UNIVERSIDADE DE LISBOA

Faculdade de Ciências

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

10º ANO

GEOMETRIA

Armando Machado

2001

REANIMAT

Projecto Gulbenkian de Reanimação Científica da Matemática no Ensino Secundário

FUNDAÇÃO CALOUSTE GULBENKIAN

1. Pontos, rectas e planos; Incidência e paralelismo.

A Geometria, enquanto forma de organizar o conhecimento da forma dos objectos e das posições destes no espaço, já tem vindo a ser abordada em estudos anteriores. O que pretendemos nesta secção introdutória é relembrar, recorrendo a situações simples como exemplos, alguns dos conceitos e propriedades básicos já estudados, em particular o modo como eles contribuem para nos ajudar a compreender a realidade que nos rodeia e a formular e resolver problemas.

As entidades mais básicas com que se trabalha em Geometria são os pontos as rectas e os planos. Essas entidades não estão exactamente presentes nos objectos que pretendemos estudar mas são entidades abstractas que ajudam a compreender, de maneira mais ou menos aproximada, esses objectos.

Os pontos são as porções mais pequenas dos objectos que se podem individualizar. Como noutras situações, isso é apenas aproximado, nós nunca **vemos** um ponto, podemos é **pensar** num ponto e isso ajuda-nos a descrever o que se passa com porções muito pequenas dum objecto.

As rectas são conjuntos de pontos do espaço que são imaginados intuitivamente a partir de realidades experimentais como a imagem de um fio esticado ou um percurso de um raio luminoso; a ideia de raio luminoso já pode parecer um pouco abstracta, mas ela pode ser concretizada quando, dados dois pontos, pensamos nos pontos do espaço donde os dois são vistos na mesma direcção. As rectas aparecem frequentemente nos objectos e situações estudados através de algumas das suas partes, como os segmentos e as semirectas. As arestas de certos sólidos são exemplos de segmentos de recta.

Os planos são também conjuntos de pontos do espaço que modelam realidades experimentais como um tampo de uma mesa ou uma superfície de um lago. Tanto num caso como noutro, essas realidades não correspondem exactamente à nossa ideia de plano, que consideramos como algo que se estende indefinidamente em todas as direcções, mas a experiência mostra que a ideia de plano pode ser utilizada com êxito para descrever propriedades dos objectos. O caso da superfície dum lago é ainda um exemplo típico do modo como os objectos abstractos matemáticos são utilizados para estudar uma realidade que não se adapta perfeitamente a eles: A superfície dum lago aproxima-se mais duma parte duma superfície esférica, com raio da ordem dos 6700 Km, mas a experiência mostra que, no caso de não estarmos a estudar porções muito grandes do lago, o facto de olharmos para a superfície como sendo parte dum plano conduz a conclusões aceitáveis, dentro do grau de precisão com que trabalhamos.

Entre pontos, rectas e planos existem certas relações elementares, que todos conhecemos perfeitamente, e a que por vezes se dá o nome de *relações de incidência*. Todos nós sabemos o que é um ponto estar ou não sobre uma recta ou sobre um plano, ou, na linguagem dos conjuntos, o ponto *pertencer* ou não à recta ou ao plano. Todos sabemos também o que é uma recta estar ou não sobre um plano e que dizer que uma recta está sobre um plano equivale a dizer que todos os pontos que estão sobre a recta estão também sobre o plano; na linguagem dos conjuntos, a recta está ou não *contida* no plano. Em vez de dizer que um ponto está sobre uma recta, também se diz que a recta passa pelo ponto; em vez de dizer que um ponto ou uma recta está sobre um plano, também se diz que o plano passa pelo ponto ou pela recta.

A experiência conduziu à formulação de certas propriedades básicas envolvendo pontos, rectas e planos e as respectivas relações de incidência. Trata-se de propriedades com um tal grau de evidência que ninguém tem dúvidas em aceitar como válidas, sem sentir necessidade de mais explicações. A Geometria dos gregos, coligida por Euclides nos famosos Elementos, chamava a essas propriedades básicas *postulados* ou *axiomas* e procurava justificar todas as outras a partir delas usando o raciocínio matemático. Uma vez que no nosso curso não parece oportuno seguir a mesma via que os matemáticos gregos para estudar a Geometria, nem o poderíamos fazer no tempo de que dispomos, vamos enunciar apenas algumas dessas propriedades básicas que, apesar de evidentes, são suficientemente importantes para merecerem ser sublinhadas (chamar-lhes-emos *propriedades intuitivas*, e abreviamo-las com as iniciais PI).

PI 1. Dados dois pontos distintos X e Y, existe uma, e uma só, recta que passa por ambos. Essa recta, que se diz ser a *definida pelos pontos* X e Y, costuma ser notada XY.

Na figura 1 estão representados os vértices e as arestas de um sólido bem conhecido, o *cubo*. Os vértices são pontos do espaço. As arestas não são rectas mas sim porções de rectas que nos ajudam a imaginá-las na sua totalidade. As faces do cubo, não sendo planos, são porções de planos que, como anteriormente, ajudam-nos a imaginar esses planos na sua totalidade.

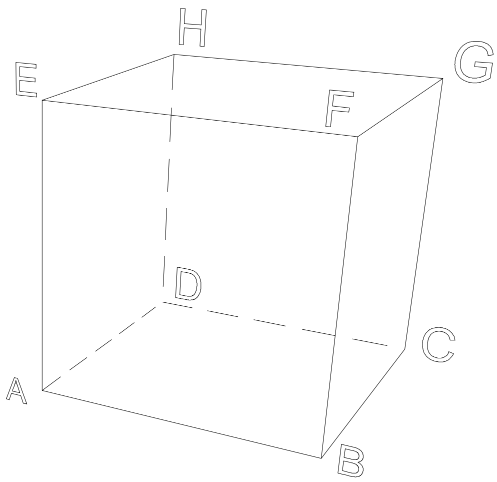


Figura 1

Quando nos estamos a referir a alguns pontos, dizemos que eles são *colineares* se existir uma recta que passa por todos eles. Do mesmo modo, quando nos estamos a referir a alguns pontos, a algumas rectas ou a alguns pontos e rectas, dizemos que eles são *complanares* se existir um plano que passa por todos eles.

A geometria do plano é mais intuitiva, e portanto mais facilmente compreendida, que a geometria do espaço. De certo modo, a maioria dos processos utilizados para estudar a geometria do espaço corresponde a tentar fazer depender a resolução dos problemas com que nos deparamos da resolução de outros problemas de geometria plana, ou seja de problemas que envolvem objectos complanares.

Dois pontos são sempre colineares. No entanto, três pontos já podem sê-lo ou não, uma vez que existe uma única recta que passa pelos dois primeiros e então o terceiro ponto pode estar ou não sobre essa recta.

PI 2. Dados três pontos não colineares X, Y e Z, existe um, e um só, plano que passa por todos eles. Esse plano, que se diz ser o definido pelos pontos X, Y e Z, costuma ser notado XYZ.

Se o leitor pensar um pouco verificará que a propriedade anterior é a que explica por que razão é mais fácil construir uma mesa com três pernas do que com quatro e por que razão as mesas com quatro pernas, apesar de frequentes, levantam problemas quando mal construídas. Repare-se também que se três pontos forem colineares ainda existe um plano que passa por todos eles; o que não podemos dizer é que esse plano seja único, uma vez que qualquer plano que passe pela recta que contém os três pontos também passa pelos três pontos.

Por exemplo, no quadro da figura 1, podemos falar do plano ABC para significar o único plano que contém os pontos A, B e C, isto é, o plano sugerido pela face inferior do cubo. Note-se que "o plano ABC" e "o plano ABD" significam a mesma coisa, apesar de termos escolhido pontos diferentes para a nomear. Repare-se que uma das coisas que a nossa intuição nos garante é que esse plano contém também, por exemplo, todos os pontos da recta AB. Em geral,

> PI 3. Se uma recta tem dois pontos distintos sobre um certo plano, então a recta está sobre o plano, por outras palavras, todos os outros pontos da recta estão também sobre o plano.

Exercício 1. Há um método simples, utilizando a propriedade atrás sublinhada, para testar, utilizando uma régua, se um tampo de uma mesa é plano.
a) Descreva esse método.
b) Repare que, apesar de o teste, ao falhar, poder servir para mostrar que o tampo não é plano, o facto de o teste não falhar não é suficiente para provar matematicamente que o tampo é plano. Apesar disso, se aplicarmos o teste convenientemente, podemos ficar com uma convicção muito forte de que o tampo é plano[1].

Exercício 2. Se estivesse na praia, como faria para alisar (tornar plana) uma porção irregular da superfície da areia, com a ajuda de duas réguas de madeira?

Exercício 3. Repare que, dos vértices do cubo representado na figura 1, não há três que sejam colineares. Quantas rectas podem ser nomeadas a partir desses vértices? Destas, quantas correspondem a arestas do cubo, quantas não correspondem a arestas do cubo mas estão contidas no plano dalguma das suas faces (as *diagonais faciais*) e quantas não estão contidas em nenhum dos planos das faces (as *diagonais espaciais*)?

Apesar de não ser nosso objectivo desenvolver a Geometria no espírito dos matemáticos gregos, não deixa de ser instrutivo *tomar o gosto* a esse tipo de actividade intelectual resolvendo as duas alíneas, muito simples, do exercício seguinte:

Exercício 4. Utilizando propriedades que temos vindo a sublinhar, justifique os factos seguintes:
a) Dadas duas rectas distintas, ou não existe nenhum ponto que esteja sobre ambas, ou existe um único ponto nessas condições. Na liguagem dos conjuntos, a intersecção das duas rectas é o conjunto vazio $\emptyset$ ou um conjunto com um único elemento.
b) Dados uma recta e um ponto que não esteja sobre ela, existe um, e um só, plano que passa pela recta e pelo ponto (mais uma vez, diz-se que esse é o *plano definido pela recta e pelo ponto*).
c) Dadas duas rectas distintas que passem por um mesmo ponto, existe um único plano que passe por ambas (o *plano definido pelas duas rectas*).

> Duas rectas dizem-se *concorrentes* se forem distintas e tiverem um ponto comum. A esse ponto comum, que é único como acabámos de relembrar, dá-se então o nome de *intersecção* das duas rectas.[2]

O próximo exercício tem o mesmo espírito que o anterior.

---

[1]É o que se passa, analogamente, com a conhecida prova dos noves para testar se nos enganámos numa operação: Quando a prova falha, a operação está de certeza errada mas quando ela não falha apenas podemos afirmar que é provável que ela esteja certa.
[2]Trata-se de um pequeno abuso de linguagem, que não é grave desde que tenhamos consciência dele: quando pensamos na noção de intersecção no quadro dos conjuntos a intersecção não é um ponto, mas um conjunto com um único elemento.

Exercício 5. Mostre que, se uma recta não está sobre um certo plano, então ou não existe nenhum ponto comum a ambos, ou existe um único ponto nessa condições. Na linguagem dos conjuntos, a intersecção de um recta com um plano que não passe por ela é o conjunto vazio ou um conjunto com um único elemento.

Analogamente ao que se passava com duas rectas, uma recta e um plano dizem-se *concorrentes* se a recta não estiver sobre o plano mas ambos tiverem um ponto comum; neste último caso, dizemos que esse ponto é a *intersecção* da recta e do plano.[3]

Relativamente aos pontos comuns a dois planos já não podemos prever quais as diferentes situações possíveis apenas a partir das propriedades que já referimos atrás. De facto, com raciocínios do mesmo tipo que os utilizados nos dois exercícios precedentes, poderíamos deduzir que, relativamente a dois planos distintos, apenas seriam a priori possíveis três situações:
a) Não existe nenhum ponto sobre ambos os planos;
b) Existe um, e um só, ponto sobre ambos os planos;
c) Os pontos comuns a ambos os planos são exactamente os pontos de uma certa recta;
(os amantes do raciocínio dedutivo não vão decerto deixar de tentar provar este facto, apesar de não estarmos a sugerir que o façam[4]). O que já não conseguimos justificar, a não ser pelo nosso conhecimento intuitivo, é que a hipótese b) nunca acontece. Acrescentamos assim à lista das propriedades que temos vindo a apontar:

PI 4. A intersecção de dois planos distintos ou é o conjunto vazio ou é uma recta.

Diz-se que dois planos são *concorrentes* ou *secantes*, se forem distintos e tiverem algum ponto comum e, nesse caso, a *intersecção* dos dois planos é a recta cujos pontos são os pontos comuns aos dois planos.[5]

Reportando-nos de novo ao cubo da figura 1, os planos correspondentes às faces superior e inferior não têm pontos comuns e os planos correspondentes às faces superior e anterior têm pontos comuns e a sua intersecção é a recta EF.

★ ★ ★ ★

A discussão atrás conduzida sobre os possíveis pontos comuns a duas rectas, a dois planos ou a uma recta e um plano conduz também à noção bem conhecida de paralelismo, que relembramos em seguida.

Comecemos com o caso do paralelismo de duas rectas.

Duas rectas dizem-se *estritamente paralelas* se forem complanares e não tiverem nenhum ponto comum. Duas rectas dizem-se *paralelas* se forem estritamente paralelas ou coincidirem.

A razão por que não definimos simplesmente rectas paralelas como aquelas que são complanares e não têm pontos comuns está em que gostaríamos que uma recta seja paralela a ela mesma, de modo a que, por exemplo, o paralelismo de duas rectas corresponda intuitivamente à ideia de elas terem a mesma direcção. Repare-se também na necessidade de exigirmos que a rectas sejam complanares. Por exemplo, baseando-nos no cubo representado na figura 1, na página 2, as rectas que contêm as arestas EH e FG são paralelas mas aquelas que contêm as arestas EH e BF, apesar de não terem pontos comuns não são paralelas (é intuitivo que elas não têm a mesma direcção).

Exercício 6. Mostre que, se r e r' são duas rectas estritamente paralelas, então existe um único plano que contém ambas (o *plano definido pelas rectas estritamente paralelas* r e r').

[3]Temos mais uma vez o abuso de linguagem atrás referido.
[4]Também não estamos a proibir…
[5]Aqui já não há abuso de linguagem; esta intersecção é precisamente a intersecção no sentido dos conjuntos.

PI 5. (Postulado das paralelas) Dados uma recta e um ponto que não esteja sobre ela, existe uma, e uma só, recta que passa pelo ponto e é paralela à primeira.[6]

A afirmação anterior, que, tal como as anteriores, pode ser considerada intuitiva, jogou um papel muito importante na Historia da Geometria. O que se passa é que, a começar pelos próprios artífices da Escola Grega de Geometria, esta propriedade não parecia tão evidente como as restantes pelo que tentaram várias vezes, sem êxito, demonstrá-la a partir destas. Esses esforços continuaram, sempre sem êxito, em várias épocas e em várias partes do mundo e só no século 19, com os trabalhos de Lobachevsky e Riemann se compreendeu a razão do insucesso. Estes matemáticos construiram modelos de Geometria em que os restantes postulados eram verdadeiros e o postulado das paralelas era falso, no primeiro caso por existirem várias paralelas a passar pelo ponto e no segundo por não haver nenhuma, e mostraram que o estudo dessas Geometrias (as Geometrias não Euclidianas) podia ser desenvolvido sem problemas. Ficava de pé a questão de saber qual das geometrias, a euclidiana ou alguma daquelas duas, se adaptava melhor ao espaço em que a nossa experiência vive. Foram realizadas experiências indirectas, nomeadamente através da determinação soma dos ângulos internos de triângulos de grandes dimensões, uma vez que uma das consequências das geometrias não euclidianas era o facto de essa soma ser diferente de 180° (menor no caso da Geometria de Lobachevsky e maior no caso da de Riemann). No entanto essas experiências nunca foram conclusivas e as diferenças detectadas eram da ordem de grandeza dos erros previsíveis dos instrumentos. Vamos assim continuar a aceitar que o postulado das paralelas é efectivamente verdadeiro.

Exercício 7. Utilizando, mais uma vez, o cubo da figura 1 como apoio da intuição, mostre que, se na definição de rectas paralelas não tivéssemos exigido que elas fossem complanares, o postulado das paralelas seria claramente falso.

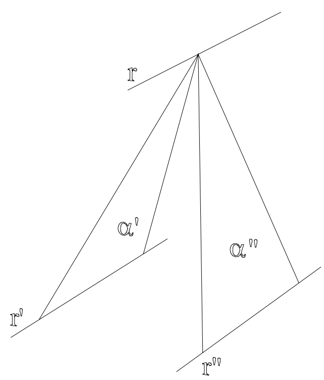


Figura 2

Vamos agora examinar uma propriedade do paralelismo de rectas que tem inúmeras aplicações. Suponhamos que temos duas rectas paralelas r' e r'' e dois planos concorrentes α' e α'', contendo r' e r'', respectivamente (cf. a figura 2). O que poderemos dizer sobre a recta r, intersecção dos planos α' e α''?

Se pensarmos um pouco, apoiando-nos eventualmente numa experiência com uma folha de papel dobrada, é possível que a nossa intuição nos sugira que a recta r é paralela tanto a r' como a r''. De facto isso acontece e a conclusão é suficientemente importante para merecer ser sublinhada:

[6]Se o ponto estiver sobre a recta dada, também há evidentemente uma única paralela a esta a passar pelo ponto, a saber a própria recta dada.

P 6. Sejam α' e α'' dois planos concorrentes, contendo respectivamente duas rectas paralelas r' e r''. A intersecção r dos planos α' e α'' é então uma recta, paralela a r' e a r''.

A propriedade precedente está talvez no limite daquilo que pode ser considerado intuitivo. O estudante mais curioso poderá tentar resolver o exercício seguinte, onde é sugerido um modo de justificar esta propriedade.

Exercício 8. Demonstre a propriedade P 6, seguindo, por exemplo, o seguinte caminho:
a) No caso especial em que $r' = r''$, o que será a recta r? Conclua que neste caso especial a conclusão é verdadeira pelo que se pode passar a examinar o caso em que as rectas r' e r'' são estritamente paralelas.
b) Mostre apenas que r é paralela a r', uma vez que o que se passa com a outra recta é análogo. Tente raciocinar pelo método de redução ao absurdo, admitindo que as rectas não eram paralelas e chamando B à intersecção das rectas r e r'. Chame α ao plano que contém as rectas r' e r'' (cf. a figura 3).

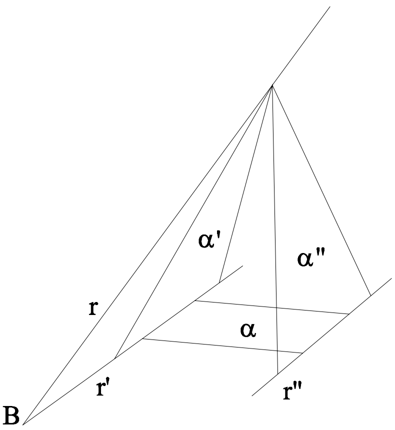


Figura 3

Reparando que tanto B como r'' estão simultaneamente sobre os planos α e α'' e que B não está sobre r'', conclua que os planos α e α'' têm que coincidir e daqui que r e r' têm que coincidir, contrariando a hipótese de estas rectas não serem paralelas.

A relação de paralelismo entre rectas do espaço verifica, evidentemente, as duas propriedades seguintes:
a) Qualquer recta é paralela a si mesma (propriedade reflexiva);
b) Se a recta r é paralela à recta r', então a recta r' é também paralela à recta r (propriedade simétrica).

Esta relação entre rectas do espaço é um exemplo de *relação de equivalência*, uma vez que, além das propriedades reflexiva e simétrica, referidas atrás, verifica também a seguinte propriedade transitiva:

P 7. (Propriedade transitiva) Se a recta r é paralela à recta r' e a recta r' é paralela à recta r'', então a recta r é paralela à recta r''.

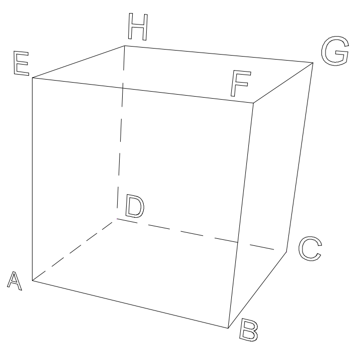


Figura 4

Continuando a utilizar a figura do cubo como fonte de exemplos, do facto de as rectas EF e AB serem paralelas (não têm pontos comuns e estão ambas no plano anterior) e do facto de as rectas AB e DC serem também paralelas, podemos concluir que as rectas EF e DC são ainda paralelas.

Se pensarmos um pouco, a propriedade transitiva não é tão evidente como isso, apesar de algumas experiências, envolvendo mais uma vez uma folha de papel dobrada segundo um vinco paralelo a dois dos lados, nos levarem a intuir a sua verdade. Tentando uma demonstração, é fácil concluir, utilizando o postulado das paralelas, que as rectas r e r'', se não coincidirem, não podem ter nenhum ponto comum (senão, por esse ponto comum estavam a passar duas paralelas à recta r'); no entanto, como é que sabemos que r e r'' são complanares? A propriedade transitiva é efectivamente verdadeira, e pode ser explicada a partir das outras propriedades que temos vindo a referir mas, uma vez que a prova é um pouco artificiosa, limitamo-nos a sugeri-la como exercício para o estudante mais curioso.

Exercício 9. Suponhamos que a recta r é paralela à recta r' e que a recta r' é paralela à recta r''. Mostre que a recta r é paralela à recta r'' seguindo, por exemplo, o seguinte caminho:
a) Repare que a conclusão é verdadeira no caso em que duas das rectas r, r' e r'' coincidam, o que permite limitar a demonstração ao caso em que as três rectas são todas distintas.
b) Repare que o postulado das paralelas permite garantir que r e r'' não podem ter pontos comuns.

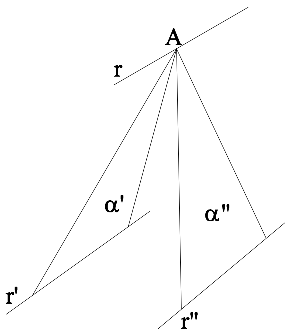


Figura 5

c) Escolha um ponto A na recta r e considere o plano α' que contém A e r' e o plano α'' que contém A e r''. Se os planos α' e α'' forem concorrentes, utilize a propriedade P 6 para garantir que a recta intersecção destes planos é paralela a r' e a r'', em particular tem que ser a recta r e esta é paralela a r''.
d) No caso de "termos azar" e os planos α' e α'' coincidirem, utilize o facto de r e r' serem paralelas para deduzir que a recta r está no mesmo plano e portanto, lembrando a conclusão de b), que a recta r é paralela à recta r''.

Depois de examinarmos a relação de paralelismo entre rectas, relembremos o que quer dizer o paralelismo entre uma recta e um plano.

Uma recta e um plano dizem-se *estritamente paralelos* se não tiverem pontos comuns. Uma recta e um plano dizem-se *paralelos* se forem estritamente paralelos ou a recta estiver sobre o plano.

Exercício 10. Apoiando-se na sua intuição e nos objectos manipuláveis que tiver à mão, diga quais das seguintes afirmações são verdadeiras e quais são falsas. Para as afirmações que forem verdadeiras poderá, se assim o desejar, apresentar uma justificação. Poderá ser conveniente riscar com um lápis as afirmações falsas.
a) Se uma recta é paralela a um plano, então é paralela a todas as rectas desse plano.
b) Se uma recta é paralela a um plano, então é paralela a alguma recta desse plano.
c) Se uma recta é paralela a um plano, então é paralela a uma, e uma só, recta desse plano.
d) Se uma recta é paralela a um plano, então é paralela a todas as rectas desse plano que sejam complanares com ela.
e) Se uma recta é estritamente paralela a um plano, então é paralela a todas as rectas desse plano que

sejam complanares com ela.
f) Se uma recta é paralela a alguma recta dum plano, então ela é paralela a esse plano.
g) Se duas rectas são paralelas a um plano então são paralelas entre si.
h) Se uma recta é paralela a um plano, então qualquer recta paralela a esta é também paralela a esse plano.
i) Se uma recta é paralela a dois planos concorrentes, então também é paralela à respectiva intersecção.

Algumas das afirmações verdadeiras no exercício precedente são suficientemente importantes para merecerem ser sublinhadas:

P 8. Uma recta é paralela a um plano se, e só se, é paralela a alguma recta desse plano.

P 9. Se uma recta é estritamente paralela a um plano, então é paralela a todas as rectas do plano com as quais ela seja complanar.

P 10. Se uma recta é paralela a um plano, então qualquer recta paralela a esta é também paralela a esse plano.

P 11. Se uma recta é paralela a dois planos concorrentes, então também é paralela à respectiva intersecção.

Passemos agora ao exame da relação de paralelismo entre dois planos.

Dois planos dizem-se *estritamente paralelos* se não existe nenhum ponto simultaneamente em ambos. Dois planos dizem-se *paralelos* se forem estritamente paralelos ou coincidirem.

Exercício 11. Apoiando-se na sua intuição e nos objectos manipuláveis que tiver à mão, diga quais das seguintes afirmações são verdadeiras e quais são falsas. Para as afirmações que forem verdadeiras poderá, se assim o desejar, apresentar uma justificação. Como antes, é boa ideia riscar a lápis as afirmações falsas.
a) Se dois planos são paralelos, então qualquer recta de um dos planos é paralela ao outro plano.
b) Se qualquer recta de um plano é paralela a outro plano, então os dois planos são paralelos.
c) Se um plano tem duas rectas concorrentes paralelas a outro plano, então os dois planos são paralelos.
d) Se dois planos são paralelos, então qualquer recta paralela ao primeiro é também paralela ao segundo.
e) Se o plano α é paralelo ao plano α' e α' é paralelo ao plano α'', então α é paralelo a α'' (a relação de paralelismo entre planos é uma relação de equivalência).
f) Se dois planos são paralelos a uma mesma recta, então são paralelos entre si.
g) Se os planos α e β são concorrentes e com intersecção r e se α' é um plano paralelo a α, então α' e β são concorrentes e com intersecção r' paralela a r.

Como anteriormente, algumas das afirmações verdadeiras nas alíneas do exercício anterior são suficientemente importantes para merecer a pena sublinhá-las.

P 12. Se dois planos são paralelos, então qualquer recta de um dos planos é paralela ao outro plano.

P 13. Se um plano tem duas rectas concorrentes paralelas a outro plano, então os dois planos são paralelos.

P 14. Se dois planos são paralelos, então qualquer recta paralela a um deles é também paralela ao outro.

P 15. Se dois planos são paralelos a um terceiro então são paralelos entre si.

Exercício 12. Um cubo, como o da figura 4, na página 6, é um sólido cujas seis faces são quadrados. Como justificaria o facto de os planos que contêm duas faces opostas serem paralelos?

Exercício 13. Considerando que, quando trabalhamos numa escala relativamente pequena, não há inconveniente em considerar a superfície da Terra como sendo plana, é costume chamar *rectas horizontais* às rectas paralelas ao plano da superfície da Terra e *planos horizontais* aos planos paralelos àquele. O "nível de bolha de ar" é um instrumento utilizado em construção civil para determinar se uma dada recta é horizontal. Por que razão, quando se quer determinar se um dado plano é horizontal, basta colocar o "nível" sobre esse plano em duas posições?

Exercício 14. Mostre que, se A é um ponto e α é um plano, então existe um único plano α' paralelo a α que passa por A. Mais precisamente, mostre que esse plano pode ser construído do seguinte modo: Consideram-se duas rectas concorrentes r e s sobre o plano α, consideram-se as rectas r' e s' paralelas a r e s, respectivamente, e que passam por A, e toma-se para α' o plano definido pelas rectas concorrentes r' e s'.
Sugestão: Comece por mostrar que um plano α' construído pelo processo indicado, a partir de quaisquer duas rectas concorrentes de α, é paralelo a α. Para justificar que não há mais que um plano paralelo a α passando por A, lembrar a propriedade P 15.

