométrica.

Exercício 34. Sendo

$$z = r(\cos(\alpha) + i\,\mathrm{sen}(\alpha)),$$

um númerto complexo não nulo, determine, na forma trigonométrica, os seguintes números

complexos:
a) $\frac{1}{z}$; **b)** z^2; **c)** z^3; **d)** z^4.

Exercício 35. Generalizando o que fez nas alíneas b), c) e d) do exercício precedente, prove, por indução, a fórmula que destacamos em seguida, para a potência de um número complexo dado na forma trigonométrica.

> **Fórmula de Moivre:** Sendo
> $$z = r(\cos(\alpha) + i\,\text{sen}(\alpha))$$
> um número complexo não nulo e $n \geq 1$ um inteiro, tem-se
> $$z^n = r^n(\cos(n\alpha) + i\,\text{sen}(n\alpha)).$$

Exercício 36. a) Escreva na forma trigonométrica cada um dos seguintes números complexos e represente os respectivos afixos no plano de Argand:

$$z_1 = \sqrt{3} + i, \quad z_2 = -\sqrt{3} + i, \quad z_3 = -2i.$$

b) Determine, primeiro na forma trigonométrica e depois na forma algébrica, os números complexos z_1^3, z_2^3 e z_3^3.
c) Acabou de concluir que z_1, z_2 e z_3 são três raízes cúbicas distintas de $8i$. Utilize a forma de Moivre para mostrar que não existe mais nenhuma raíz cúbica de $8i$.

Exercício 37. a) Utilize a fórmula de Moivre para determinar, primeiro na forma trigonométrica e depois na forma algébrica, as raízes quadradas do número complexo $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i$. Compare o resultado com os valores obtidos no exercício 11.
b) Determine na forma algébrica as raízes quartas de -4.
c) Com o auxílio da sua calculadora, determine valores aproximados às milésimas para a parte real e para o coeficiente da parte imaginária de cada uma das raízes sétimas de i. Represente aproximadamente os afixos dessas raízes sétimas no plano de Argand.

Ao resolver os exercícios precedentes, decerto descobriu uma propriedade geral das raízes de índice n de um número complexo não nulo que mostra que, nesse aspecto, os números complexos se comportam de uma maneira mais regular que os números reais. Recordemos que, no contexto dos números reais, quando n é ímpar, qualquer número tem uma única raíz de índice n e, quando n é par, os números maiores que 0 têm duas raízes de índice n (simétricas uma da outra) e os números menores que 0 não têm nenhuma. No caso dos números complexos a situação é mais simples:

> Se $n \geq 1$ é um inteiro, qualquer número complexo não nulo z tem exactamente n raízes de índice n, cujos afixos se dispõem sobre uma circunferência de raio $\sqrt[n]{|z|}$ com argumentos sucessivamente espaçados de $\frac{2\pi}{n}$. [14]

Mais precisamente, se escrevermos z na forma trigonométrica,

$$z = r(\cos(\alpha) + i\,\text{sen}(\alpha)),$$

as raízes de índice n de z são exactamente os números complexos que se podem escrever na forma

[14] É claro que 0 tem uma única raíz de índice n, a saber o próprio 0.

$$\sqrt[n]{r}\,(\cos(\frac{\alpha}{n}+\frac{k}{n}\times 2\pi)+i\,\text{sen}(\frac{\alpha}{n}+\frac{k}{n}\times 2\pi)),$$

com k número inteiro entre 0 e $n-1$.[15] Na figura 19 estão representados os afixos das sete raízes de índice 7 de i (compare com o que fez na alínea c) do exercício 37).

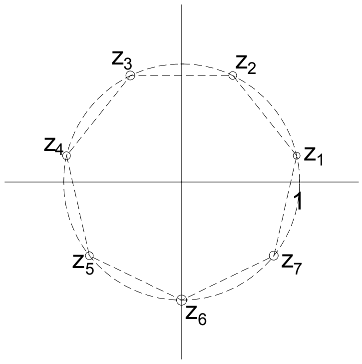

Figura 19

A explicação da afirmação anterior, que possivelmente já descobriu, resume-se a três factos simples:

