UNIVERSIDADE DE LISBOA

Faculdade de Ciências

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

11º ANO

GEOMETRIA

Armando Machado

2002

REANIMAT

Projecto Gulbenkian de Reanimação Científica da Matemática no Ensino Secundário

FUNDAÇÃO CALOUSTE GULBENKIAN

Capítulo I
Trigonometria

1. As razões trigonométricas do ângulo agudo (revisão).

As razões trigonométricas associadas a um ângulo agudo, seno, co-seno e tangente, foram já estudadas no ensino básico. Vamos recordar rapidamente a respectiva definição e, na sequência do que fizémos no início do décimo ano, examinamos de novo alguns exemplos típicos de aplicação destas razões em situações concretas.

Consideremos um triângulo rectângulo e seja α um dos seus ângulos agudos. Nessas condições:
O *seno* de α é o quociente do comprimento do cateto oposto pelo da hipotenusa.
O *co-seno* de α é o quociente do comprimento do cateto adjacente pelo da hipotenusa.
A *tangente* de α é o quociente do comprimento do cateto oposto pelo do cateto adjacente.

Assim, por exemplo, no contexto da figura seguinte, tem-se:

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$$
$$\cos(\alpha) = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$$
$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$$

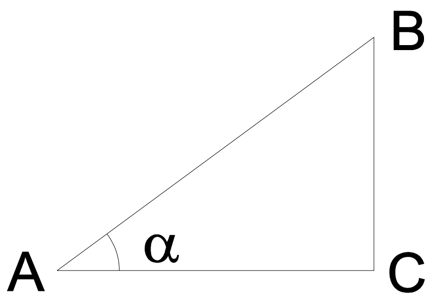


Figura 1

O importante na definição anterior é que as três razões trigonométricas só dependem da amplitude do ângulo; elas não dependem das dimensões do triângulo rectângulo considerado, nem da unidade escolhida para medir os comprimentos. A explicação desse facto reside nas propriedades da semelhança de triângulos: Dois triângulos rectângulos com um mesmo ângulo agudo têm o outro ângulo agudo também igual, pelo que são semelhantes, e têm assim os lados correspondentes directamente proporcionais.

Nota. A notação para as três razões trigonométricas que utilizámos acima é a mais frequente no nosso país, pelo menos no quadro do Ensino Básico e Secundário. A notação mais usada hoje em dia para duas delas é ligeiramente diferente, como já deve ter reparado na sua calculadora: Em vez de $\operatorname{sen}(\alpha)$ costuma escrever-se $\sin(\alpha)$, e em vez de $\operatorname{tg}(\alpha)$ é usual escrever-se $\tan(\alpha)$.
Por outro lado, é habitual omitir os parênteses e escrever, por exemplo, $\operatorname{sen}\alpha$ em vez de $\operatorname{sen}(\alpha)$. Convirá estarmos alertados para essa prática, embora neste texto se evite segui-la, na convicção que "nisto de parênteses, antes a mais do que a menos…".

Exercício 1. Apresente uma justificação para cada uma das seguintes fórmulas bem conhecidas, envolvendo as razões trigonométricas de um ângulo agudo arbitrário:

$$\operatorname{sen}(\alpha)^2 + \cos(\alpha)^2 = 1,$$
$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)}.$$

Repare que é tradicional escrever $\operatorname{sen}^2(\alpha)$ no lugar de $\operatorname{sen}(\alpha)^2$, e analogamente para as outras razões trigonométricas, pelo que a primeira destas fórmulas é usualmente escrita como

$$\operatorname{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1.$$

As razões trigonométricas são utilizadas desde há mais de 2000 anos na resolução de problemas envolvendo distâncias na superfície da Terra e de outros ligados à Astronomia e à navegação. Tradicionalmente elas eram obtidas através de tabelas laboriosamente construídas pelos matemáticos da época. Hoje em dia temos a vida muito simplificada e podemos obter valores com muito maior precisão com a ajuda das calculadoras que todos possuímos.

Nos exercícios seguintes terá por vezes necessidade de utilizar a sua calculadora na determinação de certas razões trigonométricas. Repare que há um cuidado a ter, que decorre do facto de as calculadoras utilizarem pelo menos duas unidades de medida para os ângulos: O “grau”, com que estamos habituados a trabalhar, e o “radiano”, que estudaremos mais adiante. É assim importante assegurarmo-nos de que a calculadora esteja na situação de utilizar o grau como unidade de medida.

Exercício 2. O topo da Torre Eiffel, em Paris, está a uma altura de 300 metros acima do solo. Se eu estiver a 100 metros do centro da sua base, qual o ângulo que faz com a horizontal a direcção que aponta dos meus pés para o topo? E a que distância se encontra esse topo de nós? Apresente os resultados com aproximação ao grau e ao metro.

Exercício 3. Na figura 2 partimos de um triângulo equilátero e considerámos a bissectriz de um dos seus ângulos.

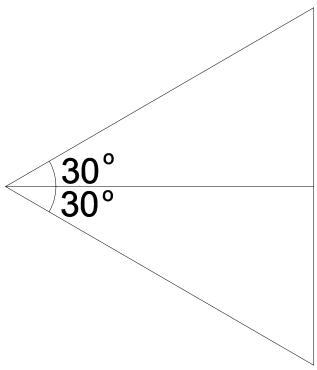


Figura 2

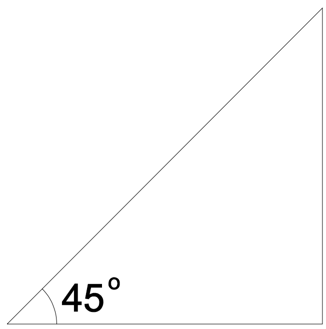


Figura 3

a) Utilize essa figura para obter valores exactos para as razões trigonométricas

$$\operatorname{sen}(30°), \quad \cos(30°), \quad \operatorname{tg}(30°),$$

e confira esses valores com os obtidos com a sua calculadora.
b) Repare que o triângulo rectângulo que utilizou na alínea anterior tem o outro ângulo agudo igual a 60°. Com o auxílio desse facto determine os valores exactos das razões trigonométricas

$$\operatorname{sen}(60°), \quad \cos(60°), \quad \operatorname{tg}(60°).$$

Generalize o raciocínio feito de modo a obter um resultado geral sobre a relação entre as razões trigonométricas de um ângulo e do seu complementar:

$$\operatorname{sen}(90° - \alpha) = \qquad , \quad \cos(90° - \alpha) = \qquad , \quad \operatorname{tg}(90° - \alpha) = \qquad .$$

Exercício 4. Na figura 3 está representado um triângulo rectângulo isósceles. Utilize-a para obter valores exactos para as razões trigonométricas

$$\operatorname{sen}(45°), \quad \cos(45°), \quad \operatorname{tg}(45°).$$

Resumimos na tabela seguinte os valores a que chegou nos exercícios anteriores:

Ângulo	Seno	Co-seno	Tangente
$30°$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$45°$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$60°$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

Exercício 5. Na figura 4, a circunferência tem raio igual a 1 unidade e os ângulos entre os três raios representados encontram-se assinalados. Chamamos ℓ ao comprimento do segmento representado a traço grosso contínuo. Reparemos que esse segmento é o lado de um decágono regular inscrito na circunferência.
a) Determine os restantes três ângulos assinalados.
b) Determine o comprimento do segmento a tracejado e deduza, da semelhança de triângulos convenientes, que se tem

$$\ell + 1 = \frac{1}{\ell}.$$

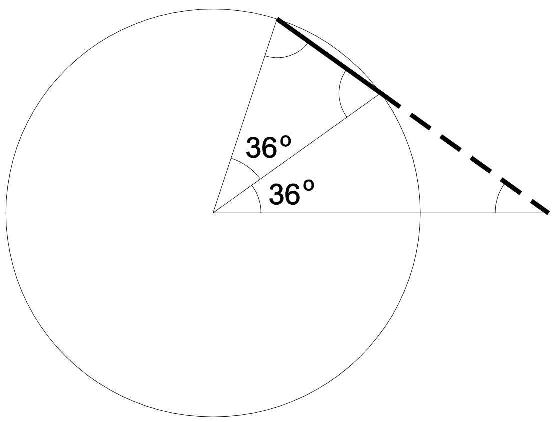


Figura 4

c) Utilize a igualdade obtida em b) para mostrar que

$$\ell = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\ .$$[1]

d) Deduza do valor obtido em c) os seguintes valores para as razões trigonométricas:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(18°) &= \frac{\sqrt{5}-1}{4}\\ \cos(36°) &= \frac{\sqrt{5}+1}{4}\end{aligned}$$

e destes os valores

$$\begin{aligned}\cos(18°) &= \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\\ \operatorname{sen}(36°) &= \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}.\end{aligned}$$

Confira estes resultados com os que obtém se utilizar a sua calculadora.
e) Utilize o valor de ℓ que encontrou na alínea c) para descobrir um método de construir, com a ajuda de régua e compasso, o lado de um decágono inscrito numa circunferência. Para simplificar a construção, pode supor já determinados dois diâmetros perpendiculares dessa circunferência.

Exercício 6. Utilize os valores encontrados no exercício precedente para mostrar que

$$\operatorname{tg}(36°) = \sqrt{5-2\sqrt{5}}$$

e confira esta resultado com o que obtém se utilizar a calculadora. É claro que também poderia determinar, se assim o desejasse, o valor exacto para $\operatorname{tg}(18°)$.

Exercício 7. A partir das razões trigonométricas determinadas no exercício 5, quais os outros ângulos agudos cujas razões trigonométricas ficam conhecidas?

No exercício seguinte consideramos que a Terra tem a forma aproximada de uma esfera e lembramos que, de acordo com a própria origem da unidade de comprimento “metro”, tanto o equador como os meridianos têm $40\,000$ Km de perímetro.

Exercício 8. As coordenadas geográficas aproximadas do centro da cidade de Lisboa são $38.73°$ de latitude Norte e $9.15°$ de longitude Oeste.
a) Com o auxílio da sua calculadora determine um valor aproximado ao Km para o perímetro do paralelo que passa pela cidade de Lisboa. **Sugestão:** Com o auxílio da figura seguinte determine a razão entre o raio do paralelo e o raio do equador.

[1] A este valor dá-se, deste a antiguidade, o nome de *razão de ouro.* Ela aparece, por exemplo, em certas proporções utilizadas na arquitectura, por se acreditar que assim se obtêm formas agradáveis à nossa vista.

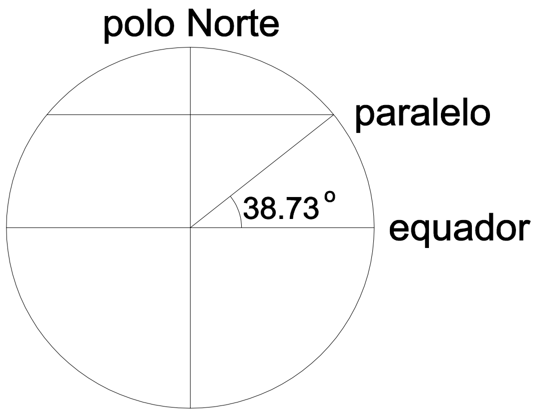


Figura 5

b) Supondo que nos deslocámos, a partir do centro de Lisboa, primeiro 200 Km na direcção Leste e, em seguida, 200 Km na direcção Norte, determine com aproximação às décimas de grau a latitude e a longitude do ponto de chegada.

As razões trigonométricas permitem-nos resolver problemas que envolvem lados e ângulos de um triângulo rectângulo. Com frequência, e como já constatámos no exercício 3, também conseguimos resolver questões envolvendo triângulos doutro tipo ou outras figuras geométricas com a ajuda de triângulos rectângulos auxiliares. O desafio, nuns casos mais simples e noutros menos, está em descobrirmos quais os triângulos auxiliares que nos podem conduzir à solução. Vejamos alguns exemplos de situações desse tipo.

Exercício 9. Um instrumento utilizado em navegação, o sextante, permite determinar com facilidade o ângulo entre duas semi-rectas com origem no observador. Estava eu na margem do rio Tejo a ver passar um navio com 225 metros de comprimento e com uma trajectória em linha recta, resolvi medir em vários momentos o ângulo segundo o qual via as duas extremidades do navio. Reparei que, no momento em que o centro do navio passou mais próximo, o valor do ângulo era 33.65°.
a) A que distância de mim se encontrava o centro do navio no momento referido?
b) Qual o ângulo entre as extremidades do navio no momento em que a ré deste passou mais próxima da mim? Repare que a calculadora não só nos permite calcular as razões trigonométricas, conhecido o ângulo, como nos permite calcular o ângulo, conhecida uma das três razões trigonométricas.

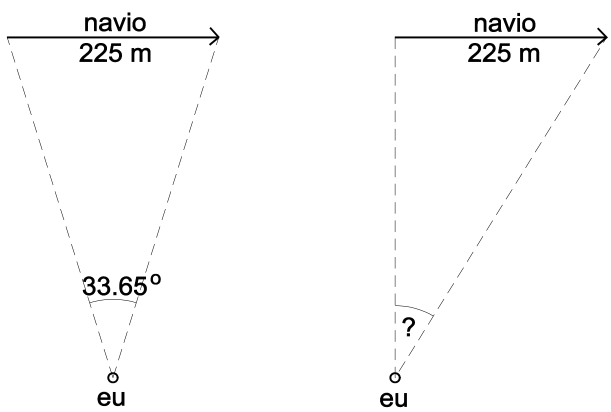


Figura 6

c) Qual o ângulo entre as extremidades do navio no momento em que a ré deste já se encontrava a 1 Km de distância do ponto da trajectória mais próximo de mim?

Exercício 10. Considere o triângulo da figura junta, onde os comprimentos de dois lados (numa certa unidade de medida) e a amplitude do ângulo que estes formam se encontram assinalados.

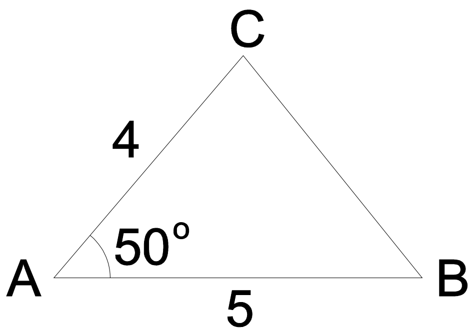


Figura 7

Utilize a sua calculadora para determinar o comprimento do terceiro lado, com aproximação às centésimas, e as amplitudes dos dois outros ângulos, com aproximação às décimas de grau. **Sugestão:** Comece por determinar o comprimento da altura do triângulo correspondente ao vértice C, assim como os comprimentos dos segmentos que ela determina na base $[AB]$.

Exercício 11. Considere o triângulo da figura junta, onde o comprimento de um lado (numa certa unidade de medida) e as amplitudes dos dois ângulos adjacentes se encontram assinalados.

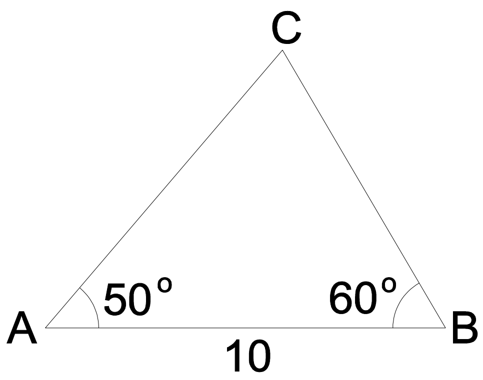


Figura 8

Determine a amplitude do terceiro ângulo e os comprimentos dos dois restantes lados. **Sugestão:** Para calcular o comprimento $\overline{BC}$ determine, de dois modos distintos o comprimento da altura correspondente ao vértice B. Para calcular o comprimento $\overline{AC}$ determine, de dois modos distintos o comprimento da altura correspondente ao vértice A.

O método utilizado para resolver o penúltimo exercício pode ser naturalmente utilizado sempre que conhecemos dois lados de um triângulo e o ângulo que eles determinam e pretendemos conhecer os restantes lados e ângulos do triângulo. Não seria difícil fazer o mesmo raciocínio no caso geral, utilizando variáveis em vez dos valores numéricos, e obter uma fórmula que poderíamos aplicar sempre que quiséssemos. Não o fazemos agora uma vez que essa fórmula pode ser obtida de modo mais natural quando estudarmos adiante as aplicações do produto escalar de vectores.

Já no que diz respeito ao exercício 11, e apesar de o programa em vigor não o exigir, vamos examinar rapidamente o que se pode fazer em geral com os mesmos métodos. A simplicidade e aplicabilidade da fórmula que obteremos compensará largamente o pouco tempo que vamos gastar.

Consideremos então um triângulo arbitrário e utilizemos a convenção cómoda habitual de utilizar letras maiúsculas para designar tanto os seus vértices como as amplitudes dos respectivos ângulos e as correspondentes letras minúsculas para designar tanto os lados opostos como os respectivos comprimentos (numa certa unidade de medida).

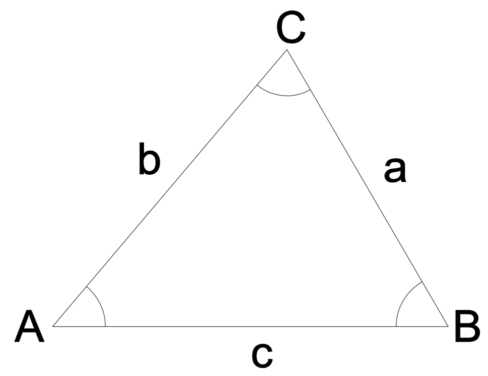


Figura 9

Nesta situação há uma afirmação simples que podemos fazer, envolvendo as alturas do triângulo:

> P1. A altura de um triângulo, correspondente a um dos seus vértices, é igual ao produto de cada um dos lados adjacentes pelo seno do ângulo oposto ao outro.

Por exemplo, usando a notação h_C para a altura a partir do vértice C,

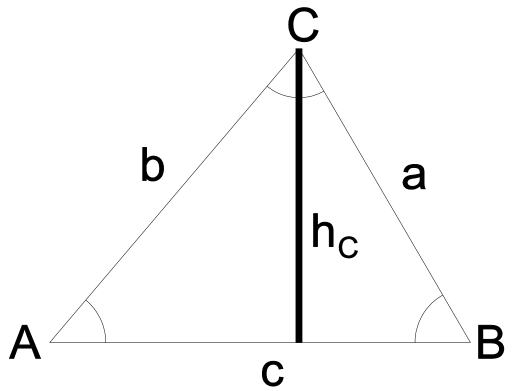


Figura 10

podemos escrever qualquer das duas fórmulas seguintes:

$$h_C = b\,\text{sen}(A), \quad h_C = a\,\text{sen}(B).$$

A justificação da propriedade anterior é muito simples: A altura vai determinar dois triângulos rectângulos e, utilizando-os para aplicar a definição das razões trigonométricas, pode-se escrever $\text{sen}(A) = h_C/b$ e $\text{sen}(B) = h_C/a$.

Há, no entanto, um cuidado a ter: Uma vez que só conhecemos a definição das razões trigonométricas dos ângulos agudos, cada uma das fórmulas anteriores só faz sentido se o ângulo correspondente for agudo. Se um dos ângulos, por exemplo o ângulo A, for recto ou obtuso a figura muda drasticamente:

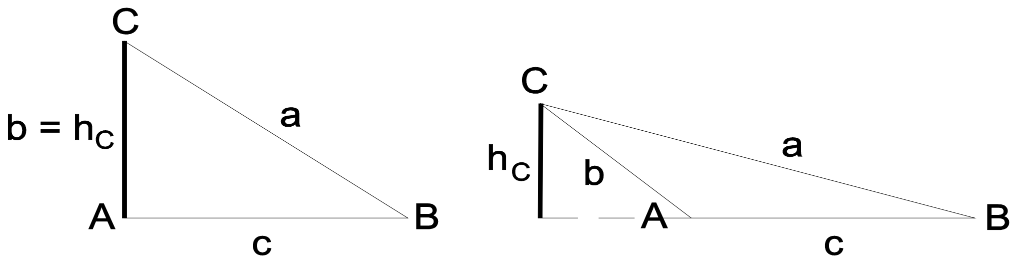


Figura 11

Perante este problema, duas atitudes são possíveis: Uma é utilizar as fórmulas apenas quando o ângulo envolvido for agudo. Outra, mais fecunda, é tentar estender a definição do seno de modo a podermos falar tanto do seno de um ângulo recto como do seno de um ângulo obtuso, isto de forma a que a igualdade $h_C = b\,\mathrm{sen}(A)$ continue a ser correcta no caso em que o ângulo A não é agudo. No nosso caso resulta facilmente das figuras anteriores que o objectivo é atingido, desde que se estenda a definição do seno do seguinte modo:

> Define-se $\mathrm{sen}(90°) = 1$ e o seno de um ângulo obtuso como sendo o seno do ângulo suplementar.

Na prática, quando queremos calcular o seno de um ângulo obtuso utilizando a calculadora não temos de passar pelo cálculo do ângulo suplementar porque a calculadora dá o resultado directamente. Note-se também que, de momento, apenas a definição do seno foi estendida de modo a abarcar o ângulo recto e os ângulos obtusos; não fizémos o mesmo com as outras duas razões trigonométricas, o co-seno e a tangente, deixando essa tarefa para a próxima secção.

Exercício 12. Com a ajuda dos valores obtidos nos exercícios 3, 4 e 5, organize uma tabela dos valores exactos do seno que conseguir determinar para ângulos entre 0° e 180°.

Exercício 13. Na figura seguinte está representado um triângulo isósceles com dois lados de comprimento igual a 1 unidade assim como a bissectriz do ângulo determinado por esses lados.

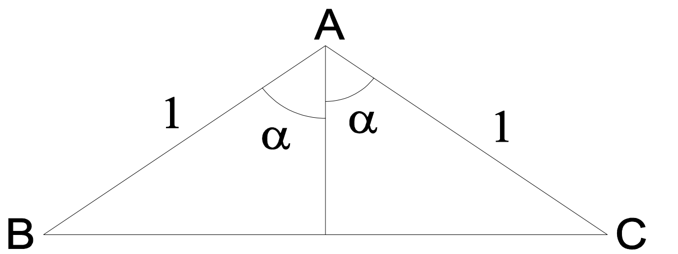


Figura 12

a) Mostre que essa bissectriz é perpendicular à base $[BC]$ e intersecta essa base no seu ponto médio. Concluir que a altura correspondente ao vértice A é igual a $\cos(\alpha)$ e o comprimento de $[BC]$ é igual a $2\,\mathrm{sen}(\alpha)$.
b) Mostre que a altura correspondente ao vértice C é igual a $\mathrm{sen}(2\alpha)$.
c) Conclua das alíneas a) e b) que a área do triângulo pode ser determinada por qualquer das expressões $\mathrm{sen}(\alpha)\cos(\alpha)$ e $\frac{1}{2}\,\mathrm{sen}(2\alpha)$ e deduzir daqui a "fórmula do seno do ângulo duplo"

$$\text{sen}(2\alpha) = 2\text{sen}(\alpha)\text{cos}(\alpha),$$

válida para qualquer ângulo agudo α.

Exercício 14. Tendo em conta a conclusão da alínea c) do exercício precedente, mostre que, para cada ângulo agudo α,

$$(\text{sen}(\alpha) + \cos(\alpha))^2 = 1 + \text{sen}(2\alpha).$$

A propriedade P1, para além do interesse que apresenta em si mesma, vai servir também para descobrir uma relação importante envolvendo os lados e os ângulos de um triângulo arbitrário. Partamos então de um triângulo qualquer, para o qual usamos as convenções usuais de nomeação dos vértices e dos lados.

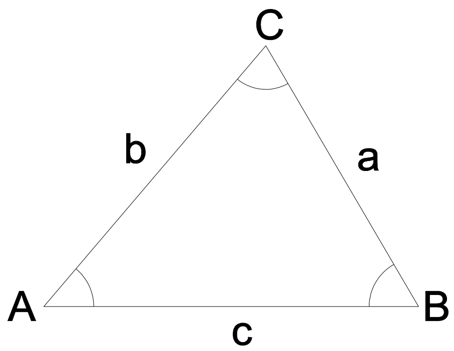


Figura 13

Partindo de um vértice arbitrário, por exemplo o vértice C, podemos considerar a correspondente altura h_C que, como já verificámos, pode ser obtida por qualquer das fórmulas $h_C = b\,\text{sen}(A)$ e $h_C = a\,\text{sen}(B)$. Estas fórmulas implicam, em particular que se tem $b\,\text{sen}(A) = a\,\text{sen}(B)$, igualdade em que intervêm apenas lados e ângulos do triângulo. Esta igualdade toma uma forma mais útil e fácil de memorizar se dividirmos ambos os seus membros por $\text{sen}(A)\,\text{sen}(B)$, obtendo então

$$\frac{b}{\text{sen}(B)} = \frac{a}{\text{sen}(A)}.$$

Exercício 15. Sem repetir o raciocínio feito atrás e partindo apenas do facto que “todos os vértices dum triângulo têm os mesmos direitos”, descubra qual a igualdade que corresponde a $\frac{b}{\text{sen}(B)} = \frac{a}{\text{sen}(A)}$ quando, em vez de partir do vértice C, se parte, por exemplo, do vértice B.

Se resolveu o exercício anterior terá encontrado a justificação para a propriedade que enunciamos em seguida e que é conhecida por “lei dos senos”.

P2. **(Lei dos Senos)** Num triângulo arbitrário, e com as notações da figura 13, tem-se

$$\frac{a}{\text{sen}(A)} = \frac{b}{\text{sen}(B)} = \frac{c}{\text{sen}(C)},$$

por outras palavras, os lados são proporcionais aos senos dos ângulos opostos.

A lei dos senos é usada tipicamente quando conhecemos os ângulos dum triângulo e um dos seus lados e queremos determinar algum dos outros lados. Uma questão deste tipo já foi resolvida no exercício 11 mas agora passámos a dispor de um método muito mais directo para a tratar.

Exercício 16. Um automóvel viajava numa estrada rectilínea em África à velocidade constante de 90 Km/h. Num dado instante um dos passageiros descobriu uma girafa imóvel ao longe, numa direcção 35° à direita da direcção do movimento. Dez segundos depois a direcção em que se via a girafa já era de 50° à direita da do movimento. Pegando na sua calculadora, de que nunca se separa, mesmo em férias, o passageiro determinou rapidamente a que distância se encontrava agora da girafa.
a) Que distância era essa?
b) Quantos segundos faltavam nesse momento para o automóvel passar no ponto mais próximo da girafa?

2. Os ângulos generalizados e as suas razões trigonométricas.

A noção de ângulo, no quadro da Geometria Plana, já nos apareceu em duas situações distintas: Por um lado, sabemos o que é o ângulo entre duas rectas, que pode tomar valores entre 0° e 90°; Por outro lado, sabemos o que é o ângulo entre duas semi-rectas (ou, o que é equivalente, entre dois vectores não nulos), que pode tomar valores entre 0° e 180°. Por exemplo, na figura seguinte estão representadas duas semi-rectas determinando um ângulo de 130° e as rectas correspondentes "fazem" um ângulo de 50°.

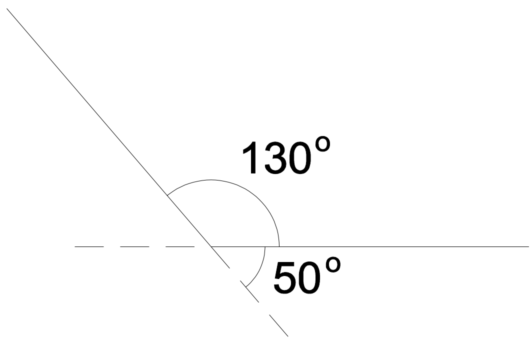


Figura 14

Vamos examinar em seguida uma outra situação em que a noção de ângulo vai jogar um papel, agora com a possibilidade de tomar um valor arbitrário. Trata-se de quantificar o movimento de um semi-recta com origem fixada de forma que as partes do movimento com um dos sentidos (a que se dá o nome de *positivo* ou *directo*) tenham uma contribuição positiva e as partes do movimento com o sentido oposto (o *sentido negativo*, ou *retrógrado*) tenham uma contribuição negativa.

Por exemplo, se a semi-recta se deslocar no sentido directo desde uma posição inicial até à posição perpendicular ela terá feito um movimento de 90° e se tiver feito o mesmo, mas no sentido oposto, dizemos que ela fez um movimento de $-90°$; se a semi-recta tiver feito uma volta completa no sentido directo dizemos que ela fez um movimento de 360° e se tiver feito uma volta e um quarto no sentido oposto dizemos que ela fez um movimento de $-450°$.

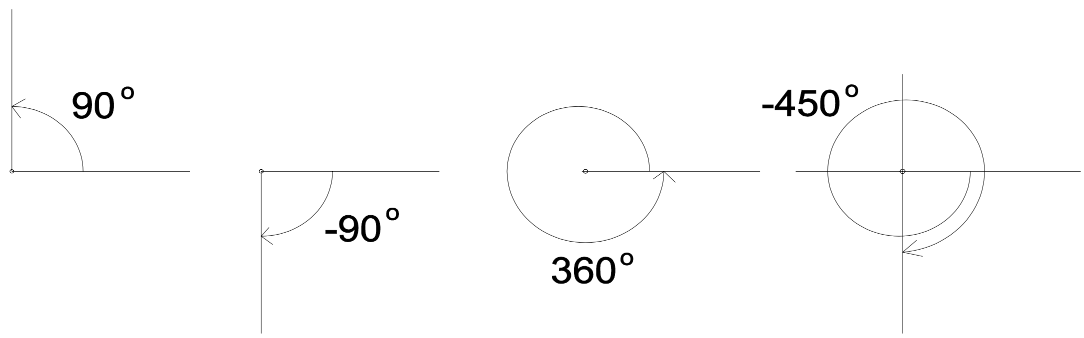


Figura 15

Quando os ângulos são utilizados neste contexto é tradicional dizer que se está a trabalhar com *ângulos generalizados* ou *ângulos do movimento*. Aos ângulos que já estávamos habituados a utilizar poderemos chamar, por oposição, *ângulos estáticos* ou *ângulos de posição*.

Há várias situações à nossa volta que podem ser modeladas com o recurso à noção de ângulo generalizado. Damos três exemplos em seguida:

Numa prova de fundo de atletismo, a evolução da corrida é normalmente medida pelo número de voltas já percorridas. Trata-se assim de um ângulo generalizado que está presente, apesar de se utilizar como unidade a "volta", em vez do "grau"; podemos sempre fazer a conversão usando a correspondência

$$1 \text{ volta} \leftrightarrow 360°.$$

Quando desaparafusamos um parafuso, o ângulo que este já rodou em cada instante é um exemplo de ângulo generalizado. Repare-se que, neste caso, o ângulo percorrido pode ser avaliado através do deslocamento para fora da cabeça do parafuso.

Quando subimos uma escada em caracol é também o ângulo generalizado que descreve quanto rodámos em torno do eixo da escada. Também aqui existe um indicador do ângulo percorrido, a saber a altura a que chegámos.

Reparemos que, quando partimos de uma certa origem e de uma certa semi-recta com essa origem (por exemplo, no quadro da figura 15, da semi-recta horizontal apontando para a direita), o conhecimento do ângulo de movimento determina a posição da segunda semi-recta e este determina o ângulo de posição das duas semi-rectas. Esquematicamente:

ângulo do movimento da primeira para a segunda semi-recta
$\downarrow$
posição da segunda semi-recta
$\downarrow$
ângulo de posição das duas semi-rectas.