O exercício que propomos em seguida é uma aplicação interessante das ideias que temos estado a examinar. Uma vez que ele pode ser considerado algo abstracto, destinamo-lo apenas ao estudante que se sinta mais à vontade nesse tipo de questões.

Exercício 15. Dado um conjunto $\mathcal{A}$ de pontos do espaço, vamos dizer que ele tem a propriedade da régua se, quaisquer que sejam os pontos distintos A e B de $\mathcal{A}$, a recta AB está contida em $\mathcal{A}$.

Por exemplo, a propriedade enunciada em PI 3 diz-nos que qualquer plano é um conjunto com a propriedade da régua. A nossa primeira proposta de actividade é a constatação, muito simples, de que, além dos planos, há outros exemplos de conjuntos que têm também a propriedade da régua.

a) Mostrar que os seguintes conjuntos têm a propriedade da régua: O conjunto vazio; um conjunto com um único elemento; uma recta; um plano; o espaço todo.

A actividade proposta na alínea a) não levantou possivelmente nenhuma dificuldade, com excepção talvez dos dois primeiros exemplos que exigem ideias bem assentes no domínio da Lógica. A actividade mais interessante é descobrir que não há mais nenhum exemplo além daqueles.

b) Seja $\mathcal{A}$ um conjunto de pontos do espaço do qual só sabemos que tem a propriedade da régua. Mostrar que $\mathcal{A}$ tem que ser um dos exemplos referidos na alínea a).

Se está com dificuldade em saber como começar, poderá ser boa ideia introduzir uma série de hipóteses alternativas sucessivas: Ou há algum ponto ou não há nenhum; se houver algum ponto, ou só há esse ou há pelo menos mais um; se há pelo menos dois pontos, a recta definida por eles está contida em $\mathcal{A}$ e, ou há mais pontos ou não há; se há pelo menos mais um ponto, então todos os pontos do plano que contém esse ponto e a recta estão em $\mathcal{A}$ (este é um dos dois passos fundamentais, faça um desenho para descobrir porquê); etc…

2. Movimentos rígidos.

Um instrumento extremamente fecundo no estudo da geometria, tanto do plano como do espaço, é a noção de *movimento rígido* (ou simplesmente *movimento*), noção que, como as que examinámos até agora, entronca profundamente no nosso conhecimento experimental do espaço. O sentido que nos interessa dar à palavra "movimento" em Geometria tem relações com o sentido que se dá a esta palavra no estudo da Física mas não corresponde exactamente a este. As diferenças consistem essencialmente no seguinte:
a) Em Geometria não pensamos apenas no movimento de um dado objecto, mas interessa-nos imaginar que a totalidade do espaço (ou do plano, quando estudamos a Geometria Plana) está "agarrada rigidamente" a esse objecto e se desloca com ele.
b) O aspecto que interessa considerar em Geometria não é o caminho que levou da posição inicial à posição final durante um movimento, mas apenas a comparação da posição inicial com a posição final.

O movimento rígido, do ponto de vista da Geometria, vai ser assim um modo de associar a cada ponto do espaço (ou dum plano, no caso da Geometria Plana) um ponto do espaço (ou desse plano), aquele para onde o ponto se moveu. Este último ponto também se diz o *ponto transformado* do primeiro por meio do movimento, e, por esse motivo, também se costuma dizer que o movimento rígido é um exemplo de *transformação geométrica*.

Quando nos estamos a referir a um certo movimento rígido, é cómodo usar a notação

$$A \mapsto A'$$

para significar que A' é o transformado de A pelo movimento rígido. Por vezes, em especial quando se fala simultaneamente de vários movimentos rígidos, é cómodo utilizar uma letra, por exemplo R, para nomear o movimento em questão e usar a notação mais explícita

$$A \overset{R}{\mapsto} A'$$

para siginificar que A' é o transformado de A pelo movimento rígido R. Neste último caso, também é costume usar a notação $R(A)$ para significar o ponto obtido de A após a transformação, por outras palavras a notação $A \overset{R}{\mapsto} A'$ significa o mesmo que $A' = R(A)$.

Os movimentos rígidos num plano podem ser intuídos experimentalmente usando uma folha de papel transparente colocada sobre uma folha de papel; fazendo um desenho sobre a folha de papel e decalcando-o para a folha de papel transparente, podemos mover esta sobre aquela de forma a vermos o resultado de diferentes movimentos rígidos.

Na figura 6, situámo-nos no quadro da Geometria Plana e representámos um triângulo com os vértices assinalados com as letras A, B e C, assim como os transformados desse triângulo por dois movimentos rígidos, transformados esses com os vértices correspondentes assinalados pelas mesmas letras, acompanhadas de uma e duas plicas, respectivamente. O primeiro movimento é uma translação da esquerda para a direita numa direcção horizontal e o segundo é uma *rotação* de 70° em torno de A no sentido directo (isto é, contrário ao do movimento dos ponteiros do relógio).

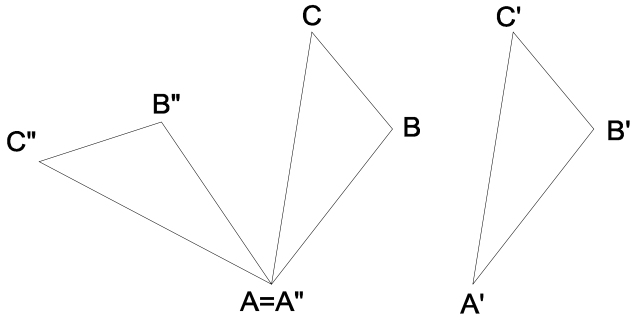


Figura 6

Chamando R_1 e R_2 aos dois movimentos rígidos, podemos assim usar as notações

$$\begin{array}{lll} A \overset{R_1}{\mapsto} A' & B \overset{R_1}{\mapsto} B' & C \overset{R_1}{\mapsto} C' \\ A \overset{R_2}{\mapsto} A & B \overset{R_2}{\mapsto} B'' & C \overset{R_2}{\mapsto} C'' \end{array}$$

ou, se preferirmos,

$$\begin{array}{lll} A' = R_1(A) & B' = R_1(B) & C' = R_1(C) \\ A = R_2(A) & B'' = R_2(B) & C'' = R_2(C). \end{array}$$

Note-se que o parágrafo anterior contém algumas expressões que não são tão inocentes como podem parecer à primeira vista. Estamos a pensar no “sentido do movimento dos ponteiros do relógio”, na “direcção horizontal” e no que se entende por “da esquerda para a direita”. Estas expressões só fazem sentido porque está implícito que o leitor está dum dos lados da página (o que é natural uma vez que ela não é transparente) e que o livro está numa posição “normal”. Como descreveria os movimentos referidos um leitor que estivesse a ler deitado de lado numa cama ou um leitor que estivesse do outro lado da página (suposta transparente)?

A figura 7 ilustra uma situação análoga na Geometria do Espaço, onde partimos de um cubo, com quatro vértices assinalados com as letras A, B, C e D.

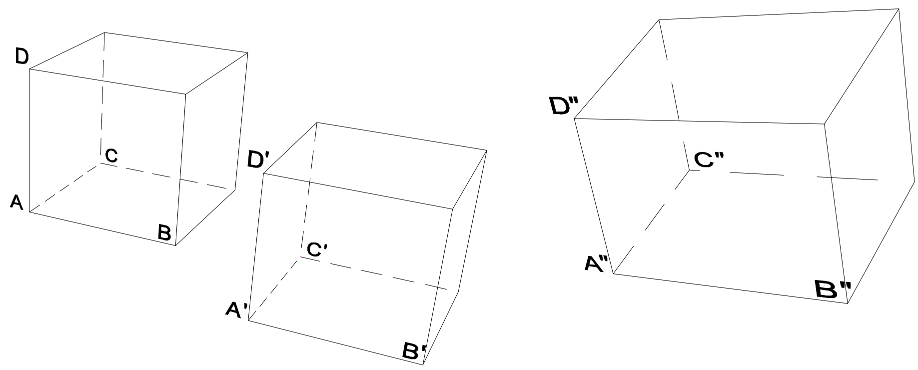


Figura 7

Temos, no primeiro caso, uma translação e, no segundo, um translação seguida de uma rotação em torno do eixo definido pelo vértice B'' e pelo oposto.

Citemos agora algumas propriedades dos movimentos rígidos (do espaço ou dum plano) que aceitamos facilmente como intuitivas.

PI 16 a) Existe um movimento rígido que "deixa tudo quieto", isto é, para o qual cada ponto é transformado em si mesmo. A este movimento rígido costuma dar-se o nome de *transformação identidade*.
b) Suponhamos fixado um movimento rígido. Para cada ponto existe então um, e um só, ponto cujo transformado é aquele. Além disso, fica definido outro movimento rígido, chamado *inverso* do primeiro, pela condição de transformar cada ponto no único ponto cujo transformado é este.[7]
c) Dados dois movimentos rígidos, pode-se definir, a partir deles, um terceiro movimento rígido pela condição de transformar cada ponto num ponto obtido de acordo com a seguinte regra: Primeiro transforma-se o ponto de partida utilizando o primeiro movimento; seguidamente transforma-se o ponto assim obtido utilizando o segundo movimento. Diz-se que este movimento foi obtido por *composição* do segundo *após* o primeiro (ou do primeiro seguido do segundo).

As propriedades a), b) e c) atrás referidas costumam ser referidas dizendo que os movimentos rígidos constituem um *grupo de transformações*.

Para nomear a transformação identidade usa-se frequentemente a notação I ou Id. Pode assim escrever-se $I(A) = A$, para cada ponto A.

Para nomear o movimento rígido inverso dum movimento rígido R usa-se a notação R^{-1}, por razões que seria difícil explicar neste momento. A notação $A \overset{R}{\mapsto} A'$ significa assim o mesmo que $A' \overset{R^{-1}}{\mapsto} A$, por outras palavras, $A' = R(A)$ significa o mesmo que $A = R^{-1}(A')$.

Quando temos dois movimentos rígidos, notados R_1 e R_2, usamos a notação $R_2 \circ R_1$ para nos referirmos ao movimento rígido obtido por composição de R_2 após R_1. Pode parecer estranho escrever R_2 antes de R_1 para significar "R_2 **após** R_1" mas a razão por que o fazemos é que isso permite escrever a fórmula mnemónica

$$R_2 \circ R_1(X) = R_2(R_1(X)).$$

Exercício 16. Copie a figura 8 para uma folha de papel (eventualmente transparente) e imagine um movimento rígido que transforme A, B e C nos pontos A', B' e C', respectivamente.

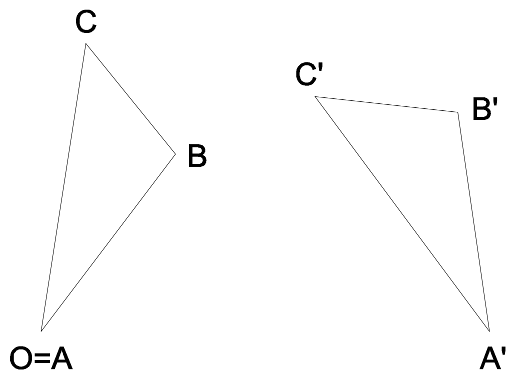


Figura 8

Utilize uma folha de papel transparente e um transferidor para:
a) Determinar uma rotação R em torno do ponto O e uma translação T tais que este movimento rígido seja $T \circ R$.
b) Verificar que, considerando a composição por ordem inversa $R \circ T$, obtém-se um movimento

[7]Por outras palvras, o movimento inverso desfaz aquilo que o primeiro fazia.

rígido diferente e determinar as imagens dos pontos A, B e C por este novo movimento. Concluir assim que a ordem pela qual compomos dois movimentos é importante (a operação de composição não é comutativa).
c) Determinar um ponto O' tal que o movimento rígido originalmente considerado seja uma rotação em torno de O'.

Exercício 17. **a)** Considere um movimento rígido qualquer R, do espaço ou dum plano. O que serão os movimentos compostos $I \circ R$ e $R \circ I$? O que serão os movimentos compostos $R^{-1} \circ R$ e $R \circ R^{-1}$?
b) A composição de movimentos, apesar de, como referimos no exercício precedente, não gozar da propriedade comutativa, goza da propriedade associtiva. Será capaz de escrever uma fórmula que descreva essa propriedade e de compreender porque é que ela é válida?

Outra das características intuitivas dos movimentos rígidos é que não é só os pontos que são transformados mas o mesmo acontece com outras entidades geométricas, como rectas, segmentos de recta, planos, ângulos, etc… Do mesmo modo, todas as propriedades geométricas, como os comprimentos, os ângulos ou o paralelismo, são conservadas depois de um tal movimento. Tentemos explicar com exemplos, e sem a pretensão de ser exaustivos, o que querem dizer as afirmações anteriores.

PI 17. Dado um movimento rígido, fica associada a cada recta uma nova recta, dita *transformada* da primeira, cujos pontos são precisamente os transformados dos pontos da primeira, e, no caso da Geometria do Espaço, fica associado a cada plano um novo plano, o *transformado* do primeiro, cujos pontos são precisamente os transformados dos pontos do primeiro. No caso da Geometria do Espaço, decorre daqui que uma recta está sobre um plano se, e só se, a recta transformada está sobre o plano transformado.

Quando se usa a letra R para nomear um movimento rígido, continua a usar-se as notações $R(r)$ e $R(\alpha)$ para significar os transformados da recta r e do plano α.

As propriedades anteriores traduzem a conservação das relações de incidência. É fácil concluir que as relações de paralelismo ficam automaticamente verificadas, isto é, duas rectas são paralelas se, e só se, as suas transformadas são paralelas e analogamente para o paralelismo entre uma recta e um plano e entre dois planos. Outras propriedades que já estudou em anos anteriores e que são também conservadas são as distâncias e os ângulos de rectas concorrentes:

PI 18. Dado um movimento rígido, a distância de dois pontos é igual à distância dos repectivos transformados e o ângulo de duas rectas concorrentes é igual ao ângulo das respectivas transformadas. Analogamente, o ângulo de duas semi-rectas com uma mesma origem é igual ao ângulo das semi-rectas transformadas.[8]

Exercício 18. Considere no plano da página os vértices dos triângulos representados na figura 9. No sentido de apoiar a sua intuição, poderá utilizar uma folha de papel transparente, onde desenhou o segundo triângulo.

[8] Lembrar que o ângulo de duas rectas pode tomar valores entre 0° e 90°, enquanto o ângulo de duas semi-rectas com a mesma origem pode tomar valores entre 0° e 180°. O facto de estas afirmações serem intuitivas resulta de as réguas e os transferidores podem ser considerados a moverem-se junto com os pontos do espaço.

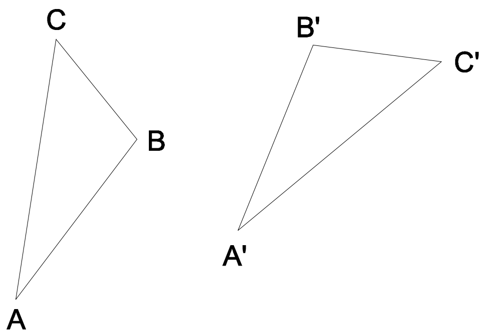


Figura 9

a) Haverá algum movimento rígido do plano que transforme os pontos A, B e C nos pontos A', B' e C', respectivamente?
b) Haverá algum movimento rígido do espaço que transforme os pontos A, B e C nos pontos A', B' e C', respectivamente?
c) Imagine um movimento rígido R do plano da página tal que $R(A) = A'$ e $R(B) = B'$. Determine o ponto $R(C)$ com a ajuda de um compasso? Quantos movimentos rígidos do plano haverá que verifiquem as condições $R(A) = A'$ e $R(B) = B'$?
d) Quantos movimentos rígidos do espaço estarão nas condições enunciadas na alínea b)?

PI 19. Sejam A, B e A', B' dois pares de pontos distintos do mesmo plano e suponhamos que a distância dos pontos A e B é igual à distância dos pontos A' e B'. Existe então um, e um só, movimento rígido do plano que transforma A e B em A' e B', respectivamente.

A interpretação intuitiva da propriedade precedente é a de que, ao movermos dois pontos do plano ao longo desse plano, sem variar a sua distância, todo o plano vai atrás desse movimento, de um modo perfeitamente determinado. Por exemplo, quando queremos deslocar uma mesa num plano horizontal de uma forma precisa, sentimos a necessidade de pegar em dois pontos da mesa (o que acontece se empurrarmos uma mesa só por um ponto?).

Enunciamos a seguir a propriedade correspondente à anterior para a Geometria do Espaço.

PI 20. Sejam A, B, C e A', B', C' dois triplos de pontos não colineares. Suponhamos que a distância de cada par de pontos no triplo A, B, C é igual à distância do correspondente par de pontos no triplo A', B', C'. Existe então um único movimento rígido do espaço que transforma A, B, e C em A', B', e C', respectivamente.

Intuitivamente, se tomarmos três pontos não colineares dos espaço e os movermos de modo a mantermos as distâncias entre eles, todo o espaço vai atrás desse movimento de um modo perfeitamente determinado. Se pretendermos mover de forma precisa um sólido no espaço, convém pegar em três dos seus pontos não colineares (o que sucederia se pegássemos em apenas dois pontos ou se os três pontos fossem colineares?).

Exercício 19. Por que razão uma porta se pode mover, apesar de estar fixada com três dobradiças? Por que razão uma porta fixada com duas dobradiças se pode mover de modo preciso mexendo apenas na respectiva maçaneta?

PI 21. Dado um movimento rígido de um plano, existe um único movimento rígido do espaço que *prolonga* aquele, isto é, que transforma da mesma maneira os pontos do plano (também se diz que o movimento rígido do plano é uma restrição do movimento rígido do espaço).

Pelo contrário, **não é verdade** que um movimento rígido do espaço que, “por acaso”, transforme todos os pontos dum dado plano α em pontos desse plano tenha que ter por restrição um movimento rígido do plano α; pensar numa rotação de 180° em torno dum eixo do plano, lembrando o exercício 18 e a figura 9 na página 14.

★ ★ ★ ★

A ideia de movimento rígido, no plano e no espaço, ajuda a clarificar duas noções que já foram examinadas em anos anteriores, a de objectos congruentes e a de objectos regulares.

Comecemos por examinar o caso mais simples da Geometria Plana. Numa situação como a da figura 10 ou a da figura 11, todos estamos habituados a dizer que estamos em presença de dois triângulos iguais (o leitor decerto recordará os “famosos” casos de igualdade de triângulos). A palavra “igual” é aqui utilizada num sentido algo perigoso, na medida em que normalmente a igualdade está ligada à ideia de dois termos a designar o mesmo objecto e o que aqui está em jogo, em ambos os casos, são objectos diferentes. Por esse motivo, há alguma vantagem em utilizar outra palavra em vez daquela e dizer, em cada caso, que estamos em presença de *objectos congruentes*. O facto de termos objectos congruentes corresponde intuitivamente à ideia de que todas as propriedades gozadas por um deles (comprimentos dos lados, medidas dos ângulos etc…) serem também gozadas pelo outro.

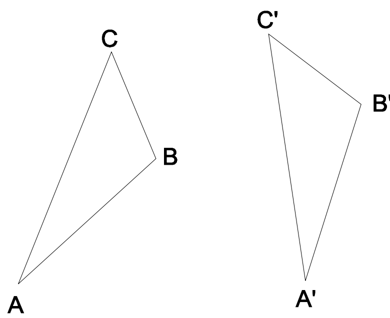


Figura 10

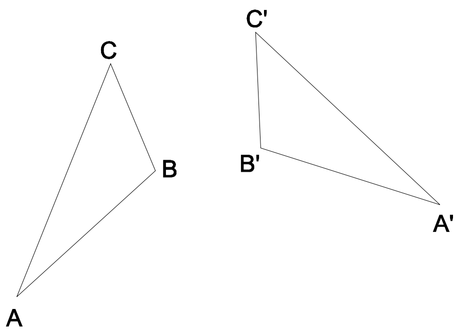


Figura 11

No entanto, na figura 10 temos triângulos “mais congruentes” que os da figura 11, na medida em que nesta última há uma propriedade da Geometria Plana que não é conservada, a orientação (de B vemos A à esquerda de C, mas de B' vemos A' à direita de C'). Há assim vantagem em apresentar definições precisas que distingam as duas situações.

Dois objectos planos dizem-se *propriamente congruentes* se, tal como acontece no caso da figura 10, existir um movimento rígido do plano que transforme o primeiro no segundo. Eles dizem-se simplesmente *congruentes* se, tal como acontece tanto no caso da figura 10 como no da figura 11, existir um movimento rígido do espaço que transforme o primeiro no segundo.

Por exemplo, no caso da figura 11, um movimento rígido que transforma a primeira na segunda é a rotação de 180° em torno de um eixo do plano (cf. as figuras 12 e 13).

Repare-se que, tendo em conta o que dissémos em PI 21, dois objectos planos propriamente congruentes são também congruentes.

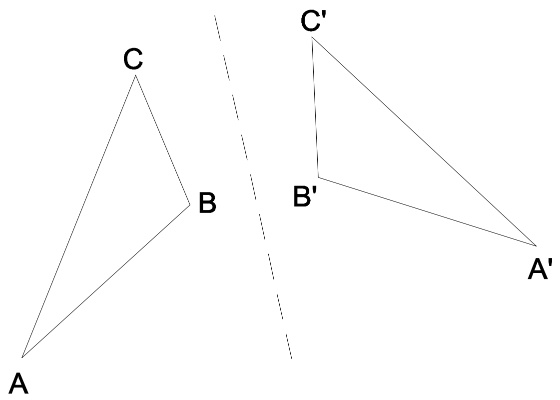


Figura 12

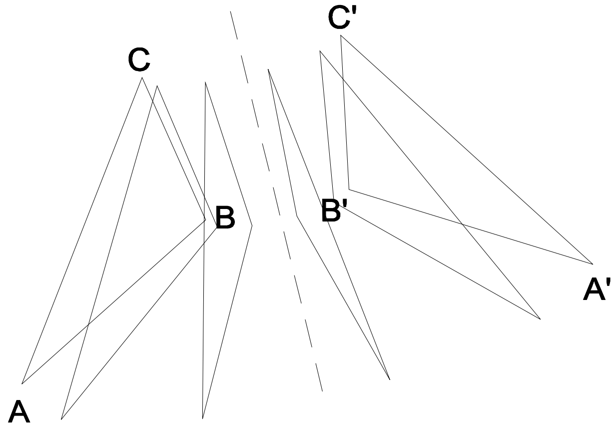


Figura 13

Repare-se que a propriedade que enunciámos em PI 20, na página 14, vai incluir o bem conhecido “caso de igualdade de triângulos”: Se os comprimentos dos lados correspondentes de dois triângulos são iguais, então os triângulos são congruentes. Cabe aqui relembrar os outros casos de igualdade de triângulos que conhece, enunciados do mesmo ponto de vista:

PI 22. Sejam A, B, C e A', B', C' dois triplos de pontos tais que se verifique pelo menos uma das duas condições seguintes:
1) A distância de A a B é igual à distância de A' a B', a distância de A a C é igual à distância de A' a C' e o ângulo das semi-rectas de A para B e de A para C é igual ao ângulo das semi-rectas de A' para B' e de A' para C' (“dois lados e o ângulo por eles formado…”).
2) A distância de A a B é igual à distância de A' a B', o ângulo das semi-rectas de A para B e de A para C é igual ao ângulo das semi-rectas de A' para B' e de A' para C' e o ângulo das semi-rectas de B para A e de B para C é igual ao ângulo das semi-rectas de B' para A' e de B' para C' (“um lado e os dois ângulos adjacentes…”).
Existe então um, e um só, movimento rígido do espaço que transforme A, B, e C em A', B', e C', respectivamente.

A noção de polígono regular é outra noção que é interessante revisitar do ponto de vista dos movimentos rígidos. Pensemos, por exemplo nos polígonos das figuras 14 a 22. Em cada uma das figuras haverá ou não vértices do mesmo tipo? E lados do mesmo tipo? O que quererá dizer vértices ou lados “do mesmo tipo”?

No caso da figura 14 todos estamos de acordo em que dois vértices opostos são do mesmo tipo, mas dois vértices adjacentes já não o são, e em que dois lados opostos são do mesmo tipo mas dois lados adjacentes já não o são. Já quanto à figura 16, se não deverá haver dúvidas sobre o que se passa com os vértices e com os lados opostos, possivelmente não estaremos todos de acordo se os lados adjacentes devem ou não ser considerados do mesmo tipo. A razão de ser desses dúvidas está em que, no quadro dos polígonos planos há duas noções possíveis, igualmente importantes, do que se deve entender por vértices ou lados do mesmo tipo. A questão é análoga à que aparecia quando falámos da congruência de figuras planas.

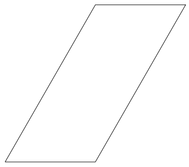


Figura 14

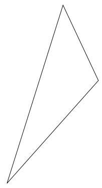


Figura 15

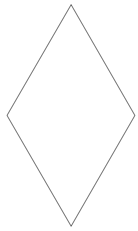


Figura 16

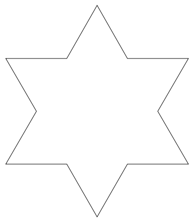


Figura 17

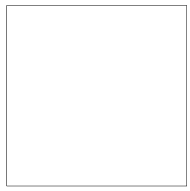


Figura 18

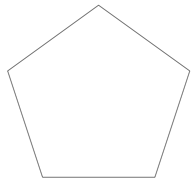


Figura 19

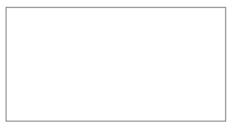


Figura 20

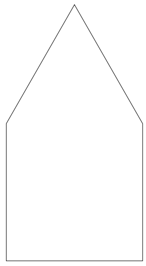


Figura 21

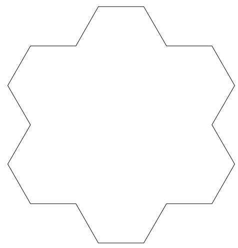


Figura 22

> Dizemos que dois vértices dum polígono plano são *do mesmo tipo* se houver um movimento rígido do espaço que transforme o polígono em si mesmo e o primeiro vértice no segundo. Diz-se que dois vértices são *propriamente do mesmo tipo* se houver um movimento rígido do plano que faça isso. Analogamente se definem lados do mesmo tipo e lados propriamente do mesmo tipo.

Por exemplo, no quadro da figura 16, todos os lados são do mesmo tipo mas enquanto que os lados opostos são propriamente do mesmo tipo, os lados adjacentes já não são propriamente do mesmo tipo.

Exercício 20. Copie para uma folha de papel transparente as figuras 14 a 22. Com a ajuda dessa cópia determine, em cada caso:
a) Quais os vértices do mesmo tipo e os vértices propriamente do mesmo tipo.
b) Quais os lados do mesmo tipo e os lados propriamente do mesmo tipo.
c) Quantos tipos (ou tipos próprios) de vértices e de lados existem em cada caso?

> Chamam-se polígonos regulares aos polígonos planos cujos vértices são propriamente do mesmo tipo e os lados são propriamente do mesmo tipo.

Exercício 21. De entre os polígonos sugeridos nas figuras 14 a 22 dizer quais os que são regulares e, para cada um deles, descobrir quais os movimentos rígidos que permitem concluir a respectiva regularidade.

★ ★ ★ ★

Podemos agora examinar como se adaptam as noções anteriores no quadro da Geometria do Espaço.

> Dois objectos do espaço dizem-se *propriamente congruentes* se existir um movimento rígido do espaço que transforme o primeiro no segundo.

Por exemplo, os cubos sugeridos na figura 7, na página 11, são objectos propriamente congruentes do espaço.