1) Qualquer números complexo da forma

$$\sqrt[n]{r}\,(\cos(\frac{\alpha}{n}+\frac{k}{n}\times 2\pi)+i\,\text{sen}(\frac{\alpha}{n}+\frac{k}{n}\times 2\pi)),$$

com k número inteiro, é uma raíz de índice n de z, uma vez que, pela fórmula de Moivre, a sua potência de expoente n é igual a

$$\begin{aligned}&r(\cos(\alpha+k\times 2\pi)+i\,\text{sen}(\alpha+k\times 2\pi))=\\&=r(\cos(\alpha)+i\,\text{sen}(\alpha))=z.\end{aligned}$$

2) Os números complexos da forma

$$\sqrt[n]{r}\,(\cos(\frac{\alpha}{n}+\frac{k}{n}\times 2\pi)+i\,\text{sen}(\frac{\alpha}{n}+\frac{k}{n}\times 2\pi)),$$

com k número inteiro entre 0 e $n-1$, são todos distintos, uma vez que admitem argumentos que diferem de uma quantidade estritamente entre 0 e 2π e que não pode assim ser múltipla inteira de 2π.

3) Se w é uma raíz de índice n arbitrária de z, w pode ser escrito na forma trigonométrica

$$w=s(\cos(\beta)+i\,\text{sen}(\beta)),$$

tendo-se então, pela fórmula de Moivre,

$$s^n(\cos(n\beta)+i\,\text{sen}(n\beta))=w^n=z=r(\cos(\alpha)+i\,\text{sen}(\alpha)),$$

o que implica que $s^n=r$, ou seja, $s=\sqrt[n]{r}$, e $n\beta=\alpha+k\times 2\pi$, para algum $k\in\mathbb{Z}$. Esta última igualdade mostra que $\beta=\frac{\alpha}{n}+\frac{k}{n}\times 2\pi$, e portanto que w é uma das n raízes de índice n referidas (apesar de k não ter que estar entre 0 e $n-1$, já observámos na nota de pé de página 15 que o número complexo correspondente a um tal k coincide com o definido por um outro k entre 0 e

[15] Os valores inteiros de k que não estão entre 0 e $n-1$ também conduzem a raízes de índice n mas que, como se verifica facilmente, repetem outras já obtidas.

$n-1$).

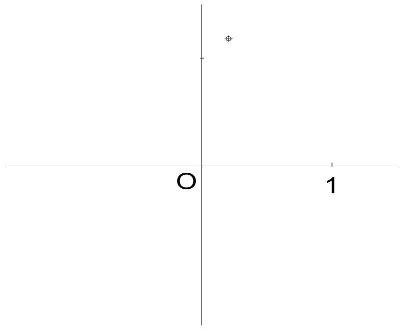

Figura 20

Exercício 38. Na figura 20 está representado o afixo de uma das raízes sextas de um certo número complexo z. Determine, com a ajuda dum compasso:
a) os afixos das restantes raízes sextas de z.
b) A semi-recta de origem em O onde se situa o afixo de z.

4. Problemas na definição da "função argumento".

Vimos na secção precedente que cada número complexo não nulo admite vários argumentos, os quais diferem entre si por um múltiplo inteiro de 2π, isto é, por um número da forma $k \times 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$. Esse facto levou a que tenhamos evitado expressões do tipo "o argumento de z", usando, em vez delas as correspondentes expressões com o artigo indefinido "um". Pela mesma razão não é nada claro que significado poderá ter uma "função argumento",

$$\arg(z),$$

definida no conjunto dos números complexos não nulos. Uma função que pode tomar vários valores, para um dado valor z da variável independente, ou uma função com valor indefinido é algo que ultrapassa o nosso conceito de função e que não é possível tratar, ao nível a que nos colocamos, sem mergulharmos em problemas de difícil solução.

Já encontrámos um problema do mesmo tipo quando referimos, na página 11, a dificuldade em atribuir um significado à expressão $\sqrt{z}$, quando z é um número complexo geral, dificuldade que é aliás análoga à que aparece, mais geralmente com expressões do tipo $\sqrt[n]{z}$ (sabemos o que é uma raíz de índice n dum número complexo, mas não sabemos qual delas merece o nome de $\sqrt[n]{z}$). Referimos então que, quando se tornasse necessário escrever uma tal expressão, devíamos considerar que ela designava uma das raízes, sem que pudéssemos precisar qual. Uma atitude do mesmo tipo com a expressão $\arg(z)$ parece, no entanto, levantar mais problemas do que aqueles que resolve.