Exercício 17. Desenhe numa folha de papel uma semi-recta com uma certa origem e um dos sentidos possíveis do movimento como sentido positivo (a escolha que se faz usualmente é a do sentido contrário ao dos ponteiros do relógio, quando isso faça sentido para nós). A partir daí desenhe as semi-rectas que correspondem a cada um dos seguintes ângulos de movimento e determine os ângulos de posição entre a semi-recta inicial e cada uma delas.

a) $120°$; **b)** $60°$; **c)** $-120°$; **d)** $240°$; **e)** $600°$; **f)** $360°$; **g)** $-300°$.

Ao resolver o exercício precedente deve ter reparado que nenhuma das duas setas, no esquema que referimos atrás, pode ser invertida:

Da posição da segunda semi-recta não podemos deduzir qual o ângulo do movimento, uma vez que existem vários ângulos aos quais corresponde uma mesma posição final da semi-recta; pensar, por exemplo, nas alíneas c), d) e e).

Do conhecimento do ângulo de posição das duas semi-rectas não podemos concluir qual a posição da segunda, uma vez que, em geral, há duas posições distintas que determinam o mesmo ângulo de posição; pensar, por exemplo, nas alíneas a) e c).

Exercício 18. No caso de dispor de acesso à internet, complemente o que fez no exercício anterior, examinando cada alínea com a ajuda da figura interactiva que encontra no endereço

http://ptmat.lmc.fc.ul.pt/~armac/angulos.html

Na figura está representada uma semi-recta na sua posição inicial, na qual está marcado um ponto X que ao ser movido com a ajuda do rato, arrasta com ele a semi-recta. Um contador vai contabilizando o ângulo do movimento desde o instante inicial. Será interessante examinar o modo como o contador varia quando o movimento se faz no sentido directo ou no sentido retrógrado, assim como os valores que este toma quando a semi-recta passa pela mesma posição depois de várias voltas completas num ou noutro sentido. Para facilitar a identificação das diferentes posições, estão traçadas semi-rectas auxiliares em traço mais fino, espaçadas de 15 em 15 graus.

Se resolveu o exercício 17 e, eventualmente, o exercício 18, facilmente compreenderá a caracterização paramétrica, que destacamos em seguida, dos diferentes ângulos de movimento que correspondem a uma dada posição das semi-rectas de partida e de chegada.

P3. Dadas duas semi-rectas com a mesma origem, se α é o ângulo, em graus, de um movimento da primeira para a segunda, os ângulos dos movimentos com o mesmo início e o mesmo fim são exactamente os que se podem escrever na forma

$$\alpha + k \times 360,$$

com k a variar no conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros.

Exercício 19. Uma semirecta foi deslocada de uma posição inicial para uma posição final com um ângulo de movimento de $1000°$.

a) Qual o menor ângulo de movimento, no sentido directo, que leva da posição inicial para a mesma posição final?

b) Se quiser passar da posição inicial para a posição final percorrendo o sentido retrógrado, qual o menor ângulo, em valor absoluto, que terá que percorrer?

As observações que temos estado a fazer sobre a noção de ângulo generalizado vão-nos conduzir à extensão da definição das razões trigonométricas, inicialmente definidas apenas para ângulos entre $0°$ e $90°$, ao quadro dos ângulos com valores reais arbitrários.

Vamos começar por fixar no plano uma certa unidade de comprimento e um referencial ortonormado com origem O. Nos movimentos de semi-rectas de origem O vamos considerar implicitamente que a posição inicial é a do semi-eixo positivo das abcissas e que o sentido directo é o que aponta para o semi-eixo positivo das ordenadas.

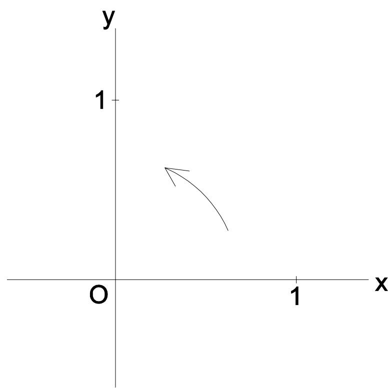


Figura 16

À posição final de uma semi-recta, inicialmente sobre o semi-eixo positivo das abcissas, depois de efectuado o movimento associado ao ângulo generalizado α chamaremos simplesmente

semi-recta determinada pelo ângulo generalizado $\boldsymbol{\alpha}$.

Suponhamos, para começar, que o ângulo α está entre 0° e 90° e consideremos o ponto X da semi-recta determinada que está à distância 1 da origem O.

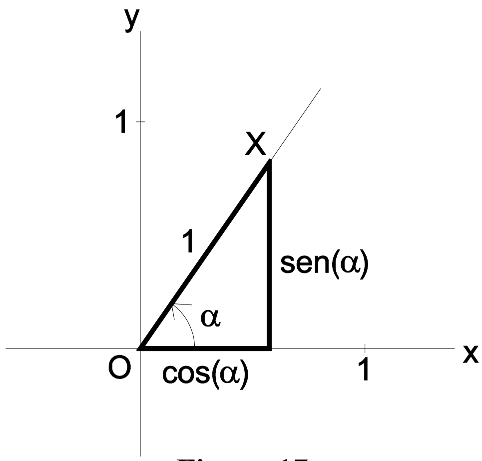


Figura 17

Se nos recordarmos da definição das razões trigonométricas do ângulo agudo, vemos que $\operatorname{sen}(\alpha)$ e $\cos(\alpha)$ são respectivamente a ordenada e a abcissa do ponto X, ambas positivas por este ponto estar no primeiro quadrante. Tem-se assim

$$X \leftrightarrow (\cos(\alpha), \operatorname{sen}(\alpha)).$$

É agora evidente o modo natural de definir o *seno* e o *co-seno* de um ângulo α, não necessariamente entre 0° e 90°.

Dado um ângulo generalizado α, consideremos a semi-recta de origem O determinada por α e o ponto X dessa semi-recta à distância 1 de O. Definem-se então as *razões trigonométricas* $\operatorname{sen}(\alpha)$ e $\cos(\alpha)$ como sendo respectivamente a ordenada e a abcissa do ponto X.

A novidade é que agora tanto o seno como o co-seno podem ser positivos, negativos ou nulos, conforme o quadrante ou os semi-eixos em que a semirecta determinada se situe. Por exemplo, examinando as figuras,

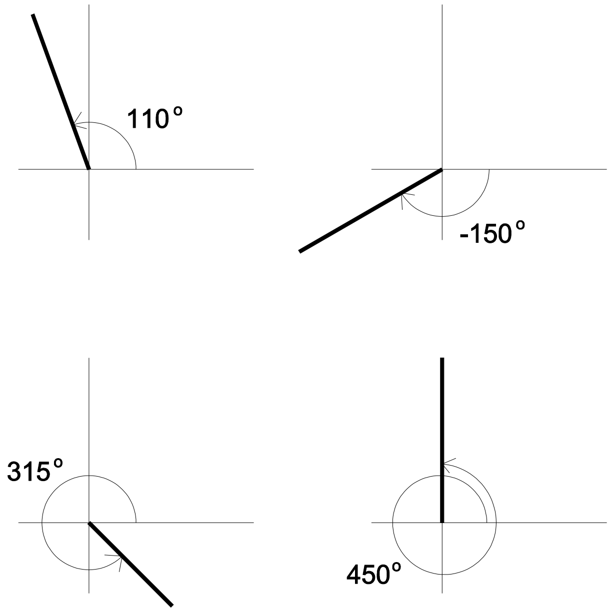


Figura 18

concluímos facilmente a informação sintetizada no seguinte quadro:

$\mathrm{sen}(110°) > 0$ $\cos(110°) < 0$ (segundo quadrante)	$\mathrm{sen}(-150°) < 0$ $\cos(-150°) < 0$ (terceiro quadrante)
$\mathrm{sen}(315°) < 0$ $\cos(315°) > 0$ (quarto quadrante)	$\sin(450°) > 0$ $\cos(450°) = 0$ (semi-eixo positivo das ordenadas)

Exercício 20. No quadro do que foi feito na definição das razões trigonométricas de um ângulo generalizado α, mostre que, se, em vez do ponto X da semirecta determinada por α que está à distância 1 da origem O, considerarmos um ponto Y dessa semi-recta à distância r da origem então

$$\boxed{Y \leftrightarrow (r\cos(\alpha), r\,\mathrm{sen}(\alpha)).}$$

Repare que, tendo em conta as observações que fizémos atrás, a definição do seno e do co-seno dos ângulos generalizados fornece o mesmo valor que a definição que já conhecíamos, no caso em que o valor do ângulo está entre $0°$ e $90°$. Esse é um cuidado a ter, sempre que se pretende **generalizar** uma definição: é preciso assegurarmo-nos que, nos casos em que já se aplicava a definição anteriormente conhecida, a nova definição dá os mesmos resultados. Deste ponto de vista há ainda um cuidado a ter, uma vez que, no caso do seno, já tínhamos estendido a definição aos valores do ângulo entre $90°$ e $180°$, incluindo o primeiro: o seno de $90°$ era 1 e o seno de um ângulo entre $90°$ e $180°$ era igual, por definição, ao seno do ângulo suplementar. Que, ainda nestes casos, a nova definição dá o mesmo resultado que a utilizada anteriormente resulta do exame da figura seguinte.

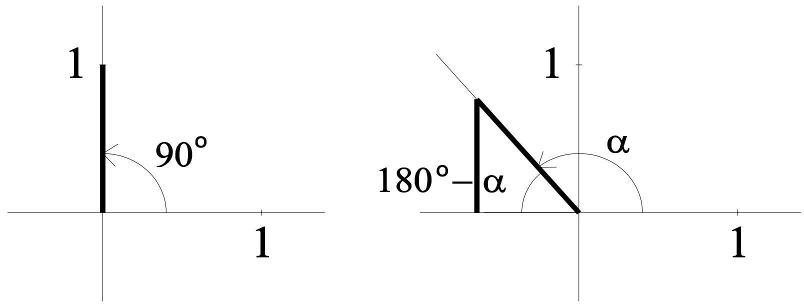


Figura 19

Refira-se, a propósito, que da mesma figura se conclui que $\cos(90°) = 0$ e, para um ângulo α entre 90° e 180°, $\cos(\alpha) = -\cos(180° - \alpha)$. Em particular:

O co-seno de um ângulo obtuso é negativo.

Repare-se que, no quadro dos ângulos generalizados, continua a ser válida a relação fundamental entre o seno e o co-seno:

$$\text{sen}(\alpha)^2 + \cos(\alpha)^2 = 1.$$

Para o reconhecermos basta recordarmos a fórmula que nos dá o comprimento de um vector em termos das suas coordenadas num referencial ortonormado: Sendo X o ponto da semirecta utilizada para definir o seno e o co-seno do ângulo generalizado α, o facto de X estar à distância 1 da origem O e de se ter $\overrightarrow{OX} \leftrightarrow (\cos(\alpha), \text{sen}(\alpha))$ permite-nos escrever

$$1 = \|\overrightarrow{OX}\|^2 = \cos(\alpha)^2 + \text{sen}(\alpha)^2.$$

Ainda não definimos o que deve ser a *tangente* $\text{tg}(\alpha)$ de um ângulo generalizado α. Isso é, no entanto, muito simples, bastando tomar como definição a relação que sabemos existir no quadro dos ângulos agudos:

Define-se a tangente $\text{tg}(\alpha)$ de um ângulo generalizado α pela igualdade

$$\text{tg}(\alpha) = \frac{\text{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)},$$

no caso em que $\cos(\alpha) \neq 0$.

Ao contrário do que acontecia com o seno e o co-seno, a tangente não está definida para ângulos generalizados arbitrários mas apenas para aqueles cujo co-seno não é 0, ou seja, para aqueles que determinam uma semi-recta não vertical. De acordo com o que referimos em P3, os ângulos generalizados para os quais a tangente não está definida são os da forma

$$90° + k \times 360° \quad \text{ou} \quad -90° + k \times 360°,$$

com k no conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros.

A tangente do ângulo generalizado α, definida atrás, admite uma interpretação importante. Recordemos que, sendo X o ponto da semi-recta determinada por α que está à distância 1 da origem O, tem-se, no referencial ortonormado que estamos a considerar, $\overrightarrow{OX} \leftrightarrow (\cos(\alpha), \text{sen}(\alpha))$. A tangente $\text{tg}(\alpha)$, igual a $\frac{\text{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)}$, é assim simplesmente o *declive* do vector $\overrightarrow{OX}$, que estudámos no décimo ano. Uma vez que o declive do vector $\overrightarrow{OX}$ é, por definição, o declive da recta OX, a que podemos dar o nome de *recta determinada pelo ângulo* α, podemos dizer que

> A tangente do ângulo generalizado α é igual ao declive da recta que ele determina.

No estudo que temos estado a fazer das razões trigonométricas associadas a um ângulo generalizado α, tem tido um papel preponderante o ponto X da semi-recta determinada por α que está à distância 1 da origem O; de facto, e como reconhecemos imediatamente, temos uma correspondência biunívoca entre o conjunto das semi-rectas de origem O e o conjunto dos pontos X à distância 1 de O. Este último conjunto é, naturalmente, uma circunferência de raio 1 centrada na origem, circunferência a que se dá usualmente o nome de *círculo trigonométrico*[2]. Com a ajuda do círculo trigonométrico é possível "ler" muito facilmente os valores das três razões trigonométricas dum ângulo generalizado α a partir do correspondente ponto X: Para além do seno e do co-seno que, por definição, são respectivamente a ordenada e a abcissa do ponto X, a tangente, que é o declive da recta OX, pode ser caracterizado como a ordenada do ponto dessa recta que tem abcissa 1; essa ordenada obtém-se muito facilmente intersectando a recta OX com a recta vertical de abcissa 1. A figura a seguir, onde foram sublinhados a traço grosso os segmentos cuja medida está associada às diferentes razões trigonométricas, explica o método prático que pode ser utilizado. Repare-se que os segmentos verticais são considerandos como positivos (respectivamente negativos) quando situados para cima (resp. para baixo) do eixo das abcissas e que o segmento horizontal é considerado como positivo (resp. negativo) quando situado para a direita (resp. para a esquerda) do eixo das ordenadas.

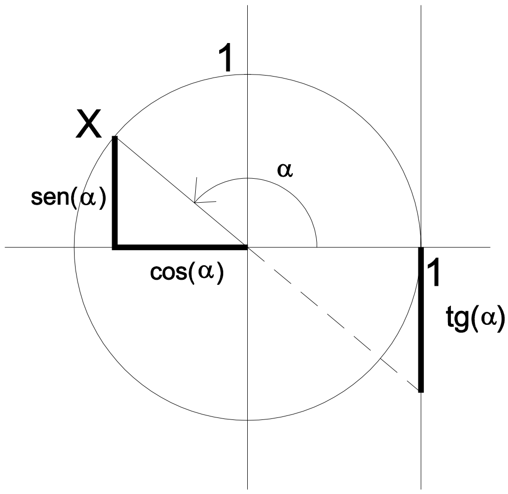


Figura 20

Exercício 21. Este exercício pode ser resolvido com a ajuda de dois instrumentos alternativos:
1) Se tiver acesso à internet, utilize a figura interactiva que se encontra no endereço

http://ptmat.lmc.fc.ul.pt/~armac/circtrig.html.

Tal como acontecia no exercício 18, está representado com a letra X um ponto do círculo trigonométrico que pode ser deslocado com a ajuda do rato, arrastando consigo a semi-recta que ele determina. Estão marcados a traço grosso os segmentos que permitem avaliar o valor aproximado das razões trigonométricas dos correspondentes ângulos generalizados e aparece assinalado o valor

[2]É talvez um pouco estranho chamar "círculo" a uma circunferência, mas isso é algo que entrou no uso, talvez por influência da língua inglesa, onde "circle" significa tanto círculo como circunferência.

aproximado do ângulo generalizado correspondente ao movimento da semi-recta.
2) No caso de não ter acesso à internet, desenhe em papel quadriculado um círculo trigonométrico cujo raio corresponda a 10 quadrículas e represente os eixos de um referencial com origem no centro do círculo assim como a recta onde os valores aproximados da tangente podem ser medidos. Utilize um transferidor para medir os ângulos com o eixo das abcissas das semirectas de origem no centro da circunferência.

a) Organize uma tabela com os valores aproximados das três razões trigonométricas dos ângulos generalizados entre $0°$ e $360°$, com um intervalo de $15°$. Naturalmente não preencherá as entradas da tabela da tangente quando esta não estiver definida.

b) Determine aproximadamente dois ângulos generalizados cujos senos sejam respectivamente 0.6 e -0.8. Repare que esta alínea, tal como as duas a seguir, não têm solução única.

c) Determine aproximadamente dois ângulos generalizados cujos co-senos sejam respectivamente 0.6 e -0.8.

d) Determine aproximadamente dois ângulos generalizados cujas tangentes sejam respectivamente 2.5 e -0.5.

e) Escolhendo escalas apropriadas para os eixos das abcissas e das ordenadas, esboce os gráficos, no intervalo $[0, 360]$, das funções que a cada x associam o seno, o co-seno e a tangente do ângulo generalizado cuja medida em graus é x. Que contradomínios lhe parecem ter essas funções? Confirme a sua conjectura raciocinando sobre o círculo trigonométrico.

f) Copie, por decalque sobre uma folha de acetato, os gráficos obtidos na alínea e). Será possível utilizar essa cópia para esboçar os gráficos daquelas funções nos intervalos $[-360, 0]$ e $[360, 720]$?

Exercício 22. a) Repare que a sua calculadora científica lhe indica valores aproximados para as diferentes razões trigonométricas de um ângulo generalizado qualquer e que essa aproximação é bastante superior à que obteve seguindo os métodos do exercício anterior. Confronte alguns dos resultados que assinalou na tabela, que antes desenhou, com os indicados pela calculadora.

b) A sua calculadora também lhe indica ângulos generalizados cujos seno, co-seno ou tangente sejam dados. Uma vez que, como já reparou, um tal problema não tem solução única, tente descobrir como é que a calculadora escolhe a solução em cada um dos casos. Qual é a resposta da calculadora se lhe pedir para determinar um ângulo cujo seno seja 2 e porque razão essa resposta era de prever?

Tal como constatámos no exercício 21, cada um dos três tipos de razões trigonométricas que estamos a considerar define uma função real de variável real, nomeadamente aquela que a cada número real x associa o valor da razão trigonométrica do ângulo generalizado de $x°$. A estas funções é costume dar o nome de *funcões trigonométricas*. O seu domínio é a totalidade de $\mathbb{R}$, no caso do seno e do co-seno, e é formado pelos valores de x cuja semi-recta associada não é vertical, no caso da tangente, ou seja, pelos valores de x que não são da forma

$$90 + k \times 360 \quad \text{ou} \quad -90 + k \times 360,$$

com $k \in \mathbb{Z}$.

As três funções trigonométricas gozam de uma propriedade interessante que possivelmente ainda não tinha encontrado nos exemplos de função estudados no décimo ano:

Um valor $x \in \mathbb{R}$ está no domínio da função se, e só se, o valor $x + 360$ está nesse domínio e, quando isso acontece, a função toma o mesmo valor em x e em $x + 360$. A explicação desta propriedade é muito simples: basta reparar que os valores x e $x + 360$ determinam a mesma semi-recta e que o valor da função só depende da semi-recta associada ao valor de x.

A propriedade anterior costuma ser enunciada dizendo que as funções em questão **são periódicas com período 360**.

Mais geralmente, podemos apresentar a seguinte definição:

> Dado um número real $P \neq 0$, diz-se que um função de variável real f é *periódica*, *com período* P, se se verifica a seguinte condição:
> Um número real x está no domínio da função se, e só se $x + P$ está nesse domínio e, quando isso acontecer, $f(x+P) = f(x)$.

O facto de uma função ser periódica com um certo período ressalta em geral claramente do exame do respectivo gráfico. Vejamos, por exemplo, o que se passa com a função associada ao seno, cujo gráfico esboçamos em seguida (possivelmente já obteve um gráfico com este aspecto ao resolver a alínea f) do exercício 21).

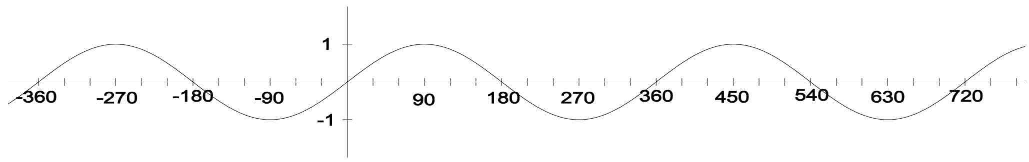


Figura 21

Como já estudámos no décimo ano, se, a partir deste gráfico, quisermos traçar, por exemplo, o gráfico da função que a x associa $\operatorname{sen}(x^\circ + 60^\circ)$, basta-nos deslocar para a esquerda o gráfico anterior 60 unidades, obtendo o gráfico a tracejado na figura seguinte

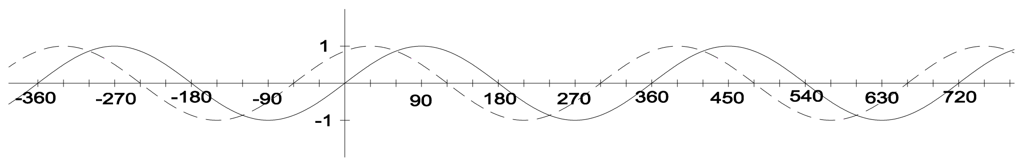


Figura 22

O resultado pode ser obtido, na prática, de forma muito simples desde que se decalque o gráfico sobre uma folha transparente e se desloque horizontalmente em seguida essa folha.

E se, em vez de 60 unidades, tivéssemos deslocado o gráfico para a esquerda 360 unidades? Ressalta claramente da figura que o gráfico se sobrepunha ao inicial, o que exprime precisamente o facto de se ter

$$\operatorname{sen}(x^\circ + 360^\circ) = \operatorname{sen}(x^\circ),$$

para cada x, ou seja, o facto de a função ser periódica com período 360.

Uma maneira alternativa de reconhecer que uma função, de que se conhece o gráfico, admite um certo período é construir uma régua de papel com comprimento igual ao do período e deslocá-la, mantendo-a paralela ao eixo das abcissas, de forma que uma das suas extremidades esteja sempre sobre o gráfico. A outra extremidade vai então permanecer também sobre o gráfico, como está sugerido na figura seguinte:

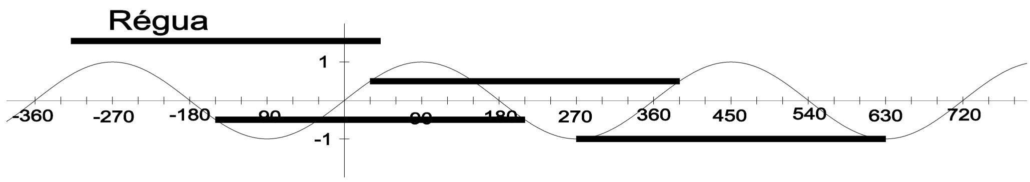


Figura 23

É claro que, depois de se ter adquirido um certo hábito, o reconhecimento do gráfico de uma função periódica pode ser feito sem recorrer a instrumentos auxiliares, como a cópia em papel transparente ou a régua de papel, imaginando, em vez disso algum desses instrumentos. É também importante sublinhar que, em muitos casos, como no das funções trigonométricas, o fenómeno da periodicidade pode ser previsto a partir do próprio método usado para definir as funções, independentemente de termos ou não o esboço do gráfico na nossa frente.

Exercício 23. A figura seguinte foi adaptada do traçado de um electrocardiograma, exame médico destinado a avaliar o correcto funcionamento do coração. Trata-se do gráfico de uma certa função, cuja variável independente é o tempo, medido em segundos, e a variável dependente é a diferença de potencial, medida em mV, entre dois eléctrodos colocados em dois pontos sobre a pele.

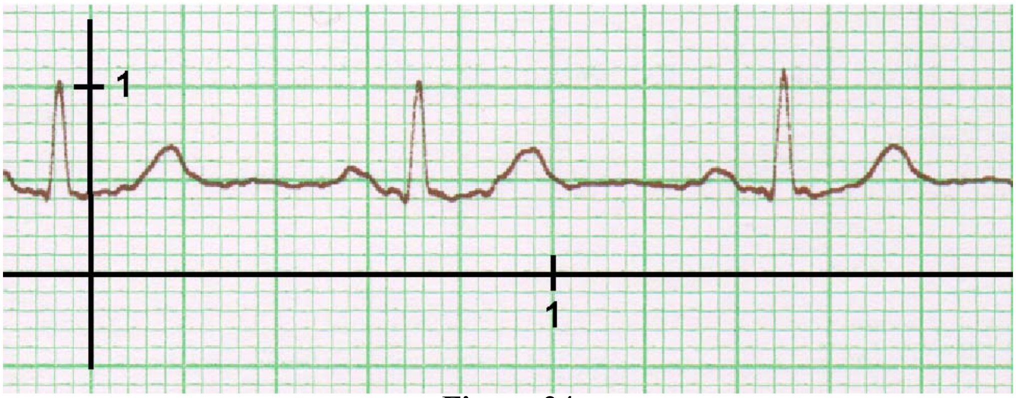


Figura 24

a) Verifique que o gráfico é aproximadamente o de uma função periódica e determine um período para esta função.
b) Repare que temos tido a preocupação de preferir a expressão "um período" a "o período", o que sugere que uma mesma função periódica pode admitir vários períodos. Determine outros períodos, positivos e negativos, para a função que estamos a estudar.
c) Generalizando o que fez na alínea anterior, o que poderá dizer sobre outros períodos de uma função periódica f, da qual conhece um dos seus períodos P.

No exercício precedente chegou certamente à conclusão de que, se uma função admite um período P, então ela também admite os períodos $2P$, $3P$, $4P$,…, tal como os períodos $-P$, $-2P$, $-3P$,…, mais precisamente, admite como períodos todos os números da forma kP, com $k \neq 0$ em $\mathbb{Z}$. A explicação é simples: Se $f(x+P) = f(x)$, para qualquer x, então a mesma igualdade deverá ser válida com $x+P$ no lugar de x, e portanto

$$f(x+2P) = f(x+P+P) = f(x+P) = f(x).$$

Do mesmo modo,

$$f(x+3P) = f(x+2P+P) = f(x+P) = f(x),$$

e assim sucessivamente. Para verificar que $-P$ é um período, basta repararmos que

$$f(x-P) = f(x-P+P) = f(x)$$

e, como já vimos atrás, podemos deduzir sucessivamente daqui que $-2P$, $-3P$, etc… também são períodos.

Exercício 24. Na figura seguinte está representado parte do gráfico de uma função de período 5. Determine um valor aproximado para $f(-10)$ e para $f(9)$.

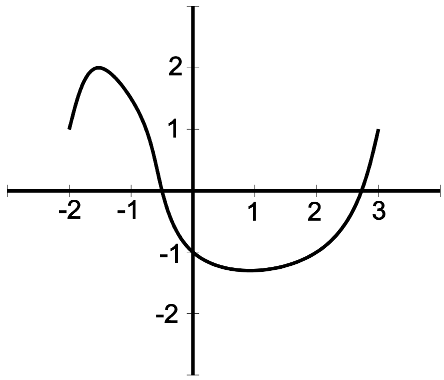


Figura 25

Quando dissémos atrás que uma função periódica que admita o período P admite também os períodos kP, com k inteiro diferente de 0, não estávamos de modo nenhum a afirmar que estes últimos sejam os únicos períodos que ela admite. Vejamos um exemplo desta situação.

Como já referimos, as três funções trigonométricas que estudámos são todas periódicas com período 360. No caso da tangente, já deve ter obtido, ao resolver o exercício 21, um gráfico como o seguinte:

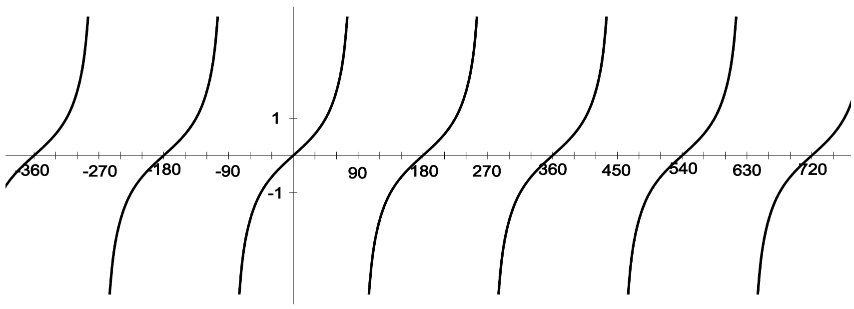


Figura 26

Exercício 25. a) Examinando o gráfico precedente, verifique que, além dos números da forma $k \times 360$, com k inteiro não nulo, a função parece admitir outros períodos, em particular o período 180.
b) Recordando a caracterização da tangente como declive duma recta, mostre que a função admite efectivamente o período 180°.

Com frequência os períodos positivos de uma função periódica têm um mínimo P, a que se dá o nome de *período positivo mínimo*. Pode-se mostrar que os períodos da função são, nesse caso os da forma kP, com $k \neq 0$ em $\mathbb{Z}$, **e apenas estes**.

Em geral é muito fácil de reconhecer pelo exame de um gráfico se um dado período positivo é ou não mínimo.

Exercício 26. Utilizando uma régua, como na figura 23, e examinando os respectivos gráficos, verifique que as funções que a cada x associam $\operatorname{sen}(x°)$ e $\cos(x°)$ admitem 360 como período positivo mínimo e a função que a x associa $\operatorname{tg}(x°)$ admite 180 como período positivo mínimo.

Depois da digressão que acabámos de fazer sobre o fenómeno importante da periodicidade, vamos examinar outras propriedades importantes das razões trigonométricas que temos estado a estudar.

A primeira observação é a de que, dado um ângulo α de que conhecemos uma das três razões trigonométricas, podemos determinar o valor absoluto de cada uma das outras duas. O conhecimento completo destas últimas será possível se, além disso, conhecermos o quadrante, ou os semi-eixos coordenados, onde se situa a semi-recta correspondente a α. Concretizemos esta afirmação em cada um dos três casos, conforme a razão trigonométrica que se supõe conhecida:

Suponhamos, em primeiro lugar, que se conhece o valor de $\operatorname{sen}(\alpha)$. A partir da fórmula fundamental

$$\operatorname{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

ficamos a conhecer o valor de $\cos^2(\alpha)$ e portanto, tomando a respectiva raíz quadrada, ficamos com o valor de $|\cos(\alpha)|$. Para conhecermos completamente o valor de $\cos(\alpha)$, falta-nos saber qual o seu sinal e este não pode ser determinado, a menos que tenhamos alguma informação complementar sobre o quadrante ou o semi-eixo em que se situa a semi-recta correspondente a α. O conhecimento de $|\cos(\alpha)|$ permite-nos determinar também $|\operatorname{tg}(\alpha)|$, uma vez que, da fórmula de definição $\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)}$, podemos concluir que

$$|\operatorname{tg}(\alpha)| = \frac{|\operatorname{sen}(\alpha)|}{|\cos(\alpha)|}.$$

Mais uma vez, o sinal de $\operatorname{tg}(\alpha)$ só pode ser determinado se tivermos alguma informação complementar sobre o quadrante ou o semi-eixo em que se situa a semi-recta correspondente a α.