Há um cuidado importante a ter com as definições de congruência: Em cada caso deverá estar claro se estamos a falar de congruência no sentido da Geometria Plana ou no sentido da Geometria do Espaço. É claro que o problema só se põe quando estivermos a pensar em objectos planos que, pelo facto de o serem, não deixam de ser objectos do espaço. A situação típica é a da figura 11, onde temos dois triângulos dum mesmo plano que não são propriamente congruentes, no sentido da Geometria Plana, mas já o são no sentido da Geometria do Espaço (e por isso, são congruentes no sentido da Geometria Plana).

Também existe uma noção de congruência (não necessariamente própria) de objectos no espaço, tal como acontecia no plano, mas ela não pode ser definida da mesma maneira, uma vez que não nos conseguimos mover por fora do espaço. Não havendo tempo para estudar esta noção com todo o cuidado, digamos apenas, a título de informação, que a noção de objectos congruentes abarca aqueles que são propriamente congruentes assim como aqueles que são imagem no espelho um do outro, como na figura 23.

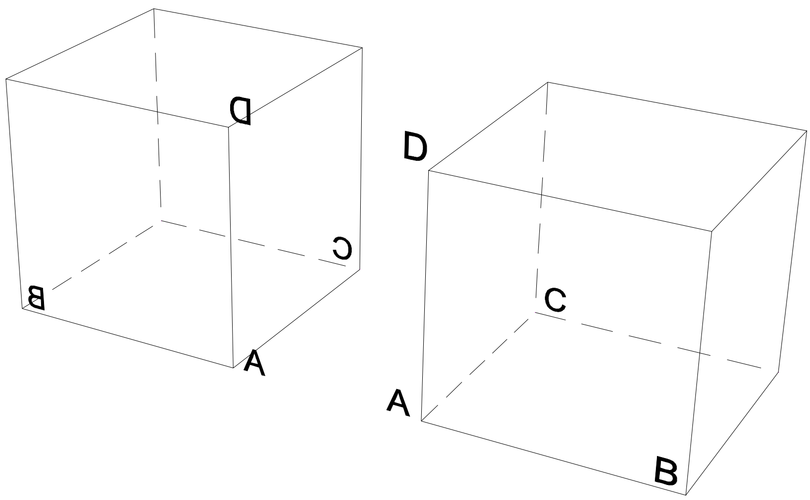


Figura 23

Mais precisamente se um objecto é congruente, mas não propriamente congruente a outro, então ele é propriamente congruente a qualquer imagem no espelho do outro.

Um exemplo bem familiar de objectos congruentes, mas não propriamente congruentes, no espaço são as nossas duas mãos. É o facto de elas não serem propriamente congruentes que faz com que, ao examinarmos uma fotografia em que apareça apenas uma mão, somos capazes de dizer se se trata da mão esquerda ou da mão direita.

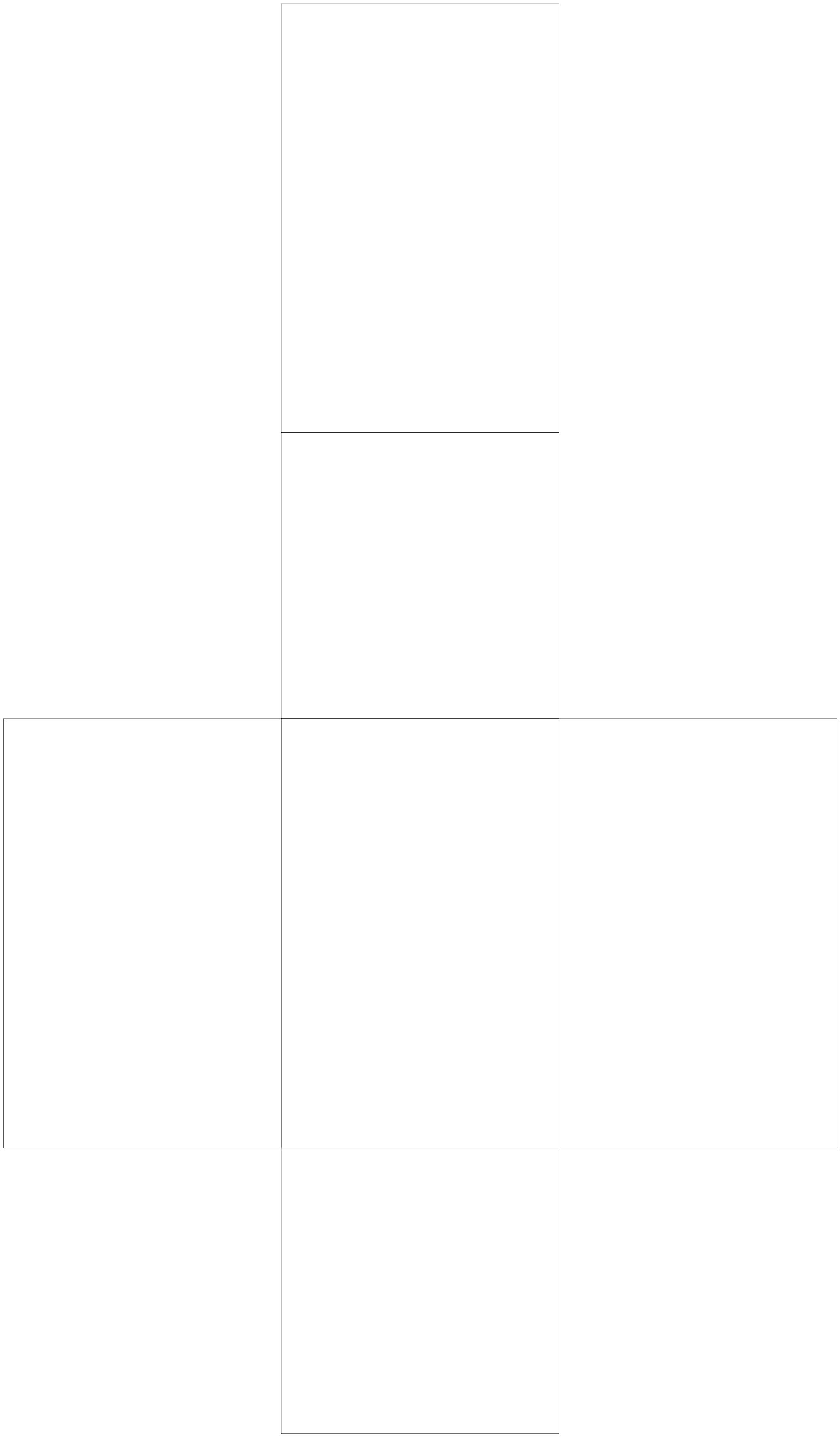
O mesmo caminho que nos levou a definir vértices e lados do mesmo tipo no quadro dos polígonos planos permite-nos examinar noções análogas no quadro dos *poliedros*, porções do espaço limitadas por regiões planas (as faces). Com o objectivo de nos mantermos num quadro mais ligado à nossa experiência concreta, vamos examinar apenas a noção de elementos propriamente do mesmo tipo.

Diz-se que dois elementos (vértices, arestas ou faces) dum poliedro são *propriamente do mesmo tipo* se existir um movimento rígido do espaço que transforme o poliedro em si mesmo e o primeiro elemento no segundo.

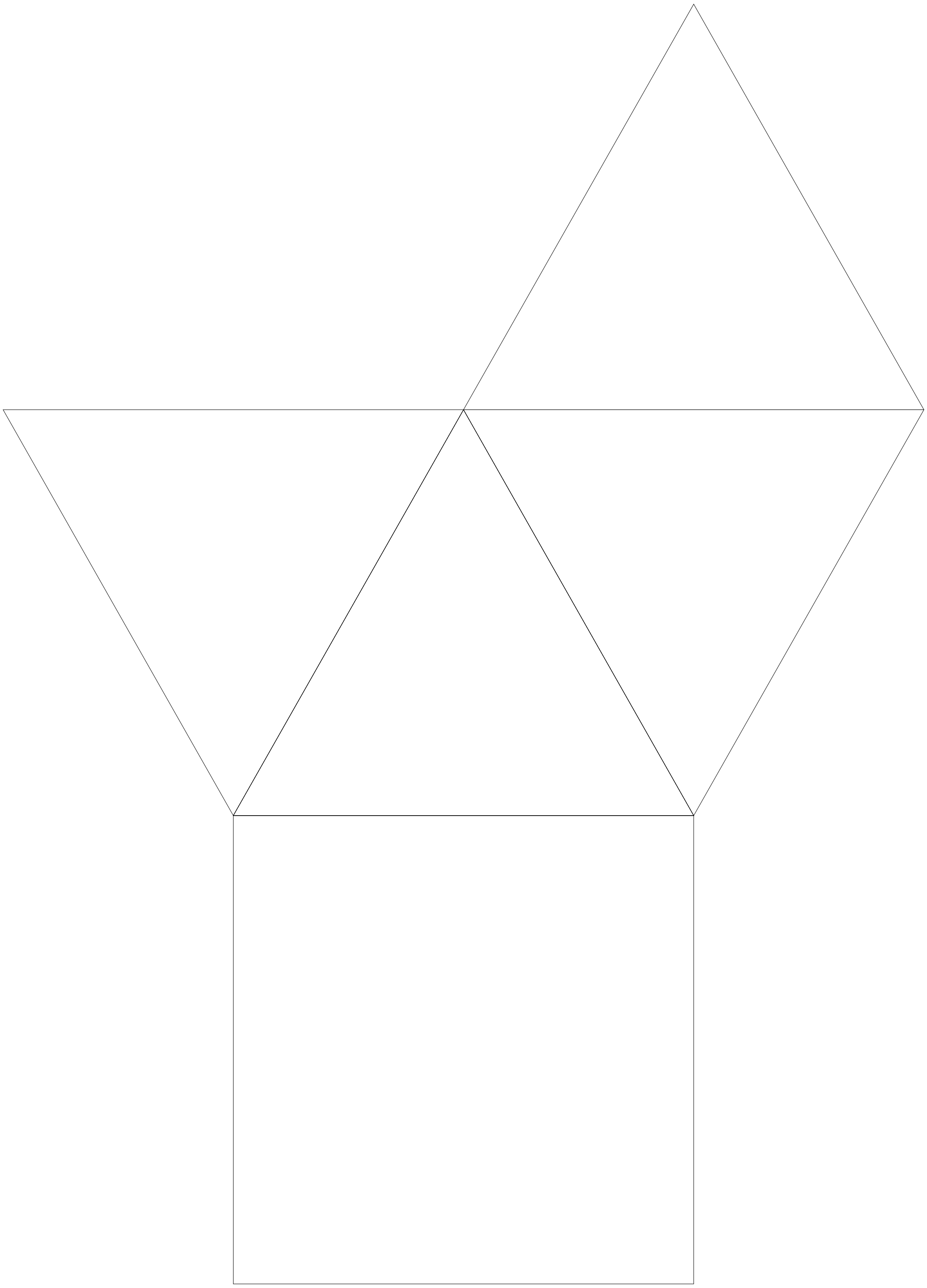
A noção precedente é mais bem intuida se dispusermos de alguns poliedros concretos que possamos manipular. O ideal seria que dispuséssemos de dois modelos de cada um, para podermos comparar o que se passa antes e depois de efectuado um certo movimento rígido. Uma das formas de construir modelos desse tipo é por dobragem e colagem, a partir da sua planificação. Para comodidade do leitor apresentamos nas páginas seguintes algumas dessas planificações, que poderão ser fotocopiadas e eventualmente coladas sobre cartolina para proceder à montagem dos poliedros. Para evitar um trabalho demasiado repetitivo, os estudantes poderão dividir entre si os sólidos que vão construir e compartilharem em seguida as construções feitas.

Exercício 22. Para cada um dos poliedros cujas planificações são apresentadas nas páginas seguintes determinar quantos tipos próprios de faces, de arestas e de vértices existem.

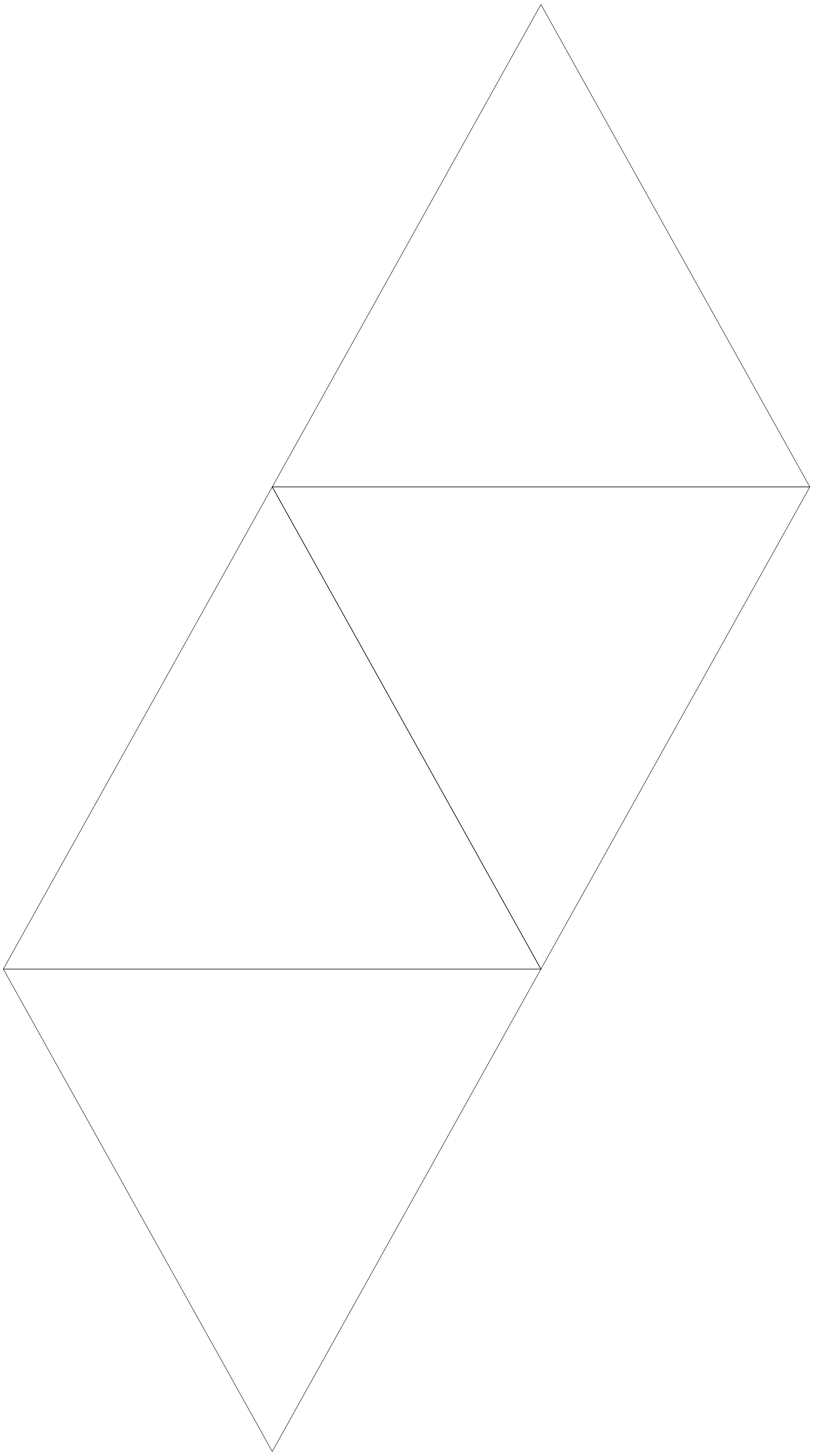
Chama-se poliedro regular a um poliedro cujas faces são polígonos regulares e cujas faces, arestas e vértices são propriamente do mesmo tipo.



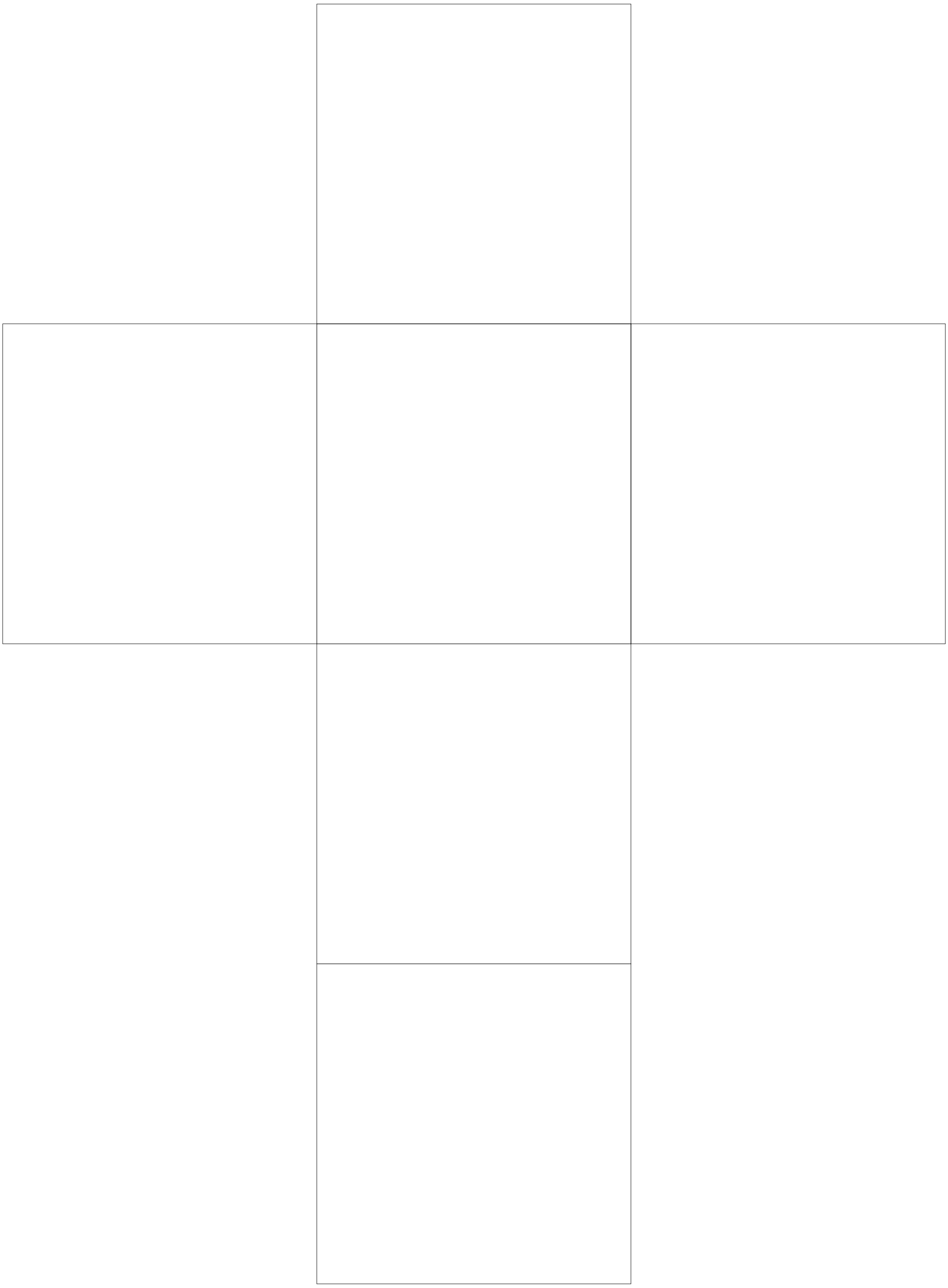
Poliedro A (paralelipípedo rectângulo)



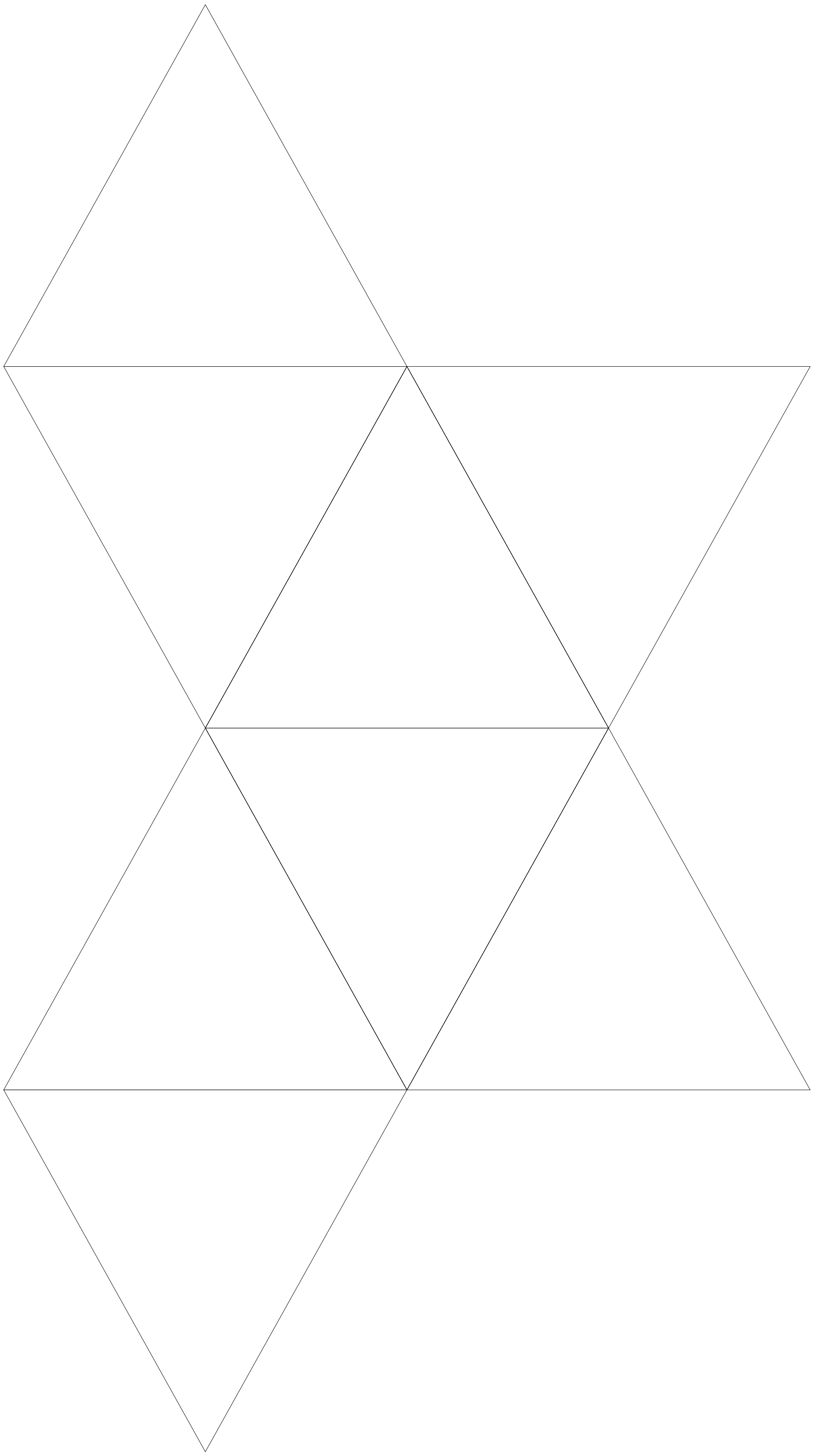
Poliedro B (pirâmide quadrangular)



Poliedro C (tetraedro regular)

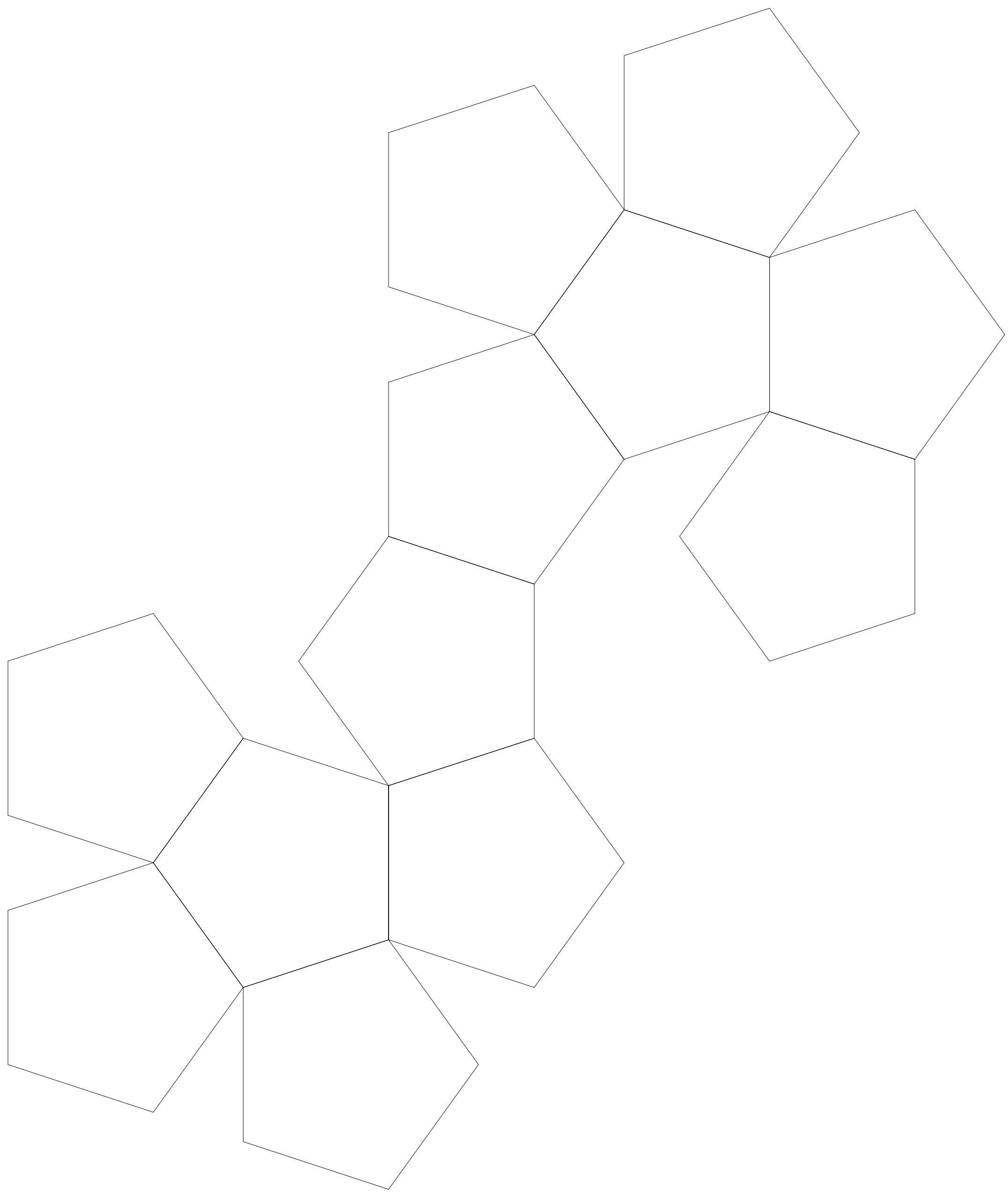


Poliedro D (cubo ou hexaedro regular)