A via que é seguida com mais frequência para dar um significado à expressão $\arg(z)$ é análoga à que se encontra, por exemplo, nas calculadoras para trabalhar com a inversão das funções trigonométricas:
a) Apesar de, para cada $x \in [-1, 1]$, existirem vários ângulos cujo seno é x, existe um único ângulo nessas condições pertencente ao intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ e é precisamente esse aquele que é designado por $\text{sen}^{-1}(x)$, ou $\text{arcsen}(x)$, ou $\text{asen}(x)$. [16]

[16]De facto, o que a aparece nas calculadoras, tendo em conta as notações na língua inglesa, é respectivamente $\sin^{-1}(x)$, $\arcsin(x)$ ou $\text{asin}(x)$.

b) Apesar de, para cada $x \in [-1, 1]$, existirem vários ângulos cujo co-seno é x, existe um único ângulo nessas condições pertencente ao intervalo $[0, \pi]$ e é esse que recebe qualquer das designações $\cos^{-1}(x)$, $\arccos(x)$ ou $\text{acos}(x)$.
c) Apesar de, para cada $x \in \mathbb{R}$, existirem vários ângulos cuja tangente é x, existe um único ângulo nessas condições pertencente ao intervalo $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ e é esse que se designa por $\tan^{-1}(x)$, $\arctan(x)$ ou $\text{atan}(x)$. [17]

Para dar significado a $\arg(z)$, tudo o que temos que fazer é procurar um intervalo que tenha a propriedade de qualquer número complexo não nulo ter um único argumento nesse intervalo; será então esse único argumento que se designa por $\arg(z)$. É fácil constatar que qualquer intervalo de amplitude 2π, que seja fechado numa das extremidades e aberto na outra, serve para o efeito pretendido. É o que acontece, por exemplo, com os intervalos $[0, 2\pi[$, $[-\pi, \pi[$ ou $]-\pi,\pi]$, para citar apenas alguns que são utilizados com mais frequência.

No caso das "funções trigonométricas inversas", há uma razoável unanimidade na comunidade matemática no que respeita à escolha dos intervalos onde se convenciona que elas tomam valor, apesar de haver escolhas alternativas formalmente válidas. No caso da "função argumento" não existe, infelizmente, uma tal unanimidade, havendo assim diferentes convenções, cada uma com vantagens e inconvenientes relativamente às outras. Uma vez que os programas oficiais não referem qual a convenção que deve ser seguida, ficamos limitados a dar um "conselho de amigo", que estamos convencidos que, quando seguido, não conduzirá a respostas incorrectas[18].

> **"Conselho de amigo":** Na ausência de explicitação sobre a convenção utilizada para dar significado à expressão $\arg(z)$, com $z \neq 0$, aconselhamos a que se considere que ela significa o único argumento do número complexo z pertencente ao intervalo $[0, 2\pi[$.
> Para fixar ideias é esta a convenção que utilizaremos, salvo aviso em contrário, no exercícios seguintes.

Exercício 39. Ao resolver a alínea e) do exercício 28, chegou, sem dúvida, à conclusão que, se α é um argumento dum número complexo $z \neq 0$, então $-\alpha$ é um argumento do complexo conjugado $\overline{z}$.
a) Será que podemos garantir a validade da igualdade $\arg(\overline{z}) = -\arg(z)$, para qualquer número complexo não nulo z?
b) Será que a resposta seria diferente, se tivéssemos utilizado outro intervalo que não o $[0, 2\pi[$ para dar significado à "função argumento"?

Exercício 40. Sabemos que, dados números complexos não nulos z e w, admitindo argumentos α e β, respectivamente, um dos argumentos de $z \times w$ é $\alpha + \beta$. Será que podemos garantir a validade da igualdade

$$\arg(z \times w) = \arg(z) + \arg(w),$$

quaisquer que sejam os números complexos não nulos z e w? Justifique a resposta.