Exercício 27. De um certo ângulo α sabe-se que $\operatorname{sen}(\alpha) = -\frac{4}{5}$. Indique os quadrantes em que a semi-recta correspondente pode estar e, em cada um dos casos, quais os valores de $\cos(\alpha)$ e $\operatorname{tg}(\alpha)$.

Exercício 28. Ao referir a um estudante qual o valor do seno de um ângulo, sobre o qual ele não tinha mais nenhuma informação, o estudante imediatamente determinou, sem qualquer ambiguidade, o valor do respectivo co-seno. O que poderá dizer sobre o valor do seno que tinha sido referido inicialmente e qual o valor do co-seno que o estudante determinou?

A segunda situação do mesmo tipo é aquela em que conhecemos o valor de $\cos(\alpha)$. O procedimento é análogo ao anterior: Começamos por utilizar a fórmula fundamental $\operatorname{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$ para determinar o valor de $\operatorname{sen}^2(\alpha)$, e seguidamente o de $|\operatorname{sen}(\alpha)|$, e utilizamos então a igualdade $|\operatorname{tg}(\alpha)| = \frac{|\operatorname{sen}(\alpha)|}{|\cos(\alpha)|}$ para determinar $|\operatorname{tg}(\alpha)|$. Como anteriormente, só uma informação complementar sobre o quadrante, ou semi-eixo coordenado, em que se encontra a semi-recta associada nos dá possibilidade de determinar o sinal destas razões trigonométricas.

A terceira situação é ligeiramente diferente, e exige a utilização de uma fórmula que ainda não foi referida. Vejamos o que conseguimos fazer no caso em que conhecemos o valor de $\operatorname{tg}(\alpha)$. Para resolver este problema seria útil possuirmos uma fórmula que nos desse o valor de uma das outras razões trigonométricas, pelo menos em valor absoluto, a partir daquilo que conhecemos. A ideia é partir da fórmula fundamental $\operatorname{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$ e dividir ambos os membros por $\cos^2(\alpha)$, que não é 0 uma vez que $\operatorname{tg}(\alpha)$ está definida. Obtemos então $\frac{\operatorname{sen}^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)} + 1 = \frac{1}{\cos^2(\alpha)}$ pelo que podemos enunciar o seguinte resultado:

> P4. Para cada ângulo generalizado α tal que $\cos(\alpha) \neq 0$, isto é, cuja semi-recta associada não seja vertical, tem-se
>
> $$\text{tg}^2(\alpha) + 1 = \frac{1}{\cos^2(\alpha)}.$$

Conhecido o valor de $\text{tg}(\alpha)$, a fórmula precedente permite-nos determinar $\frac{1}{\cos^2(\alpha)}$, e seguidamente $|\cos(\alpha)|$. Uma vez conhecidos $\text{tg}(\alpha)$ e $|\cos(\alpha)|$, a fórmula já utilizada $|\text{tg}(\alpha)| = \frac{|\text{sen}(\alpha)|}{|\cos(\alpha)|}$ permite-nos calcular o valor absoluto $|\text{sen}(\alpha)|$.

Exercício 29. De um certo ângulo α sabe-se que $\text{tg}(\alpha) = \frac{1}{2}$. Determine os quadrantes em que a semi-recta correspondente pode estar e, em cada caso, quais os valores de $\cos(\alpha)$ e $\text{sen}(\alpha)$.

É também útil estudarmos as funções trigonométricas, associadas ao seno, co-seno e tangente, no mesmo espírito em que as funções foram estudadas no décimo ano. Esse estudo torna-se muito simples se tivermos presente o círculo trigonométrico e podemos também apoiar a nossa intuição nos gráficos que já obtivémos.

Exercício 30. Consideremos a função real de variável real que a cada x associa $\text{sen}(x°)$.
a) Com a ajuda do círculo trigonométrico, determine o contradomínio, os zeros e o sentido de crescimento da restrição desta função a cada um dos intervalos fechados $[-90, 0]$, $[0, 90]$, $[90, 180]$ e $[180, 270]$. Repare que o estudo do que se passa noutros intervalos do mesmo tipo se pode reduzir ao destes intervalos, tendo em conta a periodicidade da função.
b) Utilize as conclusões obtidas em a) para determinar o contradomínio e quais os intervalos máximos[3] de monotonia, os zeros e os extremos desta função real de variável real.
c) Compare as conclusões obtidas com as sugeridas pelo gráfico desta função, que já tivémos ocasião de esboçar.

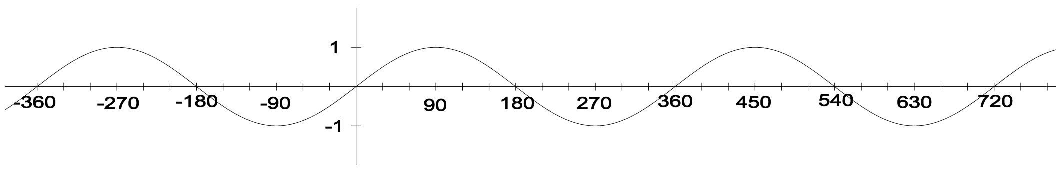


Figura 27

Exercício 31. Consideremos a função real de variável real que a cada x associa $\cos(x°)$.
a) Com a ajuda do círculo trigonométrico, determine o contradomínio, os zeros e o sentido de crescimento da restrição desta função a cada um dos intervalos fechados $[0, 90]$, $[90, 180]$, $[180, 270]$ e $[270, 360]$. Repare que o estudo do que se passa noutros intervalos do mesmo tipo se pode reduzir ao destes intervalos, tendo em conta a periodicidade da função.
b) Utilize as conclusões obtidas em a) para determinar o contradomínio e quais os intervalos máximos de monotonia, os zeros e os extremos desta função real de variável real.
c) Compare as conclusões obtidas com as sugeridas pelo gráfico desta função, que já teve ocasião

[3]Em vez de "máximos" seria mais correcto dizer "inextensíveis".

de esboçar na resolução de um dos exercícios.

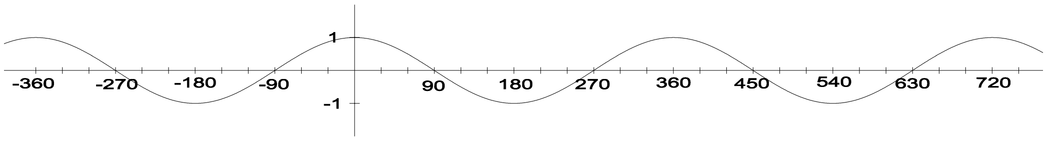


Figura 28

Exercício 32. Consideremos a função real de variável real que a cada x associa $\text{tg}(x°)$.
a) Com a ajuda do círculo trigonométrico, determine o contradomínio, os zeros e o sentido de crescimento da restrição desta função a cada um dos intervalos semi-abertos $]-90, 0]$ e $[0, 90[$. Repare que o estudo do que se passa noutros intervalos do mesmo tipo se pode reduzir ao destes intervalos, tendo em conta a periodicidade da função.
b) Utilize as conclusões obtidas em a) para determinar o contradomínio e quais os intervalos máximos de monotonia, os zeros e os extremos desta função real de variável real.
c) Compare as conclusões obtidas com as sugeridas pelo gráfico desta função, que já tivémos ocasião de esboçar.

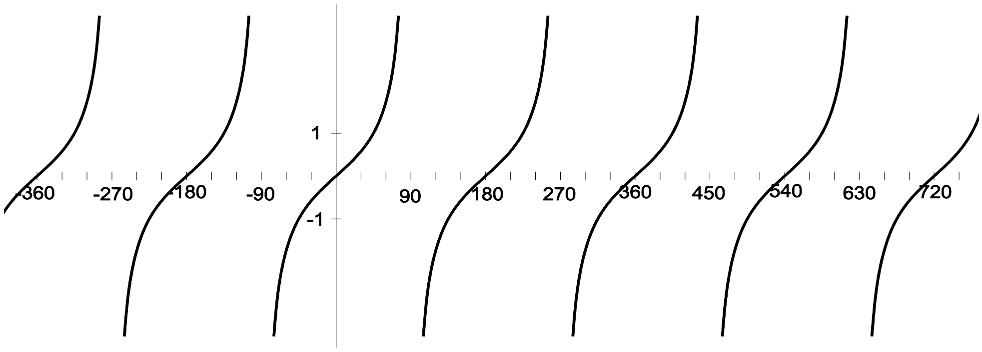


Figura 29

d) Pronuncie-se sobre a validade da seguinte afirmação, que pode eventualmente parecer contraditória: A função em análise, apesar de não ser crescente, é estritamente crescente em qualquer intervalo contido no seu domínio.

Pela importância que apresentam, destacamos em seguida as conclusões do exercícios precedentes que dizem respeito aos contradomínios:

P5. O contradomínio das funções trigonométricas associadas ao seno e ao co-seno é o intervalo $[-1, 1]$. O contradomínio da função trigonométrica associada à tangente é a totalidade $\mathbb{R}$ dos números reais.

Exercício 33. (Trigonometria e Geografia) Neste exercício faremos a hipótese simplificadora de considerar a superfície da Terra como uma esfera e tomaremos como unidade de comprimento implícita o raio da esfera. A tradução em Km dos resultados obtidos pode ser feita a partir do conhecimento de que a medida em Km do raio da Terra é

$$\frac{40000}{2\pi} \approx 6366.$$

Vamos notar O o centro da Terra, P o polo Norte, A o ponto do semi-meridiano de Greenwich que está no equador e B o ponto do semi-meridiano correspondente à longitude $90°\ E$ que está no equador.

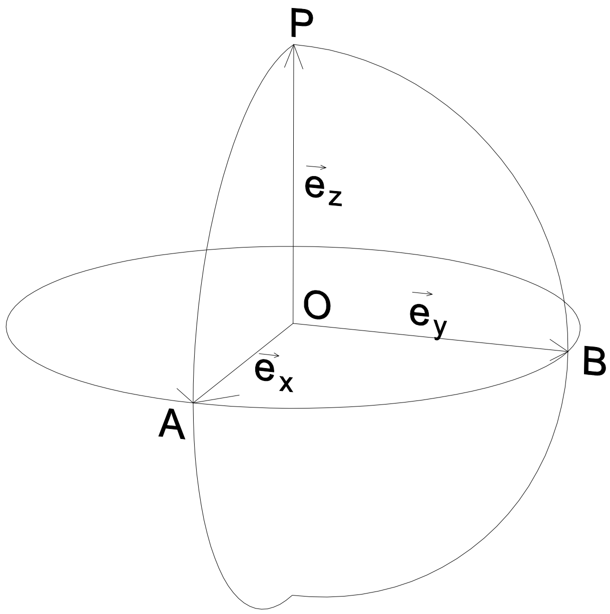


Figura 30

Consideramos um referencial ortonormado do espaço com origem no ponto O e definido pelos vectores

$$\vec{e}_x = \overrightarrow{OA}, \quad \vec{e}_y = \overrightarrow{OB}, \quad \vec{e}_z = \overrightarrow{OP}.$$

Seja X um ponto da superfície da Terra com latitude Lat_X e longitude Lon_X, com a convenção de considerar positivas as latitudes Norte e as Longitudes Este e como negativas as latitudes Sul e as Longitudes Oeste, e seja X_0 um ponto no equador com a mesma longitude que X.

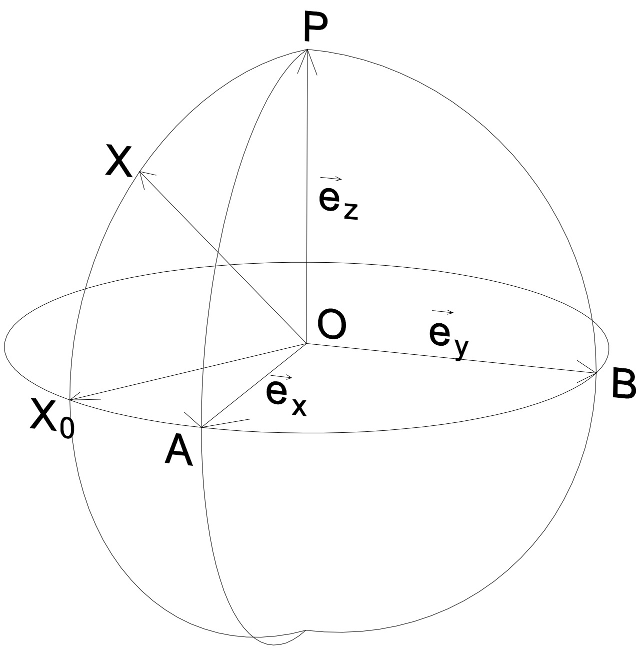


Figura 31

a) Determine as coordenadas do vector $\overrightarrow{OX_0}$ relativas ao referencial ortonormado do plano do equador constituído pelos vectores $\overrightarrow{e}_x$ e $\overrightarrow{e}_y$.

b) Determine as coordenadas do vector $\overrightarrow{OX}$ relativas ao referencial ortonormado do plano do meridiano constituída pelos vectores $\overrightarrow{OX_0}$ e $\overrightarrow{e}_z$.

c) Determine as coordenadas do vector $\overrightarrow{OX}$ relativas ao referencial ortonormado do espaço constituído pelos vectores $\overrightarrow{e}_x, \overrightarrow{e}_y$ e $\overrightarrow{e}_z$.

3. Outras relações envolvendo as razões trigonométricas.

Constatámos atrás que a três funções trigonométricas que têm ocupado o nosso estudo admitem todas o período 360, o que corresponde ao grupo de relações que destacamos a seguir:

Grupo 1

$$\text{sen}(360° + \alpha) = \text{sen}(\alpha)$$
$$\cos(360° + \alpha) = \cos(\alpha)$$
$$\text{tg}(360° + \alpha) = \text{tg}(\alpha).$$

Estas igualdades podem ser interpretadas graficamente deslocando horizontalmente cada um dos gráficos para a esquerda de 360 unidades e constatando que os gráficos resultantes se sobrepõem aos iniciais.

Vamos agora examinar o que sucede quando, em vez de uma deslocação de 360 unidades fizermos uma de 180 unidades. Para isso, reparamos que rodar uma semi-recta de um ângulo generalizado $180° + \alpha$ é o mesmo que rodá-la do ângulo α e, seguidamente dar-lhe mais meia volta no sentido directo. A posição final da semi-recta é assim oposta àquela que ela teria se tivesse percorrido apenas o ângulo α. Uma vez que as duas semi-rectas são opostas, os respectivos elementos X e X' à distância 1 da origem são simétricos relativamente a esta última.

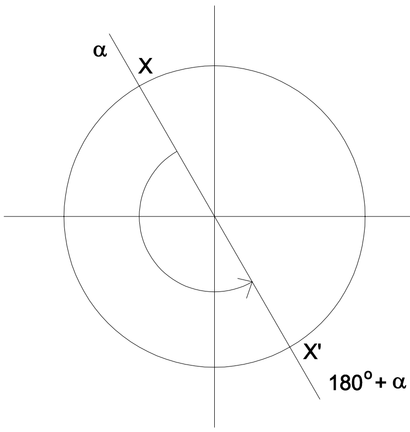


Figura 32

Podemos então garantir que a abcissa de X' é simétrica da de X e a ordenada de X' é simétrica da de X, ou seja $\cos(180° + \alpha) = -\cos(\alpha)$ e $\text{sen}(180° + \alpha) = -\text{sen}(\alpha)$. Por outro lado, já tínhamos reparado que a função trigonométrica correspondente à tangente também admite o período 180, pelo que se tem $\text{tg}(180° + \alpha) = \text{tg}(\alpha)$, igualdade que podia aliás também ser deduzida das igualdades estabelecidas para o seno e o co-seno, tendo em conta a caracterização da tangente como quaociente do primeiro pelo segundo. Podemos assim destacar um segundo grupo de relações envolvendo as funções trigonométricas:

$$\text{Grupo 2} \qquad \begin{array}{l} \text{sen}(180° + \alpha) = -\text{sen}(\alpha) \\ \cos(180° + \alpha) = -\cos(\alpha) \\ \text{tg}(180° + \alpha) = \text{tg}(\alpha). \end{array}$$

Vamos em seguida examinar um terceiro grupo de relações que correspondem a uma deslocação horizontal do gráfico para a esquerda, agora de 90 unidades. Por outras palavras, queremos examinar o que podemos dizer sobre $\text{sen}(90° + \alpha)$, $\cos(90° + \alpha)$ e $\text{tg}(90° + \alpha)$. Para percebermos claramente o que se passa, convirá examinar separadamente as diferentes posições possíveis da semi-recta associada a α. Comecemos por ver o que acontece quando o quadrante é o primeiro, para o que nos referimos à figura seguinte, onde estão marcados a traço grosso os segmentos cujo comprimento é o valor absoluto do seno e do co-seno de α e de $90°+\alpha$.

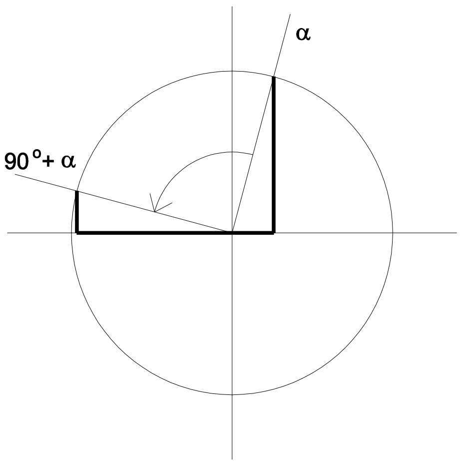


Figura 33

Os dois triângulos rectângulos com catetos assinalados a grosso são congruentes por terem hipotenusas com o mesmo comprimento 1 e os ângulos agudos com amplitudes respectivamente iguais (ângulos agudos de lados perpendiculares). Daqui resulta que os lados opostos a ângulos iguais têm o mesmo comprimento, ou seja

$$|\text{sen}(90° + \alpha)| = |\cos(\alpha)|, \quad |\cos(90° + \alpha)| = |\text{sen}(\alpha)|.$$

Uma vez que a semi-recta correspondente a α está no primeiro quadrante e a correspondente a $90° + \alpha$ está no segundo, sabemos que $\text{sen}(\alpha)$, $\cos(\alpha)$ e $\text{sen}(90° + \alpha)$ são positivos e que $\cos(90° + \alpha)$ é negativo. As igualdades anteriores implicam assim que

$$\text{sen}(90° + \alpha) = \cos(\alpha), \quad \cos(90° + \alpha) = -\text{sen}(\alpha).$$

O que é interessante é que as fórmulas anteriores, deduzidas sob a hipótese de a semi-recta associada a α estar no primeiro quadrante continuam a ser válidas quando esta semi-recta tem outras posições. As figuras a seguir representam os casos em que ela está respectivamente no segundo, no terceiro e no quarto quadrantes.

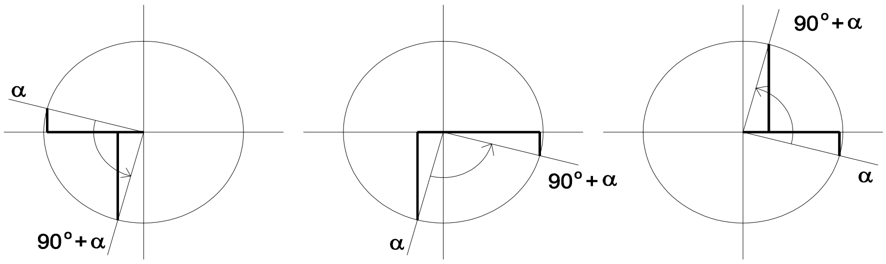


Figura 34

Exercício 34. a) Mostre que ainda são válidas as igualdades

$$\text{sen}(90° + \alpha) = \cos(\alpha), \quad \cos(90° + \alpha) = -\text{sen}(\alpha).$$

em cada um dos três casos que correspondem às figuras anteriores. Repare que as igualdades correspondentes para os valores absolutos têm sempre o mesmo tipo de demonstração pelo que o único cuidado a ter é com os sinais das razões trigonométricas de α e de 90°+α em cada um dos casos.
b) Mostre, por inspecção directa, que as igualdades anteriores ainda são válidas no caso em que a semi-recta associada a α está sobre um dos semi-eixos coordenados.

Só depois de resolvido o exercício precedente é que podemos estar certos de que as duas igualdades são efectivamente válidas para todos os valores do ângulo generalizado α. É também fácil obter uma fórmula para a tangente de 90°+α, que é válida sempre que a semi-recta correspondente a α não esteja em nenhum dos semi-eixos coordenados, ou seja, sempre que α não seja da forma $k \times 90°$, com $k \in \mathbb{Z}$. Com efeito, podemos então escrever

$$\text{tg}(90° + \alpha) = \frac{\text{sen}(90° + \alpha)}{\cos(90° + \alpha)} = \frac{\cos(\alpha)}{-\text{sen}(\alpha)} = -\frac{1}{\frac{\text{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)}} = -\frac{1}{\text{tg}(\alpha)}.$$

Resumindo as conclusões a que chegámos, podemos enunciar o terceiro grupo de relações, envolvendo as razões trigonométricas:

$$\text{Grupo 3} \qquad \begin{array}{l} \text{sen}(90° + \alpha) = \cos(\alpha) \\ \cos(90° + \alpha) = -\text{sen}(\alpha) \\ \text{tg}(90° + \alpha) = -\dfrac{1}{\text{tg}(\alpha)} \end{array},$$

onde na última igualdade está subentendido que α não é da forma $k \times 90°$, com $k \in \mathbb{Z}$.[4]

Exercício 35. Na figura seguinte estão esboçados os gráficos das funções trigonométricas associadas ao seno e ao co-seno, o primeiro a traço normal e o segundo a traço grosso.

[4]À razão trigonométrica $\frac{\cos(\alpha)}{\text{sen}(\alpha)}$, quando $\text{sen}(\alpha) \neq 0$, também se costuma dar o nome de co-tangente de α, notada $\text{cotg}(\alpha)$. A última igualdade toma então o aspecto mais semelhante ao das duas primeiras: $\text{tg}(90° + \alpha) = -\text{cotg}(\alpha)$.

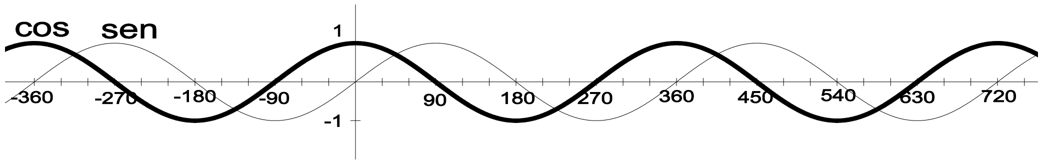


Figura 35

Esses esboços já foram obtidos ao resolver o exercício 21. Utilize os gráficos para interpretar a relação, válida para qualquer ângulo generalizado α, $\text{sen}(90° + \alpha) = \cos(\alpha)$.

Os três grupos de relações estudados até agora correspondiam ao que acontecia às funções trigonométricas quando efectuávamos uma translação horizontal para a esquerda do seu gráfico de 360, 180 ou 90 unidades.

Vamos agora examinar novas relações que envolvem, ao nível dos gráficos, uma simetria relativamente ao eixo das ordenadas, em vez de uma translação. Por outras palavras, queremos examinar o que se pode dizer sobre $\text{sen}(-\alpha)$, $\cos(-\alpha)$ e $\text{tg}(-\alpha)$.

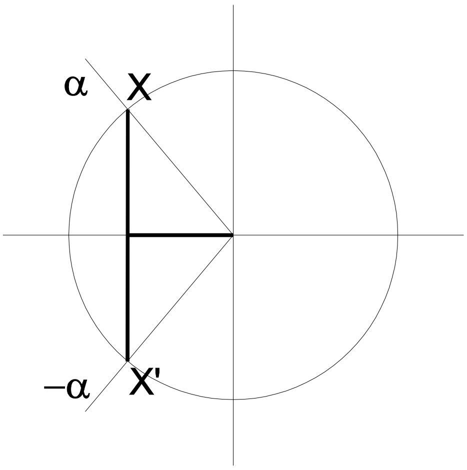


Figura 36

A situação é, neste caso, bastante simples de compreender: A semi-recta correspondente a α é simétrica da semi-recta correspondente a $-\alpha$, relativamente ao eixo das abcissas, pelo que os pontos X e X' destas duas semi-rectas que estão à distância 1 da origem são simétricos um do outro relativamente ao eixo das abcissas. Os pontos X e X' têm assim a mesma abcissa e ordenadas simétricas, o que nos permite escrever

$$\text{sen}(-\alpha) = -\text{sen}(\alpha), \quad \cos(-\alpha) = \cos(\alpha).$$

Na linguagem já encontrada no estudo das funções no décimo ano, podemos assim dizer que

O seno define uma função ímpar e o co-seno define uma função par.

Tendo em conta a definição da tangente, como quociente do seno pelo co-seno, quando este último não é 0, podemos derivar das duas relações anteriores a relação $\text{tg}(-\alpha) = -\text{tg}(\alpha)$. Podemos esquematizar as conclusões a que acabámos de chegar no seguinte grupo de relações:

$$\text{Grupo 4} \qquad \begin{aligned} \text{sen}(-\alpha) &= -\text{sen}(\alpha) \\ \cos(-\alpha) &= \cos(\alpha) \\ \text{tg}(-\alpha) &= -\text{tg}(\alpha) \end{aligned} \quad .$$

Exercício 36. Tendo em conta a tabela na página 3, com os valores exactos das razões trigonométricas dos ângulos de $30°$, $45°$ e $60°$, construa outra tabela com os valores exactos que conseguir determinar para ângulos generalizados no intervalo $[-180°, 180°]$.

Exercício 37. a) Combinando as relações nos grupos 2 e 4, obtenha as seguintes relações:

$$\text{Grupo 5} \qquad \begin{aligned} \operatorname{sen}(180° - \alpha) &= \operatorname{sen}(\alpha) \\ \cos(180° - \alpha) &= -\cos(\alpha) \\ \operatorname{tg}(180° - \alpha) &= -\operatorname{tg}(\alpha). \end{aligned}$$

b) Combinando as relações nos grupos 3 e 4, obtenha as seguintes relações:

$$\text{Grupo 6} \qquad \begin{aligned} \operatorname{sen}(90° - \alpha) &= \cos(\alpha) \\ \cos(90° - \alpha) &= \operatorname{sen}(\alpha) \\ \operatorname{tg}(90° - \alpha) &= \frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha)}. \end{aligned}$$

Cabe aqui fazer uma observação sobre as limitações da nossa memória e os métodos que podem ser usados para ultrapassar essas limitações. Estudámos nesta secção seis grupos de três relações o que dá um total de dezóito relações que seria impensável saber de cor. Em particular é difícil lembrarmo-nos de quais as relações em que no segundo membro aparece o sinal "$-$" e quais aquelas em que isso não acontece. A situação fica bastante mais simples se arranjarmos uma mnemónica como a que sugerimos em seguida:

Mnemónica: Nas fórmulas em que não intervém o ângulo de $90°$ aparece a mesma razão trigonométrica nos dois membros da igualdade, umas vezes com o sinal "$-$" outras vezes não. Nas fórmulas em que intervém o ângulo de $90°$, ou aparece o seno num dos membros e o co-seno no outro, ou aparece a tangente num membro e o inverso da tangente no outro, mais uma vez podendo aparecer ou não o sinal "$-$". Em qualquer caso, para nos lembrarmos se devemos pôr o sinal "$-$" ou não, examinamos um caso particular simples, por exemplo aquele em que o ângulo α corresponde ao primeiro quadrante, e reparamos nos sinais que aparecem nos dois membros, tendo presente a imagem do círculo trigonométrico.

Exercício 38. Escreva uma expressão identicamente igual a cada uma das expressões seguintes fazendo intervir $\operatorname{sen}(\alpha)$ e $\cos(\alpha)$ como únicas razões trigonométricas.
a) $\operatorname{sen}(900° + \alpha) - \cos(900° - \alpha)$.
b) $\operatorname{sen}(270° - \alpha) + \operatorname{tg}(90° - \alpha)$.

Exercício 39. Verificámos no exercício 13 que, para cada ângulo α estritamente entre $0°$ e $90°$, é válida a seguinte fórmula para o seno do ângulo duplo:

$$\operatorname{sen}(2\alpha) = 2\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\alpha).$$

Mostre que esta igualdade continua a ser válida quando α é um ângulo generalizado arbitrário. **Sugestão:** Efectuar sucessivamente os seguintes passos:
1) Por inspecção directa, verificar a validade da igualdade quando α é $0°$ ou $90°$.
2) Utilizar as fórmulas dos grupos 2 e 3 para verificar que a igualdade ainda é válida para os ângulos α entre $90°$ e $180°$.
3) Utilizar as fórmulas dos grupos 1 e 2 para verificar que a igualdade ainda é válida para os ângulos α entre $180°$ e $360°$.
4) Usar a periodicidade das funções para concluir finalmente que a igualdade é válida para valores arbitrários de α.

4. Resolução de algumas Equações Trigonométricas.

As equações trigonométricas são problemas em que se pretende determinar ângulos generalizados a partir do conhecimento de certas relações envolvendo razões trigonométricas a eles associadas. Uma das características destas equações é a existência, em geral, de uma infinidade de soluções, fenómeno que está ligado à existência de uma infinidade de ângulos generalizados para os quais uma das razões trigonométricas toma um certo valor.

O nosso objectivo não é o de indicar métodos para resolver qualquer equação trigonométrica. Pretendemos apenas, através de exemplos, ilustrar alguns dos métodos que permitem, nos casos mais simples, achar as soluções pretendidas.

Na base do primeiro método está a seguinte observação simples: Suponhamos que temos um certo ângulo generalizado α_0 e que queremos determinar todos os ângulos generalizados α que têm o mesmo co-seno que α_0.

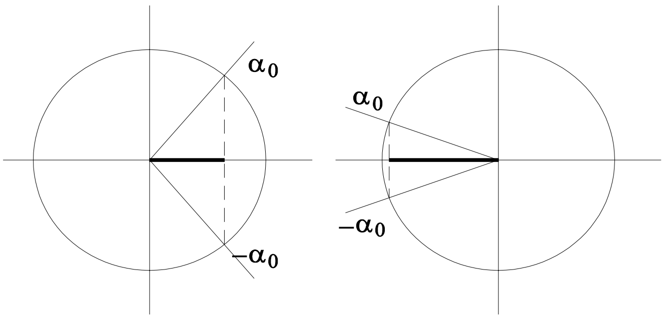


Figura 37

Tendo presente o círculo trigonométrico, vemos que esses ângulos α são precisamente aqueles cuja semi-recta associada é a semi-recta associada a α_0 **ou** a semi-recta simétrica desta última, relativamente ao eixo das abcissas. Uma vez que esta semi-recta simétrica é a associada ao ângulo generalizado $-\alpha_0$, podemos concluir, tendo em conta a propriedade P3, na página 12,

P6. Dado um ângulo generalizado α_0, o conjunto dos ângulos generalizados α que são solução da equação $\cos(\alpha) = \cos(\alpha_0)$ é

$$\{\alpha_0 + k \times 360°\}_{k\in\mathbb{Z}} \cup \{-\alpha_0 + k \times 360°\}_{k\in\mathbb{Z}}.$$

Por outras palavras, tem-se

$$\cos(\alpha) = \cos(\alpha_0)$$
$$\Updownarrow$$
$$(\underset{k\in\mathbb{Z}}{\exists}\ \alpha = \alpha_0 + k \times 360°) \vee (\underset{k\in\mathbb{Z}}{\exists}\ \alpha = -\alpha_0 + k \times 360°).$$

Exercício 40. Determine os ângulos α entre 720° e 1440° tais que $\cos(\alpha) = \frac{1}{2}$.