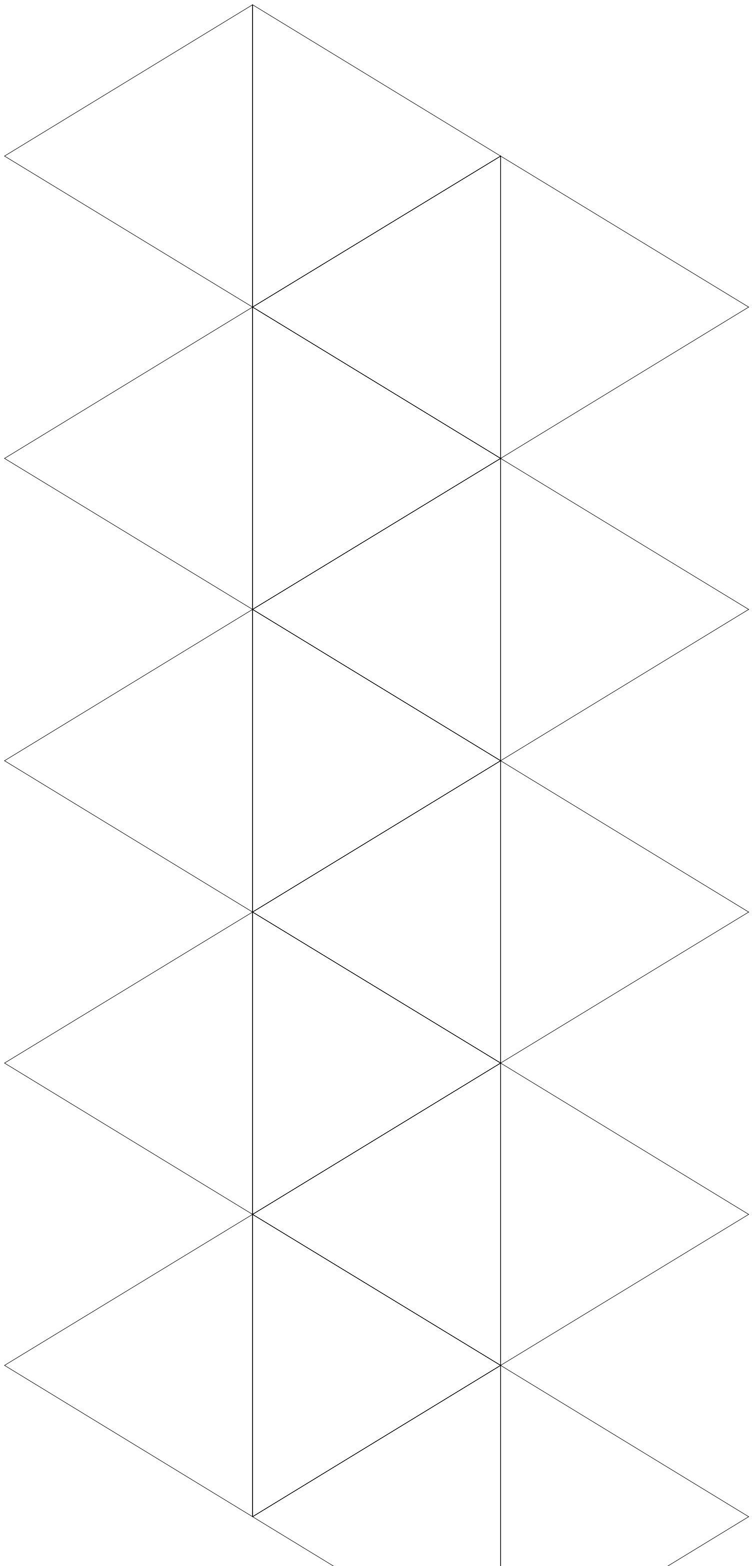


Poliedro E (octaedro regular)

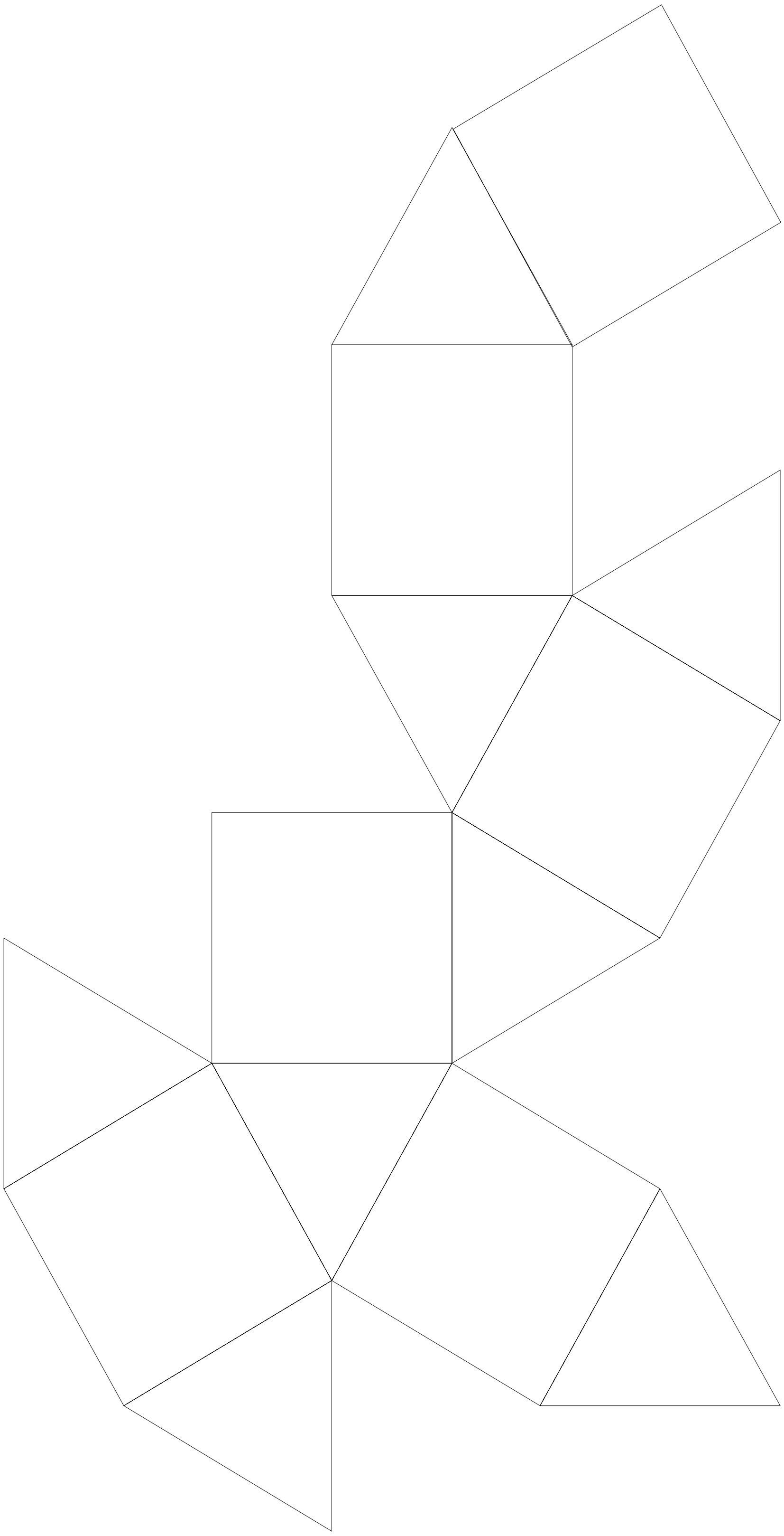
Poliedro F



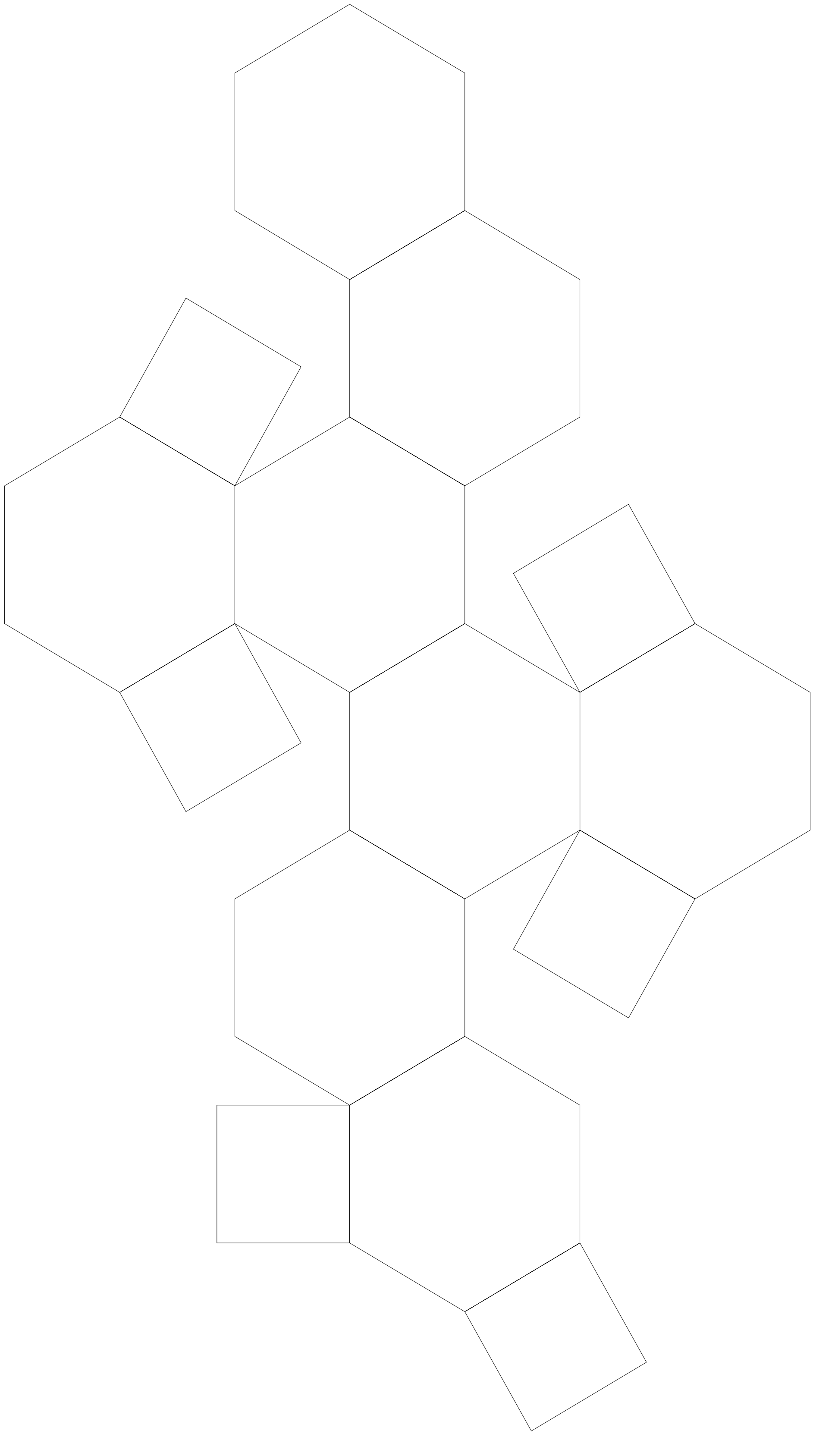
Poliedro G (dodecaedro regular)



Poliedro H (icosaedro regular)



Poliedro I (cuboctaedro)



Poliedro J (octaedro truncado)

3. Translações e Vectores.

De entre os movimentos rígidos do espaço, há alguns dum tipo muito especial, a que se dá o nome de *translações*. Intuitivamente, as translações são movimentos rígidos em que as direcções e sentidos não se alteram. Se quisermos ser mais precisos:

Diz-se que um movimento rígido do espaço, é uma *translação* se, quaisquer que sejam os pontos distintos A e B, com $A \mapsto A'$ e $B \mapsto B'$, verificam-se as condições:
1) As rectas AB e $A'B'$ são paralelas;
2) Os sentidos de A para B e de A' para B' coincidem.[9]

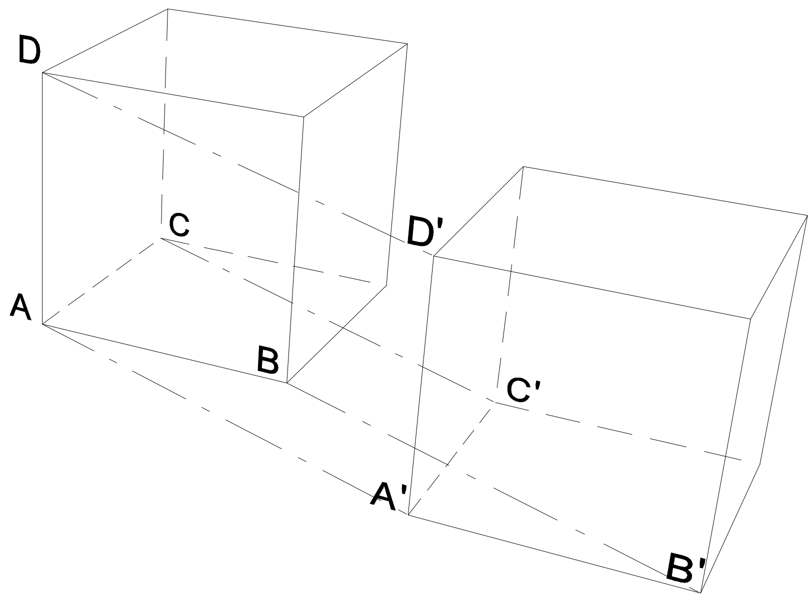


Figura 24

Um exemplo típico de translação que nos aparece na vida real é um movimento dum combóio quando "segue em linha recta". Se olharmos para fora, os pontos muito afastados parecem quase imóveis relativamente a um ponto de referência na janela, o que corresponde ao facto de a recta determinada pelo nosso olho e por esse ponto de referência se manter paralela a si mesmo. Já quando o combóio começa a curvar isso deixa de acontecer.

É claro que as translações, sendo movimentos rígidos particulares, verificam, além das condições 1) e 2), as propriedades gerais dos movimentos rígidos (conservação de distâncias, ângulos, etc…). Em particular, sempre que $A \mapsto A'$ e $B \mapsto B'$, também é verdade que a distância de A a B é igual à distância de A' a B'.

A propriedade seguinte é facilmente aceitável como verdadeira a partir da nossa experiência geométrica.

PI 23. Dados dois pontos A e A', existe uma, e uma só, translação para a qual se tenha $A \mapsto A'$. Esta translação pode ser nomeada com o símbolo $\overrightarrow{AA'}$.

[9]Consideramos como intuitivo a significado de duas semi-rectas, associadas a rectas paralelas, terem o mesmo sentido.

Uma translação fica assim perfeitamente determinada quando damos o transformado de um ponto particular, ao contrário do que acontecia com os movimentos rígidos gerais em que, para ficarem determinados, era necessário fixar os transformados de dois pontos distintos, no caso da Geometria Plana, e de três pontos não colineares, no caso da Geometria do Espaço.

A translação mais simples é a transformação identidade: Trata-se evidentemente de um movimento rígido que verifica as condições da definição.

Exercício 23. Por definição, a transformação identidade transforma qualquer ponto A em si mesmo (podemos dizer que todos os pontos A são *pontos fixos*). Suponha agora que uma translação T **não é** a transformação identidade.
a) Tendo presente as segundas leis de de Morgan, o que poderá dizer sobre os pontos fixos de T?
b) Utilizando a propriedade PI 23, mostre que se pode garantir mais do que o que foi concluído em a), nomeadamente que T não tem nenhum ponto fixo.

Na prática, quando conhecemos o transformado A' de um certo ponto A por meio de uma translação, é fácil determinar o transformado de qualquer ponto B. Afastando já o caso trivial em que B é o próprio A, procedemos de um modo diferente consoante o ponto transformado A' esteja ou não na recta que contém A e B. No primeiro caso, o transformado B' fica sobre a mesma recta (uma recta paralela com um ponto comum tem que ser a mesma recta) e pode ser determinado pela condição de a sua distância a A' ser a mesma que a de A a B e de ele estar relativamente a A' do mesmo lado que B está relativamente a A;

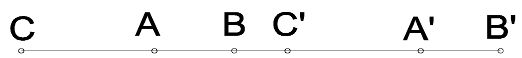


Figura 25

No segundo caso, reparamos que as condições na definição de translação podem ser traduzidas do seguinte modo:

P 24. **(Propriedade do paralelogramo)** Consideremos uma translação e dois pontos distintos A e B, tais que o transformado A' de A não esteja sobre a recta AB. O transformado B' de B fica então determinado pela condição de os pontos B, A, A', B' serem os vértices consecutivos dum paralelogramo.[10]

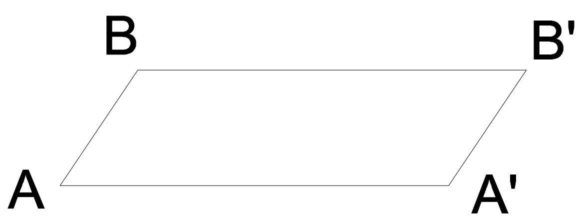


Figura 26

[10]O facto de estes quatro pontos serem complanares é uma consequência da definição de paralelismo.

A propriedade do paralelogramo atrás referida é o passo fundamental para justificar a seguinte propriedade das translações:

P 25. Consideremos uma translação distinta da transformação identidade e sejam A' e B' os transformados dos pontos A e B. Então as rectas AA' e BB' são paralelas e as distâncias e sentidos de A para A' e de B para B' coincidem[11].

Em rigor, a propriedade do paralelogramo só implica a afirmação precedente no caso em que o ponto B não está sobre a recta definida por A e A'. No entanto, quando B está sobre a recta AA', a situação é simples compreender intuitivamente (cf. a figura 25).

Uma das conclusões da propriedade precedente diz-nos que, para uma translação diferente da transformação identidade, a distância de um ponto A ao seu transformado A' é a mesma para todos os pontos A. É claro que esta parte da conclusão é válida também para a transformação identidade, uma vez que essa distância é então sempre 0. Podemos assim apresentar a seguinte definição:

Chama-se *comprimento* de uma translação à distância comum de cada ponto A ao seu transformado A'.[12]

É claro que a transformação identidade vai ser uma translação de comprimento 0 e que todas as outras translações têm um comprimento maior que 0.

Lembremos que se diz que duas rectas têm a mesma direcção quando são paralelas. Tendo em conta a propriedade P 25, faz sentido falar da direcção de uma translação diferente da identidade como sendo a direcção comum de todas as rectas definidas por um ponto A e pelo seu transformado A', uma vez que as rectas que correspondem a diferentes pontos de partida são paralelas entre si. Mais precisamente,

Diz-se que uma translação T, diferente da identidade, *tem a direcção duma recta* r se todas as rectas AA', com $A' = T(A)$, forem paralelas a r (para o concluir, basta sabermos que isso acontece a alguma dessas rectas).

Repare-se que, ao contrário do que acontecia com o comprimento, não faz sentido falar da direcção da translação identidade, uma vez que um ponto e a sua imagem não determinam nenhuma recta.

Quando queremos sublinhar que um certo movimento rígido T é uma translação, é frequente (mas não obrigatório) utilizar letras minúsculas e colocarmos o sinal $\rightarrow$ em cima do símbolo. Podemos assim falar duma translação $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, etc… Esta "notação vectorial" sugere o ponto de vista, que adoptaremos, de os *vectores*, de que possivelmente já ouviu falar, serem essencialmente a mesma coisa que as translações.[13]

Exercício 24. Considere o cubo na figura seguinte.

a) Encontre nomes alternativos para a translação $\overrightarrow{AB}$.

b) O movimento rígido inverso de translação $\overrightarrow{AG}$ é ainda uma translação. Que nome lhe daria?

c) O movimento rígido composto da translação $\overrightarrow{AD}$ após a translação $\overrightarrow{AB}$ é ainda uma translação. Que nome lhe daria? E ao movimento rígido composto da translação $\overrightarrow{AB}$ após a translação $\overrightarrow{AD}$?

[11]Comparar com as condições enunciadas na definição de translação.

[12]Quando falamos de distância ou de comprimento supomos que está implícita uma unidade de comprimento.

[13]Alguns autores preferem considerar uma distinção entre vectores e translações e usam então a notação $T_{\overrightarrow{u}}$ para designar a translação associada ao vector $\overrightarrow{u}$.

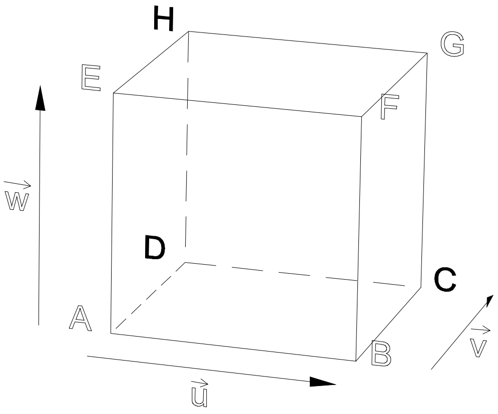


Figura 27

Algumas das conclusões do exercício precedente não são propriedades especiais dos vértices do cubo. Se examinarmos com cuidado a definição de translação, concluímos facilmente que:

P 26. a) A transformação identidade é uma translação.
b) Se o movimento rígido T é uma translação, então o movimento inverso T^{-1} é também uma translação.
c) Se os movimentos rígidos S e T são translações, então o movimento rígido $T \circ S$, obtido por composição do segundo após o primeiro, é também uma translação.

Do mesmo modo que as alíneas a) a c) em PI 16, na página 12, exprimiam o facto de a totalidade dos movimentos rígidos constituir um *grupo de transformações*, as propriedades que acabamos de referir exprimem que o conjunto das translações também constitui um grupo de transformações.

Para além das propriedades anteriores, a composição de translações verifica ainda uma outra propriedade, a comutatividade, que não é válida para movimentos rígidos arbitrários (cf. a alínea b) do exercício 16, na página 12).

P 27 **(Comutatividade da composição de translações)**. Se S e T são duas translações, então $T \circ S = S \circ T$. Por outras palavras, partindo de um ponto qualquer e aplicando primeiro a translação S e depois a translação T, chega-se ao mesmo resultado que aplicando primeiro a translação T e depois a translação S.

A explicação da propriedade anterior não é difícil: A propriedade é válida no caso em que pelo menos uma das duas translações é a transformação identidade, uma vez que ambas as compostas são então iguais à outra translação. No caso em que as translações não têm a mesma direcção, partindo de um ponto A arbitrário do espaço, podemos considerar os transformados B e C de A, por utilização de S e T, respectivamente, e então T transforma B no mesmo ponto que S transforma C, nomeadamente no quarto vértice do paralelogramo na figura a seguir.

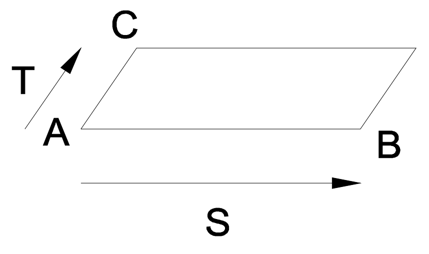


Figura 28

O exame do que se passa no caso em que as translações S e T têm a mesma direcção também não oferece dificuldade e pode ser deixado ao cuidado do estudante. Convirá ter o cuidado de tratar separadamente os casos em que S e T "têm o mesmo sentido" e aqueles em que "têm sentidos opostos" e, neste último caso, o que se passa quando os comprimentos são iguais e quando estes são diferentes.

Vamos agora mudar as notações que temos vindo a utilizar ao trabalhar com translações, substituindo as notações usadas no quadro geral dos movimentos rígidos por notações mais habituais, quando olhamos para as translações como vectores.

Em primeiro lugar, e como já foi feito na figura anterior, um vector será representado graficamente com frequência por uma seta: Esta quer significar que o vector corresponde à translação que transforma a origem da seta na sua extremidade (lembrar que uma translação fica determinada quando referimos qual o transformado de um ponto particular do espaço).

Em segundo lugar, vamos passar a utilizar com mais frequência a "notação vectorial", ou seja, como já referimos, usar letras minúsculas, habitualmente encimadas com o símbolo $\rightarrow$, para nomear vectores. Continuaremos, no entanto, a utilizar a notação $\overrightarrow{AB}$ quando queremos referir o vector que transforma A em B.

Exercício 25. Considere os vectores (translações) $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ correspondentes às setas que aparecem na figura seguinte, assim como os pontos assinalados A, B e C.

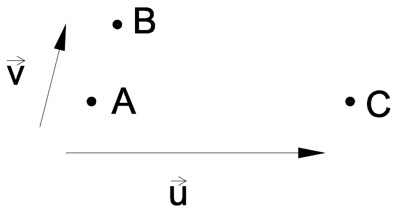


Figura 29

a) Represente graficamente os transformados, por meio de $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$, dos pontos A, B e C.
b) Desenhe outras setas que representem os mesmos vectores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$.

Outra mudança de notação diz respeito à forma de representar a composição de translações: Como alternativa ao sinal $\circ$, que se utiliza para a composição de movimentos rígidos arbitrários, é mais frequente utilizar o sinal $+$ no caso da composição de translações. Se $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são dois vectores, o vector $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$ é a translação composta de $\overrightarrow{u}$ após $\overrightarrow{v}$ ou, o que é o mesmo, de $\overrightarrow{v}$ após $\overrightarrow{u}$.

Há várias razões para utilizar o sinal $+$, uma das quais é sublinhar a semelhança das propriedades da composição de vectores com as da adição de números (propriedades associativa e comutativa e outras que encontraremos em breve); outra razão ficará mais clara adiante quando estudarmos as coordenadas dum vector e a forma de somar vectores em termos destas. Já para a composição de movimentos rígidos gerais não se utiliza o sinal $+$, uma vez que essa composição não é comutativa.

Exercício 26. No contexto da figura 29:
a) Desenhe setas que representem os vectores $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}+\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{u}+\overrightarrow{u}$.
b) O que serão os vectores $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}$ e $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}$?

Se resolveu o exercício anterior então já descobriu a regra prática para determinar gráficamente a soma de dois vectores: Parte-se dum ponto arbitrário A do espaço, desenha-se, com a origem nesse ponto, uma seta representando um dos dois vectores e desenha-se em seguida uma seta representando o outro vector, com a origem na extremidade B da primeira seta; o vector soma pode ser representado por uma seta com origem no ponto de partida A e com extremidade na extremidade C da segunda seta.

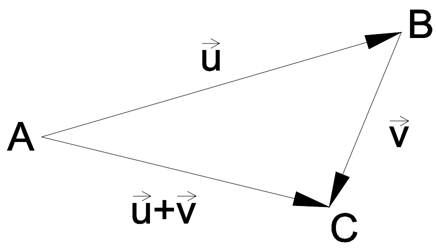


Figura 30

Dito de outro modo:

P 28. Dados três pontos A, B e C, tem-se sempre

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

O facto de se utilizar o sinal $+$ para a composição de translações conduz a que seja conveniente uma notação a condizer para a transformação identidade. Uma vez que se trata da translação que somada com qualquer outra tem essa outra como resultado, é natural dar-lhe também o nome de vector zero, e notá-la $\overrightarrow{0}$ (qual é o nome que damos ao número que, somado com qualquer número a dá a?). O vector $\overrightarrow{0}$ é assim a translação que transforma cada ponto nele mesmo, ou seja, podemos escrever, para cada ponto A, $\overrightarrow{0} = \overrightarrow{AA}$.

A translação inversa de uma dada translação $\overrightarrow{u}$ também merece um nome especial quando estamos a utilizar a notação vectorial: uma vez que se trata do vector que somado com $\overrightarrow{u}$ dá a tranformação identidade, ou seja, o vector $\overrightarrow{0}$, é natural chamar-lhe o vector simétrico de $\overrightarrow{u}$ e representá-lo por $-\overrightarrow{u}$ (se a é um número, que nome damos ao número que somado com a dá o número 0?). Repare-se que a interpretação de $-\overrightarrow{u}$ como translação inversa de $\overrightarrow{u}$, mostra que, se $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, então $-\overrightarrow{u} = \overrightarrow{BA}$, em particular, se representarmos graficamente o vector $\overrightarrow{u}$ por uma seta, o vector $-\overrightarrow{u}$ pode ser representado pela seta que se obtém trocando a origem com a extremidade.