Exercício 41. Já estudou anteriormente a noção de limite de uma sucessão no contexto dos números reais. Esta noção pode ser estendida facilmente às sucessões de números complexos dizendo que uma sucessão de números complexos $z_n = x_n + y_n i$ (onde $x_n, y_n \in \mathbb{R}$) tem limite $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) se, e só se, $x_n \to x$ e $y_n \to y$.
a) Sendo $z_n = 1 - \frac{1}{n}i$, verifique que $z_n \to 1$ e que $\arg(z_n) \to 2\pi \neq \arg(1)$. Podemos assim dizer que a função $\arg(z)$ não é contínua em todos os pontos do seu domínio.

[17] Na língua portuguesa é comum escrever-se $\text{arctg}(x)$.
[18] Mais precisamente, estamos convencidos que, tendo em conta a indefinição do programa oficial, os autores dos exames terão o cuidado de fazer apenas perguntas, envolvendo a expressão $\arg(z)$, que conduzam à mesma resposta com qualquer das convenções mais habituais.

b) Será que, com uma escolha diferente da do intervalo $[0, 2\pi[$ na definição da função $\arg(z)$ se conseguiria que esta ficasse contínua em todos os pontos do seu domínio?

Exercício 42. a) Represente no plano de Argand o conjunto dos números complexos z tais que $\frac{1}{2} \leq |z| \leq 1 \wedge \arg(z) \leq \frac{\pi}{4}$.
b) Resolva de novo a alínea precedente, mas supondo agora que a "função argumento" tinha sido definida com o intervalo $[-\pi, \pi[$ no lugar do intervalo $[0, 2\pi[$.[19]

5. A equação do terceiro grau revisitada.

Apesar de o nosso objectivo não ser especialmente o estudo das equações do terceiro grau, pode ser instrutivo reexaminar o que dissémos na secção de introdução aos números complexos sobre a resolução daquelas equações, à luz do que entretanto fomos aprendendo.

Uma primeira observação que fazemos é a de que muito do que foi estudado sobre a divisão de polinómios e as raízes dos polinómios, no contexto dos números reais, pode ser estendido sem nenhuma modificação ao contexto dos números complexos, como o estudante verificará facilmente. Em particular, dado um polinómio de grau n,

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n,$$

em que os coeficientes $a_0, \ldots, a_n$ são números complexos (em particular podem ser reais) e $a_0 \neq 0$, uma raíz é um número complexo w tal que $P(w) = 0$ e continua a ser verdade que w é uma raíz se, e só se, o polinómio $P(z)$ é divisível pelo polinómio $z - w$. Tal como no contexto dos números reais, deduz-se daqui que um polinómio de grau n tem, no máximo, n raízes e que, no caso em que admite as n raízes $z_1, z_2, \ldots, z_n$, ele pode ser escrito na forma

$$P(z) = a_0(z - z_1)(z - z_2)\cdots(z - z_n).$$

Exercício 43. De que modo a observação precedente nos podia ter levado a prever que n era o número máximo de raízes de índice n que um número complexo w podia ter?

Exercício 44. Verifique que a fórmula resolvente das equações do segundo grau continua a ser válida no contexto dos números complexos, isto é, que, dados números complexos a, b, c, com $a \neq 0$, as soluções da equação

$$ax^2 + bx + c = 0$$

são as dadas pela fórmula habitual

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

(em particular existe sempre pelo menos uma solução: Existe uma única solução, $\frac{-b}{2a}$, no caso em que $b^2 - 4ac = 0$, e existem duas soluções, no caso contrário[20]). **Sugestão:** Fazer a mudança de variáveis $x = y - \frac{b}{2a}$ para transformar a equação noutra mais simples, sem parcela do primeiro grau.

Retomemos o exame que fizémos na secção 1 da fórmula de Cardano para a solução de uma equação do terceiro grau na forma reduzida

$$y^3 + py + q = 0,$$

onde p e q podem ser números reais ou, mais geralmente, números complexos. Mostrámos então que a fórmula

[19]De acordo com o que dissémos anteriormente, não acreditamos que a pergunta anterior seja feita num exame nacional, a menos que seja explicitado qual a convenção utilizada para definir $\arg(z)$.