O exercício anterior é um exemplo de aplicação directa da propriedade citada. Abordamos a seguir um segundo exemplo, em que a aplicação do resultado precedente poderia não ser tão evidente.

Exemplo. Queremos determinar os ângulos generalizados α tais que

$$\cos(3\alpha) = \cos(2\alpha).$$

Se repararmos bem, estamos na situação da propriedade precedente, com 3α a jogar o papel de α e 2α o de α_0. Podemos assim garantir que aquela equação é verificada se, e só se, uma das duas condições seguintes é verdadeira:
a) Existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $3\alpha = 2\alpha + k \times 360°$;
b) Existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $3\alpha = -2\alpha + k \times 360°$.
A primeira condição é equivalente à existência de $k \in \mathbb{Z}$ tal que $3\alpha - 2\alpha = k \times 360°$, ou seja, tal que $\alpha = k \times 360°$. A segunda condição é equivalente à existência de $k \in \mathbb{Z}$ tal que $3\alpha + 2\alpha = k \times 360°$, isto é, tal que $5\alpha = k \times 360°$, condição que também pode ser escrita na forma $\alpha = k \times 72°$. Poderíamos assim dizer que os ângulos procurados são aqueles que se podem escrever na forma $k \times 360°$ ou na forma $k \times 72°$, com $k \in \mathbb{Z}$, mas, embora a resposta estivesse correcta, poderia ser simplificada. O que se passa é que, uma vez que $k \times 360° = 5 \times k \times 72°$, os ângulos da forma $k \times 360°$ também são do tipo "72° multiplicado por um número inteiro" pelo que a resposta mais simples é dizer que os ângulos procurados são precisamente os da forma $k \times 72°$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Exercício 41. Determine os ângulos α tais que $\cos(2\alpha) = \mathrm{sen}(\alpha)$. **Sugestão:** Repare que o segundo membro da equação se pode escrever como o co-seno de um ângulo conveniente, usando igualdades estudadas na secção precedente.

Exercício 42. Determine os ângulos α tais que $\cos(2\alpha) = -\cos(\alpha)$.

Uma segunda situação análoga à que conduziu à propriedade P6 é aquela em que, dado um ângulo generalizado α_0, queremos determinar os ângulos generalizados α que verificam a equação $\mathrm{sen}(\alpha) = \mathrm{sen}(\alpha_0)$. Como antes, tendo presente o círculo trigonométrico, vemos que esses ângulos α são precisamente aqueles cuja semi-recta associada é a semi-recta associada a α_0 **ou** a semi-recta simétrica desta última, relativamente ao eixo das ordenadas.

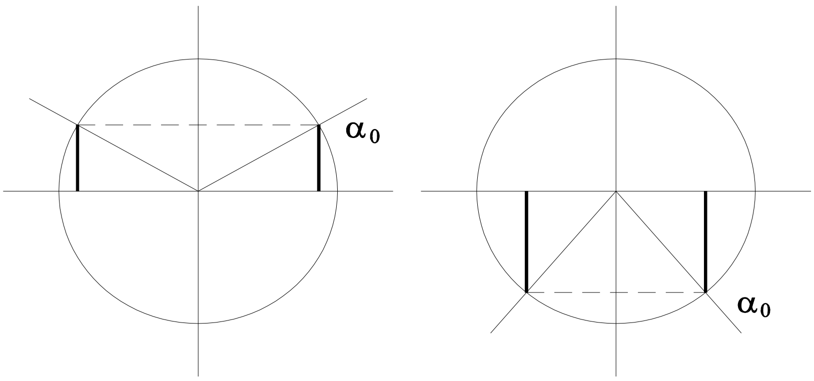


Figura 38

Para procedermos como no caso do co-seno, conviria agora encontrarmos uma fórmula para um ângulo particular cuja semi-recta associada seja a simétrica da associada a α_0.

Para encontrar uma tal fórmula, que se aplique em todas as posições possíveis da semi-recta associada a α_0, é cómodo repararmos que o simétrico de um ponto $X(x,y)$ relativamente ao eixo das ordenadas é o ponto $X'(-x,y)$ que também se pode obter como o simétrico do ponto $X''(x,-y)$ relativamente à origem, ponto X'' esse que é o simétrico de X relativamente ao eixo das abcissas. Uma vez que a semi-recta simétrica, relativamente ao eixo das abcissas, da semi-recta associada a α_0 é a associada a $-\alpha_0$ e que a semirecta simétrica desta última relativamente à origem é a semi-recta associada a $180° + (-\alpha_0) = 180° - \alpha_0$, podemos dizer que a semi-recta que procuramos é a associada ao ângulo $180° - \alpha_0$. Podemos agora dizer, como no caso do co-seno:

P7. Dado um ângulo generalizado α_0, o conjunto dos ângulos generalizados α que são solução da equação $\text{sen}(\alpha) = \text{sen}(\alpha_0)$ é

$$\{\alpha_0 + k \times 360°\}_{k\in\mathbb{Z}} \cup \{180° - \alpha_0 + k \times 360°\}_{k\in\mathbb{Z}}.$$

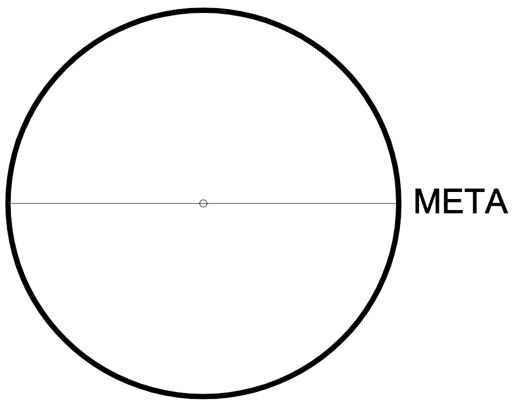
Por outras palavras, tem-se

$$\text{sen}(\alpha) = \text{sen}(\alpha_0)$$
$$\Updownarrow$$
$$(\underset{k\in\mathbb{Z}}{\exists}\ \alpha = \alpha_0 + k \times 360°) \vee (\underset{k\in\mathbb{Z}}{\exists}\ \alpha = 180° - \alpha_0 + k \times 360°).$$

Exercício 43. Apresente uma nova justificação para a propriedade P7, directamente a partir da propriedade P6. **Sugestão:** Repare que a igualdade $\text{sen}(\alpha) = \text{sen}(\alpha_0)$ é equivalente à igualdade $\cos(90° - \alpha) = \cos(90° - \alpha_0)$.

Exercício 44. Determine os ângulos α entre $0°$ e $360°$ tais que $\text{sen}(5\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercício 45. Na figura junta está representada uma pista de atletismo circular com 45 metros de raio, assim um dos seus diâmetros, com a direcção Leste-Oeste. Um corredor deu três voltas à pista, no sentido directo, a partir da meta, situada na parte Leste do diâmetro referido. A velocidade do corredor é constante e sabe-se que ele percorre em cada segundo um ângulo de $10°$, com vértice no centro da pista. Quais os instantes depois da partida em que ele passa 15 metros a norte do diâmetro referido? Utilize uma calculadora para determinar aproximadamente os instantes ao décimo de segundo.



5. Uma nova Medida Angular. O Radiano

Até agora a unidade que mais utilizámos para medir ângulos foi o grau. Trata-se de uma unidade com raízes históricas importantes e que ainda hoje é utilizada em muitas situações, por exemplo na Navegação, na Astronomia, na Topografia, na Geometria Elementar, etc…

Há certas situações, que se tornarão cada vez mais numerosas conforme formos avançando no nosso estudo, em que o grau não se revela a unidade mais apropriada para medir os ângulos.

Uma das razões, fácil de explicar, prende-se com o traçado dos gráficos das funções associadas às razões trigonométricas. Quando atrás obtivémos o gráfico da função que a cada número real x associa, por exemplo, $\text{sen}(x°)$ fomos conduzidos naturalmente à necessidade de utilizar escalas diferentes nos dois eixos (cf. a figura 21, na página 18). O mesmo aconteceria se utilizasse a sua calculadora gráfica para obter o esboço daquele gráfico. É por vezes importante utilizar gráficos com escalas iguais nos dois eixos, principlamente quando queremos obter uma informação visual sobre a relação entre as variações das variáveis independente e dependente. A figura a seguir esboça o gráfico daquela função quando tomarmos a mesma escala nos dois eixos. Para conseguirmos ver alguma coisa, limitámos o gráfico ao intervalo $[0, 90]$, intervalo em que a função varia de 0 a 1 de modo estritamente crescente.

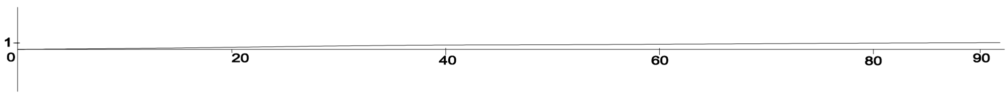


Figura 39

Somos assim levados à conclusão de que talvez o grau seja uma unidade demasiado "pequena" e poderíamos experimentar utilizar uma unidade maior, por exemplo a *volta*, correspondente a $360°$.

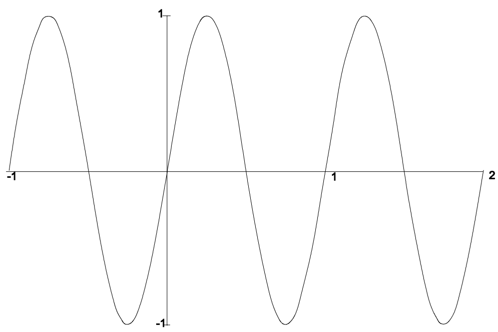


Figura 40

Na figura 40 temos um esboço do gráfico da função que a cada x associa o seno de x voltas, tomando como domínio o intervalo $[-1, 2]$.

O gráfico já é mais informativo do que o que obtínhamos quando a unidade era o grau. Apesar desse facto, não é ainda a *volta* a unidade que se revelou mais cómoda para as aplicações.

Por razões que neste momento não nos é ainda possível explicar completamente, a unidade que interessa utilizar, por exemplo quando estudarmos adiante o Cálculo Diferencial, é o *radiano*, definido do seguinte modo:

> O *radiano* é o ângulo que determina no círculo trigonométrico um arco de comprimento igual a 1.

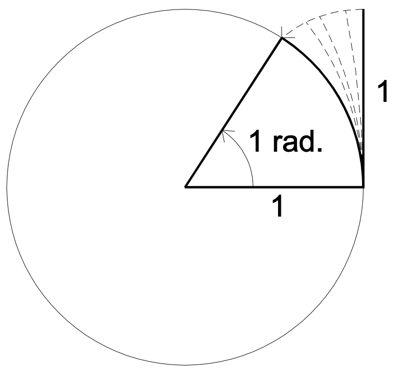


Figura 41

Para encontrar aproximadamente um ângulo de 1 radiano basta assim traçar uma circunferência de raio igual a uma unidade e enrolar em torno dela um fio cujo comprimento é uma unidade.

É muito fácil descobrirmos o modo de converter graus para radianos e vice-versa. Uma vez que, para uma circunferência com um dado raio, o comprimento de um arco é directamente proporcional à amplitude do ângulo respectivo, basta-nos reparar que, no caso em que a circunferência tem raio 1, ao ângulo de $360°$ corresponde um arco de comprimento igual ao da circunferência, igual assim a 2π. Podemos assim construir a tabela seguinte, com alguns valores úteis para a conversão:

graus	radianos
360	2π
180	π
90	$\frac{\pi}{2}$
60	$\frac{\pi}{3}$
45	$\frac{\pi}{4}$
30	$\frac{\pi}{6}$
1	$\frac{\pi}{180}$
$\frac{180}{\pi} \approx 57.30$	1

Os valores da tabela anterior não são para conhecer todos de cor. Convirá talvez conhecer as correspondências $360° = 2\pi$ radianos e $180° = \pi$ radianos, assim como uma ordem de grandeza para o valor em graus do radiano, e, em cada caso, os restantes valores da tabela, tal como outros que nela não figuram, podem ser deduzidos facilmente, muitas vezes por um cálculo mental.

Se quisermos ter uma fórmula para aplicar em todos os casos, podemos deduzir, das últimas duas linhas da tabela, que

$$x° = \frac{\pi}{180} \times x \text{ radianos}, \quad y \text{ radianos} = \frac{180}{\pi} \times y°.$$

Exercício 46. Determine valores exactos em radianos dos ângulos seguintes e, seguidamente, com o auxílio da sua calculadora, determine os correspondentes valores aproximados às centésimas.

a) $20°$; **b)** $12°$; **c)** $1000°$; **d)** $-150°$.

Exercício 47. Determine os valores em graus dos ângulos cujas medidas em radianos são as seguintes. Quando necessário, utilize a sua calculadora para obter um valor aproximado às décimas de grau.

a) -3π; **b)** $\frac{9\pi}{2}$; **c)** $\frac{3\pi}{10}$; **d)** 2.5.

Note-se que, se pretendermos determinar o valor aproximado de uma razão trigonométrica de um ângulo dado em radianos, não é em geral necessário começar por convertê-lo primeiro para graus: As calculadoras têm normalmente um "modo" em que as medidas angulares são interpretadas em radianos.

A unidade *radiano* é de tal modo importante na Matemática que se aceita a convenção de que, quando nos referimos ao valor numérico de um ângulo sem referir explicitamente a unidade utilizada, esta é o radiano. Por exemplo, escreve-se $\text{sen}(\frac{\pi}{6})$ em vez de sen($\frac{\pi}{6}$ radianos) e dá-se simplesmente o nome de *função seno* à função que a cada real x associa $\text{sen}(x)$ (isto é, o seno de x radianos).

Exercício 48. Utilize os resultados obtidos nos exercícios 3, 4 e 5 para completar o quadro seguinte com os valores exactos das razões trigonométricas (não necessita apresentar os resultados na forma mais simples possível):

Ângulo	**sen**	**cos**	**tg**
$\frac{\pi}{10}$			
$\frac{\pi}{6}$			
$\frac{\pi}{5}$			
$\frac{\pi}{4}$			
$\frac{3\pi}{10}$			
$\frac{\pi}{3}$			
$\frac{2\pi}{5}$			

Exercício 49. Determine as soluções das seguintes equações trigonométricas:
a) $\text{sen}(\alpha) = -\frac{1}{2}$;
b) $\text{tg}(\alpha) = 1$;
c) $\text{sen}(4\alpha) = \cos(\alpha)$.

Apesar de, como já referimos, não ser possível de momento explicar totalmente as vantagens da utilização do radiano, vamos examinar algumas situações em que este é de utilização mais cómoda ou conveniente.

A primeira situação decorre do facto de tanto o comprimento de um arco de circunferência como a área de um sector circular serem proporcionais aos ângulos que os determinam. Numa circunferência de raio r sabemos que o perímetro é $2\pi r$ e a área é πr^2. Trata-se, respectivamente, do comprimento do arco e da área do sector circular correspondentes ao ângulo de 2π radianos pelo que, considerando a proporcionalidade referida, concluímos que o comprimento do arco correspondente a 1 radiano é igual ao raio r e que a área do sector circular correspondente a 1 radiano é $\frac{r^2}{2}$. Utilizando, mais uma vez, a proporcionalidade, podemos concluir:

P8. Numa circunferência de raio r, o comprimento do arco correspondente a um ângulo α, entre 0 e 2π, é igual a αr e a área do sector circular correspondente ao mesmo ângulo é $\frac{\alpha r^2}{2}$.

Da propriedade precedente podemos deduzir uma relação importante entre um ângulo e os respectivos seno e tangente, relação que só é verdadeira pelo facto de a unidade de trabalho ser o radiano. Consideremos um ângulo α tal que $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ e representêmo-lo no círculo trigonométrico, juntamente com os segmentos que determinam o seu seno e a sua tangente.

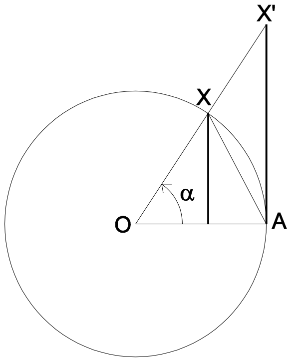


Figura 42

De acordo com o que dissémos atrás, a área do sector circular determinado pelo ângulo α é igual a $\frac{\alpha}{2}$. Mas, por outro lado, essa área é maior que a do triângulo $[OAX]$ e menor que a do triângulo $[OAX']$, triângulos esses com uma base de comprimento 1 e com as alturas correspondentes respectivamente iguais a sen(α) e a tg(α). Podemos assim concluir que

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{sen}(\alpha) < \frac{\alpha}{2} < \frac{1}{2}\,\mathrm{tg}(\alpha),$$

e portanto podemos enunciar a seguinte propriedade importante:

P9. Qualquer que seja o número real α, com $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, tem-se

$$\mathrm{sen}(\alpha) < \alpha < \mathrm{tg}(\alpha).$$

Esboçamos na figura adiante o gráfico das funções seno, co-seno e tangente, no quadro em que nos colocaremos daqui em diante, utilizando a mesma escala para os dois eixos coordenados.

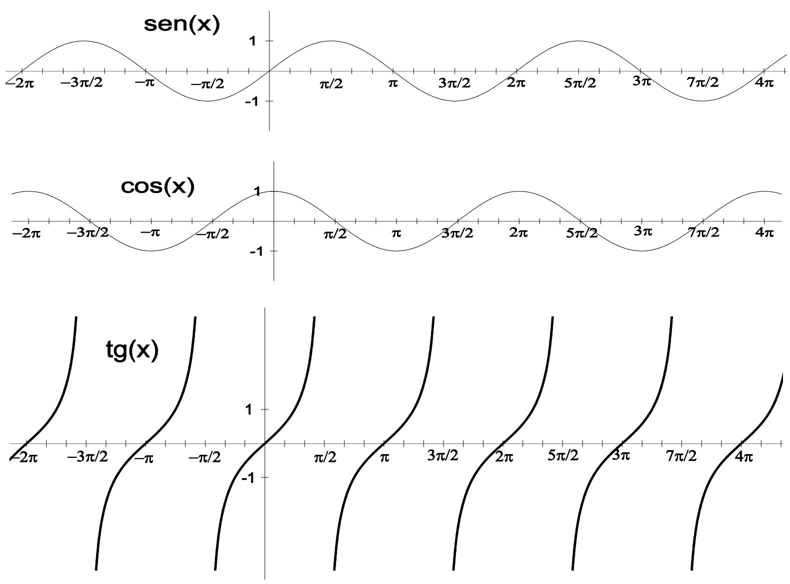


Figura 43

Vamos terminar esta secção com uma última observação sobre um tipo de comportamento característico da escolha do radiano como unidade privilegiada de medição dos ângulos. Vamos continuar a utilizar a mesma escala para os dois eixos coordenados e vamos examinar "ao microscópio" uma porção do gráfico próxima do ponto $(0,0)$ de cada uma das funções associadas ao *seno*, quando a unidade angular tomada é sucessivamente o grau, a volta e o radiano (no último caso é que estamos na presença daquilo a que chamamos a *função seno*).

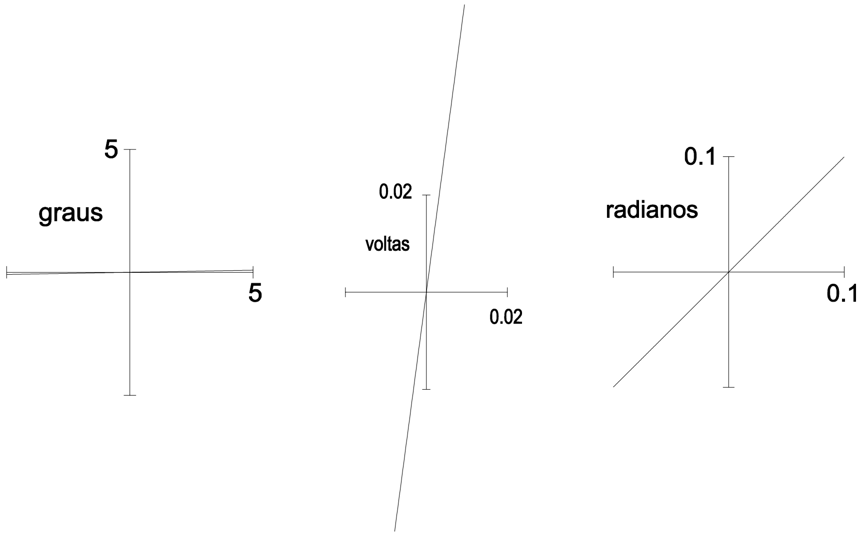


Figura 44

Os esboços, que é útil tentar também obter com a ajuda da calculadora gráfica, são os na figura atrás.

Um primeiro fenómeno salta à vista: todos estes gráficos parecem rectilíneos. Trata-se de algo que compreenderemos melhor quando estudarmos o cálculo diferencial: Um grande número de gráficos de funções parece tanto mais rectilínio quanto menor a porção do domínio que se está a examinar. O segundo fenómeno está ligado ao declive destas rectas aparentes (esse declive é o que chamaremos mais tarde a *derivada* no ponto do domínio onde concentramos o nosso exame, neste caso o ponto 0). No caso da medida angular em graus o declive é tão pequeno que o gráfico parece quase sobrepor-se ao eixo das abcissas; no caso da medida angular em voltas o declive é elevado (pode mostrar-se que ele é igual a $2\pi \approx 6.28$); no caso da medida angular em radianos, o declive parece ser 1 e, de facto, é possível provar que ele é efectivamente 1.

Exercício 50. Utilize as desigualdades na propriedade P9 para encontar uma razão que possa explicar porque é que o gráfico da função $\mathrm{sen}(\alpha)$ num intervalo suficientemente pequeno do domínio, contendo o ponto 0, é muito semelhante a uma recta com declive 1. **Sugestão:** Repare que $\mathrm{tg}(\alpha) = \frac{\mathrm{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ e que, quando α está próximo de 0, $\cos(\alpha)$ está próximo de 1.

Capítulo II
Geometria Analítica

6. Projecções Ortogonais e Produto Escalar de Vectores.

Vamos poder aprofundar o estudo da Geometria Analítica que fizémos no décimo ano, graças ao recurso a um instrumento de grande utilidade para a resolução de vários problemas, em particular daqueles que fazem intervir a perpendicularidade e a determinação de ângulos.

O instrumento referido é o produto escalar, uma nova operação que envolve os vectores, para além da soma destes e do produto por um número real que já conhecemos.

Quando trabalharmos com a noção de produto escalar suporemos sempre fixada uma unidade de comprimento. Será cómodo começar por definir o produto escalar de dois vectores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ no caso particular em que estes são dois vectores de uma mesma recta r, ou seja, pertencem a uma mesma recta vectorial $\overrightarrow{\mathcal{V}}_r$. Nesse caso o produto escalar $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ é o número real definido do seguinte modo:

a) $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$, se pelo menos um dos dois vectores é $\overrightarrow{0}$;

b) $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\|$, se os vectores são diferentes de $\overrightarrow{0}$ e têm o mesmo sentido;

c) $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = -\|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\|$, se os vectores são diferentes de $\overrightarrow{0}$ e têm sentidos opostos.

Em qualquer dos casos, quando $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são vectores duma mesma recta r, podemos escrever a igualdade

$$|\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}| = \|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\|.$$

Nota: A utilização do produto escalar não se limita às aplicações geométricas que vamos estudar. Um outro exemplo muito importante, de utilização, no quadro da Física, é a noção de *trabalho* realizado por uma força cujo ponto de aplicação se desloca. Se fixarmos uma unidade de comprimento e uma unidade de força, a força pode ser representada por um vector e o deslocamento, se rectilíneo, por outro vector. No caso em que ambos os vectores têm a mesma direcção e sentido, o trabalho é, por definição, o produto dos comprimentos dos vectores, com a alteração de devermos multiplicar esse produto por -1, no caso em que os dois vectores têm sentidos opostos. O significado desta alteração é intuitivo, se pensarmos na situação em que o facto de o deslocamento ter sentido oposto ao da força que exercemos se deve a alguém estar a fazer uma força maior no sentido oposto; nesse caso, não estamos verdadeiramente a "produzir" trabalho mas sim a "estragar parcialmente" o trabalho que o outro está a fazer.

Vamos agora reparar numa forma alternativa de olhar para o produto escalar de vectores de uma mesma recta r que permite, em particular, constatar de modo muito simples algumas das suas propriedades. Para isso, escolhemos um dos dois vectores de norma 1, $\overrightarrow{e}$ da recta, que é, em particular, um vector director da recta, e lembramos que todos o vectores da recta se podem obter multiplicando o vector $\overrightarrow{e}$ por um número real conveniente.

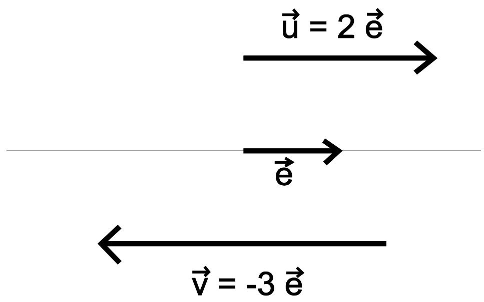


Figura 45

O facto de o vector director $\overrightarrow{e}$ ter sido escolhido com norma 1 implica que, se $\overrightarrow{u} = a\overrightarrow{e}$ e $\overrightarrow{v} = b\overrightarrow{e}$ (ou seja, como estamos habituados a escrever, $\overrightarrow{u} \leftrightarrow a$ e $\overrightarrow{v} \leftrightarrow b$) então $\|\overrightarrow{u}\| = |a|$ e $\|\overrightarrow{v}\| = |b|$. Além disso, no caso em que os vectores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são ambos diferentes de $\overrightarrow{0}$, eles têm o mesmo sentido quando a e b tiverem o mesmo sinal, ou seja quando $ab > 0$, e sentidos opostos quando a e b tiverem sinais opostos, ou seja $ab < 0$. Podemos concluir daqui que, em cada um destes dois casos, tem-se $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = ab$ e é claro que esta igualdade é ainda válida no caso em que algum dos vectores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ é $\overrightarrow{0}$. Podemos assim enunciar o resultado geral sobre o produto escalar de vectores da recta:

P10. Se $\overrightarrow{e}$ é um vector director de norma 1 da recta r, então dados vectores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ de r, com $\overrightarrow{u} = a\overrightarrow{e}$ e $\overrightarrow{v} = b\overrightarrow{e}$, tem-se

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = ab.$$

Dito de outro modo, o produto escalar de vectores da recta é o produto das respectivas coordenadas relativas a um vector director de norma 1. Uma vez que, como já estudámos anteriormente, a coordenada da soma de dois vectores é a soma das respectivas coordenadas e a coordenada do produto de um vector por um número real é o produto do número real pela coordenada do vector inicial, as propriedades que enunciamos em seguida, e que serão mais tarde generalizadas para vectores não obrigatoriamente colineares, resultam das correspondentes propriedades dos números reais.

P11. Sejam $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ vectores duma mesma recta r e $t \in \mathbb{R}$. Tem-se então:
a) $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}$ (propriedade comutativa);
b) $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} + \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w}$ (propriedade distributiva à esquerda);
c) $\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}$ (propriedade distributiva à direita);
d) $(t\overrightarrow{u}) \cdot \overrightarrow{v} = t\,(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u} \cdot (t\overrightarrow{v})$ (propriedade associativa mista).

Exercício 51. Dados dois vectores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ de uma recta r, relacione o produto escalar $(2\overrightarrow{u}) \cdot (-3\overrightarrow{v})$ com o produto escalar $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$.

★ ★ ★ ★

Para podermos generalizar o produto escalar de vectores ao caso em que estes não são necessariamente colineares temos necessidade de examinar a noção de projecção ortogonal de um vector sobre uma recta r (ou, o que é o mesmo, sobre a recta vectorial associada $\overrightarrow{\mathcal{V}}_r$). Ao fazê-lo obteremos, sem qualquer esforço suplementar, outra noção também importante, a de projecção ortogonal de um vector sobre um plano α (ou, o que é o mesmo, sobre o plano vectorial associado $\overrightarrow{\mathcal{V}}_\alpha$).

Recordemos que dois vectores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$, diferentes de $\overrightarrow{0}$, se dizem *ortogonais* se o respectivo ângulo é de 90° e que, por extensão, se considera que o vector $\overrightarrow{0}$ é ortogonal a qualquer vector. A partir desta noção é natural apresentar as definições seguintes:

Diz-se que um vector $\overrightarrow{u}$ é *ortogonal a uma recta* r, ou, o que é o mesmo, que ele é *ortogonal à recta vectorial* $\overrightarrow{\mathcal{V}}_r$ associada a r, quando $\overrightarrow{u}$ é ortogonal a todos os vectores $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{\mathcal{V}}_r$.

Diz-se que um vector $\overrightarrow{u}$ é *ortogonal a um plano* α, ou, o que é o mesmo, que ele é *ortogonal ao plano vectorial* $\overrightarrow{\mathcal{V}}_\alpha$ associado a α, quando $\overrightarrow{u}$ é ortogonal a todos os vectores $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{\mathcal{V}}_\alpha$.

Uma circunstância feliz é que, quando queremos verificar que um vector é ortogonal a uma recta vectorial ou a um plano vectorial não precisamos verificar que ele é ortogonal a *todos* os vectores dessa recta ou desse plano:

P12. Para ter a certeza que um vector $\overrightarrow{u}$ é ortogonal a uma recta vectorial $\overrightarrow{\mathcal{V}}_r$, basta sabermos que ele é ortogonal a algum vector director da recta r.

Para ter a certeza que um vector $\overrightarrow{u}$ é ortogonal a um plano vectorial $\overrightarrow{\mathcal{V}}_\alpha$, basta sabermos que ele é ortogonal a cada um dos dois vectores de algum referencial vectorial do plano α.

A justificação da primeira afirmação é clara: Se o vector $\overrightarrow{u}$ é ortogonal ao vector director $\overrightarrow{v}$ da recta r, então ele é ortogonal ao vector $\overrightarrow{0}$ e também a todos os outros vectores de $\overrightarrow{\mathcal{V}}_r$, uma vez que estes têm a mesma direcção que $\overrightarrow{v}$.

A justificação da segunda afirmação entronca nas propriedades da perpendicularidade entre uma recta e um plano que estudámos no décimo ano. Com efeito, podemos afastar já o caso evidente em que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ e fixar um ponto O no plano α.