Destacamos a seguir algumas das propriedades fundamentais da adição de vectores que temos estado a referir:

P 29. **(Propriedades da adição de vectores)**
a) $\overrightarrow{u} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w}$ (propriedade associativa)[14].
b) $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$ (propriedade comutativa).
c) $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{u}$ ($\overrightarrow{0}$ é elemento neutro).
d) $\overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}$ (o vector $\overrightarrow{u}$ tem simétrico $-\overrightarrow{u}$).

As propriedades precedentes exprimem o facto de os vectores (translações) do espaço constituirem um grupo comutativo.

Apesar de a intuição geométrica, que nos conduziu à noção de vector, ser algo de extremamente fecundo e que nunca devemos abandonar, é útil reparar que há propriedades dos vectores que podemos deduzir utilizando apenas as que atrás foram referidas, sem termos que nos lembrar do que são de facto os vectores. Neste momento damos apenas um exemplo:

[14] O valor comum costuma ser notado simplesmente $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$.

P 30. Dados dois vectores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$, existe um único vector $\overrightarrow{x}$ tal que $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{x}=\overrightarrow{v}$, a saber o vector $\overrightarrow{x}=\overrightarrow{v}+(-\overrightarrow{u})$. Por razões que se prevêm facilmente, para esta solução única da *equação* $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{x}=\overrightarrow{v}$ é usada a notação $\overrightarrow{v}-\overrightarrow{u}$:

$$\overrightarrow{v}-\overrightarrow{u}=\overrightarrow{v}+(-\overrightarrow{u}).$$

Comecemos por justificar que não pode haver mais que uma solução para a equação, e fazemo-lo mostrando que, se $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{x}=\overrightarrow{v}$, então $\overrightarrow{x}=\overrightarrow{v}+(-\overrightarrow{u})$. Para isso, reparamos que, a partir da hipótese $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{x}=\overrightarrow{v}$, podemos inferir

$$\overrightarrow{u}+\overrightarrow{x}+(-\overrightarrow{u})=\overrightarrow{v}+(-\overrightarrow{u}),$$

donde, utilizando as propriedades comutativa e associativa,

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{u}+(-\overrightarrow{u})+\overrightarrow{x}=\overrightarrow{v}+(-\overrightarrow{u})\\&\overrightarrow{0}+\overrightarrow{x}=\overrightarrow{v}+(-\overrightarrow{u})\\&\overrightarrow{x}=\overrightarrow{v}+(-\overrightarrow{u}).\end{aligned}$$

O leitor mais desatento, poderia pensar que a demonstração estava terminada. Repare-se que isso não é assim. O que nós provámos é, que, se houvesse solução, ela teria que ser $\overrightarrow{v}+(-\overrightarrow{u})$; poderia acontecer que não houvesse solução… É claro que o que falta é muito fácil de estabelecer: Já sabemos qual é o candidato a solução e tudo o que temos que verificar é que se tem, de facto

$$\overrightarrow{u}+(\overrightarrow{v}+(-\overrightarrow{u}))=\overrightarrow{u}+(-\overrightarrow{u})+\overrightarrow{v}=\overrightarrow{0}+\overrightarrow{v}=\overrightarrow{v}.$$

Na prática, quando queremos determinar a diferença $\overrightarrow{v}-\overrightarrow{u}$ de dois vectores tanto podemos utilizar o resultado que nos diz que essa diferença pode ser obtida somando $\overrightarrow{v}$ com $-\overrightarrow{u}$ como determinar, por exemplo por um método gráfico, um vector que somado com $\overrightarrow{u}$ dê $\overrightarrow{v}$.

Exercício 27. Partindo dos vectores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ na figura 30, na página 35, determine graficamente, de dois modos distintos, uma seta que represente o vector $\overrightarrow{v}-\overrightarrow{u}$.

Exercício 28. Justifique, utilizando as propriedades da soma de vectores, a seguinte propriedade geométrica: Dados quatro pontos A, B, A' e B' tais que $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{BB'}$, tem-se também $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A'B'}$. Fazendo uma figura, descubra qual o significado geométrico da propriedade precedente.[15]
Sugestão: Escreva o vector $\overrightarrow{AB'}$ de duas maneiras diferentes como soma de dois vectores.

Para o comprimento de um vector também é usual utilizar a seguinte notação:

Usamos a notação $\|\overrightarrow{u}\|$ para designar o comprimento do vector $\overrightarrow{u}$, comprimento esse a que se dá também o nome de *norma* de $\overrightarrow{u}$.

Há outra coisa muito importante que se pode fazer com os vectores, além de os somar ou subtrair, e de determinar os respectivos simétricos. Trata-se da multiplicação de um vector por um número real. Consideremos então um vector $\overrightarrow{u}$ e um número real a e expliquemos o que é o vector $a\overrightarrow{u}$.

[15]A vantagem da justificação algébrica é que ela não necessita de tratar separadamente certos casos particulares, como aquele em que todos os pontos estão sobre uma mesma recta.

É cómodo começar por examinar o caso em que $\overrightarrow{u}$ é o vector $\overrightarrow{0}$. Nesse caso, qualquer que seja o número real a definimos $a\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$. Do mesmo modo, quando a é o número real 0, definimos, para cada vector $\overrightarrow{u}$, $0\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.

A partir de agora supomos que $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$, de modo que faça sentido pensar na direcção do vector $\overrightarrow{u}$. Quando $a > 0$, o vector $a\overrightarrow{u}$ é, por definição, um vector com a mesma direcção e sentido que $\overrightarrow{u}$ mas com um comprimento igual ao comprimento de $\overrightarrow{u}$ multiplicado por a. Em termos de translação, o vector $a\overrightarrow{u}$ transforma um ponto A num ponto A'' obtido do seguinte modo: Considera-se o ponto A' obtido por transformação de A a partir de $\overrightarrow{u}$; o ponto A'' está na recta AA', para o mesmo lado que A' relativamente a A e a uma distância de A igual à distância de A a A' multiplicada por a (na figura a seguir ilustramos o caso em que $a = \frac{3}{2}$).

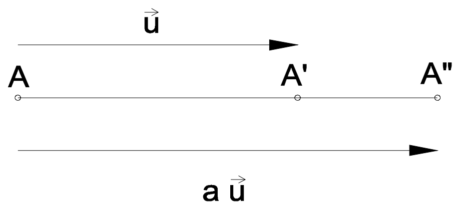


Figura 31

Se quisermos ser cuidadosos, temos que nos assegurar de que a definição do produto $a\overrightarrow{u}$ apresentada anteriormente não depende do ponto A utilizado. O que temos que explicar é a razão por que, se partíssemos doutro ponto B, transformado em B' por meio do vector $\overrightarrow{u}$, e se construíssemos o ponto B'' do mesmo modo que o ponto A'' foi construído, então o vector que transforma A em A'' é o mesmo que transforma B em B''. Se pensarmos no que está em jogo, concluímos facilmente que esse facto é uma consequência simples da propriedade 25, enunciada na página 32.

A definição do produto $a\overrightarrow{u}$, no caso em que $a < 0$ é análoga, a diferença estando em que o sentido do vector vem trocado e o comprimento deste vem multiplicado por $|a|$ (na figura a seguir ilustramos o caso em que $a = -\frac{1}{2}$)

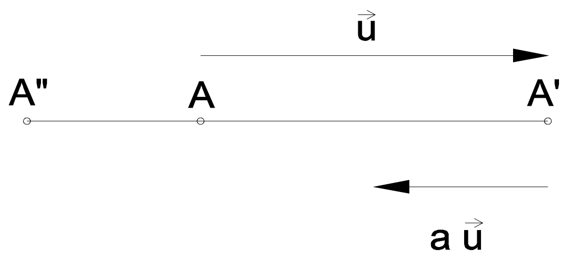


Figura 32

Retomando as propriedades utilizadas na definição do produto de um vector por um número real, podemos dizer

> P 31. Quaisquer que sejam o vector $\overrightarrow{u}$ e o número real a, tem-se
> $$\|a\overrightarrow{u}\| = |a|\|\overrightarrow{u}\|.$$

Exercício 29. Na figura seguinte A, B e C são os vértices dum triângulo e M é o ponto médio do segmento $[AB]$. Considerando os vectores $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$, represente cada um dos vectores seguintes como *combinação linear* de $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$, isto é, na forma $a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}$, com a e b números reais:

a) $\overrightarrow{BC}$; **b)** $\overrightarrow{BM}$; **c)** $\overrightarrow{CM}$ **d)** $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$

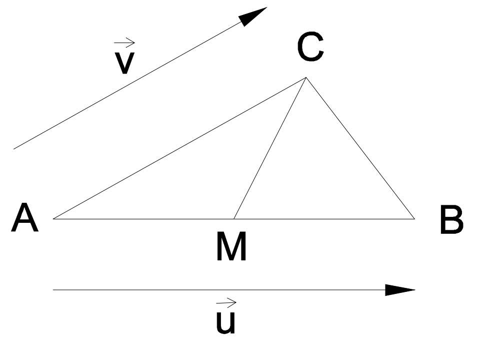


Figura 33

Exercício 30. No quadro da figura seguinte escreva os vectores $\overrightarrow{w}$ e $\overrightarrow{w}'$ como combinações lineares de $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ **Sugestão:** Utilize régua e esquadro como auxiliares.

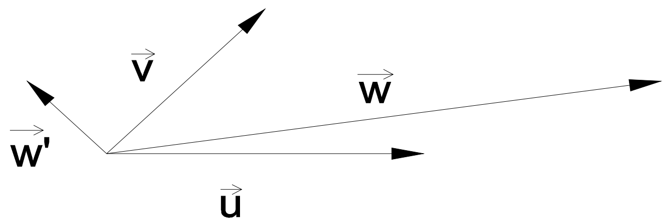


Figura 34

Exercício 31. Consideremos o cubo da figura seguinte,

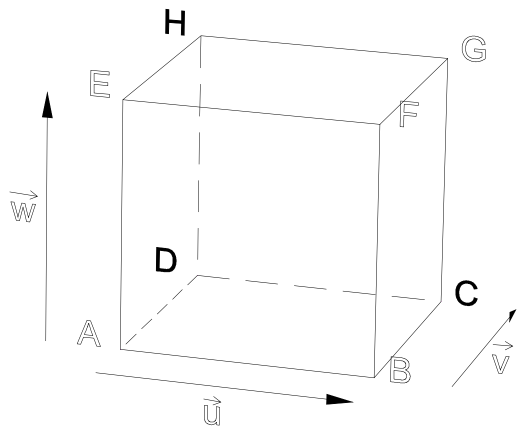


Figura 35

e notemos $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AE}$. Represente como *combinação linear* de $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$, isto é, na forma $a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v} + c\overrightarrow{w}$, com a, b e c números reais:

a) O vector $\overrightarrow{AF}$;

b) O vector $\overrightarrow{GA}$;

c) O vector com origem no centro da face superior e extremidade no centro da face inferior.
d) O vector com origem em A e extremidade no centro do cubo.

Sabemos que, por definição, se $\overrightarrow{u}$ é um vector diferente de $\overrightarrow{0}$ e a é um número diferente de 0, então o vector $a\overrightarrow{u}$ é também diferente de $\overrightarrow{0}$ e tem a mesma direcção que $\overrightarrow{u}$. Por outro lado, qualquer vector $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$ com a mesma direcção que $\overrightarrow{u}$ pode ser escrito na forma $\overrightarrow{v} = a\overrightarrow{u}$, para um único número real não nulo a: No caso em que os dois vectores têm o mesmo sentido a é o quociente do comprimento de $\overrightarrow{v}$ pelo de $\overrightarrow{u}$ e no caso em que os vectores têm sentido contrário a é o simétrico daquele quociente[16]. A propriedade anterior é suficientemente importante para merecer ser destacada:

> P 32. Dois vectores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$, diferentes de $\overrightarrow{0}$, têm a mesma direcção se, e só se, existe um número real $a \neq 0$ tal que $\overrightarrow{v} = a\overrightarrow{u}$; quando isso acontece existe um único número real a nessas condições.

Destacamos a seguir algumas das propriedades fundamentais que envolvem a multiplicação de vectores por números reais:

> P 33. **(Propriedades da multiplicação de vectores por números)**
> a) $0\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$, $1\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$, $(-1)\overrightarrow{u} = -\overrightarrow{u}$.
> b) $a\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$.
> c) $(a+b)\overrightarrow{u} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{u}$ (primeira propriedade distributiva).
> d) $a\,(b\overrightarrow{u}) = (a \times b)\overrightarrow{u}$ (propriedade associativa).
> e) $a\,(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = a\overrightarrow{u} + a\overrightarrow{v}$ (segunda propriedade distributiva).

Do mesmo modo que a propriedade associativa da adição de vectores nos permitia escrever sem ambiguidade uma soma de três vectores $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$, a propriedade enunciada em d) permite-nos também escrever sem ambiguidade uma expressão do tipo $ab\overrightarrow{u}$, com $\overrightarrow{u}$ vector e a e b números: É indiferente considerar que primeiro se multiplicaram os números reais e em seguida o resultado pelo vector ou que se começou por multiplicar o vector por b e, em seguida, multiplicou-se por a o vector obtido.

As propriedades anteriores, em conjunto com as referidas em P 29, permitem trabalhar em muitos casos com os vectores de uma forma que tem algo de comum com os métodos utilizados para trabalhar com números. Isso permite nalguns casos resolver problemas geométricos por métodos "algébricos" através da utilização de vectores. De qualquer modo, é importante reconhecermos quais são as propriedades geométricas que explicam as propriedades "algébricas" enunciadas.

Em relação às propriedades em a) e b), o respectivo significado decorre directamente das definições apresentadas.

As propriedades c) e d) não são muito profundas uma vez que todos os vectores envolvidos têm a mesma direcção, a do vector $\overrightarrow{u}$ (o caso trivial em que $\overrightarrow{u} = 0$ pode ser tratado à parte). Mesmo assim, é útil examinarmos com atenção o que elas significam. Vejamos, por exemplo, o que significa a propriedade c), no caso em que $a > 0$ e $b > 0$. Nesse caso, chamando u ao comprimento de $\overrightarrow{u}$, os vectores $a\overrightarrow{u}$ e $b\overrightarrow{u}$ têm ambos o mesmo sentido que $\overrightarrow{u}$ e comprimentos au e bu, respectivamente, pelo que a sua soma tem comprimento igual à soma daqueles dois comprimentos, isto é, igual a $au + bu = (a+b)u$, e daqui deduzimos que a soma $a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{u}$ é precisamente o

---

[16]Na linguagem utilizada nos exercícios precedentes, podemos dizer que $\overrightarrow{v}$ está representado como combinação linear do vector $\overrightarrow{u}$.

vector $(a+b)\overrightarrow{u}$.

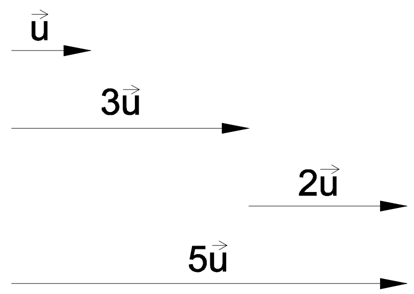


Figura 36

Exercício 32. **a)** Justifique a propriedade c) em P 33 no caso em que $a = 3$ e $b = -2$, naquele em que $a = 2$ e $b = -3$ e naquele em que $a = 2$ e $b = -2$ e repare que os raciocínios feitos permitem demonstrar todos os casos em que a e b têm sinais contrários.
b) Justifique a mesma propriedade no caso em que $a < 0$ e $b < 0$, começando, se preferir, por examinar um caso particular.
c) Por que razão a propriedade é verdadeira no caso em que um dos reais a e b é 0?

Exercício 33. Relativamente à propriedade d) em P 33:
a) Repare que ela é trivialmente verdadeira quer no caso em que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ quer naquele em que pelo menos um dos números reais a e b é 0.
b) Justifique a propriedade no caso em que $a > 0$ e $b > 0$, começando, se preferir, por considerar valores particulares para a e b.
c) Justifique a propriedade nos restantes casos que ainda não examinou.

Examinemos enfim o conteúdo geométrico que está por detrás da propriedade na alínea e) de P 33. Tratemos em primeiro lugar o caso, “mais genérico”, em que os vectores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são diferentes de $\overrightarrow{0}$ e não têm a mesma direcção e comecemos por supor $a > 1$ (na figura seguinte $a = \frac{3}{2}$). Esse caso é suficientemente elucidativo sobre o que está em jogo e deixaremos para o estudante mais paciente o exame dos restantes casos.

Comecemos por partir de um ponto A qualquer. Escolhemos B tal que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ e C tal que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{BC}$. Escolhemos B' pela condição de se ter $\overrightarrow{AB'} = a\overrightarrow{u}$ (portanto a distância de A a B' é a distância de A a B multiplicada por a). Traçamos em seguida por B' uma paralela à recta BC e marcamos o ponto C' na intersecção desta recta com a recta AC.

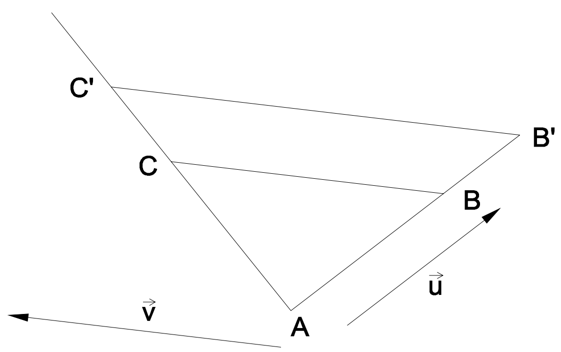


Figura 37

Os triângulos $[ABC]$ e $[A'B'C']$ são semelhantes, por terem os ângulos iguais, e portanto os seus lados correspondentes vão ser proporcionais. Podemos assim concluir que a distância de B' a C' é igual à distância de B a C multiplicada por a e a distância de A a C' é igual à distância de A a C multiplicada por a, por outras palavras $\overrightarrow{B'C'} = a\,\overrightarrow{BC} = a\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{AC'} = a\,\overrightarrow{AC}$. É agora fácil chegar à conclusão pretendida:

$$a\,(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = a\,(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = a\,\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{B'C'} = a\overrightarrow{u} + a\overrightarrow{v}.$$

Na demonstração que acabámos de apresentar suposémos que $a > 1$, de modo que a figura correspondesse ao argumento. É fácil, no entanto, constatar que o mesmo raciocínio pode ser utilizado, com uma figura convenientemente adaptada, para justificar a igualdade para os restantes valores de a.

Exercício 34. Continuando a supor que os vectores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são diferentes de $\overrightarrow{0}$ e não têm a mesma direcção,
a) Verifique que a igualdade $a\,(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = a\overrightarrow{u} + a\overrightarrow{v}$ é trivialmente verdadeira nos casos em que $a = 1$ e em que $a = 0$;
b) Adapte a demonstração que apresentámos e, em particular, a figura utilizada, de modo a justificar que a igualdade referida continua a ser válida tanto no caso em que $0 < a < 1$ como naquele em que $a < 0$.[17]

Resta-nos mostrar que a igualdade $a\,(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = a\overrightarrow{u} + a\overrightarrow{v}$ continua a ser válida mesmo sem a hipótese de os vectores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ serem diferentes de $\overrightarrow{0}$ e não terem a mesma direcção.

Exercício 35. **a)** Verifique que a igualdade $a\,(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = a\overrightarrow{u} + a\overrightarrow{v}$ é trivialmente válida no caso em que pelo menos um dos vector $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ é $\overrightarrow{0}$.
b) Verifique que a mesma igualdade é ainda válida no caso em que os vectores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são diferentes de $\overrightarrow{0}$ mas têm a mesma direcção. **Sugestão:** Reparar que não é necessário fazer novas figuras ou raciocínios geométricos e que basta escrever $\overrightarrow{v} = b\overrightarrow{u}$ e raciocinar algebricamente, utilizando as propriedades já estabelecidas.

É possível que o estudante suficientemente paciente para ter realizado as actividades propostas nos exercícios anteriores possa ter ficado com a ideia que trabalhar com vectores é aborrecido, com imensos casos particulares diferentes a examinar. Essa é a visão pessimista da situação. A visão optimista é que isso é um trabalho que se faz uma vez na vida e que acaba recompensando, na medida em que muitas vezes, ao utilizarem-se as propriedades algébricas que referimos e que tanto trabalho repetitivo nos deram, estamos eventualmente a estudar ao mesmo tempo várias situações diferentes e a poupar algum trabalho repetitivo.

Exercício 36. Dados os vectores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ na figura a seguir, determine:

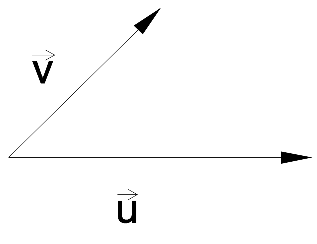


Figura 38

a) Um vector $\overrightarrow{x}$ tal que $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{x} = \overrightarrow{v} - \overrightarrow{x}$.
b) Dois vectores $\overrightarrow{y}$ e $\overrightarrow{z}$ tais que

$$\begin{cases} \overrightarrow{y} + \overrightarrow{z} = \overrightarrow{u} \\ \overrightarrow{y} - 2\overrightarrow{z} = \overrightarrow{v} \end{cases}.$$

[17]De certo modo, podemos dizer que a segunda propriedade distributiva é uma forma de aproveitar algebricamente as propriedades da semelhança de triângulos.

Exercício 37. Dado um triângulo de vértices A, A' e A'', chamam-se *medianas* do triângulo às rectas que unem cada vértice ao ponto médio do lado oposto.

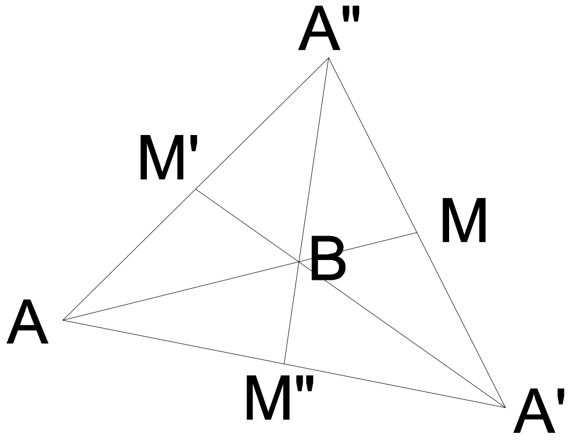


Figura 39

Um resultado conhecido há muito afirma que as três medianas de qualquer triângulo encontram-se num mesmo ponto, o *baricentro* do triângulo, e que a distância desse ponto a cada vértice é a distância desse vértice ao ponto médio do lado oposto multiplicada por $\frac{2}{3}$. As alíneas seguintes sugerem uma demonstração deste resultado que utiliza o cálculo com vectores.

a) Consideremos os vectores $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AA'}$ e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AA''}$. Sendo M, M' e M'' os pontos médios marcados na figura, mostre que

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{u} + \frac{1}{2}\overrightarrow{v}, \quad \overrightarrow{AM'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{v}\ , \quad \overrightarrow{AM''} = \frac{1}{2}\overrightarrow{u}\ .$$

b) Mostre que, sendo B o ponto do segmento $[AM]$ cuja distância a A é igual à distância de A a M multiplicada por $\frac{2}{3}$, tem-se

$$\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{u} + \frac{1}{3}\overrightarrow{v}.$$

c) Defina analogamente pontos B' e B'' e mostre que se tem também

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{u} + \frac{1}{3}\overrightarrow{v} \\ \overrightarrow{AB''} = \frac{1}{3}\overrightarrow{u} + \frac{1}{3}\overrightarrow{v} \end{cases}$$

e portanto que $B = B' = B''$.

Exercício 38. Na figura seguinte considerámos uma circunferência de centro O e um hexágono regular inscrito. O raio OY é perpendicular ao raio OX e encontra portanto o lado $[A\,B]$ no seu ponto médio M. Vamos notar

$$\overrightarrow{x} = \overrightarrow{OX}, \quad \overrightarrow{v} = \overrightarrow{OA}, \quad \overrightarrow{y} = \overrightarrow{OY}.$$

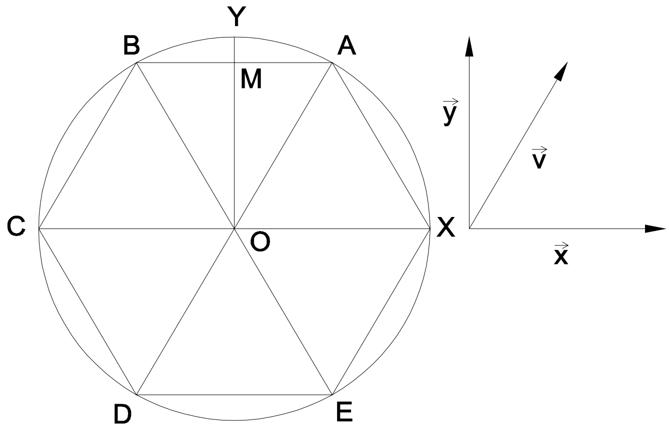


Figura 40

a) Represente como combinação linear de $\vec{x}$ e $\vec{v}$ os seis vectores com origem em O e extremidade nos vértices do hexágono.

b) Represente como combinação linear de $\vec{x}$ e $\vec{v}$ os vectores $\overrightarrow{OM}$ e $\vec{y} = \overrightarrow{OY}$.

c) Represente como combinação linear de $\vec{x}$ e $\vec{y}$ os seis vectores com origem em O e extremidades nos vértices do hexágono.

Exercício 39. Na figura seguinte está representado um triângulo equilátero inscrito numa circunferência de centro O e consideramos os vectores $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.
Represente o vector $\overrightarrow{AO}$ como combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$. **Sugestão:** Começar por fazer o mesmo sucessivamente com os vectores $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BM}$ e $\overrightarrow{AM}$.

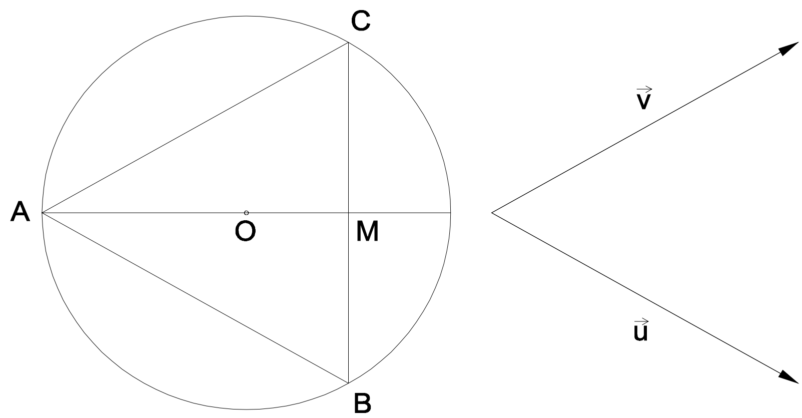


Figura 41

Exercício 40. Na figura seguinte está representada uma pirâmide triangular de vértices A, A', A'' e A''', assim como, a tracejado, os segmentos de recta que unem cada vértice com o baricentro do lado oposto (lembrar o exercício 37). Como auxiliar visual desenhámos em cada face uma pequena circunferência de centro nesse baricentro. Mostre que os quatro segmentos de recta referidos passam todos por um mesmo ponto (o baricentro da pirâmide) e que a distância de cada vértice ao baricentro da pirâmide é igual a distância desse vértice ao baricentro do lado oposto, multiplicada por $\frac{3}{4}$.