[20]Repare que, embora, no contexto dos números complexos, a expressão $\sqrt{b^2 - 4ac}$ levante problemas de indeterminação, por poder designar dois números complexos, simétricos um do outro, este problema não se põe neste caso, uma vez que ela está antecedida do sinal $\pm$, que indica que consideramos os dois valores para obter as duas soluções.

de Cardano, quando fizesse sentido, dava sempre uma das soluções, ficando algo inexplicada a razão por que as outras soluções, que eventualmente existissem, não eram apanhadas. Recordemos que a solução correspondente à fórmula de Cardano era

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

e que a questão de ela fazer ou não sentido se prendia com o sinal de $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$, uma vez que, no contexto dos números reais, só os números maiores ou iguais a 0 têm raízes quadradas.

Quando examinamos a fórmula da Cardano no contexto dos números complexos, "passamos do oito para o oitenta". Com efeito, em vez de ela nos dar soluções a menos, passa a dar-nos soluções a mais…

A razão por que temos agora soluções a mais tem a ver com a indeterminação das raízes cúbicas no quadro dos números complexos. As raízes quadradas não levantam problema, uma vez que, tal como no caso da equação do segundo grau, a fórmula de Cardano é uma soma de duas expressões cuja única diferença é que numa consideramos uma das raízes quadradas e na outra consideramos a outra raíz quadrada. Mas, em geral, cada uma das duas raízes cúbicas pode tomar três valores e, combinando-os de todas as maneiras possíveis, podemos obter nove números complexos, dos quais um máximo de três podem ser soluções.

Examinemos um caso concreto, que já encontrámos na secção 1, para percebermos melhor o que se está a passar. Consideremos então a equação do terceiro grau, na forma reduzida,

$$x^3 - 7x + 6 = 0.$$

A fórmula de Cardano propõe-nos os candidatos a solução

$$\begin{aligned}
&\sqrt[3]{-3 + \sqrt{9 - \frac{343}{27}}} + \sqrt[3]{-3 - \sqrt{9 - \frac{343}{27}}} = \\
&= \sqrt[3]{-3 + \sqrt{-\frac{100}{27}}} + \sqrt[3]{-3 - \sqrt{-\frac{100}{27}}} = \\
&= \sqrt[3]{-3 + i\sqrt{\frac{100}{27}}} + \sqrt[3]{-3 - i\sqrt{\frac{100}{27}}}.
\end{aligned}$$

Calculemos valores aproximados para cada uma destas raízes, passando pela forma trigonométrica e utilizando a calculadora. Comecemos pela primeira raíz cúbica e coloquemos o radicando na forma $r(\cos(\alpha) + i\,\mathrm{sen}(\alpha))$. Tem-se assim

$$\begin{aligned}
&r = \sqrt{9 + \frac{100}{27}} \approx 3.5642 \\
&\mathrm{tg}(\alpha) = \frac{-\sqrt{\frac{100}{27}}}{3} \approx -0.6415 \\
&\alpha \approx 2.5712
\end{aligned}$$

e, a partir daqui, calculamos

$$\begin{aligned}
&\sqrt[3]{r} \approx 1.5275 \\
&\beta_1 = \frac{\alpha}{3} \approx 0.8571 \\
&\beta_2 = \frac{\alpha}{3} + \frac{2\pi}{3} \approx 2.9515 \\
&\beta_3 = \frac{\alpha}{3} + \frac{4\pi}{3} \approx 5.0459,
\end{aligned}$$

o que nos dá os seguintes valores aproximados para as três raízes cúbicas de $-3 + i\sqrt{\frac{100}{27}}$, $z_j = \sqrt[3]{r}\,(\cos(\beta_j) + i$ $\mathrm{sen}(\beta_j))$, $j = 1, 2, 3$,

$$\begin{aligned}
&z_1 \approx 1 + 1.1547\,i \\
&z_2 \approx -1.5 + 0.2886\,i \\
&z_3 \approx 0.5 - 1.4433\,i.
\end{aligned}$$

Analogamente[21], obtemos os seguintes valores aproximados para as três raízes cúbicas de $-3 - i\sqrt{\frac{100}{27}}$,

$$
\begin{aligned}
w_1 &\approx 1 - 1.1547\, i \\
w_2 &\approx\ -1.5 - 0.2886\, i \\
w_3 &\approx 0.5 + 1.4433\, i.
\end{aligned}
$$