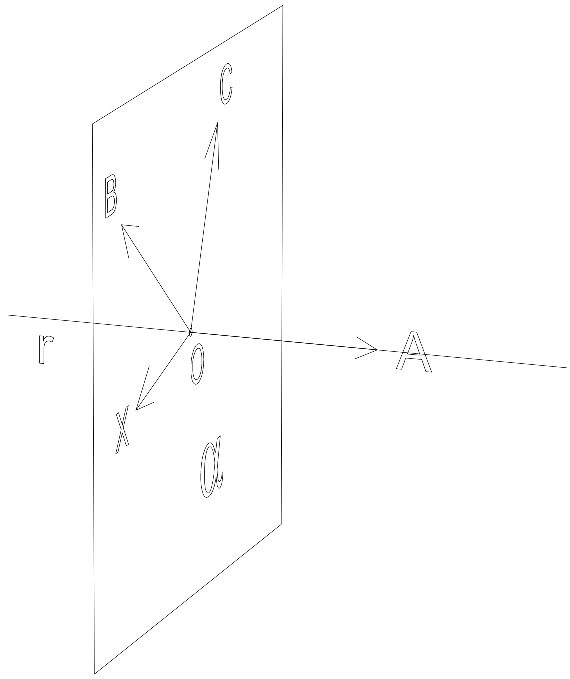


Figura 46

Podemos então considerar o ponto A do espaço tal que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA}$ e os pontos B e C do plano α tais que os vectores do referencial sejam $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OC}$. Por hipótese a recta OA é perpendicular às rectas concorrentes OB e OC do plano α o que, como sabemos, garante que a recta OA é perpendicular ao plano α, e portanto também perpendicular a todas as rectas do plano α. Decorre daqui que, para cada ponto X do plano α, distinto de O, a recta OA é perpendicular à recta OX, e portanto o vector $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA}$ é ortogonal ao vector $\overrightarrow{OX}$. Uma vez que este último facto é também verdadeiro para $O = X$, concluímos finalmente que $\overrightarrow{u}$ é ortogonal a todos os vectores de $\overrightarrow{\mathcal{V}}_\alpha$.

Duas questões naturais são o que será o conjunto dos vectores $\overrightarrow{u}$ ortogonais a uma dada recta r e o que será o conjunto dos vectores $\overrightarrow{u}$ ortogonais a um dado plano α. As respostas, que entroncam mais uma vez no que estudámos no décimo ano, não são difíceis de encontrar:

1) Se fixarmos a nossa atenção num ponto O da recta r, já sabemos que as rectas perpendiculares a r que passam por O são exactamente as rectas do plano α perpendicular a r que passa por O e daqui podemos concluir que um vector $\overrightarrow{OX}$ é ortogonal à recta vectorial $\overrightarrow{\mathcal{V}}_r$ se, e só se, é um vector do plano α.

2) Se fixarmos a nossa atenção num ponto O do plano α, existe uma única recta r perpendicular a α passando por O e portanto um vector $\overrightarrow{OX}$ é perpendicular ao plano vectorial $\overrightarrow{\mathcal{V}}_\alpha$ (ou seja, ortogonal a todos os vectores $\overrightarrow{OA}$, com A no plano α) se, e só se, é um vector da recta r.

Podemos assim destacar as seguintes conclusões:

> P13. O conjunto dos vectores $\overrightarrow{u}$ do espaço que são ortogonais a uma recta vectorial $\overrightarrow{\mathcal{V}}_r$ é o plano vectorial $\overrightarrow{\mathcal{V}}_\alpha$, onde α é um plano perpendicular à recta r.[5]
>
> O conjunto dos vectores $\overrightarrow{u}$ do espaço que são ortogonais a um plano vectorial $\overrightarrow{\mathcal{V}}_\alpha$ é a recta vectorial $\overrightarrow{\mathcal{V}}_r$, onde r é uma recta perpendicular ao plano α.[6]

No caso em que estamos a estudar apenas a geometria de um certo plano β, a propriedade anterior adapta-se facilmente:

> P14. Se r é uma recta do plano β, o conjunto dos vectores $\overrightarrow{u}$ do plano β que são ortogonais à recta vectorial $\overrightarrow{\mathcal{V}}_r$ é a recta vectorial $\overrightarrow{\mathcal{V}}_s$, onde s é uma recta do plano β ortogonal à recta r.

A justificação desta propriedade pode ser feita por adaptação directa da justificação 1) que antecedeu P13, ou, alternativamente, utilizando P13 e tomando para s a intersecção dos planos α e β.

Estamos agora em condições de definir o que é a projecção ortogonal de um vector $\overrightarrow{u}$ sobre uma recta vectorial $\overrightarrow{\mathcal{V}}_r$ e sobre um plano vectorial $\overrightarrow{\mathcal{V}}_\alpha$:

> P15. Sejam r e α uma recta e um plano perpendiculares entre si. Qualquer vector $\overrightarrow{v}$ do espaço pode então escrever-se de maneira única como uma soma $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}' + \overrightarrow{v}''$, com $\overrightarrow{v}' \in \overrightarrow{\mathcal{V}}_r$ e $\overrightarrow{v}'' \in \overrightarrow{\mathcal{V}}_\alpha$ (ou seja, $\overrightarrow{v}''$ ortogonal a $\overrightarrow{\mathcal{V}}_r$). Diz-se então que o vector $\overrightarrow{v}'$ é a *projecção ortogonal* do vector $\overrightarrow{v}$ *sobre a recta vectorial* $\overrightarrow{\mathcal{V}}_r$ e que o vector $\overrightarrow{v}''$ é a *projecção ortogonal* do vector $\overrightarrow{v}$ *sobre o plano vectorial* $\overrightarrow{\mathcal{V}}_\alpha$.

[5] Esta afirmação pode parecer estranha, uma vez que existem muitos planos perpendiculares a r. No entanto, estes são todos paralelos entre si e têm portanto o mesmo plano vectorial associado.

[6] Esta afirmação pode parecer estranha, uma vez que existem muitas rectas perpendiculares a α. No entanto, estas são todas paralelas entre si e têm portanto a mesma recta vectorial associada.

A propriedade precedente merece uma justificação, que decorrerá do método de construír a projecção ortogonal que indicamos em seguida.

Seja O o ponto comum à recta r e ao plano α perpendicular a r. Consideremos o ponto X tal que $\vec{v} = \overrightarrow{OX}$.

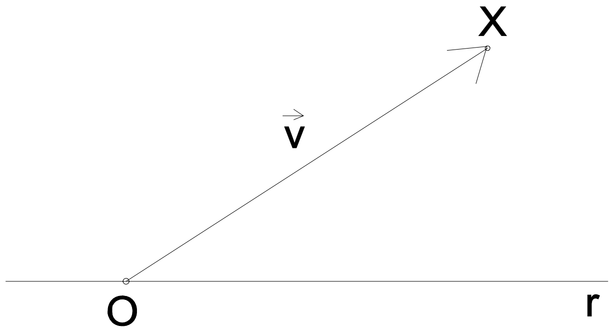


Figura 47

Procurar um vector $\vec{v}' \in \overrightarrow{\mathcal{V}}_r$ e um vector $\vec{v}''$ tais que $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}''$ corresponde a procurar um ponto A da recta r para o qual $\vec{v}' = \overrightarrow{OA}$ e $\vec{v}'' = \overrightarrow{AX}$.

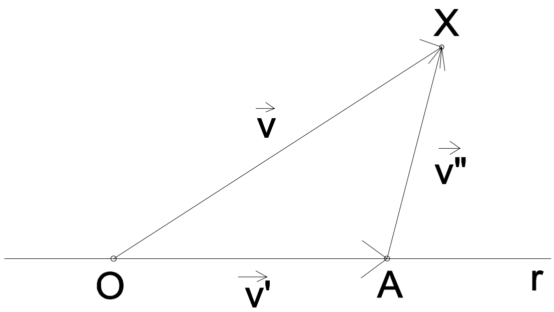


Figura 48

Mas nós queremos, além disso, que o vector $\vec{v}''$ pertença a $\overrightarrow{\mathcal{V}}_\alpha$, isto é, seja ortogonal a $\overrightarrow{\mathcal{V}}_r$, e isso vai-nos determinar univocamente o ponto A, e portanto os vectores $\vec{v}'$ e $\vec{v}''$. Mais precisamente, duas situações são possíveis:

a) Se o vector $\vec{v}$ já pertencesse a $\overrightarrow{\mathcal{V}}_r$, ou seja, se o ponto X também estivesse na recta r, o ponto A não podia deixar de ser o próprio X, uma vez que não existe nenhum vector de $\overrightarrow{\mathcal{V}}_r$ ortogonal a $\overrightarrow{\mathcal{V}}_r$, além do vector $\vec{0}$. A decomposição procurada seria, neste caso, $\vec{v} = \vec{v} + \vec{0}$, onde efectivamente $\vec{v} \in \overrightarrow{\mathcal{V}}_r$ e $\vec{0}$ é ortogonal a $\overrightarrow{\mathcal{V}}_r$.

b) No caso em que o vector $\vec{v}$ não pertence a $\overrightarrow{\mathcal{V}}_r$, e portanto o ponto X não está na recta r, a condição de $\vec{v}''$ ser ortogonal a $\overrightarrow{\mathcal{V}}_r$ corresponde à exigência de que a recta AX deve ser perpendicular à recta r, por outras palavras, A deve ser o pé da perpendicular à recta r que passa por X (repare-se que, neste caso, toda a construção se passa num plano, a saber aquele que contém a recta r e o ponto exterior X).

Resumindo a construção que acabamos de descrever, podemos dizer:

P16. Dados uma recta r e um plano α ortogonais entre si e um vector $\overrightarrow{v}$ do espaço, as projecções ortogonais de $\overrightarrow{v}$ sobre $\overrightarrow{\mathcal{V}}_r$ e sobre $\overrightarrow{\mathcal{V}}_\alpha$ podem ser construídas do seguinte modo:

a) Se $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{\mathcal{V}}_r$, então a primeira é o próprio vector $\overrightarrow{v}$ e a segunda é $\overrightarrow{0}$;

b) Se $\overrightarrow{v} \notin \overrightarrow{\mathcal{V}}_r$, escolhe-se um ponto O na recta r, determina-se o ponto X tal que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OX}$, considera-se o ponto A, pé da perpendicular à recta r que passa por X e as projecções ortogonais são então respectivamente os vectores $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{AX}$.

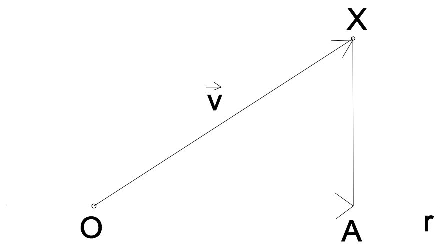


Figura 49

Exercício 52. No quadro da figura seguinte, determine as projecções ortogonais sobre $\overrightarrow{\mathcal{V}}_r$ dos vectores $\overrightarrow{v}_1$, $\overrightarrow{v}_2$ e $\overrightarrow{v}_3$.

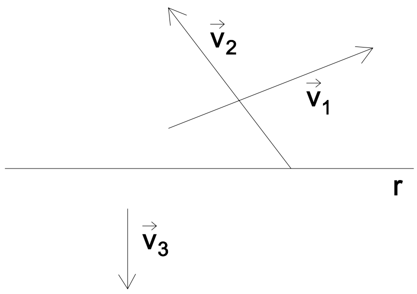


Figura 50

Exercício 53. No quadro da figura seguinte, determine três vectores distintos cuja projecção sobre $\overrightarrow{\mathcal{V}}_r$ seja o vector $\overrightarrow{w}$.

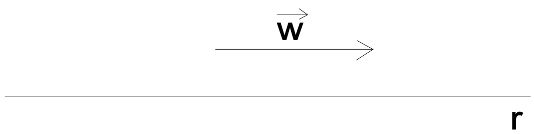


Figura 51

Exercício 54. Recorrendo unicamente à definição de projecção ortogonal que apresentámos em P15 (e não ao método que indicámos para a respectiva construção), justifique as duas afirmações que destacamos em seguida:

P17. Consideremos uma recta vectorial $\overrightarrow{\mathcal{V}}_r$ e um vector $\overrightarrow{v}$ do espaço. Então:

a) A projecção ortogonal de $\overrightarrow{v}$ sobre $\overrightarrow{\mathcal{V}}_r$ é igual a $\overrightarrow{v}$ se, e só se, $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{\mathcal{V}}_r$.

b) A projecção ortogonal de $\overrightarrow{v}$ sobre $\overrightarrow{\mathcal{V}}_r$ é igual a $\overrightarrow{0}$ se, e só se, $\overrightarrow{v}$ é ortogonal a $\overrightarrow{\mathcal{V}}_r$.

Exercício 55. Enuncie o resultado análogo ao do exercício precedente para a projecção ortogonal sobre um plano vectorial $\overrightarrow{\mathcal{V}}_{\alpha}$ e repare que a justificação é inteiramente análoga.

Dada uma recta vectorial $\overrightarrow{\mathcal{V}}_{r}$, já sabemos como associar a cada vector $\overrightarrow{v}$ do espaço a sua projecção ortogonal $\overrightarrow{v}'$ sobre $\overrightarrow{\mathcal{V}}_{r}$. Este método de associar vectores de $\overrightarrow{\mathcal{V}}_{r}$ a vectores do espaço "comporta-se bem" relativamente à soma e à multiplicação pelos números reais. Queremos com isso referir as propriedades seguintes:

P18. Se os vectores $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ têm projecções ortogonais $\overrightarrow{v}'$ e $\overrightarrow{w}'$, respectivamente, sobre a recta vectorial $\overrightarrow{\mathcal{V}}_{r}$, então a projecção ortogonal do vector $\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}$ sobre $\overrightarrow{\mathcal{V}}_{r}$ é o vector $\overrightarrow{v}'+\overrightarrow{w}'$ e, para cada real t, a projecção ortogonal de $t\overrightarrow{v}$ sobre $\overrightarrow{\mathcal{V}}_{r}$ é $t\overrightarrow{v}'$.[7]

Uma característica curiosa da propriedade que acabamos de enunciar é que a sua justificação não necessita de nenhum argumento geométrico, podendo ser feita por métodos puramente algébricos. Recordemos que os vectores ortogonais a $\overrightarrow{\mathcal{V}}_{r}$ constituem um plano vectorial $\overrightarrow{\mathcal{V}}_{\alpha}$, onde α é um plano perpendicular à recta r, e reparemos que, como estudámos no décimo ano, a soma de vectores de $\overrightarrow{\mathcal{V}}_{\alpha}$ está em $\overrightarrow{\mathcal{V}}_{\alpha}$, tal como o está o produto de um vector de $\overrightarrow{\mathcal{V}}_{\alpha}$ por um número real. Podemos agora reparar que, de se ter

$$\overrightarrow{v}=\overrightarrow{v}'+\overrightarrow{v}'', \quad \overrightarrow{w}=\overrightarrow{w}'+\overrightarrow{w}'',$$

com $\overrightarrow{v}'$ e $\overrightarrow{w}'$ em $\overrightarrow{\mathcal{V}}_{r}$ e $\overrightarrow{v}''$ e $\overrightarrow{w}''$ em $\overrightarrow{\mathcal{V}}_{\alpha}$, podemos deduzir que

$$\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}=(\overrightarrow{v}'+\overrightarrow{w}')+(\overrightarrow{v}''+\overrightarrow{w}''), \quad t\overrightarrow{v}=(t\overrightarrow{v}')+(t\overrightarrow{v}''),$$

com $\overrightarrow{v}'+\overrightarrow{w}'$ e $t\overrightarrow{v}'$ em $\overrightarrow{\mathcal{V}}_{r}$ e $\overrightarrow{v}''+\overrightarrow{w}''$ e $t\overrightarrow{v}''$ em $\overrightarrow{\mathcal{V}}_{\alpha}$ e que isto quer precisamente dizer que $\overrightarrow{v}'+\overrightarrow{w}'$ é a projecção ortogonal de $\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}$ sobre $\overrightarrow{\mathcal{V}}_{r}$ e que $t\overrightarrow{v}'$ é a projecção ortogonal de $t\overrightarrow{v}$ sobre $\overrightarrow{\mathcal{V}}_{r}$.

Exercício 56. Enuncie a propriedade análoga a P18 para as projecções ortogonais sobre um plano $\overrightarrow{\mathcal{V}}_{\alpha}$ e repare que a justificação desta nova propriedade é precisamente a que acabámos de apresentar para aquela.

★ ★ ★ ★

Estamos agora em condições de apresentar a definição geral do produto escalar de dois vectores. Por uma questão de comodidade essa definição dá um papel diferente aos vectores colocados no primeiro e no segundo lugares, mas em breve se verá que essa diferença é apenas aparente.

Dados dois vectores arbitrários $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ do espaço, define-se o seu produto escalar $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}\in\mathbb{R}$ do seguinte modo:
a) Se $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{0}$, então $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=0$;
b) Se $\overrightarrow{u}\neq\overrightarrow{0}$, consideramos a recta vectorial $\overrightarrow{\mathcal{V}}_{r}$ que contém $\overrightarrow{u}$ e a projecção ortogonal $\overrightarrow{v}'$ de $\overrightarrow{v}$ sobre $\overrightarrow{\mathcal{V}}_{r}$ e definimos $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}'$ (repare que já conhecemos o significado do segundo membro, uma vez que os vectores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}'$ estão ambos em $\overrightarrow{\mathcal{V}}_{r}$).

Reparemos que um cuidado que é necessario ter para assegurar que a definição precedente é legítima é o de verificar que, no caso em que os vectores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ pertencem a uma mesma recta vectorial $\overrightarrow{\mathcal{V}}_{r}$, esta definição conduz ao mesmo resultado que a apresentada, nesse caso particular, na

[7]Estas propriedades costumam ser enunciadas dizendo que a projecção ortogonal sobre $\overrightarrow{\mathcal{V}}_{r}$ é uma aplicação linear.

página 39. Esse facto é evidente no caso em que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ e, caso contrário, resulta de que a projecção ortogonal $\overrightarrow{v}'$ de $\overrightarrow{v}$ sobre $\overrightarrow{\mathcal{V}}_r$ coincide com o próprio $\overrightarrow{v}$.

Exercício 57. Considere como unidade o centímetro e, para cada um dos pares de vectores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ na figura seguinte, determine um valor aproximado para os produtos escalares $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}$.

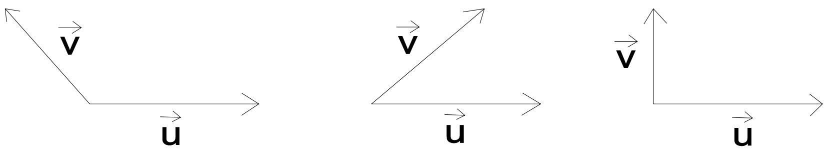


Figura 52

Depois de resolver o exercício precedente foi decerto levado a conjecturar que, dados vectores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ arbitrários, tem-se sempre $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}$ (propriedade comutativa do produto escalar). Esse facto, que não é evidente se tivermos em mente apenas a definição que apresentámos, é efectivamente verdadeiro, como resulta da importante caracterização alternativa do produto escalar que enunciamos em seguida:

> P19. O produto escalar $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ de dois vectores arbitrários do espaço é 0 se pelo menos um deles for o vector $\overrightarrow{0}$ e, caso contrário, é dado pela fórmula
>
> $$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\| \cos(\alpha),$$
>
> onde α é o ângulo entre os dois vectores. Em particular, tem-se sempre
>
> $$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}.$$

A justificação da propriedade anterior não apresenta dificuldade. Afastando já o caso evidente em que um dos vectores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ é $\overrightarrow{0}$, examinamos separadamente os casos em que estes vectores formam um ângulo obtuso, um ângulo agudo ou um ângulo recto, que esquematizamos na figura seguinte, onde representámos a traço grosso a projecção ortogonal $\overrightarrow{v}'$ de $\overrightarrow{v}$ sobre a recta vectorial $\overrightarrow{\mathcal{V}}_r$ que contém $\overrightarrow{u}$:

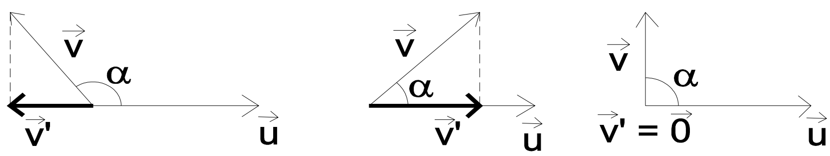


Figura 53

Nos três casos tem-se $\|\overrightarrow{v}'\| = \|\overrightarrow{v}\|\,|\cos(\alpha)|$. No primeiro caso o sentido de $\overrightarrow{v}'$ é oposto ao de $\overrightarrow{u}$ e $\cos(\alpha) < 0$; no segundo caso o sentido de $\overrightarrow{v}'$ é o mesmo que o de $\overrightarrow{u}$ e $\cos(\alpha) > 0$; no terceiro caso $\overrightarrow{v}' = \overrightarrow{0}$ e $\cos(\alpha) = 0$. Lembrando o modo como foi definido o produto escalar de vectores colineares, chegamos assim à conclusão que, em qualquer dos três casos examinados, é válida a igualdade $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\| \cos(\alpha)$.

Nota. Na propriedade P19, a noção de ângulo que foi utilizada foi a de ângulo entre dois vectores não nulos $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ (ou seja, entre as duas semi-rectas associadas com uma certa origem), que tem um valor entre 0° e 180°. No entanto, para algumas aplicações, é útil repararmos que aquela

propriedade **continua a ser válida se considerarmos que α é um ângulo generalizado**, correspondente a um movimento de uma das semi-rectas para a outra. Para o constatarmos, basta repararmos que:
1) O ângulo α considerado em P19, cujo valor está entre $0°$ e $180°$, é, conforme os casos, um dos ângulos de movimento que transforma a primeira semi-recta na segunda ou um dos ângulos de movimento que transforma a segunda semi-recta na primeira.

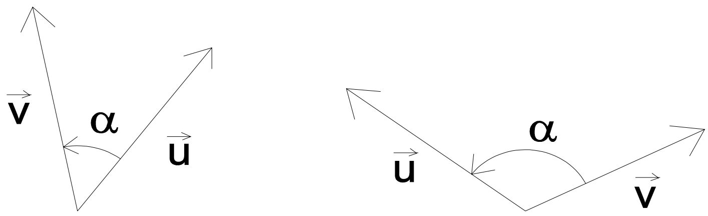


Figura 54

2) No primeiro caso, os ângulos de movimento que transformam a primeira semi-recta na segunda são os da forma $\alpha + k \times 360°$, com $k \in \mathbb{Z}$, e estes ângulos têm todos o mesmo co-seno que α.
3) No segundo caso, os ângulos de movimento que transformam a primeira semi-recta na segunda são os da forma $-\alpha + k \times 360°$, com $k \in \mathbb{Z}$, e estes ângulos têm todos o mesmo co-seno que $-\alpha$, e portanto também o mesmo co-seno que α.

Destacamos em seguida duas propriedades de utilização muito frequente que se podem deduzir da fórmula que acabamos de estabelecer.

P20.

a) Dois vectores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são ortogonais se, e só se, $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$.
b) Para cada vector $\overrightarrow{u}$ tem-se $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = \|\overrightarrow{u}\|^2$. [8]

O produto escalar de vectores não necessariamente colineares continua a gozar das propriedades referidas em P11, para o caso dos vectores colineares:

P21. Sejam $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ vectores arbitrários do espaço e $t \in \mathbb{R}$. Tem-se então:
a) $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}$ (propriedade comutativa);
b) $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} + \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w}$ (propriedade distributiva à esquerda);
c) $\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}$ (propriedade distributiva à direita);
d) $(t\overrightarrow{u}) \cdot \overrightarrow{v} = t\,(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u} \cdot (t\overrightarrow{v})$ (propriedade associativa mista).

A propriedade referida em a) já foi justificada atrás e foi agora enunciada de novo apenas para fazer o paralelo com P11. A propriedade distributiva à direita resulta da correspondente propriedade em P11 e da compatibilidade das projecções com as somas referida em P18; com efeito, afastando já o caso muito simples em que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$, sendo $\overrightarrow{v}'$ e $\overrightarrow{w}'$ as projecções ortogonais de $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ sobre a recta vectorial que contém $\overrightarrow{u}$, sabemos que $\overrightarrow{v}' + \overrightarrow{w}'$ é a projecção ortogonal de $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$ sobre essa recta, pelo que podemos escrever

$$\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v}' + \overrightarrow{w}') = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}' + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}' = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}.$$

A propriedade distributiva à esquerda não teria uma justificação directa tão simples como a precedente mas resulta da propriedade distributiva à direita, tendo em conta a propriedade

[8] Este segundo facto também resulta directamente da definição do produto escalar de vectores colineares.

comutativa. A justificação da igualdade

$$t\,(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u}\cdot(t\overrightarrow{v})$$

é semelhante à da propriedade distributiva à direita e, por fim, desta propriedade e da comutatividade resulta a primeira igualdade enunciada em d).

Exercício 58. O produto escalar de vectores goza também da seguintes propriedades distributivas, que não foram enunciadas atrás:

$$(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v})\cdot\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{w}-\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{w}$$
$$\overrightarrow{u}\cdot(\overrightarrow{v}-\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}-\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{w}.$$

De que modo podem estas propriedades ser deduzidas a partir daquelas que foram enunciadas?

Exercício 59. Utilize as propriedades enunciadas em P21 para mostrar que, quaisquer que sejam os vectores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$, tem-se

$$\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2+\|\overrightarrow{v}\|^2+2\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}.$$

Repare que o caso particular em que os vectores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são ortogonais reduz-se a uma fórmula estudada no décimo ano, que certamente recordará. **Sugestão:** Note que se tem $\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2 = (\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})\cdot(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})$.

Exercício 60. Dados vectores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$, mostre que eles têm a mesma norma se, e só se, os vectores $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}$ são ortogonais.

Exercício 61. Uma das propriedades bem conhecidas da geometria do triângulo diz-nos que as três alturas de um triângulo arbitrário passam por um mesmo ponto (a que se dá o nome de *ortocentro* do triângulo). O objectivo deste exercício é a prova de que isso realmente acontece, utilizando as propriedades do produto escalar. Vamos chamar O, A e B aos vértices do triângulo e notar $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OB}$. Vamos chamar X à intersecção das alturas correspondentes aos vértices A e B e tentar mostrar que a altura correspondente ao vértice O também passa por X. Para isso, notamos $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{OX}$.

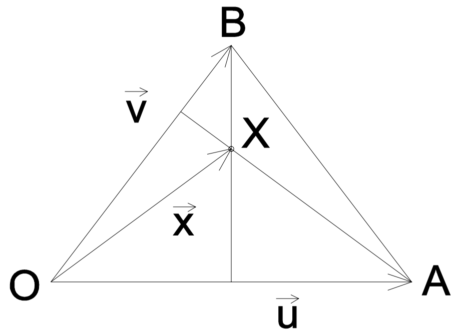


Figura 55

a) Mostre que $(\overrightarrow{x}-\overrightarrow{v})\cdot\overrightarrow{u} = 0$ e que $(\overrightarrow{x}-\overrightarrow{u})\cdot\overrightarrow{v} = 0$;
b) Deduza de a) que $\overrightarrow{x}\cdot(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}) = 0$ e conclua o resultado pretendido.

7. Aplicação à Determinação de Ângulos.

A utilidade da caracterização do produto escalar em P19 é dupla: Nalguns casos, conhecemos o ângulo α e os comprimentos dos dois vectores e calculamos, a partir daí, o produto escalar; noutros casos conhecemos os comprimentos dos vectores e o produto escalar e determinamos, a partir daí, o ângulo α.

Exercício 62. Sejam $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ dois vectores de norma 1 e tais que $\overrightarrow{v}-\overrightarrow{u}$ também tenha norma 1. Determine o produto escalar $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$ e deduza que o ângulo dos dois vectores é 60°. Interprete geometricamente a conclusão obtida.

Exercício 63. Sejam $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ dois vectores de norma 1 e fazendo entre si um ângulo de 120°.
a) Determine o produto escalar $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$.
b) Utilize o resultado precedente para determinar o produto escalar

$$(2\overrightarrow{u}-3\overrightarrow{v})\cdot\overrightarrow{v}$$

e a norma $\|2\overrightarrow{u}-3\overrightarrow{v}\|$.
c) Com o auxílio da sua calculadora científica determine um valor aproximado às centésimas de grau para o ângulo dos vectores $2\overrightarrow{u}-3\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{v}$.

Exercício 64. Sejam A, B e C três pontos distintos do plano tais que $\overline{AB}=\overline{AC}$ e seja X o ponto definido pela condição de se ter $\overrightarrow{AX}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$. Utilize o produto escalar para mostrar que a semi-recta de origem A que contém o ponto X é a bissectriz das semi-rectas com a mesma origem que contêm os pontos B e C, respectivamente.

Exercício 65. Na figura seguinte $[ABCDE]$ é um pentágono regular, cujo lado tomamos como unidade de comprimento, e definimos os vectores $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{AE}$.

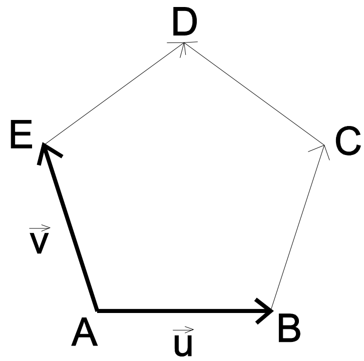


Figura 56

a) Lembrando os valores das razões trigonométricas determinados no exercício 5, mostre que se tem

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=-\frac{\sqrt{5}-1}{4}\,.$$

b) Utilize a conclusão de a) para mostrar que

$$\|\overrightarrow{v}-\overrightarrow{u}\|^2=\frac{3+\sqrt{5}}{2},\quad \|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2=\frac{5-\sqrt{5}}{2},$$

e deduza daqui que

$$\|\overrightarrow{v}-\overrightarrow{u}\|=\frac{\sqrt{5}+1}{2},\quad \|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}.$$

c) Justifique as seguintes fórmulas para os restantes vectores que correspondem aos lados do pentágono:

$$\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{u}+\frac{\sqrt{5}-1}{2}\overrightarrow{v},\quad \overrightarrow{BC}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v},\quad \overrightarrow{CD}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}(\overrightarrow{v}-\overrightarrow{u}),$$

onde aparece mais uma vez a *razão de ouro*, referida na nota de rodapé 1 na página 4. **Sugestão:** Escrevendo, por exemplo, $\overrightarrow{ED}=a\overrightarrow{u}+b\overrightarrow{v}$, utilize o facto de se ter $\overrightarrow{ED}\cdot\overrightarrow{u}=\cos(36°)$ e $\overrightarrow{ED}\cdot\overrightarrow{v}=\cos(72°)$ para obter duas equações nas incógnitas a e b.[9]

Exercício 66. Na figura 57 está representado em perspectiva um dodecaedro.