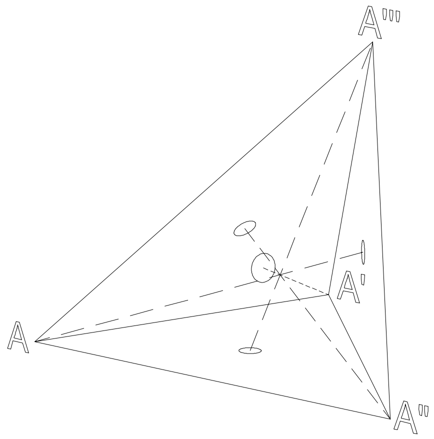


Figura 42

Voltemos a ter presente o ponto de vista de um vector como translação, em particular como movimento rígido do espaço. Tal como a operação de composição de movimentos rígidos é traduzida com um símbolo especial (o símbolo $+$) no caso em que os movimentos rígidos são vectores (translações), também no quadro dos vectores é frequente utilizar uma notação especial para o resultado de transformar um ponto A por um vector $\overrightarrow{u}$. Para além da notação geral $\overrightarrow{u}(A)$ para designar o transformado do ponto A pela translação $\overrightarrow{u}$, utilizamos, com o mesmo significado a notação $A+\overrightarrow{u}$, falando-se então da *soma do ponto A com o vector $\overrightarrow{u}$*:

$A+\overrightarrow{u}$ significa o mesmo que $\overrightarrow{u}(A)$.

Uma das razões para se utilizar esta notação alternativa é a de ela "combinar favoravelmente" com o uso do sinal $+$ para a composição de translações: A fórmula de definição $(\overrightarrow{v}\circ\overrightarrow{u})(A)=\overrightarrow{v}(\overrightarrow{u}(A))$ transforma-se na igualdade mnemónica

$$A+(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})=(A+\overrightarrow{u})+\overrightarrow{v},$$

que lembra uma espécie de propriedade associativa e que, como é usual, nos permite escrever, sem ambiguidade, $A+\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$ (lembrar que $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$ é igual tanto a $\overrightarrow{u}\circ\overrightarrow{v}$ como a $\overrightarrow{v}\circ\overrightarrow{u}$). Lembrando que a notação $\overrightarrow{AB}$ designa o vector que transforma o ponto A no ponto B, podemos também escrever a igualdade mnemónica

$$A+\overrightarrow{AB}=B$$

e dizer que

$A+\overrightarrow{u}$ significa o mesmo que "o ponto B tal que $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{u}$".

Exercício 41. Se A é um ponto, o que será o ponto $A+\overrightarrow{0}$?

★ ★ ★ ★

Vamos agora examinar melhor as possíveis relações de um vector com uma recta ou com um plano.

> Diz-se que um vector $\overrightarrow{u}$ *pode ser colocado sobre uma recta* r ou que é um *vector da recta* r se existirem pontos A e B da recta r tais que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$.
>
> Analogamente, diz-se que um vector $\overrightarrow{u}$ *pode ser colocado sobre um plano* α ou que é um *vector do plano* α se existirem pontos A e B do plano α tais que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$.

A definição que acabamos de apresentar merece um comentário. Se o vector $\overrightarrow{u}$ é um vector da recta r (ou do plano α), ele pode ser escrito na forma $\overrightarrow{AB}$, com A e B pontos da recta r (ou do plano α) mas pode também ser escrito na forma $\overrightarrow{A'B'}$, com A' e B' não pertencentes a essa recta (ou plano).

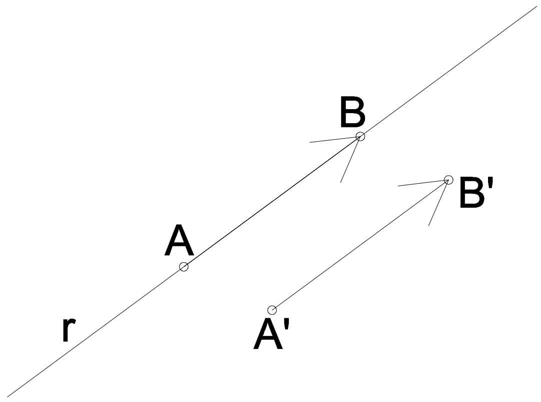


Figura 43

Em particular, se soubermos que um vector $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{A'B'}$ é um vector da recta r (ou do plano α), não podemos garantir que A' e B' tenham que estar em r (ou em α). Há, no entanto, um facto importante que podemos garantir:

> P 34. Se $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{A'B'}$ é um vector da recta r (ou do plano α) e se um dos pontos A' e B' está em r (ou em α), então o mesmo acontece ao outro ponto.

A justificação da propriedade precedente não é complicada. Se $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ então $A' = B'$, e portanto a afirmação é evidentemente verdadeira. Se $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$, escrevemos $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, com A e B em r (ou α) e recordamos que então as rectas AB e $A'B'$ são paralelas. No caso em que $\overrightarrow{u}$ é um vector da recta r, tem-se $r = AB$ e portanto a recta $A'B'$ que é paralela a esta e tem um ponto comum tem que coincidir com ela; no caso em que $\overrightarrow{u}$ é um vector do plano α, a recta $A'B'$ é paralela à recta AB do plano α pelo que é paralela a este plano e, uma vez que tem um dos seus pontos em α tem que estar contida em α.

É cómodo introduzirmos neste momento uma notação:

> Vamos usar o símbolo $\overrightarrow{\mathcal{V}}$ para designar o conjunto de todos os vectores.
>
> Dada uma recta r, vamos notar $\overrightarrow{\mathcal{V}}_r$ o conjunto dos vectores $\overrightarrow{u}$ que podem ser colocados sobre a recta r e dizemos que $\overrightarrow{\mathcal{V}}_r$ é a *recta vectorial associada* à recta r.
>
> Dado um plano α, vamos notar $\overrightarrow{\mathcal{V}}_\alpha$ o conjunto dos vectores $\overrightarrow{u}$ que podem ser colocados sobre o plano α e dizemos que $\overrightarrow{\mathcal{V}}_\alpha$ é o *plano vectorial associado* ao plano α.

As *rectas vectoriais*, isto é, os conjuntos da forma $\overrightarrow{\mathcal{V}}_r$, para alguma recta r, gozam de propriedades algébricas interessantes, que correspondem intuitivamente a dizer que, partindo de vectores desse conjunto e utilizando a soma e a multiplicação por números reais, obtêm-se resultados no mesmo conjunto. Comecemos por fazer notar que se tem sempre $\overrightarrow{0} \in \overrightarrow{\mathcal{V}}_r$, uma vez que, tomando A em r, tem-se $\overrightarrow{0} = \overrightarrow{AA}$. Em segundo lugar, se $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{V}}_r$ e $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{\mathcal{V}}_r$, então vem também $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \in \overrightarrow{\mathcal{V}}_r$. Com efeito, podemos escrever $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, com A e B em r e escolher então C de modo que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{BC}$; o que referimos em P 34 garante que $C \in r$ e portanto o facto de se ter $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$ garante que $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \in \overrightarrow{\mathcal{V}}_r$. Em terceiro lugar, o modo como foi definido o produto dum vector por um número real implica que, se $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{V}}_r$ e $a \in \mathbb{R}$, então $a\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{V}}_r$. As propriedades que acabamos de referir, e que destacaremos a seguir, costumam ser expressas pela afirmação que $\overrightarrow{\mathcal{V}}_r$ é um subespaço vectorial de $\overrightarrow{\mathcal{V}}$.

P 35. Uma *recta vectorial*, isto é, um conjunto da forma $\overrightarrow{\mathcal{V}}_r$, para uma certa recta r, é um *subespaço vectorial* de $\overrightarrow{\mathcal{V}}$, isto é, verifica as condições:
a) $\overrightarrow{0} \in \overrightarrow{\mathcal{V}}_r$.
b) Se $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{V}}_r$ e $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{\mathcal{V}}_r$, então $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \in \overrightarrow{\mathcal{V}}_r$.
c) Se $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{V}}_r$ e $a \in \mathbb{R}$, então $a\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{V}}_r$.

O que dissémos sobre as rectas vectoriais pode ser dito, com a mesma justificação, sobre os planos vectoriais:

P 36. Um *plano vectorial*, isto é, um conjunto da forma $\overrightarrow{\mathcal{V}}_\alpha$, para um certo plano α, é um *subespaço vectorial* de $\overrightarrow{\mathcal{V}}$, isto é, verifica as condições:
a) $\overrightarrow{0} \in \overrightarrow{\mathcal{V}}_\alpha$.
b) Se $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{V}}_\alpha$ e $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{\mathcal{V}}_\alpha$, então $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \in \overrightarrow{\mathcal{V}}_\alpha$.
c) Se $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{V}}_\alpha$ e $a \in \mathbb{R}$, então $a\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{V}}_\alpha$.

Recordemos o que foi referido a propósito da noção de direcção de uma translação na página 32. Traduzido na notação vectorial, dissémos que um vector $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ tem a direcção de uma recta r se, para cada ponto A, a recta que passa pelos pontos A e $B = A + \overrightarrow{u}$ é paralela a r e que, para termos a certeza que isso acontece, basta verificar esta condição para um ponto particular A. Uma vez que podemos utilizar, em particular, pontos de r para verificar se a condição anterior é verificada, caso em que "ser paralela a r" passa a querer dizer "coincidir com r", podemos relacionar a noção então introduzida com a que estamos a examinar:

P 37. Se r é uma recta tem-se sempre $\overrightarrow{0} \in \overrightarrow{\mathcal{V}}_r$ e, se $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$, então $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{V}}_r$ se, e só se $\overrightarrow{u}$ tem a direcção da recta r. Duas rectas r e r' são paralelas se, e só se, $\overrightarrow{\mathcal{V}}_r = \overrightarrow{\mathcal{V}}_{r'}$, isto é, têm a mesma recta vectorial associada.

Recordando a definição de vector duma recta ou dum plano, é muito fácil relacionar a propriedade de um vector se poder colocar sobre uma recta com a de ele se poder colocar sobre um plano:

P 38. Um vector $\overrightarrow{u}$ pertence a um plano vectorial $\overrightarrow{\mathcal{V}}_\alpha$ se, e só se, ele pertence a alguma recta vectorial $\overrightarrow{\mathcal{V}}_r$, com r recta do plano α.

Em consequência, e lembrando o que já conhecemos sobre as rectas:

P 39. O vector $\overrightarrow{0}$ pode ser colocado sobre qualquer plano. Se $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$, então $\overrightarrow{u}$ pertence ao plano vectorial $\overrightarrow{\mathcal{V}}_\alpha$ se, e só se, $\overrightarrow{u}$ tem a direcção de alguma das rectas do plano α.

Do mesmo modo que, como referimos em P 37, o paralelismo de duas rectas é equivalente à igualdade das rectas vectoriais associadas, podemos caracterizar em termos vectoriais o paralelismo entre uma recta e um plano e o paralelismo entre dois planos.

Recordando que uma recta é paralela a um plano se, e só se, ela é paralela a alguma recta desse plano, podemos dizer:

P 40. Uma recta r é paralela a um plano α se, e só se, qualquer vector da recta vectorial $\overrightarrow{\mathcal{V}}_r$ pertence ao plano vectorial $\overrightarrow{\mathcal{V}}_\alpha$ (nas notações da teoria dos conjuntos $\overrightarrow{\mathcal{V}}_r \subset \overrightarrow{\mathcal{V}}_\alpha$).

Recordando que dois planos α e β são paralelos se, e só se, qualquer recta de α é paralela ao plano β, concluímos facilmente que

P 41. Dois planos α e β são paralelos se, e só se, $\overrightarrow{\mathcal{V}}_\alpha = \overrightarrow{\mathcal{V}}_\beta$, isto é, têm o mesmo plano vectorial associado.

★ ★ ★ ★

Quando r é uma recta e A é um ponto escolhido em r, já referimos que os vectores da recta vectorial associada $\overrightarrow{\mathcal{V}}_r$ são exactamente os que se podem escrever na forma $\overrightarrow{AB}$ com B também sobre a recta r. Nas aplicações é muitas vezes útil olhar para esta propriedade doutro ponto de vista:

P 42. Quando A é um ponto escolhido sobre a recta r, os restantes pontos sobre essa recta são exactamente os que podem ser escritos na forma $A + \overrightarrow{v}$, com $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{\mathcal{V}}_r$, dito de outro modo, $r = A + \overrightarrow{\mathcal{V}}_r$.

Por outras palavras, conhecendo um ponto particular de r, todos os outros podem ser obtidos a partir deste através de um vector na recta vectorial associada. Para aplicarmos esta propriedade é útil caracterizarmos de forma algébrica o conjunto de vectores $\overrightarrow{\mathcal{V}}_r$. Recordando o que referimos em P 32 e reparando que $\overrightarrow{0} = 0\overrightarrow{u}$, podemos enunciar:

P 43. Se $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ é um vector particular em $\overrightarrow{\mathcal{V}}_r$, então os vectores $\overrightarrow{v}$ que também estão em $\overrightarrow{\mathcal{V}}_r$ são exactamente os que podem ser escritos na forma $a\overrightarrow{u}$, com a número real.

Além disso, para cada vector $\overrightarrow{v}$ nessas condições, o número a tal que $\overrightarrow{v} = a\overrightarrow{u}$ é único e diz-se que ele é a *coordenada* de $\overrightarrow{v}$ relativa ao vector $\overrightarrow{u}$ fixado.

Quando o vector $\overrightarrow{u}$ está implícito, para enunciar o facto de a ser a coordenada do vector $\overrightarrow{v}$ é costume escrever simplesmente $\boldsymbol{\overrightarrow{v} \leftrightarrow a}$.

A notação $\overrightarrow{v} \leftrightarrow a$ tem o mérito de lembrar que estamos em presença de uma correspondência biunívoca entre vectores de $\overrightarrow{\mathcal{V}}_r$ e números reais (ou, mais precisamente, entre o conjunto $\overrightarrow{\mathcal{V}}_r$ e o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais). Quando falamos de *correspondência biunívoca* estamos a significar que associámos um número real a cada vector $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{\mathcal{V}}_r$ de modo a verificarem-se as duas propriedades seguintes:

1) Se dois vectores têm o mesmo número real associado, então os dois vectores coincidem.

2) Se nos derem um número real qualquer, existe sempre um vector[18] tendo aquele número real como associado.

Repare-se que, quando falamos de coordenada de um vector $\overrightarrow{v}$, relativa a um vector $\overrightarrow{u}$, o vector $\overrightarrow{u}$ é, por hipótese, diferente de $\overrightarrow{0}$ mas o vector $\overrightarrow{v}$ pode ser ou não o vector $\overrightarrow{0}$.

Exercício 42. Seja $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ um vector fixado numa recta vectorial $\overrightarrow{\mathcal{V}}_r$.
a) Quais as coordenadas dos vectores $\overrightarrow{0}, \overrightarrow{u}$ e $-\overrightarrow{u}$, relativas ao vector $\overrightarrow{u}$.
b) Se $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ são dois vectores em $\overrightarrow{\mathcal{V}}_r$, com coordenadas a e b, respectivamente, relativas ao vector $\overrightarrow{u}$, e se $c \in \mathbb{R}$ quais as coordenadas dos vectores $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$, $-\overrightarrow{w}$, $c\,\overrightarrow{w}$ e $\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}$, também relativas a $\overrightarrow{u}$?
c) Se $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$ é um vector em $\overrightarrow{\mathcal{V}}_r$ e se a é a coordenada de $\overrightarrow{v}$ relativa a $\overrightarrow{u}$, qual será a coordenada de $\overrightarrow{u}$ relativa a $\overrightarrow{v}$?

Algumas das conclusões a que chegou no exercício precedente podem ser lembradas de forma gráficamente mais atraente:

P 44. Seja $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ um vector fixado numa recta vectorial $\overrightarrow{\mathcal{V}}_r$. Dados vectores $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ de $\overrightarrow{\mathcal{V}}_r$, com

$$\overrightarrow{v} \leftrightarrow a, \quad \overrightarrow{w} \leftrightarrow b,$$

tem-se

$$\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} \leftrightarrow a + b, \quad -\overrightarrow{w} \leftrightarrow -b, \quad c\overrightarrow{w} \leftrightarrow cb, \quad \overrightarrow{v} - \overrightarrow{w} \leftrightarrow a - b.$$

Combinando o que dissémos em P 42 e P 43, podemos dizer:

P 45. Seja A um ponto escolhido sobre uma recta r e seja $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ um vector escolhido em $\overrightarrow{\mathcal{V}}_r$. Os pontos de r são exactamente os pontos que podem ser escritos na forma

$$A + a\overrightarrow{u},$$

com $a \in \mathbb{R}$. Dizemos que a representação dos pontos da recta nesta forma é uma *representação vectorial* da recta ou ainda uma *equação vectorial* da recta.[19]

Repare-se que uma mesma recta r admite várias representações vectoriais, consoante a escolha do ponto A e do vector $\overrightarrow{u}$. O papel importante que os vectores diferentes de $\overrightarrow{0}$ de $\overrightarrow{\mathcal{V}}_r$ jogam na caracterização dos pontos da recta r leva a dar-lhes uma designação especial.

Chama-se *vector director* de uma recta r a qualquer vector não nulo dessa recta, isto é, a qualquer vector $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ pertencente a $\overrightarrow{\mathcal{V}}_r$.

Exercício 43. Sejam A e B pontos distintos de uma recta r e seja $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$. Determine representações vectoriais para os seguintes conjuntos de pontos da recta:
a) A semi-recta de origem A que contém o ponto B.
b) O semento de recta $[A\,B]$, de extremidades A e B.
c) O conjunto dos pontos da recta que estão mais próximos de A que de B.

[18]necessariamente único pelo propriedade 1).
[19]A utilização neste quadro da palavra "equação" é algo enganadadora, na medida que ela choca com a noção habitual de equação em Matemática. O ideal seria não a utilizar mas o facto de ela ter caído no uso corrente leva a que seja importante estarmos alertados para o seu significado.

Tal como acontecia no caso das rectas, podemos enunciar o que foi referido em P 34 doutro ponto de vista:

P 46. Quando A é um ponto escolhido sobre o plano α, os restantes pontos desse plano são exactamente os que podem ser escritos na forma $A+\overrightarrow{w}$, com $\overrightarrow{w}\in\overrightarrow{\mathcal{V}}_\alpha$.

Vimos atrás que, fixado um vector $\overrightarrow{u}\neq\overrightarrow{0}$ numa recta vectorial $\overrightarrow{\mathcal{V}}_r$ os vectores de $\overrightarrow{\mathcal{V}}_r$ são exactamente os que se podem escrever na forma $a\overrightarrow{u}$ com $a\in\mathbb{R}$. O que se passa com os vectores de um plano vectorial é análogo, mas exige que se parta de dois vectores não nulos e que não tenham a mesma direcção.

Vamos chamar *referencial vectorial* dum plano α a um par de vectores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ diferentes de $\overrightarrow{0}$, pertencentes ao plano vectorial $\overrightarrow{\mathcal{V}}_\alpha$ e que tenham direcções distintas (dito de outro modo, que não sejam *colineares*, isto é, não pertençam a uma mesma recta vectorial).

Suponhamos que os vectores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ constituem um referencial vectorial do plano α. Dados dois números reais a e b, a *combinação linear* $a\overrightarrow{u}+b\overrightarrow{v}$ é ainda um vector de $\overrightarrow{\mathcal{V}}_\alpha$. O que é mais importante é que a propriedade anterior admite uma recíproca: Suponhamos que $\overrightarrow{w}$ é um vector arbitrário em $\overrightarrow{\mathcal{V}}_\alpha$.

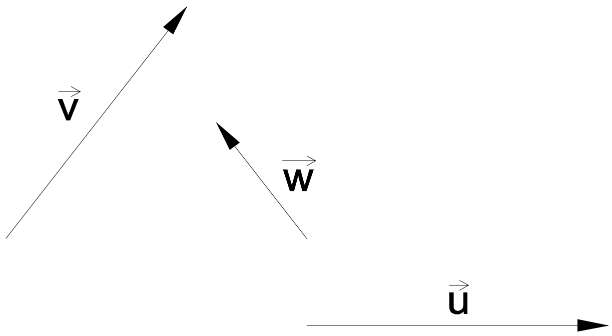


Figura 44

Partamos de um ponto arbitrário A de α e consideremos o ponto $B=A+\overrightarrow{w}$. Seja r a recta do plano α com a direcção do vector $\overrightarrow{u}$ e que passa por A e seja s a recta do mesmo plano com a direcção do vector $\overrightarrow{v}$ e que passa por B. As rectas r e s têm direcções diferentes e portanto intersectam-se num ponto C do plano α.

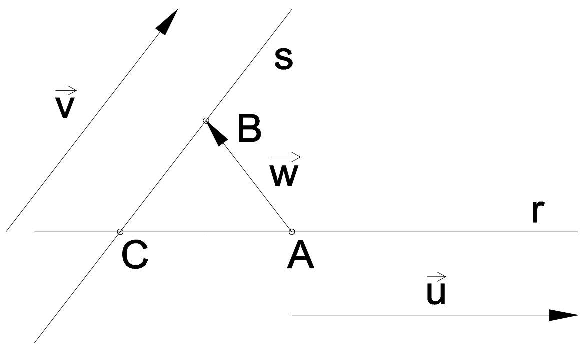


Figura 45

Podemos assim escrever $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AB}$ como soma dos vectores $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{CB}$, que estão respectivamente em $\overrightarrow{\mathcal{V}}_r$ e em $\overrightarrow{\mathcal{V}}_s$, e este é o único modo de escrever $\overrightarrow{w}$ como soma de dois vectores nessas condições. O que vimos atrás, quando estudámos o caso das rectas, garante-nos que os vectores em questão se podem escrever na forma $\overrightarrow{AC} = a\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{CB} = b\overrightarrow{v}$, com $a, b \in \mathbb{R}$ (no caso da figura $a = -\frac{3}{5}$ e $b = \frac{1}{2}$) e que os números a e b nessas condições são únicos. Concluímos assim que o vector $\overrightarrow{w}$ se pode escrever **de maneira única** na forma de combinação linear $\overrightarrow{w} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}$. Resumindo as considerações anteriores, podemos dizer:

P 47. Suponhamos que os vectores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ constituem um referencial vectorial do plano α. Os vectores $\overrightarrow{w}$ de $\overrightarrow{\mathcal{V}}_\alpha$ são exactamente aqueles que se podem escrever na forma

$$\overrightarrow{w} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v},$$

com $a, b \in \mathbb{R}$. Além disso para cada um desses vectores $\overrightarrow{w}$, os números a e b nas condições anteriores são únicos, dizendo-se que eles são as *coordenadas* de $\overrightarrow{w}$ relativas ao referencial vectorial em questão, ou que $\overrightarrow{w}$ *é representado pelo par ordenado* (a, b) de números reais nesse referencial.
Quando o referencial vectorial considerado está implícito, para enunciar o facto de o vector $\overrightarrow{w}$ ser representado pelo par ordenado (a, b) é costume escrever simplesmente $\boldsymbol{\overrightarrow{w} \leftrightarrow (a, b)}$.

Temos assim uma correspondência biunívoca entre o conjunto $\overrightarrow{\mathcal{V}_\alpha}$ e o conjunto $\mathbb{R}^2$ dos pares ordenados de números reais.

Se quisermos fazer o paralelo da propriedade precedente com a enunciada em P 43 para as rectas, só temos que considerar que um *referencial vectorial* de uma recta r é simplesmente um vector não nulo $\overrightarrow{u}$ de $\overrightarrow{\mathcal{V}}_r$, ou seja, aquilo a que chamámos um vector director da recta r.

O mesmo raciocínio que conduziu às propriedades enunciadas em P 44 permite-nos enunciar as seguintes:

P 48. Consideremos um referencial vectorial fixado em $\overrightarrow{\mathcal{V}_\alpha}$, constituído pelos vectores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$. Dados vectores $\overrightarrow{w}$ e $\overrightarrow{w}'$ de $\overrightarrow{\mathcal{V}_\alpha}$, com

$$\overrightarrow{w} \leftrightarrow (a, b), \quad \overrightarrow{w}' \leftrightarrow (a', b'),$$

tem-se

$$\begin{array}{ll} \overrightarrow{w} + \overrightarrow{w}' \leftrightarrow (a + a', b + b'), & -\overrightarrow{w}' \leftrightarrow (-a', -b'), \\ c\overrightarrow{w}' \leftrightarrow (ca', cb'), & \overrightarrow{w} - \overrightarrow{w}' \leftrightarrow (a - a', b - b'). \end{array}$$

Exercício 44. **a)** Tente apresentar uma justificação para duas das quatro propriedades que acabamos de enunciar.
b) Continuando a considerar o referencial vectorial constituído pelos vectores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$, complete os espaços em branco nas correspondências a seguir:

$$\overrightarrow{0} \leftrightarrow (\ ,\ ), \quad \overrightarrow{u} \leftrightarrow (\ ,\ ), \quad \overrightarrow{v} \leftrightarrow (\ ,\ ).$$

Ainda como no caso das rectas, combinando as propriedades precedentes, podemos dizer:

P 49. Seja A um ponto fixado dum plano α e consideremos um referencial vectorial $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ desse plano. Os pontos de α são então exactamente os que podem ser escritos na forma

$$A + a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v},$$

com $a, b \in \mathbb{R}$. Dizemos que a representação dos pontos do plano nesta forma é uma *representação vectorial* do plano, ou *equação vectorial* do plano.[20]

Exercício 45. Sejam A, B e C três pontos não colineares dum plano e consideremos o referencial vectorial desse plano constituído pelos vectores $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$. Seja X um ponto do plano tal que $\overrightarrow{AX} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}$. Determine, em termos das coordenadas a e b do vector $\overrightarrow{AX}$, condições necessárias e suficientes para que:
a) X esteja na recta AB.
b) X esteja no segmento de recta $[AB]$.
c) X esteja na recta BC.
d) X esteja no segmento de recta $[BC]$.
e) X esteja no interior do triângulo $[ABC]$.

Exercício 46. Na figura seguinte A, B, C e D são vértices consecutivos dum paralelogramo, M e N são os pontos médios dos segmentos $[AB]$ e $[BC]$ e X é a intersecção das rectas AN e DM.
a) Considerando o referencial vectorial do plano da figura constituído pelos vectores $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$, determine as coordenadas do vector $\overrightarrow{AX}$.
b) Qual a relação entre os comprimentos dos segmentos $[AX]$ e $[AN]$?
c) Qual a relação entre a área do triângulo $[ADX]$ e a área do paralelogramo?
d) Qual a relação entre a área do triângulo $[AMX]$ e a área do paralelogramo?

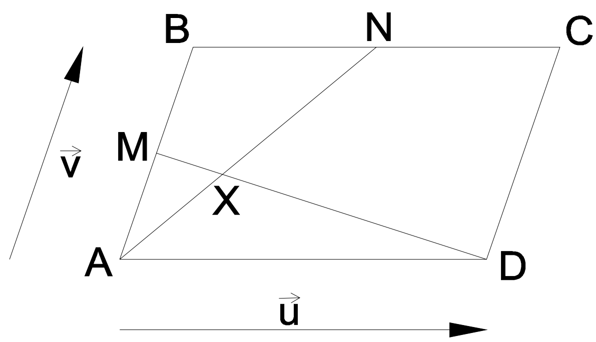


Figura 46

Vimos atrás que, dado um certo plano α, podemos considerar referenciais vectoriais desse plano, constituídos por dois vectores do plano vectorial associado, que são suficientes para “gerar” todos os vectores desse plano vectorial, no sentido que qualquer um destes se pode escrever como combinação linear dos dois vectores que constituem o referencial. E se quisermos agora obter todos os vectores, e não apenas os dum certo plano vectorial? Vamos verificar que isso é possível desde que se parta de três vectores, em vez de dois.