Os valores aproximados dados pela fórmula de Cardano são assim

$$
\begin{aligned}
z_1 + w_1 &\approx 2 \\
z_1 + w_2 &\approx -0.5 + 0.8661\, i \\
z_1 + w_3 &\approx 1.5 + 2.598\, i \\
z_2 + w_1 &\approx -0.5 - 0.8661\, i \\
z_2 + w_2 &\approx -3 \\
z_2 + w_3 &\approx -1 + 1.7319\, i \\
z_3 + w_1 &\approx 1.5 - 2.598\, i \\
z_3 + w_2 &\approx -1 - 1.7319\, i \\
z_3 + w_3 &\approx 1.
\end{aligned}
$$

Se substituirmos estes valores na equação $x^3 - 7x + 6 = 0$, concluímos que 2, -3 e 1 (valores exactos!) são soluções da equação e portanto os outros seis valores, apesar de provenientes da fórmula de Cardano, não o podem ser.

A constatação que acabamos de fazer de que a fórmula de Cardano fornece em geral valores que não são solução da equação de partida parece entrar em contradição com a conclusão, a que chegáramos na secção 1, de que, quando ela fizesse sentido, a fórmula de Cardano produzia efectivamente uma solução (lembrar o exercício 2). No exercício seguinte propomos que o leitor descubra o que é que funcionava na secção 1 e não funciona agora.

Exercício 45. Enunciamos em seguida a adaptação natural do exercício 2 para o contexto dos números complexos, considerando à partida uma equação reduzida do terceiro grau $y^3 + py + q = 0$, em que os coeficientes p e q podem ser números reais ou complexos.

Notemos A uma das raízes cúbicas de $-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$ e B uma das raízes cúbicas de $-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$. [22]

a) Mostre que $A^3 + B^3 = -q$.

b) Mostre que $AB = -\frac{p}{3}$.

c) Utilize as conclusões de a) e b) e o desenvolvimento de $(A + B)^3$ (binómio de Newton) para demonstrar a fórmula de Cardano, isto é, para concluir que $y = A + B$ é efectivamente uma solução da equação $y^3 + py + q = 0$.

1) Uma das alíneas anteriores não pode ser resolvida. Descubra qual é e indique a razão por que no contexto dos números reais não existia problema.

2) Adapte a fórmula de Cardano de forma a obter outra fórmula que possamos garantir que fornece efectivamente uma solução da equação, quando fizer sentido.

Acabamos de descobrir que, ao passar do contexto dos números reais para o dos números complexos, a fórmula de Cardano perdeu uma das suas qualidades, a saber a garantia que um valor calculado com a ajuda dela é de certeza uma solução. Para terminar esta secção, vamos agora verificar que, em compensação, fórmula de Cardano ganhou uma qualidade que não tinha antes, a de podermos garantir que todas as soluções da equação estão entre os valores que podem ser calculados através dela.[23] Antes de prosseguir propomos o seguinte exercício, cuja solução era já bem conhecida quando a fórmula de Cardano foi descoberta.

Exercício 46. O objectivo deste exercício é resolver o seguinte problema: Determinar um par de números A, B cuja soma seja um valor b dado e o produto seja outro valor c, também dado.

a) Suponha que A, B é um par de números cuja soma é b e cujo produto é c. Mostre que A é uma das soluções da equação do segundo grau $x^2 - bx + c = 0$ e que B é a outra.[24]

---

[21] ou reparando que as raízes de índice n do conjugado dum número complexo são os conjugados das raízes de índice n desse número complexo, como se deduz facilmente do facto de o conjugado dum produto ser o produto dos conjugados.

[22] Repare que não há agora lugar à exigência de que a fórmula de Cardano faça sentido, uma vez que todos os números complexos têm raíz quadrada.

[23] De entre os nove valores que ela fornece, só temos que desprezar aqueles que não servirem.

[24] No caso em que $A = B$ consideramos que a nossa afirmação significa que essa equação tem A como única solução.

b) Reciprocamente, suponha que A e B são as duas soluções da equação de segundo grau $x^2 - bx + c$, no caso em que elas existem.[25] Mostre que $A + B = b$ e $AB = c$.[26]

O próximo exercício pretende conduzir o leitor à prova de que qualquer solução da equação $y^3 + py + q = 0$ pode ser obtida a partir da fórmula de Cardano, seguindo o caminho que levou ao estabelecimento daquela fórmula.