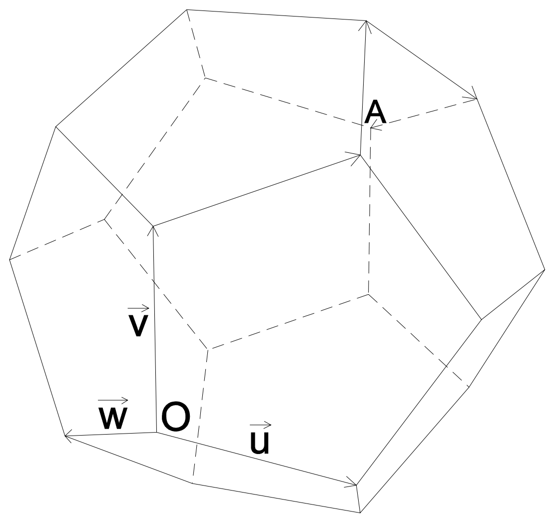


Figura 57

Consideramos um referencial não ortonormado com origem num dos vértices O do dodecaedro e definido pelos vectores $\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ assinalados, correspondentes às três arestas que concorrem em O.

a) Verifique que $\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}\|^2=\frac{9-3\sqrt{5}}{2}$ e deduza que

$$\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}\|=\sqrt{3}\,\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

b) Escreva como combinação linear dos vectores $\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ cada um dos vectores assinalados na figura, assim como aqueles de que necessitar como auxiliares. **Sugestão:** Utilize as conclusões a que chegou na alínea c) do exercício precedente.

c) Sendo A o vértice do dodecaedro oposto ao vértice O, escreva o vector $\overrightarrow{OA}$ como combinação

[9]Existem também justificações geométricas mais directas para as conclusões das alíneas b) e c). O estudante interessado poderá tentar encontrá-las.

linear dos vectores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$. Deduza daqui, e da conclusão de a), o valor do raio da esfera circunscrita ao dodecaedro.[10]

Exercício 67. Consideremos um triângulo arbitrário, relativamente ao qual seguimos a convenção cómoda habitual de utilizar letras maiúsculas para designar tanto os seus vértices como as amplitudes dos respectivos ângulos e as correspondentes letras minúsculas para designar tanto os lados opostos como os respectivos comprimentos (numa certa unidade de medida).

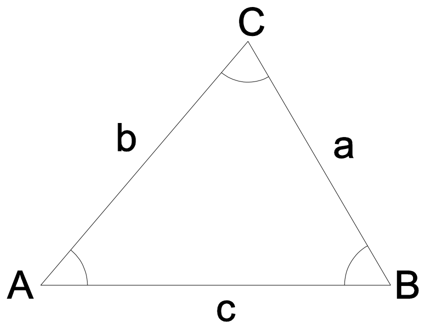


Figura 58

Notando $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$ e escrevendo o vector $\overrightarrow{BC}$ a partir de $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$, demonstre a propriedade que destacamos em seguida, e que se pode considerar uma generalização do teorema de Pitágoras.

P22 No quadro da figura 58, tem-se

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos(A).$$

Exercício 68. Neste exercício fazemos a hipótese simplificadora de considerar que uma região suficientemente pequena da superfície da Terra pode ser considerada como sendo plana.

Dois amigos fazem caminhadas rectilíneas a partir dum mesmo ponto. O primeiro anda 3 Km na direcção Norte e o segundo anda 2 Km numa direcção que faz um ângulo de 35° com a direcção Norte. Utilize a sua calculadora para determinar qual a distância, aproximada às centésimas de Km, a que ficam os dois amigos no fim da caminhada.

O produto escalar está na base do método utilizado, na maioria dos casos, para determinar ângulos no quadro da Geometria Analítica. Para que esse método seja efectivo precisamos de encontrar um modo de determinar facilmente o produto escalar de dois vectores. É isso que fazemos em seguida, começando por examinar o modo como o produto escalar permite caracterizar as coordenadas de um vector num referencial vectorial ortonormado e obtendo, a partir daí, um modo de determinar o produto escalar de dois vectores, a partir das suas coordenadas num tal referencial.

Consideremos então um referencial vectorial ortonormado do espaço, constituído pelos vectores $\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z}$, e reparemos que, uma vez que os três vectores têm norma 1,

$$\overrightarrow{e_x} \cdot \overrightarrow{e_x} = 1, \quad \overrightarrow{e_y} \cdot \overrightarrow{e_y} = 1, \quad \overrightarrow{e_z} \cdot \overrightarrow{e_z} = 1,$$

[10]Este valor também pode ser obtido, de modo independente, reparando que é possível considerar um cubo cujos vértices são alguns dos vértices do dodecaedro.

e que, uma vez que eles são ortogonais dois a dois,

$$\overrightarrow{e_x} \cdot \overrightarrow{e_y} = 0, \quad \overrightarrow{e_x} \cdot \overrightarrow{e_z} = 0, \quad \overrightarrow{e_y} \cdot \overrightarrow{e_z} = 0.$$

Dado um vector $\overrightarrow{u}$, com $\overrightarrow{u} = a\,\overrightarrow{e_x} + b\,\overrightarrow{e_y} + c\,\overrightarrow{e_z}$, ou seja, com $\overrightarrow{u} \leftrightarrow (a, b, c)$, podemos agora escrever

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{e_x} &= (a\overrightarrow{e_x}) \cdot \overrightarrow{e_x} + (b\overrightarrow{e_y}) \cdot \overrightarrow{e_x} + (c\overrightarrow{e_z}) \cdot \overrightarrow{e_x} = \\ &= a(\overrightarrow{e_x} \cdot \overrightarrow{e_x}) + b(\overrightarrow{e_y} \cdot \overrightarrow{e_x}) + c(\overrightarrow{e_z} \cdot \overrightarrow{e_x}) = \\ &= a \times 1 + b \times 0 + c \times 0 = a\end{aligned}$$

e, de modo análogo,

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{e_y} = b, \quad \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{e_z} = c.$$

Podemos assim destacar o seguinte enunciado:

P23. Fixado um referencial vectorial ortonormado do espaço, constituído pelos vectores $\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z}$, se $\overrightarrow{u} \leftrightarrow (a, b, c)$ é um vector arbitrário, tem-se

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{e_x} = a, \quad \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{e_y} = b, \quad \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{e_z} = c.$$

Por outras palavras, para cada vector $\overrightarrow{u}$ do espaço tem-se

$$\overrightarrow{u} = (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{e_x})\,\overrightarrow{e_x} + (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{e_y})\,\overrightarrow{e_y} + (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{e_z})\,\overrightarrow{e_z}.$$

É claro que, com demonstração ainda mais curta, vale também um resultado análogo no quadro dos vectores dum plano:

P24. Fixado um referencial vectorial ortonormado dum plano, constituído pelos vectores $\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}$, se $\overrightarrow{u} \leftrightarrow (a, b)$ é um vector arbitrário tem-se

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{e_x} = a, \quad \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{e_y} = b.$$

Por outras palavras, para cada vector $\overrightarrow{u}$ do plano, tem-se

$$\overrightarrow{u} = (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{e_x})\,\overrightarrow{e_x} + (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{e_y})\,\overrightarrow{e_y}.$$

Exercício 69. Seja $\overrightarrow{e}$ um vector director de uma recta r, com $\|\overrightarrow{e}\| = 1$. Mostre que, para cada vector $\overrightarrow{u}$ do espaço, a projecção ortogonal de $\overrightarrow{u}$ sobre a recta vectorial $\overrightarrow{\mathcal{V}}_r$ é dada por

$$\boxed{\text{projecção ortogonal de } \overrightarrow{u} \text{ sobre } \overrightarrow{\mathcal{V}}_r = (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{e})\overrightarrow{e}.}$$

Mostre ainda que, sendo α um plano perpendicular a r, a projecção ortogonal de $\overrightarrow{u}$ sobre o plano vectorial $\overrightarrow{\mathcal{V}}_\alpha$ é dada por

$$\boxed{\text{projecção ortogonal de } \overrightarrow{u} \text{ sobre } \overrightarrow{\mathcal{V}}_\alpha = \overrightarrow{u} - (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{e})\overrightarrow{e}.}$$

Sugestão: Considere um referencial vectorial ortonormado $\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z}$, com $\overrightarrow{e_x} = \overrightarrow{e}$ e repare que a última fórmula em P23 nos apresenta $\overrightarrow{u}$ como soma de um vector de $\overrightarrow{\mathcal{V}}_r$ com um vector ortogonal a $\overrightarrow{\mathcal{V}}_r$.

Uilizando uma segunda vez o método que nos serviu para deduzir as fórmulas em P23, para as coordenadas de um vector num referencial vectorial ortonormado, podemos obter uma fórmula muito importante que nos permite calcular o produto escalar de dois vectores a partir das suas coordenadas num referencial vectorial ortonormado. Continuemos a considerar o referencial vectorial ortonormado constituído pelos vectores $\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z}$ e consideremos dois vectores $\overrightarrow{u} \leftrightarrow (a, b, c)$ e $\overrightarrow{v} \leftrightarrow (d, e, f)$. Utilizando mais uma vez as propriedades do produto escalar e o resultado enunciado em P23, vem

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} &= \overrightarrow{u} \cdot (d\,\overrightarrow{e_x} + e\,\overrightarrow{e_y} + f\,\overrightarrow{e_z}') = \overrightarrow{u} \cdot (d\,\overrightarrow{e_x}) + \overrightarrow{u} \cdot (e\,\overrightarrow{e_y}) + \overrightarrow{u} \cdot (f\,\overrightarrow{e_z}) = \\ &= d\,(\overrightarrow{u} \cdot e_x) + e\,(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{e_y}) + f\,(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{e_z}) = d\,a + e\,b + f\,c.\end{aligned}$$

A fórmula obtida, que terá ocasião de ser utilizada muitas vezes, merece ser destacada:

> P25 Fixado um referencial vectorial ortonormado do espaço, constituído pelos vectores $\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z}$, se $\overrightarrow{u} \leftrightarrow (a, b, c)$ e $\overrightarrow{v} \leftrightarrow (d, e, f)$ são dois vectores arbitrários tem-se
>
> $$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = a\,d + b\,e + c\,f.$$

Por outras palavras, para se obter o produto escalar, multiplicam-se as duas primeiras coordenadas, as duas segundas coordenadas e as duas terceiras coordenadas e somam-se os resultados obtidos.

Com demonstração análoga, e até mais curta, vale o correspondente resultado para vectores de um certo plano:

> P26 Fixado um referencial vectorial ortonormado dum plano, constituído pelos vectores $\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}$, se $\overrightarrow{u} \leftrightarrow (a, b)$ e $\overrightarrow{v} \leftrightarrow (d, e)$ são dois vectores desse plano tem-se
>
> $$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = a\,d + b\,e.$$

Exercício 70. Considere o triângulo na figura junta, onde as coordenadas indicadas para os diferentes pontos são relativas a um certo referencial ortonormado do plano.

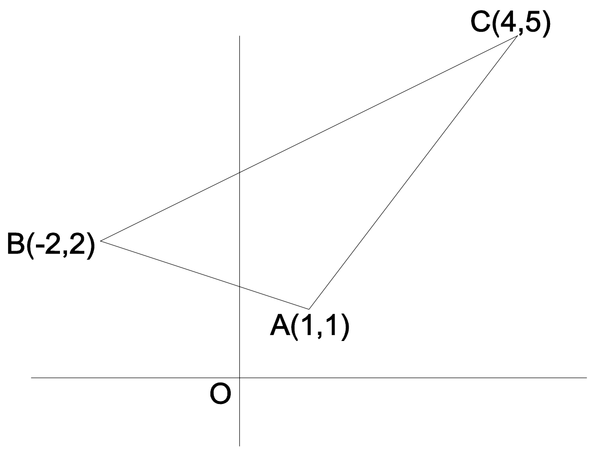


Figura 59

a) Determine o produto escalar $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ e as normas dos vectores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$.
b) Determine o valor exacto do co-seno do ângulo A e, com a ajuda da sua calculadora, o valor desse ângulo aproximado às milésimas de grau.
c) Determine um vector director de norma 1 da recta AC e utilize-o para calcular as coordenadas da projecção ortogonal do vector $\overrightarrow{AB}$ sobre a recta vectorial associada à recta AC. **Sugestão:** Recorde a fórmula a que chegou no exercício 69.
d) Utilize a conclusão de c) para determinar as coordenadas da projecção ortogonal do ponto B sobre a recta AC.
e) Determine um vector director da bissectriz do ângulo A. **Sugestão:** Procure um vector não nulo $\overrightarrow{u} \leftrightarrow (x, y)$ que faça o mesmo ângulo com os vectores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$.

Exercício 71. Na figura junta está representado um cubo assim como dois segmentos de recta $[AX]$ e $[AY]$, determinados pela condição de X ser o ponto médio da aresta $[EH]$ e Y ser o ponto da aresta $[EF]$ cuja distância a E é $\frac{3}{4}$ da distância de E a F.

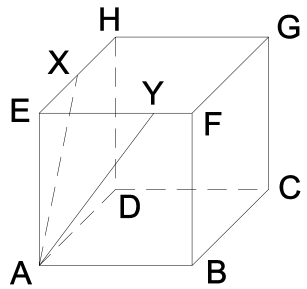


Figura 60

Determine aproximadamente o ângulo dos vectores $\overrightarrow{AX}$ e $\overrightarrow{AY}$. **Sugestão:** Escolha o comprimento da aresta do cubo como unidade de comprimento e fixe um referencial vectorial ortonormado que facilite o cálculo das coordenadas dos vectores em questão.

Exercício 72. Este exercício vem na sequência do exercício 33, na página 23, do qual retomamos as notações e as conclusões. Recordemos que a unidade de comprimento implícita é o raio da Terra.

Consideramos um ponto L, algures na cidade de Lisboa, com latitude $38.717°$ N e longitude $9.125°$ W e um ponto M na localidade italiana de Monterosso Cálabro, com a mesma latitude e com longitude $16.291°$ E.

Nas alíneas seguintes utilize a sua calculadora aproximando com 5 decimais os comprimentos e com 3 decimais os ângulos em graus.
a) Determine as coordenadas cartesianas (x_L, y_L, z_L) e (x_M, y_M, z_M) dos pontos L e M.
b) Determine o comprimento de um túnel rectilíneo a unir os pontos L e M.[11]
c) Se caminhar de L para M seguindo sempre a direcção Leste, precorrerá um arco de circunferência num plano ortogonal ao eixo da Terra (um arco de paralelo). Determine o comprimento do caminho precorrido.
d) Pode provar-se que o caminho mais curto que une o ponto L ao ponto M, sobre a superfície da Terra, é um arco de circunferência cujo centro é o centro O da Terra. Utilize o produto escalar para determinar o comprimento desse caminho mais curto. Qual a profundidade máxima atingida pelo túnel referido na alínea b)?
e) Converta para Km, com aproximação às unidades, as distâncias referidas nas alíneas b), c) e d) e

[11]Este túnel não está previsto no actual Quadro Comunitário de Apoio.

a profundidade calculada em d).

★ ★ ★ ★

Outra aplicação simples do método de calcular um produto escalar de dois vectores a partir das respectivas coordenadas num referencial vectorial ortonormado é a possibilidade de estabelecer fórmulas que permitem calcular as razões trigonométricas da soma ou da diferença de dois ângulos cujas razões trigonométricas são conhecidas. Consideramos, para isso, um referencial ortonormado do plano e, dados dois ângulos generalizados α e β, as semi-rectas associadas e os correspondentes pontos X_α e X_β no círculo trigonométrico.

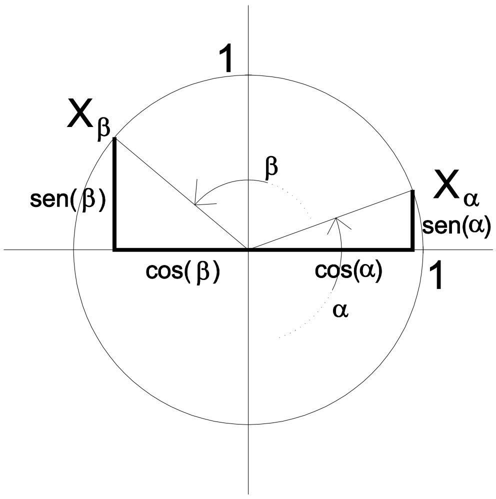


Figura 61

Um dos ângulos de movimento que transforma a semi-recta associada a β na semi-recta associada a α é $\alpha - \beta$ e portanto, lembrando a nota na página 46, e o facto de os vectores $\overrightarrow{OX}_\alpha$ e $\overrightarrow{OX}_\beta$ terem norma 1, podemos concluir que

$$\overrightarrow{OX}_\alpha \cdot \overrightarrow{OX}_\beta = \cos(\alpha - \beta).$$

Mas, lembrando que, no referencial vectorial ortonormado em questão, tem-se $\overrightarrow{OX}_\alpha \leftrightarrow (\cos(\alpha), \text{sen}(\alpha))$ e $\overrightarrow{OX}_\beta \leftrightarrow (\cos(\beta), \text{sen}(\beta))$ tem-se também

$$\overrightarrow{OX}_\alpha \cdot \overrightarrow{OX}_\beta = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \text{sen}(\alpha)\text{sen}(\beta).$$

Combinando as duas igualdades concluímos assim a fórmula pretendida para o co-seno da diferença de dois ângulos generalizados:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \text{sen}(\alpha)\text{sen}(\beta).$$

Da fórmula anterior deduz-se muito facilmente uma forma para o co-seno da soma de dois ângulos α e β. Com efeito, reparando que $\alpha + \beta = \alpha - (-\beta)$, podemos utilizar a conclusão a que chegámos atrás, válida para ângulos generalizados arbitrários, para deduzir que

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \cos(\alpha)\cos(-\beta) + \text{sen}(\alpha)\text{sen}(-\beta) = \\ &= \cos(\alpha)\cos(\beta) - \text{sen}(\alpha)\text{sen}(\beta). \end{aligned}$$

Se nos lembrarmos das identidades que relacionam as funções trigonométricas dos ângulos α e $90° + \alpha$, que se encontram na página 27, é agora fácil deduzirmos fórmulas para o seno da soma e da diferença de dois ângulos generalizados:

$$\begin{aligned}\mathrm{sen}(\alpha+\beta) &= -\cos(90°+\alpha+\beta) = \\ &= -\cos(90°+\alpha)\cos(\beta) + \mathrm{sen}(90°+\alpha)\mathrm{sen}(\beta) = \\ &= \mathrm{sen}(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\mathrm{sen}(\beta), \\ \mathrm{sen}(\alpha-\beta) &= -\cos(90°+\alpha-\beta) = \\ &= -\cos(90°+\alpha)\cos(\beta) - \mathrm{sen}(90°+\alpha)\mathrm{sen}(\beta) = \\ &= \mathrm{sen}(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\mathrm{sen}(\beta).\end{aligned}$$

O programa em vigor não exige o conhecimento destas fórmulas mas, mesmo que o exigisse, não haveria interesse em as conhecer todas de cor; bastaria conhecer uma ou duas e saber como as outras se podem deduzir facilmente delas. Parece-nos, de qualquer modo, haver interesse em que o estudante tenha conhecimento da sua existência e saiba onde as procurar no caso de necessitar de as aplicar. Destacamos por isso as quatro fórmulas obtidas:

P27. Quaisquer que sejam os ângulos generalizados α e β, tem-se

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) - \mathrm{sen}(\alpha)\mathrm{sen}(\beta) \\ \cos(\alpha-\beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) + \mathrm{sen}(\alpha)\mathrm{sen}(\beta) \\ \mathrm{sen}(\alpha+\beta) &= \mathrm{sen}(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\mathrm{sen}(\beta) \\ \mathrm{sen}(\alpha-\beta) &= \mathrm{sen}(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\mathrm{sen}(\beta).\end{aligned}$$

Exercício 73. a) Na página 3 resumimos numa tabela os valores exactos das razões trigonométricas dos ângulos de 30°, 45° e 60°. Deduza os valores que faltam a essa tabela para obter a tabela seguinte:

Ângulo	Seno	Co-seno	Tangente
15°	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$2-\sqrt{3}$
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
75°	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$2+\sqrt{3}$

b) A partir dos valores na tabela precedente e dos determinados no exercício 5, na página 3, qual o ângulo estritamente positivo mais pequeno cujos valores exactos das razões trigonométricas consegue determinar com os conhecimentos de que dispõe neste momento?
c) Algumas calculadoras mais antigas permitiam, para além das quatro operações elementares, calcular apenas valores aproximados das raízes quadradas. Com a ajuda de uma tal calculadora, qual a tabela mais completa de razões trigonométricas entre 0° e 90° que lhe parece razoável construir com os conhecimentos de que dispõe neste momento? Não se pede que leve essa construção efectivamente a cabo…

Exercício 74. a) Deduzir das igualdades em P27 a seguinte fórmula para a tangente da soma de dois ângulos generalizados:

$$\mathrm{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\mathrm{tg}(\alpha)+\mathrm{tg}(\beta)}{1-\mathrm{tg}(\alpha)\mathrm{tg}(\beta)}.$$

b) Deduzir da conclusão obtida em a) uma fórmula para $\mathrm{tg}(\alpha-\beta)$.

Exercício 75. a) Obtenha de novo, utilizando agora as igualdades em P27, a fórmula para $\mathrm{sen}(2\alpha)$ que encontrou no exercício 13, na página 8.
b) Verifique que, para cada ângulo generalizado α, são válidas as seguintes fórmulas para o co-seno de 2α:

$$\begin{aligned}\cos(2\alpha) &= \cos(\alpha)^2 - \mathrm{sen}(\alpha)^2 = \\ &= 2\cos(\alpha)^2 - 1 = \\ &= 1 - 2\,\mathrm{sen}(\alpha)^2.\end{aligned}$$

c) Deduza de b) as seguintes fórmulas para as razões trigonométricas do ângulo generalizado $\frac{\beta}{2}$, quando β é um ângulo generalizado arbitrário:

$$\begin{aligned}\cos(\frac{\beta}{2}) &= \pm\sqrt{\frac{1+\cos(\beta)}{2}}, \\ \mathrm{sen}(\frac{\beta}{2}) &= \pm\sqrt{\frac{1-\cos(\beta)}{2}}.\end{aligned}$$

Repare na indeterminação de sinal nas fórmulas precedentes e descubra por que razão nunca será possível existir uma fórmula para $\cos(\frac{\beta}{2})$ ou $\mathrm{sen}(\frac{\beta}{2})$, a partir das razões trigonométricas do ângulo generalizado β, sem uma tal indeterminação de sinal.

Exercício 76. Vamos dizer que um ângulo pode ser desenhado com o auxílio de papel quadriculado se existir um triângulo com os vértices em vértices duma folha de papel quadriculado que tenha esse ângulo como ângulo interno. Por exemplo, na figura seguinte estão representados dois ângulos nessas condições.

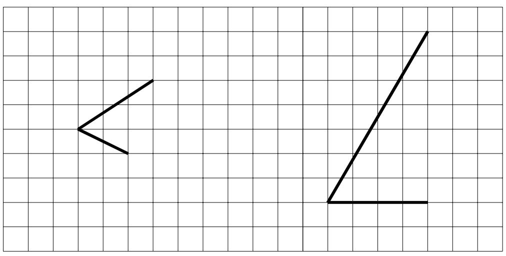


Figura 62

Verifique que os dois ângulos na figura têm exactamente a mesma amplitude e mostre, sem o auxílio da calculadora, nem de nenhum instrumento de desenho, que essa amplitude é aproximadamente (embora não exactamente) 60°.

★ ★ ★ ★

Utilizámos atrás o produto escalar para determinar ângulos de vectores. O ângulo de duas rectas pode também ser calculado de maneira análoga: Basta reparar que o ângulo de duas rectas é o ângulo de dois vectores directores arbitrários dessas rectas ou o suplementar deste (dos dois o que estiver entre 0° e 90°).

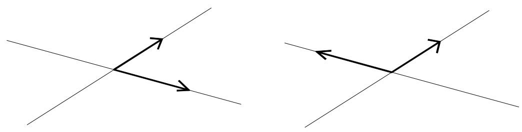


Figura 63

Exercício 77. Considere um referencial ortonormado do plano e, relativamente a este, as rectas r e r' com equações reduzidas $y = 2x + 5$ e $y = -x + 1$, respectivamente. Determine o ângulo destas duas rectas, aproximado às décimas de grau.

Exercício 78. a) Generalizando o que fez no exercício anterior, mostre que, se duas rectas r e r' admitem, relativamente a um certo referencial ortonormado, as equações reduzidas $y = mx + b$ e $y = m'x + b'$, respectivamente, então o ângulo α destas rectas está definido pela condição de se ter

$$\cos(\alpha) = \frac{|1 + mm'|}{\sqrt{1 + m^2}\,\sqrt{1 + m'^2}}\ .$$

Sugestão: Repare que os vectores directores destas rectas têm declives m e m', respectivamente, e portanto que podemos escolher como vectores directores os vectores $\overrightarrow{u} \leftrightarrow (1, m)$ e $\overrightarrow{u}' \leftrightarrow (1, m')$.
b) No contexto da alínea a), mostre que o ângulo β da recta r com o eixo das ordenadas está definido por

$$\cos(\beta) = \frac{|m|}{\sqrt{1 + m^2}}\ .$$

c) Ainda no mesmo contexto, mostre que, sendo γ o ângulo da recta r com o eixo das abcissas, tem-se

$$\cos(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{1 + m^2}}$$

e compare este resultado com a conclusão de P4, recordando que o declive m duma recta é igual à tangente do ângulo de qualquer dos vectores directores da recta com o primeiro vector do referencial vectorial ortonormado que se está a considerar.

Exercício 79. Considere, relativamente a um certo referencial ortonormado do espaço, a recta r com representação vectorial $\{(-1, 0, 2) + t\,(1, -1, \sqrt{2})\}_{t \in \mathbb{R}}$. Determine o ângulo da recta r com cada um dos três eixos coordenados.

Um ângulo com o qual é especialmente fácil de tabalhar, no contexto em que nos temos estado a colocar, é o de 90°; com efeito, dizer que o ângulo de dois vectores não nulos é 90° é o mesmo que dizer que eles são ortogonais e, como já foi referido, dois vectores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são ortogonais se, e só se $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$.

Exercício 80. Considere, relativamente a um certo referencial ortonormado do plano, o ponto $A(-1, 4)$ e a recta r de equação reduzida $y = 2x + 1$. Determine um ponto X da recta r tal que a recta AX seja perpendicular a r.
Sugestão: Repare que uma vez que a recta r tem declive 2, o vector $\overrightarrow{u} \leftrightarrow (1, 2)$, que tem o mesmo declive, é um vector da recta r, pelo que a condição de as rectas AX e r serem perpendiculares é equivalente à de os vectores $\overrightarrow{AX}$ e $\overrightarrow{u}$ serem ortogonais.

Exercício 81. a) Considere, relativamente a um certo referencial ortonormado de origem O, os pontos $A \leftrightarrow (-1,0,0)$ e $B \leftrightarrow (1,0,0)$. Determine uma equação que caracterize o lugar geométrico dos pontos $X \leftrightarrow (x,y,z)$ do espaço tais que os vectores $\overrightarrow{AX}$ e $\overrightarrow{BX}$ sejam ortogonais e, recordando o que estudou no décimo ano, identifique o lugar geométrico referido.
b) Como pode utilizar a conclusão de a), sem fazer novos cálculos, para identificar, quando A e B são pontos distintos arbitrários do espaço, o que é o lugar geométrico dos pontos X dos espaço tais que os vectores $\overrightarrow{AX}$ e $\overrightarrow{BX}$ sejam ortogonais.

Exercício 82. Considere, relativamente a um certo referencial ortonormado de origem O, os pontos $A \leftrightarrow (-1,2,2)$ e $B \leftrightarrow (3,0,4)$. Determine uma equação para o lugar geométrico dos pontos X do espaço tais que $X = O$ ou X diferente de O e o vector $\overrightarrow{OX}$ faz o mesmo ângulo com os vectores $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$.

Exercício 83. Considere, relativamente a um certo referencial ortonormado do espaço, com origem O, os pontos $A \leftrightarrow (1,0,0)$, $B \leftrightarrow (0,1,0)$, $C \leftrightarrow (0,0,1)$ e $D \leftrightarrow (1,1,1)$, assim como o sólido que tem estes quatro pontos como vértices.

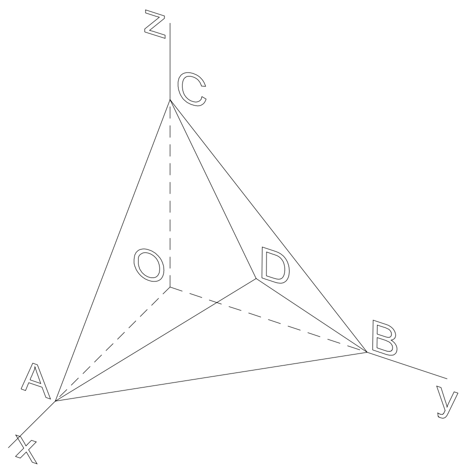


Figura 64

a) Com o auxílio dos métodos que estudou no décimo ano, verifique que todas as seis arestas deste sólido têm o mesmo comprimento. Qual o nome do sólido em questão?
b) Com o auxílio do produto escalar, verifique que quaisquer duas arestas deste sólido, que não tenham um vértice comum, determinam rectas perpendiculares entre si.
c) Com o auxílio do produto escalar, verifique que a recta OD é perpendicular ao plano ABC e determine um valor aproximado às décimas de grau para o ângulo da recta OD com cada uma das arestas que não está contida naquele plano.
d) Determine as coordenadas do ponto médio X do segmento $[AB]$ e verifique que os vectores $\overrightarrow{XD}$ e $\overrightarrow{XC}$ são ambos perpendiculares ao vector $\overrightarrow{AB}$. Conclua daqui que o ângulo dos planos ABC e ABD é igual ao ângulo dos vectores $\overrightarrow{XD}$ e $\overrightarrow{XC}$ e utilize esse facto para calcular, com aproximação à décimas de grau, o ângulo dos planos referidos.
e) Os valores aproximados dos ângulos referidos nas alíneas c) e d) levam a conjecturar que o segundo é o dobro do primeiro. Utilize as fórmulas na alínea b) do exercício 75 para mostrar que isso efectivamente acontece.

8. Complementos de Geometria Analítica Plana.

Relembremos os dois métodos que utilizámos no décimo ano para caracterizar uma recta no quadro da Geometria Analítica Plana, quando se considera um certo referncial ortonormado:

O primeiro método é o método paramétrico. Quando conhecemos um ponto $A \leftrightarrow (x_1, y_1)$ da recta e um vector director $\overrightarrow{u} \leftrightarrow (c, d)$ desta, sabemos que a recta admite a caracterização paramétrica $\{A + t\overrightarrow{u}\}_{t\in\mathbb{R}}$ ou, em termos de coordenadas, $\{X(x_1 + tc, y_1 + td)\}_{t\in\mathbb{R}}$ (uma "equação vectorial" da recta). A caracterização em termos de coordenadas, pode ser enunciada de forma porventura mais clara dizendo que os pontos $X(x, y)$ da recta são exactamente aqueles cujas coordenadas se podem obter na forma

$$\begin{cases} x = x_1 + tc \\ y = y_1 + td \end{cases},$$

com $t \in \mathbb{R}$.

O segundo método conduzia-nos a caracterizações em compreensão. As rectas verticais podem ser caracterizadas por uma equação $x = x_1$, onde x_1 é a abcissa comum dos pontos da recta, e as rectas não verticais podem ser caracterizadas pela sua "equação reduzida", $y = mx + b$, onde m é declive da recta e b a ordenada do ponto da recta com abcissa 0.