Vamos chamar *referencial vectorial* do espaço a um triplo de vectores $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ diferentes de $\overrightarrow{0}$, que não pertençam a um mesmo plano vectorial (não sejam *complanares*).

Consideremos um referencial vectorial do espaço, constituído pelos vectores $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ e seja $\overrightarrow{x}$ um vector arbitrário do espaço. O nosso objectivo é mostrar que $\overrightarrow{x}$ se pode escrever de maneira

[20]Relembrar o que dissémos na nota de pé de página 19, na página 48.

única como *combinação linear*

$$\overrightarrow{x} = a\,\overrightarrow{u} + b\,\overrightarrow{v} + c\,\overrightarrow{w},$$

com a, b e c números reais (na figura a seguir o paralelogramo a tracejado destina-se a apoiar a intuição de que não se trata de uma construção num plano).

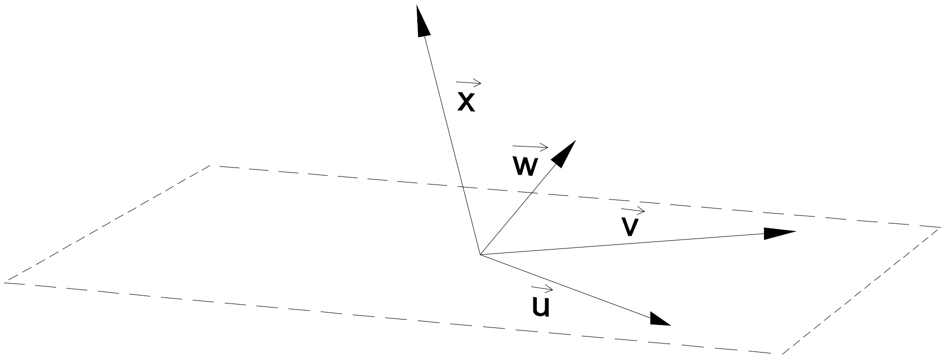


Figura 47

Comecemos por tomar um ponto arbitrário O do espaço e considerar os pontos $A = O + \overrightarrow{u}$, $B = O + \overrightarrow{v}$, $C = O + \overrightarrow{w}$ e $X = O + \overrightarrow{x}$. Os pontos O, A e B não podem ser colineares senão haveria um plano que continha os quatro pontos O, A, B e C e então os três vectores do referencial vectorial pertenciam ao correspondente plano vectorial. Podemos assim considerar o plano α que contém os pontos O, A e B e, como anteriormente, o ponto C não pode estar sobre o plano α. Além disso, uma vez que O, A e B não são colineares, os vectores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ constituem um referencial vectorial do plano α.

Consideremos a recta r que passa pelo ponto X e tem a direcção do vector $\overrightarrow{w}$. Essa recta não é paralela ao plano α, por ser paralela à recta $\overline{OC}$, que é concorrente com α. Podemos assim considerar a intersecção D da recta r com o plano α, intersecção essa que é o único ponto D de α para o qual o vector $\overrightarrow{DX}$ tem a direcção de $\overrightarrow{w}$.

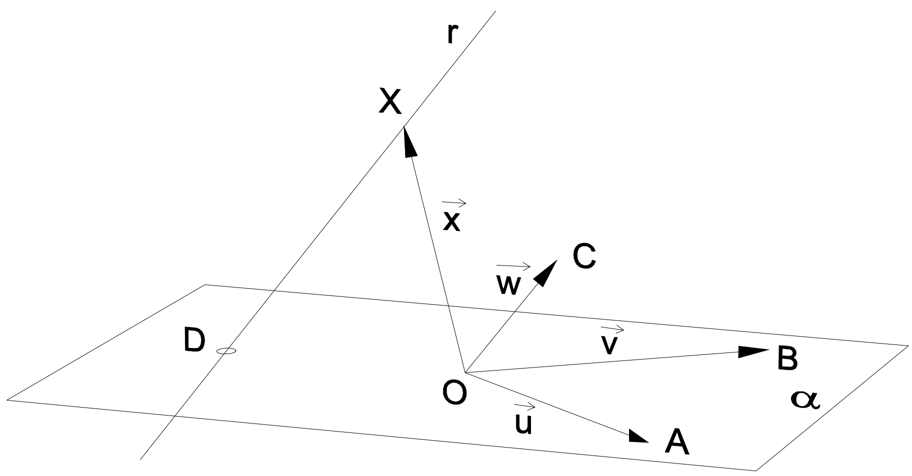


Figura 48

O facto de $\overrightarrow{DX}$ ter a direcção de $\overrightarrow{w}$ garante a existência de um único número c tal que $\overrightarrow{DX} = c$ $\overrightarrow{w}$. O facto de o vector $\overrightarrow{OD}$ poder ser colocado sobre o plano α garante a existência de um par único de números reais a e b tais que

$$\overrightarrow{OD} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}.$$

Podemos então escrever

$$\overrightarrow{x} = \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DX} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v} + c\overrightarrow{w}.$$

Das considerações feitas anteriormente decorre facilmente que este é o único modo de decompor $\overrightarrow{x}$ como combinação linear de $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$. Em resumo:

P 50. Dado um referencial vectorial $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ do espaço, cada vector $\overrightarrow{x}$ decompõe-se de maneira única como combinação linear

$$\overrightarrow{x} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v} + c\overrightarrow{w},$$

com a, b e c números reais. Diz-se então que a, b e c são as *coordenadas* de $\overrightarrow{x}$, relativas ao referencial vectorial considerado, ou que o vector $\overrightarrow{x}$ é representado pelo triplo ordenado (a, b, c) naquele referencial.
Quando o referencial vectorial considerado está implícito, para enunciar o facto de o vector $\overrightarrow{x}$ ser representado pelo triplo ordenado (a, b, c) é costume escrever simplesmente $\boldsymbol{\overrightarrow{x} \leftrightarrow (a, b, c)}$.

Tal como no caso do plano, fica assim definida uma correspondência biunívoca entre o conjunto $\overrightarrow{\mathcal{V}}$ dos vectores do espaço e o conjunto $\mathbb{R}^3$ dos triplos ordenados de números reais.

Exercício 47. Consideremos um referencial vectorial do espaço constituído pelos vectores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ e sejam $\overrightarrow{x}$ e $\overrightarrow{y}$ os vectores representados naquele referencial respectivamente pelos triplos $(1, -1, 2)$ e $(-1, 0, 1)$.
a) Quais os triplos que representam os vectores $\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}$, $-\overrightarrow{y}$, $5\overrightarrow{y}$ e $\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}$?
b) Os vectores $\overrightarrow{x}$ e $\overrightarrow{y}$ são, ou não, colineares (pertencem, ou não, a uma mesma recta vectorial)?
c) Quais os triplos que representam vectores da recta vectorial que contém $\overrightarrow{w}$ e quais aqueles que representam vectores do plano vectorial que contém $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$?
d) Determine um triplo da forma $(-1, -1, ?)$ que represente um vector do plano vectorial que contém $\overrightarrow{x}$ e $\overrightarrow{y}$.

O mesmo raciocínio que foi utilizado no caso particular tratado no exercício precedente permite enunciar mais geralmente o seguinte enunciado análogo a P 44 e P 48.

P 51. Consideremos um referencial vectorial fixado do espaço, constituído pelos vectores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$. Dados vectores $\overrightarrow{x}$ e $\overrightarrow{x}'$, com

$$\overrightarrow{x} \leftrightarrow (a, b, c), \quad \overrightarrow{x}' \leftrightarrow (a', b', c'),$$

tem-se

$$\begin{array}{ll} \overrightarrow{x} + \overrightarrow{x}' \leftrightarrow (a + a', b + b', c + c'), & -\overrightarrow{x}' \leftrightarrow (-a', -b', -c'), \\ t\overrightarrow{x}' \leftrightarrow (ta', tb', tc'), & \overrightarrow{x} - \overrightarrow{x}' \leftrightarrow (a - a', b - b', c - c'). \end{array}$$

Exercício 48. Na figura a seguir está representado um cubo, assim como o seu centro O e um hexágono tendo como vértices os pontos médios de seis arestas.

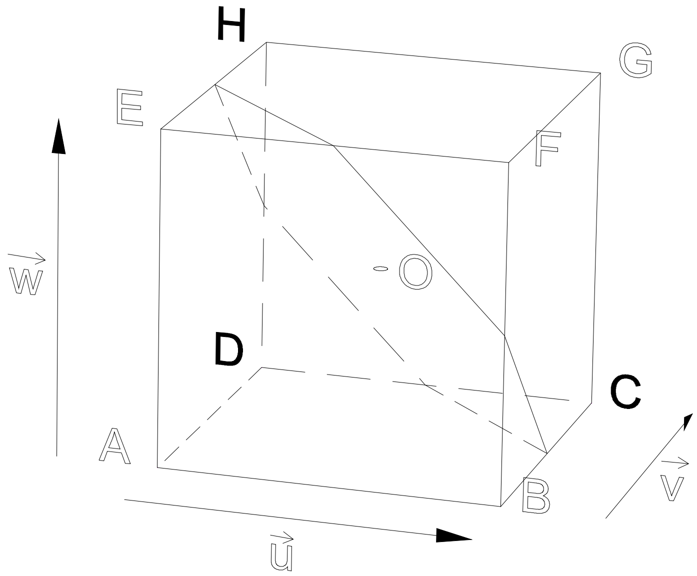


Figura 49

Considerando o referencial vectorial do espaço constituído pelos vectores $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$,$\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ e $\vec{w} = \overrightarrow{AE}$,

a) Determine os triplos que representam naquele referencial os vectores com origem em A e extremidades em O e em cada um dos vértices do hexágono.

b) Determine os triplos que representam os vectores com origem em O e extremidades nos vértices do hexágono.

c) Utilize a conclusão de b) para mostrar que os vértices do hexágono e o centro O são complanares.

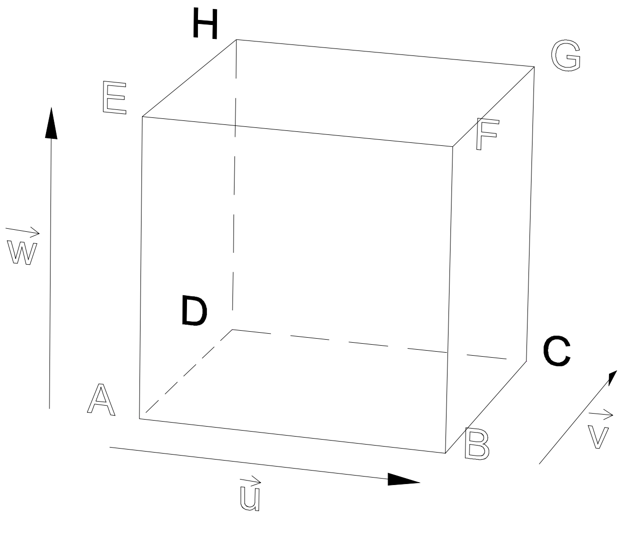


Figura 50

Exercício 49. Partamos dum cubo, como o da figura 50, e seccionemo-lo retirando oito pirâmides triangulares, cada uma das quais tendo como vértices um dos vértices do cubo e os pontos médios das arestas que concorrem nesse vértice. O sólido obtido é o *cuboctaedro* representado na figura seguinte e cuja planificação foi apresentada na página 28.

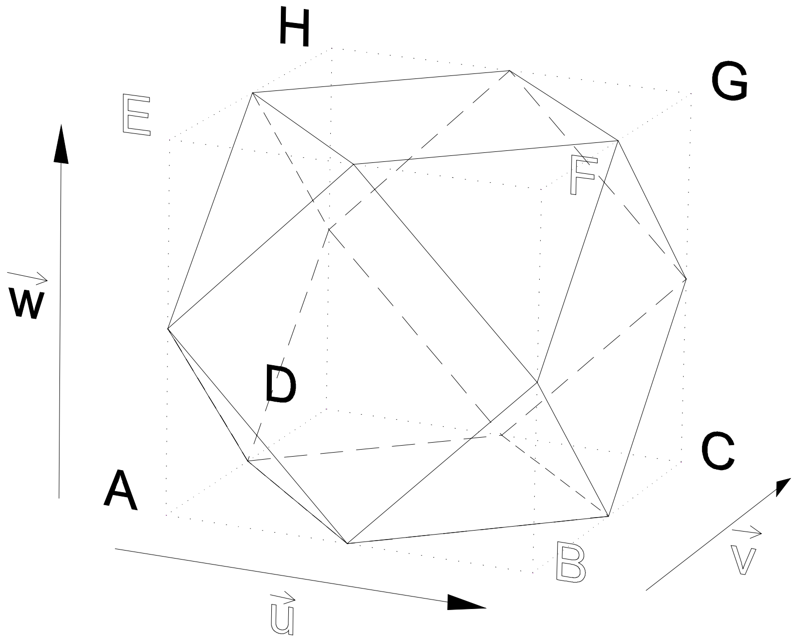


Figura 51

Considerando duas faces triangulares opostas, por exemplo as correspondentes aos vértices E e C do cubo, justifique o facto de os planos que as contêm serem paralelos.

4. Perpendicularidade e ângulos na Geometria do Espaço.

O estudo da Geometria feito no Ensino Básico levou-nos a encontrar a noção de ângulo em pelo menos duas situações. A primeira diz respeito a duas semi-rectas com a mesma origem; sabemos o que é o ângulo dessas semi-rectas, um valor entre 0° e 180°.

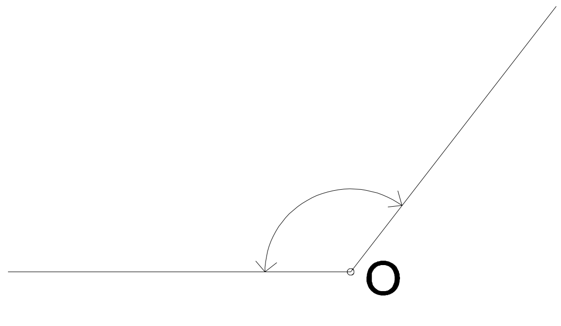


Figura 52

Repare que a situação anterior é a que está em jogo quando se fala, por exemplo, dos ângulos internos ou externos dum polígono: apesar de os lados deste serem sementos de recta e não semi-rectas, são as semi-rectas que estes determinam que estão em jogo.

A segunda situação, relacionada com a primeira, diz respeito ao ângulo de duas rectas concorrentes r e s. Sendo O o ponto de intersecção, cada uma dessas duas rectas determina duas semi-rectas com origem em O, uma dirigida em cada um dos sentidos.

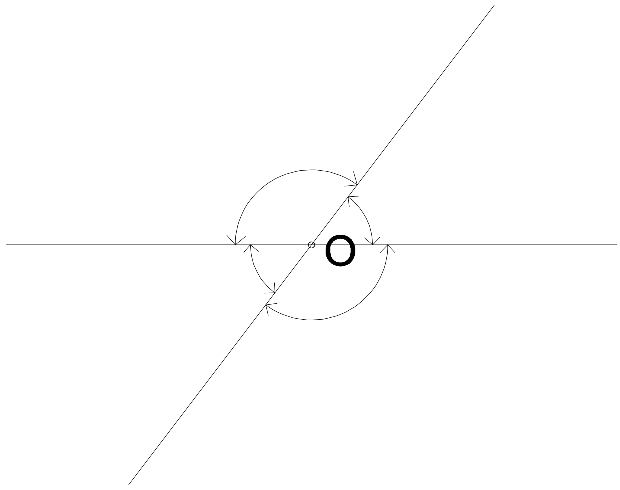


Figura 53

Combinando essas semi-rectas das várias maneiras, podemos assim considerar quatro ângulos, dois a dois iguais (verticalmente opostos). Os que não são verticalmente opostos (os adjacentes) são suplementares, tendo assim soma igual a 180°. Por definição o ângulo das duas rectas é o menor desses dois ângulos suplementares, um valor entre 0° e 90°. Uma vez que, por hipótese, partimos de duas rectas concorrentes, o ângulo de duas rectas nunca poderia ser 0°, embora possa ser 90°; no entanto extende-se a definição referida, de modo a considerar que duas rectas concidentes têm um ângulo de 0°.

As observações precedentes são já bem conhecidas desde o Ensino Básico. Relembrámo-las apenas para podermos examinar o que se passa no quadro da Geometria do Espaço. No caso em que temos duas semi-rectas com a mesma origem ou duas rectas concorrentes (ou coincidentes), não há nada de novo a estudar, uma vez que elas vão estar sempre sobre um certo plano e podemos aplicar o que estudámos na Geometria Plana.

A Geometria do Espaço começa a intervir de modo essencial quando queremos definir o ângulo de duas semi-rectas cujas origens podem ser diferentes ou de duas rectas que não são necessariamente concorrentes. Por exemplo, relativamente ao cubo da figura a seguir,

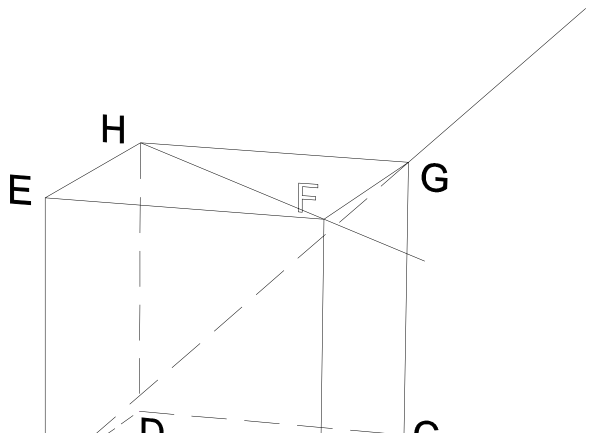


Figura 54

que significado devemos dar ao ângulo das semi-rectas com origens em A e em H e e que contêm os pontos G e F, respectivamente?

A resposta acaba por ser simples, embora não tão simples quanto possa parecer à primeira vista… Tomamos um ponto arbitrário do espaço, por exemplo o ponto C, e consideramos a semi-recta transformada da semi-recta de origem A pela translação $\overrightarrow{AC}$ e a transformada da semi-recta de origem H pela translação $\overrightarrow{HC}$; o ângulo das semi-rectas originais é, por definição o ângulo das duas semi-rectas transformadas, que têm ambas a mesma origem C (no caso da figura o ângulo é 90°, embora isso possa não ser ainda claro de momento).

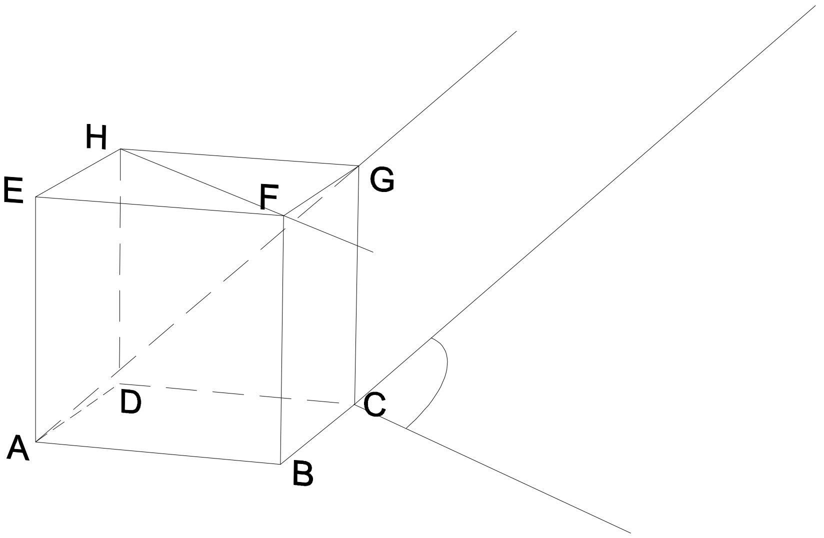


Figura 55

Há, no entanto um cuidado que devemos ter antes considerarmos definido o que é o ângulo das duas semi-rectas: É preciso termos a certeza de que, se tivéssemos escolhido outro ponto do espaço, em vez do ponto C éramos conduzidos ao mesmo resultado. Sem isso, diferentes pessoas podiam determinar diferentes valores para o ângulo em questão… Felizmente, a resposta, afirmativa, acaba por ser simples: Se, em vez do ponto C, tivéssemos escolhido outro ponto X, as semi-rectas correspondentes de origem X iam ser as transformadas das semi-rectas de origem C pela translação $\overrightarrow{CX}$ e portanto o respectivo ângulo ia ser o mesmo (lembrar que as translações, como qualquer movimento rígido, conservam os ângulos).

Na prática, quando queremos determinar o ângulo de duas semi-rectas com origens diferentes, podemos sempre escolher como ponto auxiliar a origem de uma das duas semi-rectas e então apenas temos que aplicar uma translação à outra semi-recta, o que corresponde a considerar a semirecta paralela, com a nova origem e o mesmo sentido.

Repare-se que o modo como definimos o ângulo de duas semi-rectas permite-nos enunciar a seguinte propriedade geral:

P 52. O ângulo de duas semi-rectas não se altera se substituirmos qualquer delas pela sua imagem por uma translação arbitrária.

A definição do ângulo de duas rectas não obrigatoriamente concorrentes pode ser feita de maneira análoga à utilizada no caso das semi-rectas. Dadas duas rectas r e s, escolhe-se arbitrariamente um ponto O do espaço, consideram-se as rectas r' e s' paralelas a r e s que passam por O, rectas essas que são transformadas de r e s por translações convenientes, e define-se o ângulo das rectas r e s como sendo o ângulo das rectas concorrentes (ou coincidentes) r' e s'. A razão por que este ângulo não depende da escolha do ponto O é a mesma que encontrámos quando definimos o ângulo de duas semi-rectas. Como antes, podemos dizer:

P 53. O ângulo de duas rectas não se altera se substituirmos qualquer delas por uma recta paralela a ela (ou seja, pela sua imagem por meio de uma translação).

Resulta também facilmente das considerações que temos vindo a fazer que

P 54. O ângulo de duas rectas é 0° se, e só se, elas são paralelas.

Também é possível definir o que é o ângulo de dois vectores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$, ambos diferentes de $\overrightarrow{0}$, a partir da noção de ângulo de duas semi-rectas. Dado um vector $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$, chamamos *semi-recta adaptada* a $\overrightarrow{u}$ a qualquer semi-recta de origem num ponto arbitrário A e que contenha o ponto $A' = A + \overrightarrow{u}$. Um mesmo vector $\overrightarrow{u}$ tem várias semi-rectas adaptadas, uma para cada ponto A de partida, mas duas dessas semi-rectas obtêm-se sempre uma da outra como transformada por meio de uma translação (lembrar a conclusão do exercício 28). Se nos lembrarmos do facto de o ângulo de duas semi-rectas não se alterar quando se substitui uma delas pela sua transformada por uma translação, concluímos que é legítimo apresentar a definição seguinte:

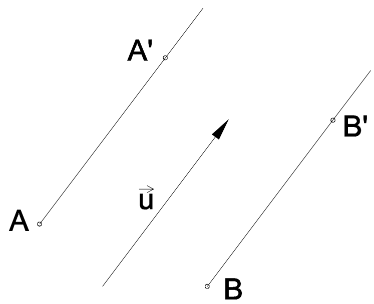


Figura 56

Define-se o *ângulo* de dois vectores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$, ambos diferentes de $\overrightarrow{0}$, como sendo o ângulo de duas semi-rectas adaptadas a esses vectores.

Exercício 50. Encontrar, em termos da multiplicação de um vector por um número real, condições necessárias e suficientes para que dois vectores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$, diferentes de $\overrightarrow{0}$:
a) Tenham um ângulo de 0°;
b) Tenham um ângulo de 180°.

★ ★ ★ ★

Duas rectas, duas semi-rectas, ou dois vectores diferentes de $\overrightarrow{0}$, dizem-se *perpendiculares* quando o respectivo ângulo é 90°. Vamos agora estender ao espaço a seguinte propriedade que já conhecemos muito bem da Geometria Plana:

P 55. Sejam A e B são pontos distintos de um plano α, seja P o ponto médio do segmento por eles determinado e seja r a recta que contém A e B. O conjunto dos pontos C do plano α que estão à mesma distância de A e B é a recta do plano α que passa por P e é perpendicular a r (a *mediatriz* do segmento $[AB]$ *no plano* α).

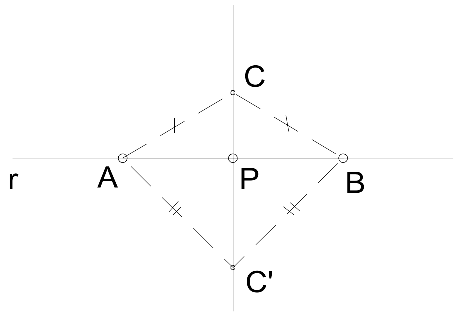


Figura 57

Exercício 51. Recorde, do estudo que fez da Geometria Plana, que, se P é um ponto de um plano α e r é uma recta do mesmo plano, pelo ponto P passa uma única recta do plano α perpendicular a r (este facto está aliás implícito no enunciado precedente).
a) Será que o enunciado atrás referido continua válido se substituirmos o valor de $90°$ por outro valor? Por exemplo, será verdade que, se P é um ponto de uma recta r sobre o plano α, então pelo ponto P passa uma única recta do plano α fazendo um ângulo de $70°$ com a recta r?
b) Será que o mesmo enunciado continua válido se não fizermos referência ao plano α? Por exemplo, será que, por um ponto P de uma recta r passa uma única recta do espaço perpendicular a r?

Tentando generalizar a propriedade enunciada em P 55, a questão que se põe naturalmente é o que será o conjunto dos pontos do espaço que estão equidistantes de A e B. Há uma resposta que é simples de dar: Uma vez que qualquer ponto do espaço está nalgum plano α que passa por r (lembrar que, dados um ponto e uma recta, há sempre um plano que passa por ambos), os pontos do espaço equidistantes da A e B são exactamente aqueles que estão na mediatriz do segmento $[A\,B]$ relativa a algum desses planos α. Lembrando a caracterização da mediatriz relativa a um dado plano, que referimos atrás, o conjunto em questão vai ser formado pelo ponto médio P do segmento $[A\,B]$ e pelos pontos C não pertencentes à recta AB tais que as rectas PA e PC façam um ângulo de $90°$. Mas que figura geométrica será a formada por esses pontos?

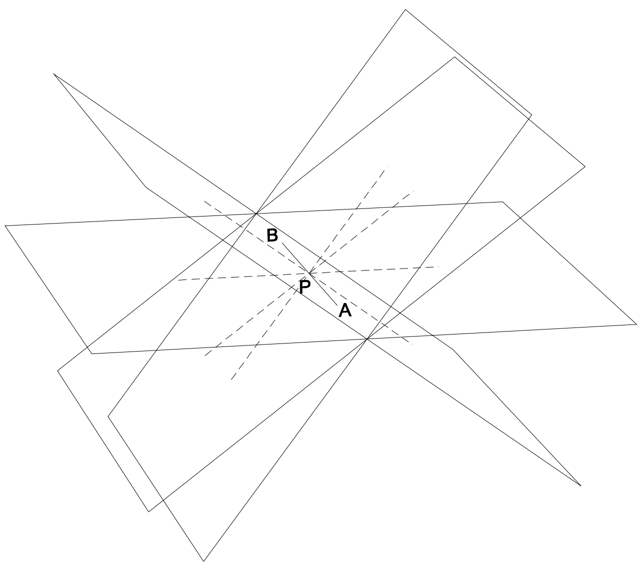


Figura 58

Na figura 58 representámos quatro desses planos e desenhámos a tracejado as correspondentes mediatrizes. Outra maneira de sentirmos o que está em jogo é desenhar numa folha de papel o segmento $[A\,B]$ e a respectiva mediatriz e dobrarmos então em várias posições a folha de papel segundo uma dobra feita sobre a recta AB. É possível que, após alguma reflexão, sejamos levados à conjectura que aquele conjunto é um plano.