Exercício 47. Suponha que y é uma solução da equação $y^3 + py + q = 0$, no contexto dos números complexos. Considere um par de números complexos A, B tais que $A + B = y$ e $AB = -\frac{p}{3}$. [27]
a) Substituindo y por $A + B$ na equação deduza que se tem $A^3 + B^3 + q = 0$.
b) Reparando que $A^3B^3 = -\frac{p^3}{27}$, conclua que A^3 e B^3 são as duas soluções de uma certa equação do segundo grau, e portanto que

$$A^3 = \frac{-q + \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2}, \quad B^3 = \frac{-q - \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2},$$

para uma escolha conveniente da raíz quadrada.
c) Deduza do anterior que y é um dos valores resultantes de aplicar a fórmula de Cardano.

6. Afinal os números complexos existem ou não?

Quando, no início da secção 2, estudámos os números complexos de forma axiomática, seguimos um caminho semelhante ao que foi utilizado quando estes foram introduzidos nos século XVI: Admitimos que existiam uns seres algo enigmáticos que tinham certas propriedades e utilizámos esses seres nas aplicações a problemas da vida real. Não pode deixar de se nos levantar o mesmo tipo de interrogações que levou a que, durante muito tempo, gerações de matemáticos se recusassem a aceitar trabalhar com esses seres, que só existiam porque nós tínhamos decidido a sua existência! Quem nos garante que eles existem? E se não existirem, qual a validade das aplicações em que eles foram utilizados?

Vamos nesta secção abordar um dos modos actuais de ultrapassar as dificuldades levantadas pela questão da existência ou não dos números complexos. Vamos construir explicitamente uns objectos matemáticos que vão verificar as propriedades que desejávamos que os números complexos tivessem (os axiomas enunciados na secção 2). A partir dessa altura, podemos considerar que os números complexos são esses objectos que construímos, e portanto que tudo o que fizémos com o auxílio deles não corre o risco de ser vazio de sentido.

Antes de começarmos a descrever a construção dos números complexos, esclareçamos desde já dois pontos. Em primeiro lugar a construção não vai ensinar nada sobre os números complexos que não saibamos já (para além de ficarmos com a certeza de que faz sentido dizer que eles existem). Em segundo lugar, tudo o que vamos dizer é "para esquecer", no sentido que, de futuro, quando trabalharmos com um número complexo, não precisamos de nos recordar da construção explícita que vamos fazer e que, nalguns pontos, como na definição da multiplicação, poderá parecer algo artificial.

À primeira pergunta, "O que são os números complexos?", vamos dar como resposta: Chamamos número complexo a um par ordenado (x, y) de números reais.

É claro que a pista que nos levou a esta definição foi o conhecimento de que os números complexos, a existirem, estão em correspondência biunívoca com estes pares ordenados.

Vamos agora definir a soma e o produto de números complexos, ou seja, de pares ordenados de números reais. A definição de soma vai parecer natural e a de produto um pouco estranha. A justificação intuitiva desta última está nas fórmulas que já encontrámos para a parte real e o coeficiente da parte imaginária do produto de números complexos. Apresentamos então as definições de soma e produto de pares

$$\boxed{\begin{array}{l}(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y'),\\ (x, y) \times (x', y') = (xx' - yy', xy' + yx').\end{array}}$$

[25] No caso em que o contexto é o dos números complexos, as soluções existem sempre.
[26] Mais uma vez, consideramos que, no caso em que a equação tem solução única, tomamos $A = B$, igual a essa solução.
[27] A existência desses números está assegurada pela conclusão do exercício precedente.