Vamos agora utilizar o produto escalar para obter de outro modo uma caracterização em compreensão de uma recta do plano. Consideremos então uma recta r, da qual conhecemos um ponto $A \leftrightarrow (x_1, y_1)$, e suponhamos que $\overrightarrow{v} \leftrightarrow (a, b)$ é um vector **não nulo** ortogonal à recta (ou, o que é o mesmo, um vector director das rectas ortogonais a r). Sabemos então que um ponto $X \leftrightarrow (x, y)$ está na recta r se, e só se, o vector $\overrightarrow{AX}$ pertence a $\overrightarrow{\mathcal{V}}_r$, o que é equivalente ao facto de aquele vector ser ortogonal ao vector $\overrightarrow{v}$, condição que, como sabemos, também pode ser escrita na forma $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{AX} = 0$. Mas, uma vez que, sendo $A \leftrightarrow (x_1, y_1)$ e $X \leftrightarrow (x, y)$, tem-se $\overrightarrow{AX} \leftrightarrow (x - x_1, y - y_1)$, concluímos que o produto escalar é dado por

$$\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{AX} = a(x - x_1) + b(y - y_1) = ax + by - (ax_1 + by_1).$$

Podemos então resumir a conclusão a que chegámos no seguinte enunciado:

P28. Relativamente a um referencial ortonormado, qualquer recta r do plano pode ser caracterizada pela equação

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0,$$

onde $A \leftrightarrow (x_1, y_1)$ é um ponto particular da recta e $\overrightarrow{v} \leftrightarrow (a, b)$ é um vector **não nulo** ortogonal à recta. A equação anterior pode ser também escrita na forma

$$ax + by = c,$$

onde $c = ax_1 + by_1$.[12]

Uma equação do tipo $ax + by = c$, onde a, b e c são números reais dados, com pelo menos um dos dois primeiros diferente de 0, é o que se costuma chamar uma *equação linear* (nas duas incógnitas x e y). A propriedade precedente mostra que qualquer recta do plano pode ser definida

[12]Este valor de c não necessita ser decorado. Com efeito, se a recta admite a equação $ax + by = c$, para cada ponto $A \leftrightarrow (x_1, y_1)$ da recta, não pode deixar de ser $ax_1 + by_1 = c$.

em compreensão por uma equação linear. É claro que, uma vez que se podem escolher muitos vectores distintos, ortogonais a uma dada recta r, cada recta pode ser representada por mais que uma equação linear. Por exemplo, uma recta que seja representada pela equação $2x - 3y = 1$ pode ser também representada tanto pela equação $4x - 6y = 2$ como pela equação $-2x + 3y = -1$.

O que podemos dizer é que qualquer equação linear representa sempre uma recta do plano:

> P29 Relativamente a um referencial ortonormado do plano, se a e b são números reais, pelo menos um dos quais diferente de 0, e se $c \in \mathbb{R}$, o conjunto dos pontos $X(x, y)$ tais que $ax + by = c$ representa uma recta r, cujos vectores são os vectores do plano ortogonais a $\overrightarrow{v} \leftrightarrow (a, b)$.

A justificação desta propriedade resume-se a notar que se pode sempre escolher um ponto particular $A \leftrightarrow (x_1, y_1)$ tal que $ax_1 + by_1 = c$ (de facto podem-se escolher muitos) uma vez que, se, por exemplo, $a \neq 0$, pode-se tomar para y_1 um número real arbitrário e, em seguida, tomar para x_1 a solução da equação a uma incógnita $ax = c - by_1$, ou seja,

$$x_1 = \frac{c - by_1}{a}.$$

Exercício 84. Determine equações para as rectas perpendiculares ao vector $\overrightarrow{v} \leftrightarrow (-1, -2)$ que passam pela origem e pelo ponto $A \leftrightarrow (-2, 3)$, respectivamente.

Exercício 85. a) Determine um ponto particular e um vector não nulo ortogonal à recta definida pela equação $2x - 3y = 1$.
b) Determine um ponto particular e um vector de norma 1 ortogonal à recta com a equação reduzida $y = -\frac{3}{4}x + 5$.

Exercício 86. Considere uma recta r definida pela equação $2x - 3y = 1$. Determine uma equação para a recta r' que é paralela à recta r e passa pelo ponto $A \leftrightarrow (1, 2)$.

Exercício 87. Determine, com aproximação à milésimas de grau, o ângulo das duas rectas definidas pelas equações $2x + 3y = \frac{17}{5}$ e $y = 2x$. **Sugestão:** Repare que o ângulo de duas rectas é igual ao ângulo de duas outras que lhes sejam respectivamente perpendiculares.

Exercício 88. Determine a distância do ponto $X \leftrightarrow (-3, 5)$ à recta r de equação $3x + 4y = 6$.

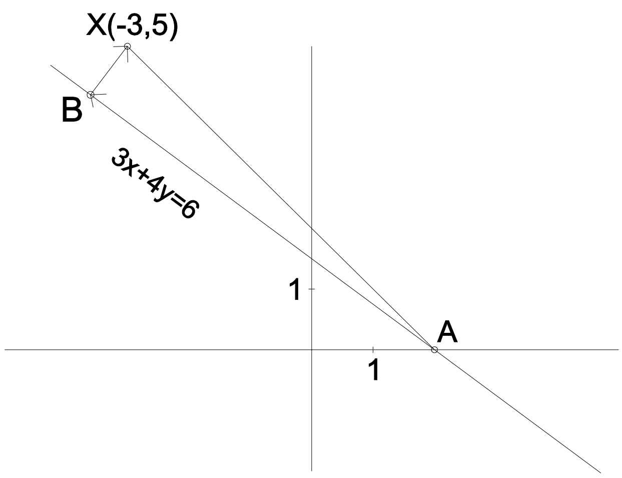


Figura 65

Sugestão: Considere um ponto A sobre a recta, por exemplo aquele que está no eixo das abcissas, e repare que a distância pedida é a norma da projecção ortogonal do vector $\overrightarrow{AX}$ sobre uma recta vectorial ortogonal a r. Para calcular a referida projecção ortogonal, escolha um vector de norma 1 ortogonal a r e atenda à caracterização daquela, referida no exercício 69.

Há vários problemas de Geometria Analítica Plana que vêm simplificados se soubermos determinar um vector particular não nulo, ortogonal a um vector não nulo dado. Essa determinação pode fazer-se de um modo muito simples mas, antes de descrevermos a respectiva "receita" valerá a pena tentarmos fazê-la sózinhos.

Exercício 89. Relativamente a um certo referencial ortonormado do plano, considere o vector $\overrightarrow{u} \leftrightarrow (3, 2)$. Determine as coordenadas de um vector não nulo $\overrightarrow{v}$ ortogonal ao vector $\overrightarrow{u}$, ou seja, tal que $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$. Repare que este problema pode ter muitas soluções diferentes e que apenas pretendemos uma dessas soluções.

Ao resolver o exercício precedente pode eventualmente ter pensado em chamar x e y às coordenadas do vector procurado e escrever a equação correspondente à condição $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$, que é $3x + 2y = 0$. Colocado perante uma tal equação pode ter sentido um certo desconforto… Já sabemos há muito resolver uma equação linear com uma incógnita, ou um sistema de duas equações lineares com duas incógnitas, mas uma única equação com duas incógnitas, o que fazer com ela? Essa situação que é para nós possivelmente estranha é a contrapartida algébrica do feacto geometricamente claro de o problema em questão admitir muitas soluções. Uma vez que procuramos apenas uma solução, podemos resolver facilmente o nosso problema atribuindo um valor arbitrário por exemplo a y e, depois de feita a substituição correspondente, resolver a equação com uma única incógnita x que foi obtida. Esse era um caminho para chegar à solução mas existe, neste caso, um método mais simples, que nos pode poupar muito trabalho. Repare com efeito que, se experimentar tomar $\overrightarrow{v} = (-2, 3)$ obtém

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 3 \times -2 + 2 \times 3 = -6 + 6 = 0$$

e assim, pelos vistos, temos uma das soluções possíveis para o nosso problema. Pode dizer-se que foi uma questão de sorte ter experimentado aquele vector $\overrightarrow{v}$, mas é fácil reparar que o que foi feito a partir do vector $\overrightarrow{u} \leftrightarrow (3, 2)$ pode ser feito analogamente a partir de qualquer outro vector não nulo $\overrightarrow{u} \leftrightarrow (a, b)$: o vector $\overrightarrow{v} \leftrightarrow (-b, a)$ é também diferente de $\overrightarrow{0}$ e é perpendicular a $\overrightarrow{u}$, uma vez que

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = a \times -b + b \times a = -ab + ab = 0.$$

Em resumo, podemos enunciar o seguinte resultado:

P30. Se $\overrightarrow{u} \leftrightarrow (a, b)$ é um vector não nulo, então um dos vectores não nulos ortogonais a $\overrightarrow{u}$ é o vector $\overrightarrow{v} \leftrightarrow (-b, a)$.

É claro que, nas condições anteriores, o vector $\overrightarrow{v'} \leftrightarrow (b, -a)$, que tem a mesma direcção que $\overrightarrow{v}$, também é não nulo e ortogonal a $\overrightarrow{u}$. Podemos assim dizer que, para obter um vector do plano ortogonal a um vector dado, basta trocar a ordem das coordenadas e multiplicar uma delas por -1 ("trocar o sinal" a uma delas). O exercício seguinte mostra que o vector $\overrightarrow{v}$ que utilizámos primeiro tem uma interpretação geométrica interessante.

Exercício 90. Fixado um referencial ortonormado do plano e considerando como sentido directo aquele que roda o semi-eixo positivo das abcissas directamente para o semi-eixo positivo das ordenadas, verifique que, se $\overrightarrow{u} \leftrightarrow (a, b)$ e $\overrightarrow{v} = (-b, a)$, a semi-recta de origem O associada a $\overrightarrow{v}$ obtém-se a partir da associada a $\overrightarrow{u}$ por uma rotação de $90°$ no sentido directo. **Sugestão:** Repare que, pelo que viu no exercício 20, sendo $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ a norma comum dos vectores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ e α um dos ângulos generalizados a que corresponde a semi-recta associada a $\overrightarrow{u}$, tem-se $a = r\cos(\alpha)$ e $b = r\,\text{sen}(\alpha)$ e relembre as fórmulas para as razões trigonométricas de $90° + \alpha$.

Vejamos alguns exemplos de utilização da propriedade P30 na resolução de problemas de Geometria Analítica Plana. Em todos esses exemplos está implícito que trabalhamos com um certo referencial ortonormado do plano.

Exemplos. a) Pretendemos encontrar um vector director para a recta definida pela equação $2x + y = 3$. Para isso reparamos que, como já sabemos, o vector $\overrightarrow{u} \leftrightarrow (2,1)$ é perpendicular a esta recta. Qualquer vector não nulo perpendicular a este último, como por exemplo o vector $\overrightarrow{v} \leftrightarrow (-1,2)$ é assim um vector director da recta.
b) Pretendemos encontrar uma equação que defina em compreensão a recta que passa pelo ponto $A \leftrightarrow (-1,0)$ e admite o vector director $\overrightarrow{u} \leftrightarrow (-2,3)$. Apesar de já sabermos resolver uma questão como esta, desde o décimo ano, podemos seguir um caminho alternativo, e porventura mais simples, com a ajuda de P30. Com efeito, uma vez que o vector $\overrightarrow{v} \leftrightarrow (-3,-2)$ é um vector não nulo perpendicular à recta, esta admite a equação $-3x - 2y = c$, com c determinado pela condição de ela passar pelo ponto A, ou seja $c = -3 \times -1 - 2 \times 0 = 3$.

Exercício 91. Considere uma recta r definida pela equação $2x - 3y = 1$. Determine uma equação para a recta r' perpendicular a r que passa pelo ponto $A \leftrightarrow (1,2)$.

Exercício 92. Determine o ângulo duma recta r, que se sabe admitir $\overrightarrow{u} \leftrightarrow (1,1)$ como vector director, com a recta r' que admite a equação

$$(\sqrt{3} - 1)x + (\sqrt{3} + 1)y = \sqrt{3}\,.$$

★ ★ ★ ★

A interpretação das equações lineares, nas duas incógnitas x e y, como representando uma recta do plano, relativamente a um certo referencial ortonormado, permite encarar de um ponto de vista geométrico uma coisa que já sabemos fazer há muito tempo, nomeadamente resolver sistemas de duas equações lineares naquelas duas incógnitas.

Pensemos, por exemplo, no sistema de equações

$$\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 3x + 2y = 1\ . \end{cases}$$

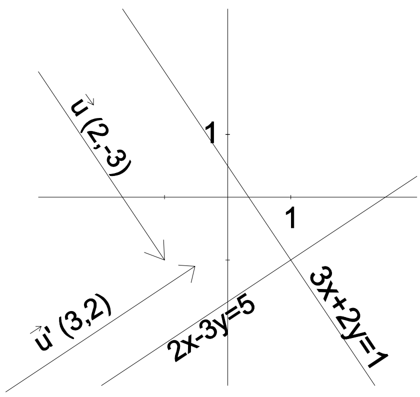


Figura 66

Se o resolver pelo seu método preferido, chegará certamente à solução

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \ , \end{cases}$$

ou seja, à conclusão de que aqueles são os únicos valores que tornam verdadeiras ambas as equações.

O que está agora em causa não é o método que seguiu para resolver aquele sistema de equações mas sim qual o significado de este ter solução única e qual a interpretação geométrica da solução. De facto, a resposta é muito simples: O conjunto dos pares ordenados (x, y) que tornam verdadeira a primeira equação é o conjunto das coordenadas dos pontos de uma certa recta r do plano e o conjunto daqueles que tornam verdadeira a segunda é o das coordenadas dos pontos de outra recta r' do mesmo plano; uma vez que há um único ponto comum àquelas duas rectas, as coordenadas desse ponto constituem a única solução do sistema.

Será que o que se fez com este sistema de duas equações lineares nas incógnitas x e y pode ser feito com qualquer outro? É fácil descobrir que podem existir problemas uma vez que as rectas correspondentes às duas equações podem ser paralelas e, nesse caso, ou não existem pontos comuns, se elas forem estritamente paralelas, ou existem infinitos pontos comuns, se elas coincidirem. Os sistemas de equações de partida dizem-se *impossíveis*, no primeiro caso, e *indeterminados*, no segundo.

Repare-se que, no exemplo que examinámos, era fácil prever que existia solução única, ou seja que as rectas correspondentes eram concorrentes: Bastava, com efeito reparar que, ao escolher vectores perpendiculares a cada uma delas, por exemplo os vectores $\overrightarrow{u} \leftrightarrow (2, -3)$ e $\overrightarrow{u}' \leftrightarrow (3, 2)$, estes vectores não tinham a mesma direcção, uma vez que as correspondentes coordenadas não eram proporcionais.

Os dois exemplos a seguir são sistemas de duas equações lineares nas incógnitas x e y, num caso sem solução e no outro com infinitas soluções. Em ambos os casos a interpretação geométrica explica claramente o que se está a passar.

$$\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 4x - 6y = -5 \ , \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 4x - 6y = 10 \ . \end{cases}$$

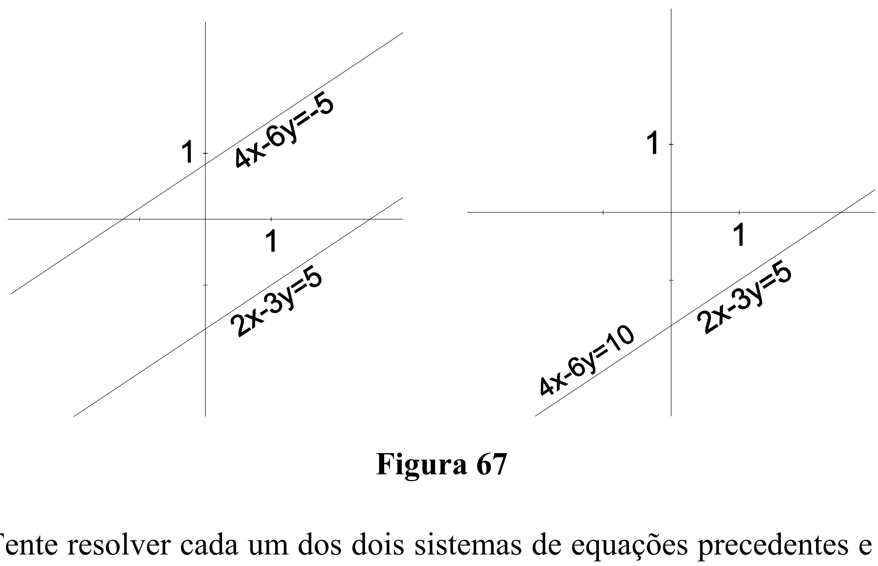


Figura 67

Exercício 93. Tente resolver cada um dos dois sistemas de equações precedentes e repare no modo como, ao fazê-lo, eles se revelam respectivamente impossível e indeterminado.

Exercício 94. Descubra quais dos seguintes sistemas de equações têm solução única e, quando isso não acontecer, se eles são impossíveis ou indeterminados. Procure chegar a essas conclusões sem tentar resolver explicitamente os sistemas.

$$\textbf{a)} \begin{cases} x - 2y = 2 \\ 2x - 3y = 1 \,, \end{cases} \quad \textbf{b)} \begin{cases} 2x - 4y = 5 \\ 3x - 6y = 1 \,, \end{cases}$$

$$\textbf{c)} \begin{cases} x + y = 1 \\ 2x - y = 2 \,, \end{cases} \quad \textbf{d)} \begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ -2x + 3y = -5 \,. \end{cases}$$

9. Complementos de Geometria Analítica Espacial.

No estudo da Geometria Analítica do Espaço, que abordámos no décimo ano, vimos como obter caracterizações paramétricas das rectas e dos planos, nomeadamente as suas caracterizações (ou "equações") vectoriais. Só para rectas e planos em posições muito particulares relativamente aos eixos ou aos planos coordenados, encontrámos também caracterizações em compreensão.

Vamos agora descobrir como a utilização do produto escalar de vectores permite obter equações que caracterizam rectas e planos em posições mais gerais. Como habitualmente, em todo o nosso estudo estará implícito um certo referencial ortonormado do espaço, relativamente ao qual as coordenadas são referidas.

Seguindo um caminho análogo ao que utilizámos na secção anterior, comecemos por considerar um plano α, do qual se conhece um ponto particular $A \leftrightarrow (x_1, y_1, z_1)$, e suponhamos que $\overrightarrow{v} \leftrightarrow (a, b, c)$ é um vector **não nulo** ortogonal ao plano (ou, o que é o mesmo, um vector director das rectas ortogonais a α). Sabemos então que um ponto $X \leftrightarrow (x, y, z)$ está no plano α se, e só se, o vector $\overrightarrow{AX}$ pertence a $\overrightarrow{\mathcal{V}}_\alpha$, o que é equivalente ao facto de aquele vector ser ortogonal ao vector $\overrightarrow{v}$, condição que, como sabemos, também pode ser escrita na forma $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{AX} = 0$. Mas, uma vez que, sendo $A \leftrightarrow (x_1, y_1, z_1)$ e $X \leftrightarrow (x, y, z)$, tem-se $\overrightarrow{AX} \leftrightarrow (x - x_1, y - y_1, z - z_1)$, concluímos que o produto escalar é dado por

$$\begin{aligned} \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{AX} &= a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = \\ &= ax + by + cz - (ax_1 + by_1 + cz_1). \end{aligned}$$

Podemos então resumir a conclusão a que chegámos no seguinte enunciado:

P31. Relativamente a um referencial ortonormado, qualquer plano α pode ser caracterizada pela equação

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0,$$

onde $A \leftrightarrow (x_1, y_1, z_1)$ é um ponto particular do plano e $\overrightarrow{v} \leftrightarrow (a, b, c)$ é um vector **não nulo** ortogonal ao plano. A equação anterior pode ser também escrita na forma

$$ax + by + cz = d,$$

onde $d = ax_1 + by_1 + cz_1$.[13]

Nas condições anteriores costuma-se dizer que $ax + by + cz = d$ é uma *equação cartesiana* do plano.

[13]Este valor de d não necessita ser decorado. Com efeito, se o plano admite a equação $ax + by + cz = d$, para cada ponto $A \leftrightarrow (x_1, y_1, z_1)$ da recta, não pode deixar de ser $ax_1 + by_1 + cz_1 = d$.

Uma equação do tipo $ax + by + cz = d$, onde a, b, c e d são números reais dados, com pelo menos um dos três primeiros diferente de 0, é o que se costuma chamar uma *equação linear* (nas três incógnitas x, y e z). A propriedade precedente mostra que qualquer plano pode ser definido em compreensão por uma equação linear. É claro que, uma vez que se podem escolher muitos vectores distintos, ortogonais a um dado plano α, cada plano pode ser representado por mais que uma equação linear. O que podemos dizer é que qualquer equação linear representa sempre um plano:

P32 Relativamente a um referencial ortonormado, se a, b e c são números reais, pelo menos um dos quais diferente de 0, e se $d \in \mathbb{R}$, então o conjunto dos pontos $X(x, y, z)$ tais que $ax + by + cz = d$ representa um plano α, cujos vectores são os vectores do espaço ortogonais a $\overrightarrow{v} \leftrightarrow (a, b, c)$.

A justificação desta propriedade resume-se a notar que se pode sempre escolher um ponto particular $A \leftrightarrow (x_1, y_1, z_1)$ tal que $ax_1 + by_1 + cz_1 = d$ (de facto podem-se escolher muitos) uma vez que, se, por exemplo, $a \neq 0$, pode-se tomar para y_1 e z_1 números reais arbitrários e, em seguida, tomar para x_1 a solução da equação a uma incógnita $ax = d - by_1 - cz_1$, ou seja,

$$x_1 = \frac{d - by_1 - cz_1}{a}.$$

Exercício 95. Determine equações para os planos perpendiculares ao vector $\overrightarrow{v} \leftrightarrow (-1, -2, 0)$ que passam pela origem e pelo ponto $A \leftrightarrow (-2, 3, 5)$, respectivamente.

Exercício 96. a) Determine um ponto particular e um vector não nulo ortogonal ao plano definido pela equação $2x - 3y + z = 1$.
b) Determine um ponto particular e um vector de norma 1 ortogonal ao plano definido pela equação $x - z = 2$.

Exercício 97. Considere um plano α definido pela equação $2x - y + 3z = 1$. Determine uma equação para o plano α' que é paralelo ao plano α e passa pelo ponto $A \leftrightarrow (1, 2, 0)$.

Exercício 98. Determine, com aproximação às milésimas de grau, o ângulo dos dois planos definidos pelas equações $x - y + z = 1$ e $y = 2x$. **Sugestão:** Recorde que o ângulo de dois planos é igual ao ângulo de duas rectas que lhes sejam respectivamente perpendiculares.

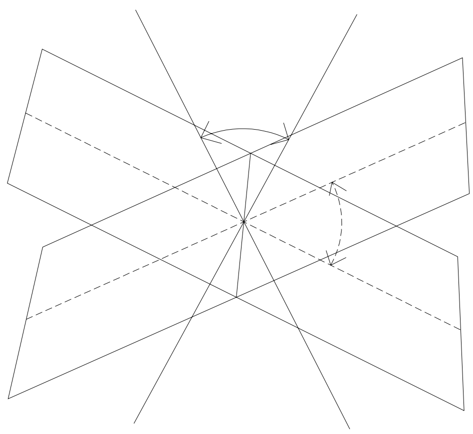


Figura 68

Exercício 99. Verifique que a recta de "equação vectorial"

$$\{(-1,0,0)+t(1,1,-2)\}_{t\in\mathbb{R}}$$

é paralela ao plano com a equação cartesiana $x+y+z=1$. **Sugestão:** Compare um vector director da recta com um vector perpendicular ao plano.

Exercício 100. Determine a intersecção da recta de "equação vectorial"

$$\{(-1,0,0)+t(1,1,-2)\}_{t\in\mathbb{R}}$$

com o plano com equação cartesiana $x-y+z=2$.

Exercício 101. Determine, com aproximação às milésimas de grau, o ângulo do plano definido pela equação $x-y+z=1$ com a recta com "equação vectorial" $\{(-1,0,0)+t(1,1,-2)\}_{t\in\mathbb{R}}$. **Sugestão:** Repare que o ângulo de uma recta com um plano é igual ao complementar do ângulo da recta com qualquer recta perpendicular ao plano, como ressalta do exame da figura a seguir.

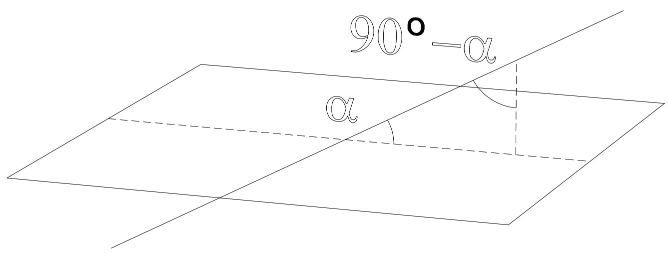


Figura 69

Exercício 102. a) Generalizando o que fez no exercício 82, mostre que, dados três pontos não colineares O, A e B do espaço, o lugar geométrico dos pontos X do espaço tais que $X=O$ ou X diferente de O e o vector $\overrightarrow{OX}$ faz o mesmo ângulo com os vectores $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, é um plano.
b) Por um argumento independente da Geometria Analítica, mostre que o plano referido em a) é o plano ortogonal ao plano OAB que passa pela bissectriz das semi-rectas de origem O que contêm A e B respectivamente.
c) Dados quatro pontos não complanares do espaço, O, A, B e C, o que será o lugar geométrico dos pontos X do espaço tais que $X=O$ ou X diferente de O e o vector $\overrightarrow{OX}$ faz o mesmo ângulo com os vectores $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OC}$.

Vamos agora tentar relacionar os dois tipos de representação de um plano, a representação vectorial e a equação cartesiana.

★ ★ ★ ★

Suponhamos que partimos dum plano, por exemplo com equação

$$-x+2y+3z=2,$$

e que queremos encontrar uma "equação vectorial" desse plano. Para isso, basta encontrarmos um ponto particular do plano e dois vectores não nulos, com direcções distintas, do plano (um referencial vectorial do plano). Para encontrarmos um ponto particular há um caminho simples: atribuímos valores a duas das coordenadas, por exemplo $x=0$ e $z=0$, e depois de feitas as substituições, ficamos com a equação $2y=2$, equivalente a $y=1$. Podemos assim dizer que

$$A \leftrightarrow (0,1,0)$$

é um ponto particular do plano. Para arranjarmos dois vectores do plano nas condições pretendidas partimos da observação de que, uma vez que o vector

$$\overrightarrow{u} \leftrightarrow (-1,2,3)$$

é ortogonal ao plano e não nulo, os vectores do plano são exactamente aqueles que são ortogonais a $\overrightarrow{u}$, ou seja, aqueles cujo produto escalar por $\overrightarrow{u}$ é 0. Para obter vectores nessas condições existe um método simples, que é uma pequena variante do método que utilizámos na secção precedente para determinar um vector ortogonal a um vector do plano: Os vectores

$$\overrightarrow{v} \leftrightarrow (0,-3,2), \quad \overrightarrow{v}' \leftrightarrow (-3,0,-1), \quad \overrightarrow{v}'' \leftrightarrow (-2,-1,0)$$

são todos ortogonais a $\overrightarrow{u}$, como se reconhece calculando os correspondentes produtos escalares e, por exemplo, os dois primeiros são diferentes de $\overrightarrow{0}$ e não têm a mesma direcção. Podemos assim obter uma "equação vectorial" do plano:

$$\{(0,1,0) + t\,(0,-3,2) + t'\,(-3,0,-1)\}_{t,t' \in \mathbb{R}}.$$

O passo fundamental da resolução que acabámos de encontrar consistiu no método para, dado um vector não nulo $\overrightarrow{u}$, determinar dois vectores não nulos e com direcções distintas ortogonais a $\overrightarrow{u}$. O método consistiu em utilizar vectores que se obtêm tomando uma coordenada igual a 0 e, para as restantes, tomando as correspondentes coordenadas de $\overrightarrow{u}$ por ordem trocada e com uma delas multiplicada por -1. Obtêm-se assim três vectores e, destes, é sempre possível escolher dois nas condições pretendidas. Mais precisamente, podemos enunciar a seguinte propriedade:

P33. Dado um vector não nulo $\overrightarrow{u} \leftrightarrow (a,b,c)$, os vectores

$$\overrightarrow{v} \leftrightarrow (0,-c,b), \quad \overrightarrow{v}' \leftrightarrow (-c,0,a), \quad \overrightarrow{v}'' \leftrightarrow (-b,a,0)$$

são todos ortogonais a $\overrightarrow{u}$ e, de entre eles, podem sempre escolher-se dois que são não nulos e com direcções distintas.

Por exemplo, se $a \neq 0$, os vectores $\overrightarrow{v}'$ e $\overrightarrow{v}''$ estão seguramente nessas condições (uma escolha segura nos casos em que $b \neq 0$ e em que $c \neq 0$ é análoga).

A justificação da propriedade precedente é muito simples: Para verificar que os três vectores são perpendiculares calculamos os produtos escalares:

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = a \times 0 + b \times -c + c \times b = -bc + bc = 0,$$

e analogamente para $\overrightarrow{v}'$ e $\overrightarrow{v}''$. É além disso muito simples constatar que, se $a \neq 0$, nenhum dos vectores $\overrightarrow{v}'$ e $\overrightarrow{v}''$ é $\overrightarrow{0}$ e as direcções destes vectores são distintas (examinando as terceiras coordenadas, que número real poderia multiplicar $\overrightarrow{v}'$ para obter $\overrightarrow{v}''$? o que acontece então com as segundas coordenadas?).

Exercício 103. a) Obtenha uma representação vectorial para o plano que passa pelo ponto $A \leftrightarrow (1,2,0)$ e é ortogonal ao vector $\overrightarrow{u} \leftrightarrow (0,1,2)$.

b) Utilize o resultado obtido para determinar mais três pontos do referido plano.

★ ★ ★ ★

Vamos agora examinar o problema inverso do anterior: Como obter uma equação cartesiana de um plano, do qual se conhece uma representação vectorial, e portanto um ponto particular A e um referencial vectorial constituído por dois vectores não nulos e com direcções distintas $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$? O problema consiste apenas em encontrar um vector não nulo $\overrightarrow{w}$ que seja ortogonal ao plano e sabemos que, para que isso aconteça, basta que $\overrightarrow{w}$ seja simultaneamente ortogonal a $\overrightarrow{u}$ e a $\overrightarrow{v}$. Este problema não é difícil de resolver mas não temos, de momento, ao nosso alcance uma solução tão directa como a que encontrámos no problema que resolvemos antes.

Vejamos como se pode proceder para, dados dois vectores não nulos, e com direcções distintas, $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$, determinar um vector não nulo $\overrightarrow{w}$ simultaneamente ortogonal a $\overrightarrow{u}$ e a $\overrightarrow{v}$. É claro que este problema não tem solução única: As soluções são exactamente os vectores de uma recta perpendicular ao plano vectorial que admite os vectores dados como referencial vectorial.

Sejam, por exemplo, $\overrightarrow{u} \leftrightarrow (1,2,-1)$ e $\overrightarrow{v} \leftrightarrow (-1,1,1)$ os vectores de partida e seja $\overrightarrow{w} \leftrightarrow (x,y,z)$ o vector procurado. As condições pretendidas $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} = 0$ e $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} = 0$ traduzem-se então no sistema de duas equações lineares nas incógnitas x, y e z

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{cases}.$$

Repare-se que o que pretendemos não é "resolver" o sistema, mas apenas encontrar uma solução particular dele, que não seja a correspondente ao vector $\overrightarrow{0}$. Uma das maneiras de o conseguir é experimentar substituir z por um certo valor diferente de 0 e verificar se o sistema de duas equações a duas incógnitas assim obtido é daqueles que temos a certeza de terem solução. De facto, a interpretação geométrica dos sistemas de duas equações a duas incógnitas, que referimos na secção anterior, mostra que assim é, mesmo antes de tentarmos a sua solução:

Exercício 104. De que modo podemos estar certos de que o sistema de duas equações nas incógnitas x e y que se obtém depois de atribuir um valor a z é daqueles que têm solução única? O que aconteceria se, em vez de atribuir um valor a z, atribuíssemos um valor a y?

Retomando o que estávamos a fazer, substituímos, por exemplo, z por 1 e resolvemos o sistema assim obtido:

$$\begin{cases} x + 2y - 1 = 0 \\ -x + y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y + 1 \\ -x + y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y + 1 \\ 2y - 1 + y + 1 = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y + 1 \\ 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}.$$

Obtivémos assim uma solução $\overrightarrow{w} \leftrightarrow (1,0,1)$ para o nosso problema.

Exercício 105. Com o auxílio do que fizémos no exemplo tratado atrás, determine uma equação cartesiana do plano definido pela equação vectorial

$$\{(1,0,2) + t\,(1,2,-1) + t'\,(-1,1,1)\}_{t,t' \in \mathbb{R}}.$$

No exercício precedente vimos como obter uma equação cartesiana de um plano, do qual se conhece um ponto particular e um referencial vectorial. Quando conhecemos três pontos não colineares de um plano, é fácil obter um referencial vectorial deste e, a partir daí, uma equação cartesiana.

Exercício 106. Na figura seguinte está representado um octaedro com os seis vértices A, B, C, D, E e F sobre os eixos coordenados e todos eles a distância 1 da origem (numa certa unidade de comprimento).

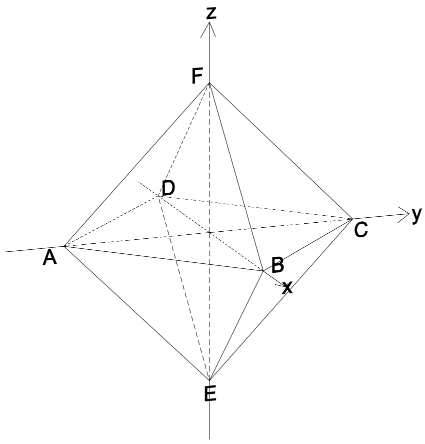


Figura 70

a) Determine equações cartesianas para os planos BCF e ABF.
b) Utilize a conclusão de a) para determinar, com aproximação às décimas de grau, o ângulo dos dois planos referidos.

Exercício 107. Na figura 71 está representado um cubo de vértices A, B, C, D, E, F, G e H, assim como os pontos médios M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 e M_6 das arestas que não concorrem nos vértices A e G e uma linha poligonal a unir estes pontos médios.
a) Considere a medida da aresta do cubo como unidade de comprimento e escolha um referencial ortonormado que lhe pareça adaptado ao estudo deste.
b) Determine uma equação cartesiana do plano que contém os pontos médios M_1, M_2 e M_3 e verifique que os restantes pontos médios também pertencem a este plano.

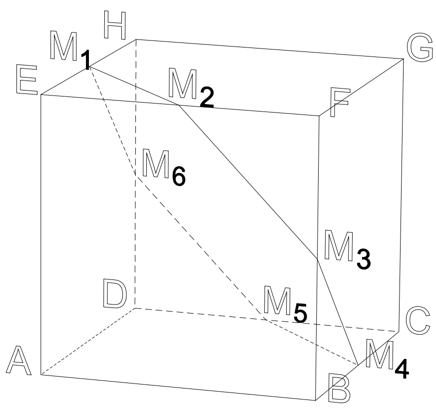


Figura 71

★ ★ ★ ★

Depois de termos estudado o modo de obter a equação cartesiana de um plano e o modo de passar de uma tal equação para uma representação paramétrica (a “equação vectorial”), vamos examinar os problemas análogos para as representações de uma recta no espaço.

Como acontecia com os planos, estudámos no décimo ano o modo de obter a “equação vectorial” de uma recta do espaço, a partir do conhecimento dum ponto e dum vector director, mas só para rectas em posições especiais, relativamente aos eixos, encontrámos caracterizações em compreensão. Por exemplo, constatámos que a recta paralela ao eixo das cotas que passa pelo ponto $A \leftrightarrow (1,-2,1)$ pode ser representada em compreensão pelo sistema de equações lineares muito simples

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}.$$

Este caso particular pode levar-nos a conjecturar que as rectas possam ser representadas em geral por sistemas de duas equações lineares. Para confirmar essa conjectura, começamos por examinar o que se pode dizer sobre o conjunto que é representado por um tal sistema de equações.

Pensemos, por exemplo, no conjunto dos pontos $X \leftrightarrow (x, y, z)$ que verificam o sistema de equações

$$\begin{cases} 3x - y + z = 1 \\ -x + y + 2z = -2 \end{cases}.$$

Este conjunto pode ser olhado como a intersecção de outros dois, a saber, os dois planos com equações $3x - y + z = 1$ e $-x + y + 2z = -2$. Como os dois vectores $\overrightarrow{u} \leftrightarrow (3, -1, 1)$ e $\overrightarrow{v} \leftrightarrow (-1, 1, 2)$, que são perpendiculares àqueles planos, não têm a mesma direcção, os planos não são paralelos. A intersecção em questão é assim uma recta. Além disso, podemos dizer mais alguma coisa sobre essa recta: Se $\overrightarrow{w}$ é um vector director da recta, então $\overrightarrow{w}$ é um vector de ambos os planos, e portanto é simultaneamente perpendicular aos vectores $\overrightarrow{u}\, e \overrightarrow{v}$. Uma vez que os vectores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ não têm a mesma direcção, sabemos que os vectores que são simultaneamente perpendiculares a $\overrightarrow{u}$ e a $\overrightarrow{v}$ são os vectores perpendiculares ao plano vectorial que contém $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ e constituem assim uma recta vectorial; podemos portanto concluir que a condição de o vector director $\overrightarrow{w}$ da recta ser perpendicular a $\overrightarrow{u}$ e a $\overrightarrow{v}$ determina perfeitamente a direcção de $\overrightarrow{w}$.

O que fizémos no exemplo atrás pode ser feito com qualquer sistema de duas equações lineares nas três incógnitas x, y, z, desde que os vectores não nulos perpendiculares aos planos definidos por cada uma dessas equações não tenham a mesma direcção. Podemos assim enunciar o seguinte resultado geral:

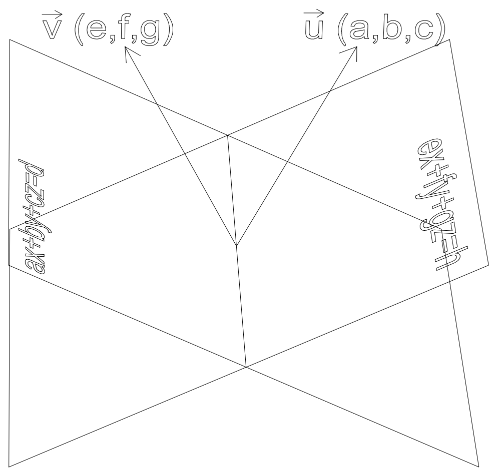


Figura 72

P34. Sejam a, b, c, d, e, f, g e h números reais tais que os vectores

$$\overrightarrow{u} \leftrightarrow (a, b, c) \qquad \overrightarrow{v} \leftrightarrow (e, f, g)$$

sejam diferentes de $\overrightarrow{0}$ e tenham direcções distintas. O sistema de equações

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ ex + fy + gz = h \end{cases}$$

constitui então uma representação em compreensão de uma recta do espaço, que admite como vectores directores os vectores $\overrightarrow{w}$ simultaneamente ortogonais a $\overrightarrow{u}$ e a $\overrightarrow{v}$.

Nas condições anteriores, costuma-se dizer que aquele sistema constitui um *sistema de equações cartesianas* da recta.

Quando trabalhamos com uma recta caracterizada por um sistema de equações cartesianas como o anterior é frequentemente importante sabermos determinar as coordenadas de um ponto particular da recta. O método usado mais frequentemente para o conseguir é fixar o valor de uma das coordenadas x, y, z do ponto procurado e, feita a substituição correspondente dessa variável no sistema de equações dado, tentar resolver o sistema de duas equações nas duas incógnitas restantes que se obtém.[14] Para obtermos um vector director da recta podemos procurar um vector que seja simultaneamente ortogonal a $\overrightarrow{u}$ e a $\overrightarrow{v}$ ou, de modo ainda mais simples, obtê-lo a partir da determinação de um segundo ponto particular da recta.

Exercício 108. Determine um ponto particular e um vector director da recta definida pelas equações

$$\begin{cases} 3x - y + z = 1 \\ -x + y + 2z = -2 \end{cases}.$$

Exercício 109. O que poderá representar um sistema de equações

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ ex + fy + gz = h \end{cases}$$

quando os vectores

$$\overrightarrow{u} \leftrightarrow (a, b, c) \qquad \overrightarrow{v} \leftrightarrow (e, f, g) \;,$$

apesar de diferentes de $\overrightarrow{0}$, tiverem a mesma direcção? Repare que podem acontecer duas situações distintas.

Será que, reciprocamente, qualquer recta do espaço admite uma caracterização por um sistema de equações cartesianas? É fácil perceber que assim é, e que é mesmo possível encontrar muitas caracterizações diferentes:

Consideremos um ponto particular $A \leftrightarrow (x_1, y_1, z_1)$ da recta e um vector director $\overrightarrow{w}$. Escolhamos dois vectores não nulos

$$\overrightarrow{u} \leftrightarrow (a, b, c) \qquad \overrightarrow{v} \leftrightarrow (e, f, g) \;,$$

ortogonais a $\overrightarrow{w}$ e com direcções diferentes. Pondo

[14]Pode acontecer que o sistema assim obtido não tenha solução, mas essa dificuldade pode ser sempre ultrapassada se se escolher outra das variáveis para fixar o valor.

$$d = ax_1 + by_1 + cz_1, \quad h = ex_1 + fy_1 + gz_1,$$

sabemos que $ax + by + cz = d$ é a equação de um plano que passa por A e é perpendicular ao vector $\overrightarrow{u}$ e que $ex + fy + gz = h$ é a equação de um plano que passa por A e é perpendicular ao vector $\overrightarrow{v}$ e portanto o sistema

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ ex + fy + gz = h \end{cases},$$

que corresponde à intersecção dos dois planos, representa uma recta que passa por A. Uma vez que já sabemos que a recta representada por um tal sistema admite como vectores directores aqueles que são perpendiculares simultaneamente a $\overrightarrow{u}$ e a $\overrightarrow{v}$, concluímos que $\overrightarrow{w}$ é um vector director da recta, por outras palavras a recta não é mais do que a recta de partida. Podemos assim destacar a conclusão a que acabamos de chegar:

P35. Consideremos uma recta da qual conhecemos um ponto particular $A \leftrightarrow (x_1, y_1, z_1)$ e um vector director $\overrightarrow{w}$. Escolhamos dois vectores não nulos

$$\overrightarrow{u} \leftrightarrow (a, b, c) \qquad \overrightarrow{v} \leftrightarrow (e, f, g),$$

ortogonais a $\overrightarrow{w}$ e com direcções diferentes. A recta pode então ser caracterizada em compreensão pelo sistema de equações cartesianas

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ ex + fy + gz = h \end{cases},$$

onde

$$d = ax_1 + by_1 + cz_1, \quad h = ex_1 + fy_1 + gz_1.$$

Exercício 110. Represente por um sistema de equações cartesianas a recta que passa pelo ponto $A \leftrightarrow (1, 0, -2)$ e admite o vector $\overrightarrow{w} \leftrightarrow (-1, 2, -1)$ como vector director.

Exercício 111. Represente por um sistema de equações cartesianas a recta que passa pelos pontos $A \leftrightarrow (1, 2, -1)$ e $B \leftrightarrow (-1, 1, 0)$. Verifique se o ponto $C \leftrightarrow (-1, 7, -2)$ pertence ou não a essa recta.

Existe uma maneira alternativa de obter um sistema de equações cartesianas de uma recta, da qual se conhece um ponto particular e um vector director, que é muito utilizada na prática. Descrevamo-la através de um exemplo elucidativo:

Suponhamos que queremos determinar um sistema de equações que caracterize os pontos da recta que passa por $A \leftrightarrow (-1, 1, 2)$ e que admite o vector $\overrightarrow{w} \leftrightarrow (2, 4, 3)$ como vector director. Um ponto $X \leftrightarrow (x, y, z)$ estará sobre esta recta se, e só se, o vector $\overrightarrow{AX} \leftrightarrow (x + 1, y - 1, z - 2)$ pertencer à recta vectorial determinada por $\overrightarrow{w}$, ou seja, se, e só se, existe $t \in \mathbb{R}$ tal que

$$\overrightarrow{AX} = t\overrightarrow{w} \leftrightarrow (2t, 4t, 3t).$$

Esta última condição é equivalente à existência de $t \in \mathbb{R}$ que verifique simultaneamente as igualdades

$$x + 1 = 2t, \quad y - 1 = 4t, \quad z - 2 = 3t,$$

que também podem ser escritas na forma

$$\frac{x+1}{2}=t, \quad \frac{y-1}{4}=t, \quad \frac{z-2}{3}=t.$$

Ora, a existência de $t \in \mathbb{R}$ nas condições anteriores é claramente equivalente ao sistema de equações

$$\begin{cases} \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{4} \\ \frac{y-1}{4} = \frac{z-2}{3} \end{cases},$$

que não é mais do que o sistema de equações procurado.[15] Este último sistema costuma ser apresentado na forma, visualmente mais agradável,

$$\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-2}{3}.$$

A maior vantagem do sistema de equações cartesianas escrito nesta forma é a de permitir "ler" muito facilmente tanto as coordenadas de um ponto particular (neste caso $(-1,1,2)$) como as coordenadas de um vector director (neste caso $(2,4,3)$).

O que se fez no exemplo anterior pode ser feito do mesmo modo sempre que o vector director tenha as três coordenadas diferentes de 0. Podemos enunciar a conclusão a que se chega no caso geral:

P 36. Uma recta que passa pelo ponto $A \leftrightarrow (x_1, y_1, z_1)$ e admite como vector director $\overrightarrow{w} \leftrightarrow (a,b,c)$, com $a \neq 0, b \neq 0$ e $c \neq 0$, pode ser representada pelo sistema de equações cartesianas

$$\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c}.$$

Exercício 112. Resolva de novo o exercício 110, agora pelo método que acabamos de descrever.

Exercício 113. a) Determine um ponto particular e um vector director da recta que admite o sistema de equações cartesianas

$$\frac{x+1}{2}=-\frac{y}{3}=z-1.$$

b) Verifique que a recta referida é paralela ao plano de equação cartesiana $x+y+z=1$. **Sugestão:** Compare o vector director da recta com um vector ortogonal ao plano.

O método que acabámos de descrever só se aplica directamente no caso em que o vector director tem todas as coordenadas diferentes de 0. Propomos em seguida como exercício a adaptação do método a casos em que uma ou duas coordenadas deste vector são nulas.[16]

Exercício 114. Adapte o método anteriormente descrito de forma a obter equações cartesianas para as rectas que passam pelo ponto $A \leftrightarrow (-1,1,2)$ e admitem como vectores directores:
a) O vector $\overrightarrow{w} \leftrightarrow (1,0,-2)$;

---

[15]Este sistema não está apresentado na forma mais habitual mas pode, se o desejarmos, ser posto nessa forma. Por exemplo, a primeira equação também pode ser escrita na forma $\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}y = -\frac{1}{2} - \frac{1}{4}$ e representa assim um plano ortogonal ao vector $\overrightarrow{u} \leftrightarrow (\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, 0)$.

[16]É claro que elas não podem ser todas nulas, uma vez que então tínhamos o vector $\overrightarrow{0}$, que não é um vector director.

b) O vector $\overrightarrow{w}' \leftrightarrow (0,0,3)$.

★ ★ ★ ★

Como aplicação do estudo da Geometria Analítica Plana examinámos, a partir da página 63, uma interpretação geométrica dos sistemas de equações lineares nas duas variáveis x e y, chegando à conclusão de que, uma vez que cada uma das equações representa uma recta do plano, o sistema representa a intersecção das rectas correspondentes, que pode ser um ponto (no caso em que temos rectas concorrentes), o conjunto vazio (no caso em que temos rectas estritamente paralelas) e uma recta (no caso em que temos rectas coincidentes).

É natural levantarmos uma questão análoga sobre como interpretar, à luz da Geometria Analítica do Espaço, as diferentes possibilidades de solução de um sistema de equações lineares nas três incógnitas x, y, z.

Recordemos que uma equação linear é uma equação que se pode reduzir à forma $ax + by + cz = d$, onde a, b, c, d são números reais dados e, pelo menos um dos três coeficientes a, b, c é diferente de 0. Como sabemos, o conjunto das soluções de uma equação linear isolada é sempre um plano, perpendicular ao vector de coordenadas (a, b, c).

O que se passa com um sistema de duas equações lineares nas três incógnitas x, y, z,

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ ex + fy + gz = h \end{cases},$$

também já foi examinado atrás: Vimos em P30 que, quando os vectores não nulos $\overrightarrow{u} \leftrightarrow (a, b, c)$ e $\overrightarrow{v} \leftrightarrow (e, f, g)$ têm direcções diferentes, o conjunto das soluções representa uma recta do espaço, com um vector director perpendicular a $\overrightarrow{u}$ e a $\overrightarrow{v}$ (costuma-se dizer que temos um sistema *indeterminado*), e, ao resolver o exercício 109, descobriu decerto que, quando aqueles dois vectores têm a mesma direcção, os planos representados por cada uma das equações são paralelos e portanto o conjunto das soluções ou é vazio (no caso dos planos estritamente paralelos) ou representa um plano (no caso em que os dois planos coincidem); no primeiro caso podemos dizer que o sistema é *impossível* e, no segundo, que ele é, mais uma vez, *indeterminado*.

Vamos agora examinar o que se pode dizer sobre o conjunto das soluções dum sistema de três equações nas incógnitas x, y, z,

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ ex + fy + gz = h \\ mx + ny + pz = q \end{cases}.$$

Como antes, vão jogar um papel importante os três vectores não nulos $\overrightarrow{u} \leftrightarrow (a, b, c)$, $\overrightarrow{v} \leftrightarrow (e, f, g)$ e $\overrightarrow{w} \leftrightarrow (m, n, p)$. Se dois deles, por exemplo os dois primeiros, tiverem a mesma direcção, os correspondentes planos são paralelos e caímos nas situações já estudadas: Mais precisamente:

a) Se os planos forem estritamente paralelos não existe nenhuma solução comum das duas primeiras equações e portanto também do sistema de partida; este representa assim o conjunto vazio (costuma-se então dizer que o sistema inicial é um *sistema impossível*).

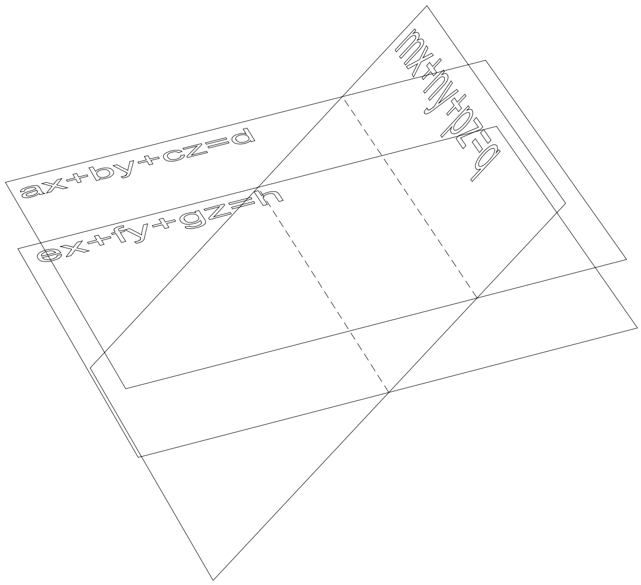


Figura 73

b) Se os planos coincidirem, as duas equações em questão são equivalentes e portanto o sistemas de três equações fica equivalente ao sistema de duas equações

$$\begin{cases} ax+by+cz=d \\ mx+ny+pz=q \end{cases},$$

cujos comportamentos possíveis já foram discutidos atrás (o sistema é impossível ou indeterminado).

Resta-nos verificar o que sucede quando, de entre os três vectores $\overrightarrow{u} \leftrightarrow (a,b,c)$, $\overrightarrow{v} \leftrightarrow (e,f,g)$ e $\overrightarrow{w} \leftrightarrow (m,n,p)$, não há dois com a mesma direcção. Nesse caso, sabemos que a primeira equação $ax+by+cz=d$ representa um plano α, ortogonal ao vector $\overrightarrow{u}$ e que o sistema das duas últimas equações

$$\begin{cases} ex+fy+gz=h \\ mx+ny+pz=q \end{cases}$$

representa uma recta r, cujos vectores directores são perpendiculares a $\overrightarrow{v}$ e a $\overrightarrow{w}$

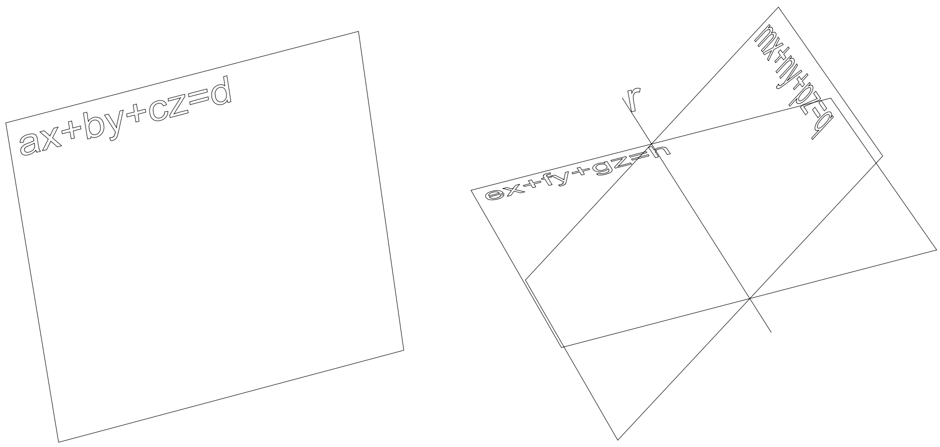


Figura 74

pelo que o sistema das três equações vai representar a intersecção do plano α com a recta r. Chegados a este ponto temos, mais uma vez, três situações possíveis:

a) Se a recta r não é paralela ao plano α a intersecção é um conjunto constituído por um único ponto A, e portanto o sistema das três equações de que partimos tem uma única solução (costuma-se dizer, por isso, que é um sistema *possível e determinado*).

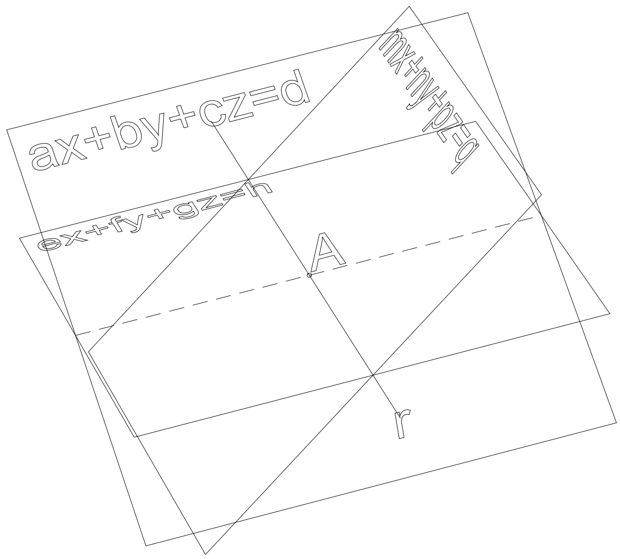


Figura 75

b) Se a recta r é estritamente paralela ao plano α a intersecção é o conjunto vazio e temos, mais uma vez, um sistema de equações impossível.

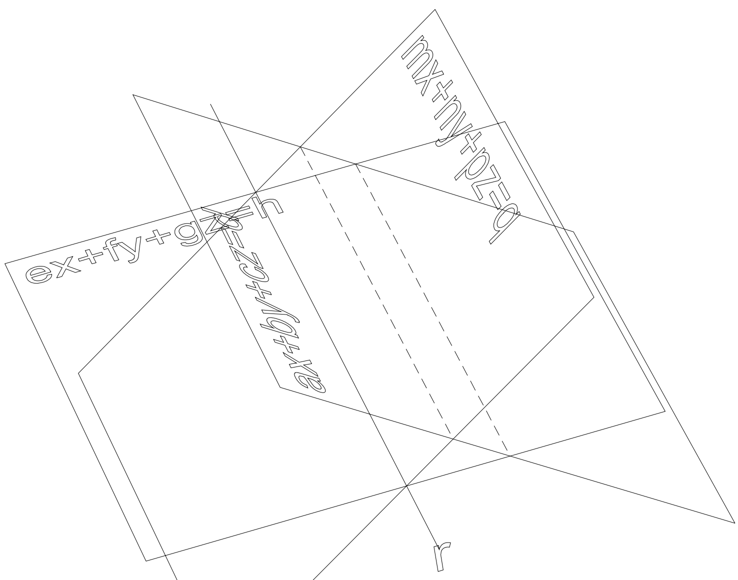


Figura 76

c) Se a recta r está contida no plano α, a intersecção é a recta r e portanto o sistema é, mais uma vez, indeterminado.

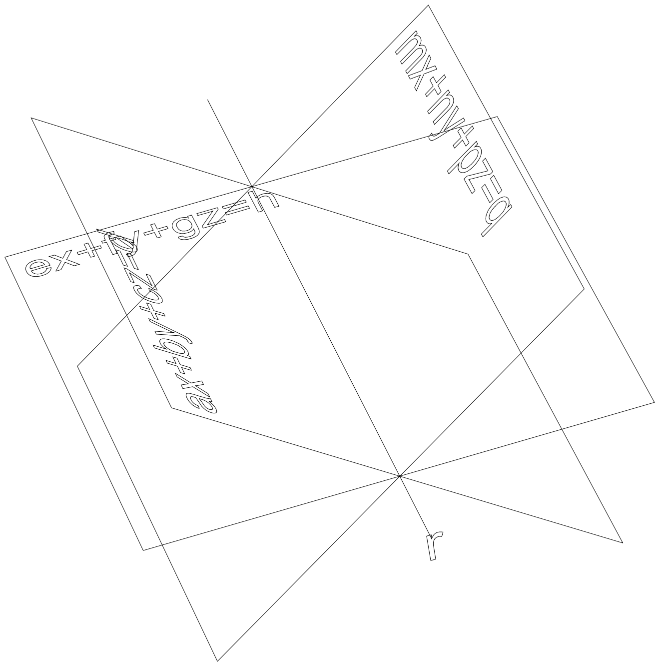


Figura 77

Depois de termos interpretado geometricamente as diferentes propriedades que podem estar associadas a um sistema de três equações lineares nas três incógnitas x, y, z, valerá a pena examinar, através de exemplos, o modo como podemos proceder para determinar explicitamente a solução de um tal sistema, quando ele for possível e determinado, ou, alternativamente, para concluirmos a sua indeterminação ou impossibilidade.

Partamos, por exemplo, do sistema de equações

$$\begin{cases} 2x + 3y + 2z = 2 \\ 3x + 2y + 2z = 5 \\ -2x + 4y + 3z = -1 \end{cases}.$$

Qualquer dos métodos que costuma utilizar para resolver sistemas de duas equações em duas incógnitas pode ser adaptado para um sistema como o anterior. Vamos utilizar o chamado “método de substituição”. Para isso, começamos por substituir uma das equações, por exemplo a primeira, por outra equivalente com uma incógnita isolada no primeiro membro da igualdade, de modo que no segundo membro só apareçam as outras incógnitas. Obtemos assim o sistema equivalente

$$\begin{cases} x = -\frac{3}{2}y - z + 1 \\ 3x + 2y + 2z = 5 \\ -2x + 4y + 3z = -1 \end{cases}.$$

Em seguida, conservamos a primeira equação e substituímos x nas restantes duas pelo valor no segundo membro da primeira equação, o que conduz ao sistema equivalente

$$\begin{cases} x = -\frac{3}{2}y - z + 1 \\ 3(-\frac{3}{2}y - z + 1) + 2y + 2z = 5 \\ -2(-\frac{3}{2}y - z + 1) + 4y + 3z = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{2}y - z + 1 \\ -\frac{5}{2}y - z = 2 \\ 7y + 5z = 1 \end{cases}.$$

Podemos agora obter novos sistemas equivalentes, conservando a primeira equação e trabalhando com as duas últimas como trabalharíamos com qualquer sistema de duas equações em duas incógnitas:

$$\begin{cases} x = -\frac{3}{2}y - z + 1 \\ z = -\frac{5}{2}y - 2 \\ 7y + 5z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{2}y - z + 1 \\ z = -\frac{5}{2}y - 2 \\ 7y + 5(-\frac{5}{2}y - 2) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} x = -\frac{3}{2}y - z + 1 \\ z = -\frac{5}{2}y - 2 \\ -\frac{11}{2}y = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{2}y - z + 1 \\ z = -\frac{5}{2}y - 2 \\ y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} x = -\frac{3}{2}y - z + 1 \\ z = 3 \\ y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ z = 3 \\ y = -2 \end{cases} .$$

Concluímos então que o sistema tem solução única, correspondente ao ponto $A \leftrightarrow (1{-}2, 3)$.

Examinemos agora outro exemplo de sistema de três equações lineares:

$$\begin{cases} 2x + 3y + 2z = 2 \\ 3x + 2y + 2z = 5 \\ x + 4y + 2z = 0 \end{cases} .$$

Procedendo como no caso anterior, obtemos sistemas sucessivamente equivalentes,

$$\begin{cases} 2x + 3y + 2z = 2 \\ 3x + 2y + 2z = 5 \\ x = -4y - 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(-4y - 2z) + 3y + 2z = 2 \\ 3(-4y - 2z) + 2y + 2z = 5 \\ x = -4y - 2z \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} -5y - 2z = 2 \\ -10y - 4z = 5 \\ x = -4y - 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -\frac{5}{2}y - 1 \\ -10y - 4z = 5 \\ x = -4y - 2z \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} z = -\frac{5}{2}y - 1 \\ -10y - 4(-\frac{5}{2}y - 1) = 5 \\ x = -4y - 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -\frac{5}{2}y - 1 \\ 4 = 5 \\ x = -4y - 2z \end{cases} .$$

Examinando a segunda equação, concluímos que estamos em presença de um sistema impossível.

Exercício 115. Verifique se o sistema de equações

$$\begin{cases} 2x + 3y + 2z = 2 \\ 3x + 2y + 2z = 5 \\ x + 4y + 2z = -1 \end{cases}$$

é impossível, indeterminado, ou possível e determinado. Interprete geometricamente o conjunto das soluções deste sistema.