Comecemos por verificar as propriedades expressas no axioma 1, na página 5, para o que temos que resolver uma pequena dificuldade: Esse axioma afirma que o conjunto dos números complexos deve conter o dos números reais e não é isso que está a acontecer. Para resolver essa dificuldade **vamos identificar cada número real x com o par $(x,0)$**, isto é, vamos considerar que o par $(x,0)$ significa o mesmo que x.[28] As verificações que temos que fazer para garantir a validade do axioma 1, isto é, que as operações definidas em $\mathbb{C}$ estendem as definidas em $\mathbb{R}$, resumem-se a reparar que

$$\begin{aligned}(x,0)+(x',0)&=(x+x',0+0)=(x+x',0),\\(x,0)\times(x',0)&=(x\times x'-0\times 0,x\times 0+0\times x')=(x\times x',0).\end{aligned}$$

O axioma 2 afirma que, no contexto dos números complexos, continuam a ser válidas as propriedades comutativa e associativa, tanto para a adição como para a multiplicação, e que a multiplicação continua a gozar da propriedade distributiva relativamente à adição. Verifiquemos, por exemplo, a propriedade associativa da multiplicação, deixando as outras propriedades como exercícios simples[29] para o estudante. Tem-se

$$\begin{aligned}&((x,y)\times(x',y'))\times(x'',y'')=(xx'-yy',xy'+yx')\times(x'',y'')=\\&=(\,(xx'-yy')x''-(xy'+yx')y''\,,\,(xx'-yy')y''+(xy'+yx')x''\,)=\\&=(\,xx'x''-yy'x''-xy'y''-yx'y''\,,\,xx'y''-yy'y''+xy'x''+yx'x'')\end{aligned}$$

e, por outro lado,

$$\begin{aligned}&(x,y)\times((x',y')\times(x'',y''))=(x,y)\times(x'x''-y'y'',x'y''+y'x'')+\\&=(\,x(x'x''-y'y'')-y(x'y''+y'x'')\,,\,x(x'y''+y'x'')+y(x'x''-y'y'')\,)=\\&=(\,xx'x''-xy'y''-yx'y''-yy'x''\,,\,xx'y''+xy'x''+yx'x''-yy'y''\,),\end{aligned}$$

pelo que, comparando os dois resultados, concluímos que, efectivamente,

$$((x,y)\times(x',y'))\times(x'',y'')=(x,y)\times((x',y')\times(x'',y'')).$$

Exercício 48. Verifique, no contexto dos números complexos como pares ordenados de números reais, cada uma das seguintes propriedades da adição e da multiplicação acima definidas:
a) Propriedade comutativa da adição;
b) Propriedade associativa da adição;
c) Propriedade comutativa da multiplicação;
d) Propriedade distributiva da multiplicação relativamente à adição.

As propriedades enunciadas no axioma 3 são de verificação muito simples:

$$\begin{aligned}0+(x,y)&=(0,0)+(x,y)=(0+x,0+y)=(x,y),\\0\times(x,y)&=(0,0)\times(x,y)=(0x-0y,0y+0x)=(0,0)=0,\\1\times(x,y)&=(1,0)\times(x,y)=(1x-0y,1y+0x)=(x,y).\end{aligned}$$

Para verificarmos o axioma 4 temos que encontrar um número complexo que "mereça" o nome de i. Com a intuição dirigida, mais uma vez, pela identificação dos números complexos estudados axiomaticamente com os pares de números reais, experimentamos definir

$$\boxed{i=(0,1).}$$

Rapidamente verificamos que a experiência foi bem sucedida, uma vez que

$$i^2=(0,1)\times(0,1)=(0\times 0-1\times 1,0\times 1+1\times 0)=(-1,0)=-1.$$

Resta-nos examinar o axioma 5. Para isso, começamos por reparar que, para cada número real y, tem-se

$$y\,i=(y,0)\times(0,1)=(y\times 0-0\times 1,y\times 1+0\times 0)=(0,y)$$

e daqui concluímos que qualquer número complexo (x,y) pode ser escrito na forma

[28] Quem, de certo modo com alguma razão, sentir dificuldade em perceber o que quer dizer a identificação que acabamos de referir, pode adaptar o que temos vindo a dizer e considerar que os números complexos são os números reais e os pares ordenados (x,y) de números reais com $y\neq 0$ e que, no contexto dos números complexos a notação $(x,0)$ significa simplesmente x.
[29] embora exigindo alguma paciência.

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = x + y\, i,$$

que é precisamente o que afirma o axioma 5. Verificámos, ao mesmo tempo, que a parte real e o coeficiente da parte imaginária do número complexo (x, y) são respectivamente x e y, o que está de acordo com a intuição que nos guiou neste processo construtivo.