Pode mostrar-se que a conjectura feita é verdadeira e esse facto é suficientemente importante para merecer ser sublinhado.

P 56. Sejam A e B dois pontos distintos do espaço, P o ponto médio do semento $[AB]$ e r a recta que passa por aqueles dois pontos. O conjunto dos pontos do espaço equidistantes dos pontos A e B é um plano, que passa pelo ponto P, a que se dá o nome de plano mediador do segmento $[AB]$.
Uma recta do espaço que passe pelo ponto P está no plano mediador se, e só se, é perpendicular à recta r.

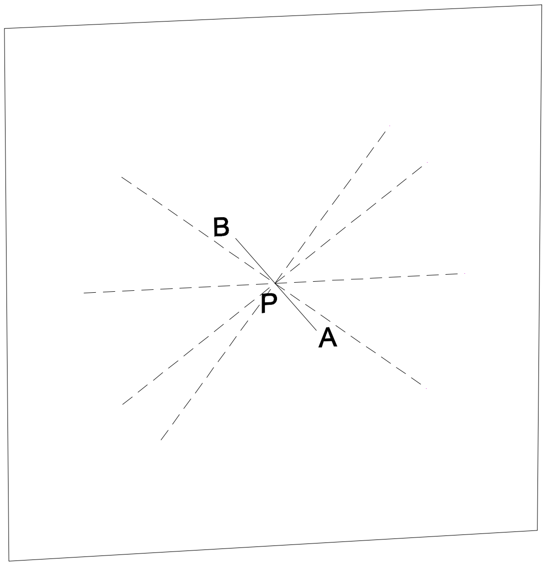


Figura 59

A propriedade precedente está talvez no limite entre o que podemos classificar de propriedade intuitiva e aquilo que poderia pedir alguma justificação. Tendo em atenção o estudante mais curioso, que sinta o desejo de uma explicação mais convincente para a validade da propriedade, sugerimos em seguida um possível caminho para chegar a ela, que utiliza as propriedades dos movimentos rígidos estudadas atrás.

A ideia é considerar o conjunto $\mathcal{A}$ dos pontos do espaço equidistantes de A e B e provar que este conjunto, que contém o ponto P, é um plano. Para isso vamos utilizar a conclusão do exercício 15, na página 9, mostrando que o conjunto $\mathcal{A}$ tem a propriedade da régua.

Suponhamos que C e D são pontos distintos em $\mathcal{A}$, ou seja, equidistantes de A e B e seja s a recta que contém os pontos C e D. Tendo em conta a propriedade PI 20, na página 14, podemos considerar o movimento rígido definido pela condição de se ter $C \mapsto C$, $D \mapsto D$ e $A \mapsto B$ (intuitivamente uma rotação em torno de s). Uma vez que este movimento rígido deixa fixos os pontos C e D de s, verifica-se facilmente que ele também deixa fixos todos os pontos da recta s (reparar que a posição de um ponto da recta s fica conhecida se for conhecida a distância desse ponto a cada um dos pontos C e D). Uma vez que um movimento rígido não faz variar as distâncias, podemos concluir que todos os pontos de s estão ainda equidistantes de A e B, ou seja, que s está contido em $\mathcal{A}$.

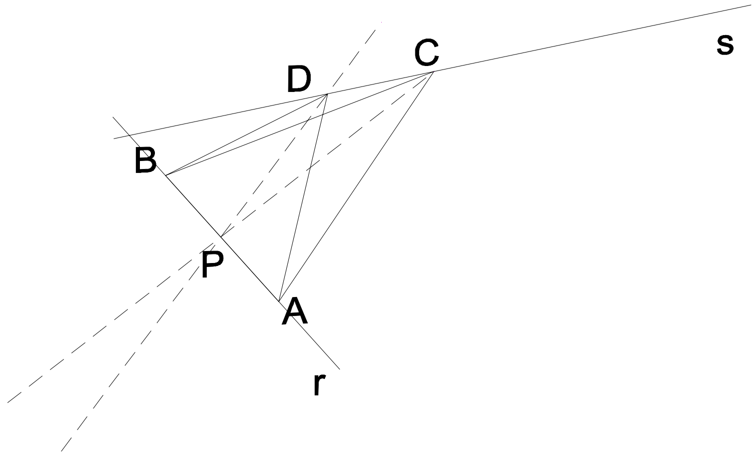


Figura 60

A conclusão do exercício 15 garante agora que $\mathcal{A}$ só pode ser o conjunto vazio, um conjunto só com um ponto, uma recta, um plano ou o espaço todo. Uma vez que $\mathcal{A}$ contém várias rectas distintas (as mediatrizes do segmento $[AB]$ relativas aos diferentes planos que o contêm) podemos afastar as três primeiras possibilidades. A última também não é correcta, uma vez que, por exemplo, o ponto A não pertence a $\mathcal{A}$. Resta assim apenas a possibilidade de $\mathcal{A}$ ser um plano, que é o que queríamos provar.

Exercício 52. Dissémos atrás que, se P é o ponto médio do segmento $[AB]$, o conjunto dos pontos C do espaço não pertencentes à recta AB e tais que PA e PC façam um ângulo de $90°$ coincide com o conjunto dos pontos do plano mediador diferentes de P. Utilize a sua intuição, apoiada eventualmente numa folha de papel dobrada, para descobrir o que seria o referido conjunto se, em vez de $90°$, tivéssemos considerado outro ângulo.

O exame que acabamos de fazer sobre a questão do plano mediador de um segmento de recta vai-nos ajudar a estudar a noção de perpendicularidade entre uma recta e um plano.

Diz-se que uma recta r é *perpendicular*, ou *ortogonal*, a um plano α se a recta r for perpendicular a todas as rectas no plano α.

Exercício 53. Tente demonstrar as duas propriedades da perpendicularidade entre uma recta e um plano cujo enunciado sublinhamos a seguir:

P 57. Se a recta r é perpendicular a um plano α, então:
a) Todas as rectas paralelas a r são também perpendiculares ao plano α.
b) A recta r é perpendicular a todos os planos paralelos a α.

Uma propriedade importante, e que corresponde ao que a nossa experiência nos sugere, é que, para verificar que uma recta e um plano são perpendiculares, basta verificar que a recta é perpendicular a duas rectas concorrentes do plano α; isso é suficiente para garantir que r é também perpendicular a todas as outras rectas do plano α:

P 58. Se uma recta é perpendicular a duas rectas concorrentes s e s' de um plano α, então a recta é perpendicular ao plano α.

É interessante verificarmos como a propriedade anterior pode ser justificada a partir das propriedades do plano mediador. Seja P a intersecção das rectas s e s', seja r a recta paralela à recta dada que passa por P e mostremos que r é também perpendicular a todas as rectas do plano α que passam por P. Para isso marcamos sobre a recta r dois pontos distintos A e B à mesma distância de P e consideramos nas rectas s e s' dois pontos

C e C', respectivamente, ambos distintos de P.

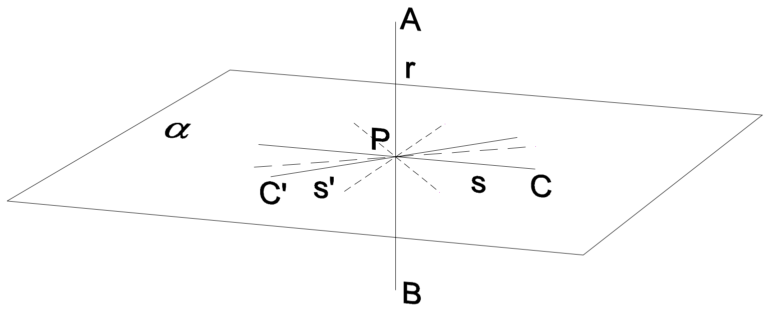


Figura 61

Uma vez que s e s' são duas mediatrizes do segmento $[A\,B]$, os seus pontos C e C' estão equidistantes de A e B, e pertencem portanto ao plano mediador. O plano α possui assim três pontos não colineares P, C e C' no plano mediador, pelo que, uma vez que por três pontos não colineares passa um único plano, α é o plano mediador. Podemos agora concluir, como queríamos que todas as rectas do plano α que passam por P são perpendiculares à recta r. É claro que as rectas do plano α que não passam por P são também perpendiculares à recta r, por serem paralelas a uma recta do plano α que passa por P.

Exercício 54. Verificar que, no quadro da figura 54, na página 56, o ângulo das semirectas com origens em A e H e que contêm os pontos G e F, respectivamente, é efectivamente 90°, como então adiantámos sem justificação.

A propriedade da perpendicularidade entre uma recta e um plano que enunciamos em seguida está também de acordo com a nossa experiência.

P 59. Seja P um ponto de uma recta r. Existe então um único plano α que passa por P e é perpendicular à recta r.
Os pontos do plano α são exactamente os pontos que pertencem a alguma das rectas perpendiculares a r que passam por P.

O "truque" do plano mediador pode também ajudar-nos a justificar a afirmação anterior: Referimo-nos de novo à figura 61, depois de considerar sobre a recta r dois pontos A e B distintos de P e à mesma distância desse ponto. Tomando para α o plano mediador do segmento $[A\,B]$, já sabemos que os pontos de α são exactamente os que pertencem a alguma recta perpendicular a r passando por P. Em particular todas as rectas do plano α que passam por P são perpendiculares a r, o que implica que o plano α é perpendicular à recta r. É também claro que o plano α é o único plano perpendicular a r que passa por P, uma vez que as rectas de um tal plano, passando por P, teriam que ser perpendiculares a r.

Exercício 55. Partindo da propriedade precedente e lembrando a conclusão da alínea a) do exercício 53, tente demonstrar as duas propriedades que enunciamos a seguir:

P 60. Dados uma recta r e um ponto P (não necessariamente na recta r) existe um único plano α que passa por P e é perpendicular à recta r.

P 61. Se dois planos são perpendiculares a uma mesma recta, então eles são paralelos entre si.

Como referimos atrás, por um ponto de uma recta passa um único plano perpendicular a essa recta. Será que podemos inverter os papéis da recta e do plano neste enunciado? Por outras palavras, será ainda verdade que por um ponto P de um plano α passa uma única recta perpendicular a esse plano? A nossa experiência leva-nos a intuir que sim, mas pode ser interessante explicar isso e, ao mesmo tempo, arranjar uma maneira de construir essa recta. Comecemos por explicar por que razão por P não pode passar mais do que uma recta perpendicular a α. Para isso, supomos que havia duas rectas distintas r e s passando por P a ambas perpendiculares a α, e tentamos chegar a um absurdo.

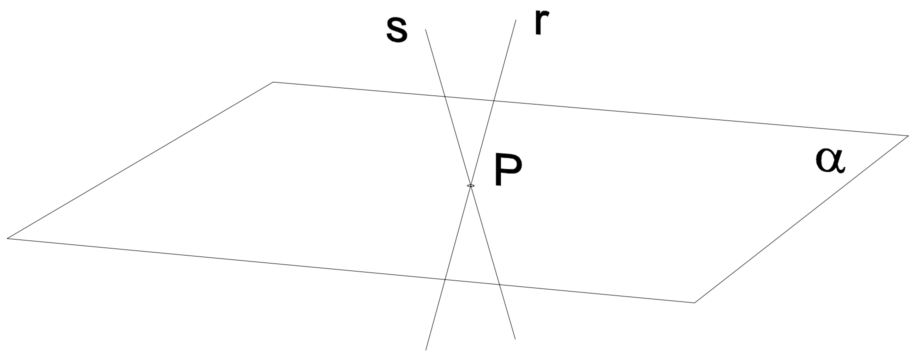


Figura 62

Consideremos então o plano β que contém as rectas concorrentes r e s e a recta t intersecção dos planos α e β.

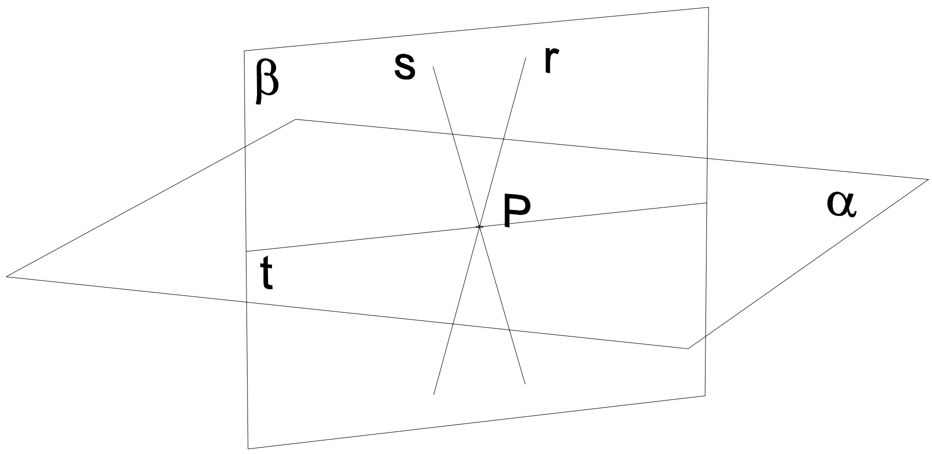


Figura 63

Uma vez que as rectas r e s são perpendiculares ao plano α, elas sao, perpendiculares a todas as rectas deste plano, em particular, à recta t. Mas então a recta t é perpendicular às duas rectas concorrentes r e s do plano β, pelo que t é perpendicular ao plano β. Mas isso não pode acontecer, uma vez que a recta t é, ela mesma, uma recta do plano β, e chegámos assim ao absurdo procurado.

Podemos agora passar à construção da recta r que passa por P e é perpendicular ao plano α. Partimos de duas rectas concorrentes s e t do plano α, passando por P e consideramos os planos β e γ que passam por P e são respectivamente perpendiculares a s e a t.

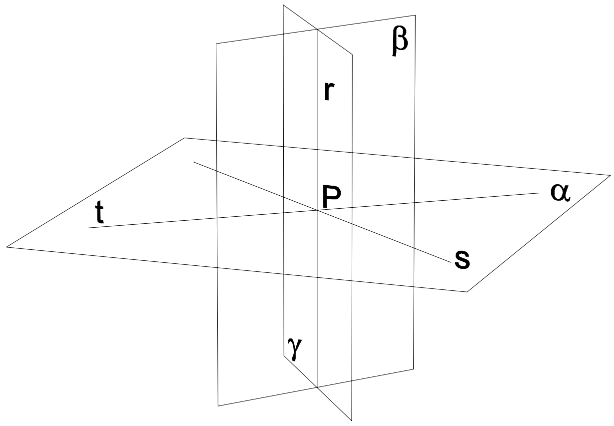


Figura 64

Os planos β e γ não podem coincidir porque, se isso acontecesse, r e s eram duas rectas distintas perpendiculares a esse plano a passar por P. Podemos assim considerar a intersecção r dos planos β e γ, que vamos verificar ser a recta que procuramos. Ora, uma vez que a recta s é perpendicular ao plano β, ela é também perpendicular à recta r que está no plano β e do mesmo modo se conclui que a recta t é também perpendicular à recta r. Podemos assim concluir que a recta r é perpendicular ao plano α, como queríamos, por ser perpendicular às duas rectas concorrentes r e s do plano α.

A conclusão a que acabámos de chegar merece ser sublinhada.

P 62. Seja P um ponto de um plano α. Existe então uma única recta r passando por P e perpendicular ao plano α.

Exercício 56. Partindo da propriedade precedente e lembrando as conclusões do exercício 53, tente justificar as propriedades que enunciamos a seguir

P 63 Dados um plano α e um ponto P (não necessariamente no plano α) existe uma única recta r que passa por P e é perpendicular ao plano α.

P 64. Se duas rectas são perpendiculares a um mesmo plano, então elas são paralelas entre si.

Exercício 57. No quadro da Geometria do Espaço será verdade que "Duas rectas perpendiculares a uma mesma recta são paralelas entre si"? E no quadro da Geometria Plana?

Exercício 58. Como referimos atrás, dados dois pontos distintos A e B sobre um plano α o conjunto dos pontos de α equidistantes de A e B constituem uma recta perpendicular à recta AB e passando pelo ponto médio P do segmento $[AB]$ e o conjunto dos pontos dos espaço nas mesa condições constitui um plano perpendicular à recta AB e passando pelo mesmo ponto P. Suponhamos agora que temos três pontos não colineares A, B e C sobre um plano α. Como decerto recorda do que estudou no Ensino Básico existe um único ponto do plano α equidistante destes três pontos, ponto esse a que se dá o nome de *circuncentro* do triângulo $[ABC]$.
a) Descubra o que será o conjunto dos pontos do espaço equidistantes dos três pontos A, B e C.
b) E, se partirmos de quatro pontos não complanares do espaço, A, B, C e D, o que poderá dizer sobre os pontos que estão à mesma distância desses quatro pontos?

★ ★ ★ ★

Vamos agora aplicar o que temos estado a estudar na resolução de problemas concretos de determinação do ângulo de duas rectas.

Exemplo. Pretendemos determinar, no quadro do cubo da figura 65, o ângulo das rectas AC e AG.

Para isso, consideramos no plano que as contém, o triângulo de vértices A, C e G, e começamos por explicar porque é que esse triângulo é rectângulo no vértice C. A razão está em que, como os lados consecutivos dum quadrado são perpendiculares, a recta CG é perpendicular às rectas CB e CD. Daqui concluímos que ela é perpendicular ao plano da base inferior do cubo, e portanto também à recta CA.

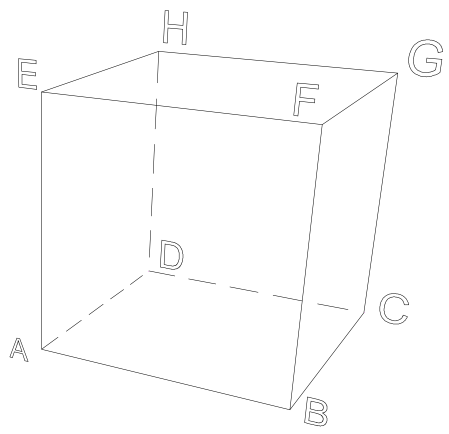


Figura 65

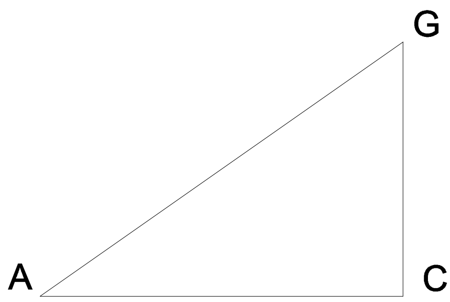


Figura 66

O ângulo que pretendemos determinar é o ângulo A deste triângulo rectângulo e, se conhecêssemos as medidas dos catetos, essa determinação podia ser feita com a ajuda da trigonometria. Escolhendo o lado do cubo como unidade de comprimento, a medida do cateto $[CG]$ é igual a 1. Quanto à medida do cateto $[AC]$, ela pode ser determinada aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo rectângulo do plano horizontal

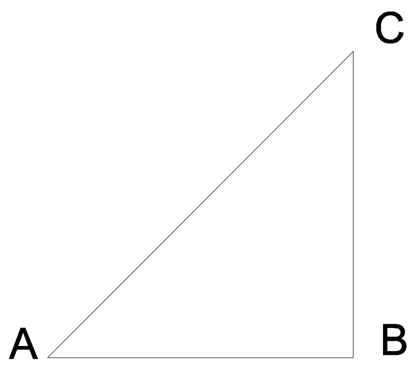


Figura 67

cujos catetos têm ambos comprimento 1. A medida do cateto $[AC]$ é assim

$$\overline{AC} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

e podemos então garantir que a tangente do ângulo que pretendemos calcular é $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Utilizando uma calculadora científica, podemos determinar um valor aproximado para o ângulo, nomeadamente o arco cuja tangente é $\frac{1}{\sqrt{2}}$ e obtemos, por exemplo com aproximação às décimas, o valor 35.3°.

Exercício 59. Relativamente ao cubo da figura 1, determine o ângulo das rectas AF e AH.

Exercício 60. Acrescentemos ao cubo que temos estado a utilizar os pontos médios M e N das arestas $[EF]$ e $[EH]$, respectivamente. Determine o ângulo das rectas AM e AN, com aproximação até às décimas de grau.

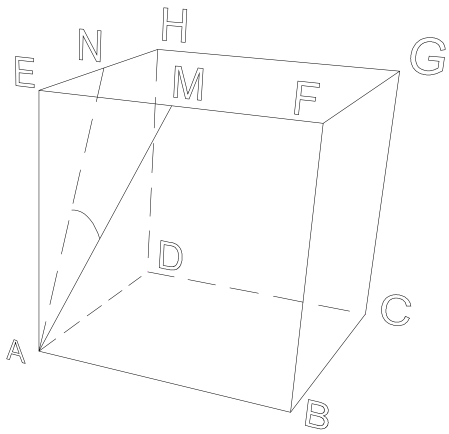


Figura 68

★ ★ ★ ★

Examinámos atrás a noção de ângulo entre duas rectas e relembrámos que duas rectas se dizem perpendiculares quando o respectivo ângulo é 90°. Explicámos também quando é que uma recta se diz perpendicular a um plano mas não dissémos o que se deve entender em geral por ângulo de uma recta r com um plano α. Trata-se de uma noção que utilizamos com frequência na vida real, por exemplo quando falamos da inclinação de um certo troço rectilínio de uma estrada, referindo-nos ao ângulo da recta correspondente com um plano horizontal.

Exercício 61. O que quererá dizer que uma recta faz um ângulo de 20° com um plano horizontal? Por analogia com o que se passa com o conceito de perpendicularidade (90°), será verdade que uma tal recta faz um ângulo de 20° com todas as rectas do plano horizontal considerado?
Poderá apoiar a sua intuição, por exemplo, desenhando várias rectas concorrentes num mesmo ponto sobre uma folha de papel e pensando no ângulo de uma recta passando por esse ponto e inclinada sobre o plano com as diferentes rectas concorrentes.

Se procurou resolver o exercício anterior, é possível que tenha concluído que, no caso em que uma recta r não é perpendicular a um plano α, o ângulo da recta r com o plano α é o ângulo é o ângulo da recta r com uma recta especial do plano α, a *projecção* da recta r sobre o plano α. Antes de explicarmos o que é a projecção de uma recta sobre um plano, é cómodo começar pela noção mais simples de projecção de um ponto P sobre um plano α.

Chama-se projecção de um ponto P sobre um plano α ao ponto P' na intersecção do plano α com a recta s perpendicular a esse plano que passa por P.

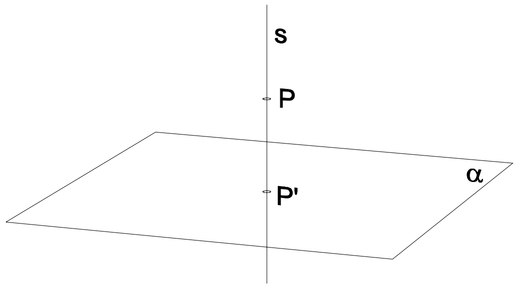


Figura 69

Exercício 62. O que será a projecção de um ponto P sobre um plano α, no caso em que o ponto P pertence ao plano α?

Exercício 63. No estudo da Geometria Plana encontrou decerto já a noção de projecção de um ponto sobre uma recta, eventualmente com o nome de "pé da perpendicular"[21].
a) No caso de não recordar a definição da noção referida, tente descobri-la, por analogia com a da noção de projecção de um ponto sobre um plano.
b) A projecção de um ponto P sobre um recta r coincide com a projecção de P sobre um plano α conveniente, que contém a recta r. Que plano é esse?

Consideremos agora um plano α e uma recta r que não seja perpendicular a α. Tomemos um ponto particular P da recta r e consideremos a recta s perpendicular ao plano α e que passa por P. Uma vez que as rectas r e s são concorrentes, podemos considerar o único plano β que contém as rectas r e s. Esse plano não é paralelo ao plano α, uma vez que contém a recta s perpendicular a α, e podemos portanto considerar a recta r', intersecção dos planos α e β. Vamos agora verificar que a recta r' que acabamos de construir pode ser caracterizada por uma propriedade fundamental: Os seus pontos são exactamente as projecções sobre o plano α dos pontos da recta r.

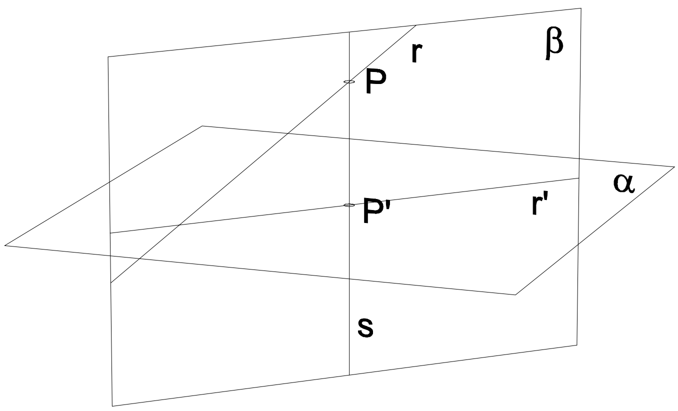


Figura 70

Examinemos, em primeiro lugar, o que se passa com o ponto particular P de que partimos. A sua projecção é o ponto P' na intersecção da recta s com o plano α, e pertence, em particular, à recta r', intersecção dos planos β e α. E se partirmos de outro ponto Q da recta r?

[21]Como determina a distância de um ponto a uma recta?

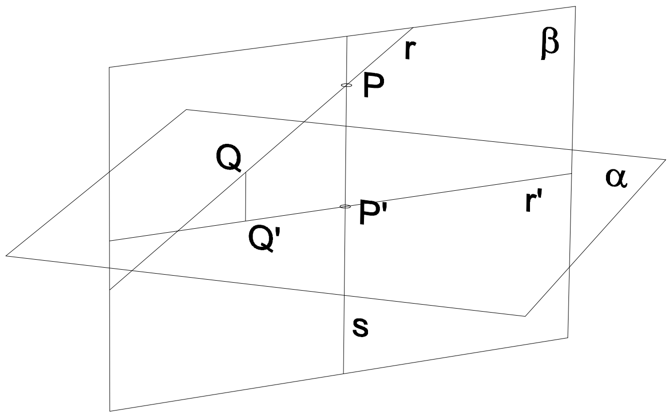


Figura 71

A recta perpendicular ao plano α que passa por Q é paralela à recta s (as duas são perpendiculares ao plano α) e portanto é também uma recta do plano β. A projecção Q' do ponto Q sobre o plano α, que é a intersecção desta recta com o plano α vai estar sobre a intersecção dos planos α e β, ou seja, sobre a recta r'. Concluímos assim que as projecções sobre o plano α de todos os pontos da recta r estão sobre a recta r'. Mas isso não é tudo o que nós anunciámos atrás: Quando dissémos que os pontos da recta r' são **exactamente** as projecções dos pontos da recta r estávamos não só a dizer que as projecções dos pontos da recta r estão na recta r' como a afirmar que todos os pontos da recta r' são obtidos dessa maneira, isto é, são projecção de algum ponto da recta r. O que nos falta verificar é, no entanto, simples, bastando fazer a última construção na figura anterior ao contrário: Se partirmos de um ponto Q' da recta r', podemos considerar a recta perpendicular ao plano α que passa por Q', que é uma recta paralela à recta s e portanto também uma recta do plano β; essa recta é complanar com a recta r e não é paralela a esta pelo que a vai intersectar num ponto Q cuja projecção é Q'. O argumento que acabamos de apresentar prova mesmo mais do que o que afirmáramos: Cada ponto de r' é projecção de um único ponto de r. Resumindo as conclusões anteriores, podemos dizer:

P 65. Dados um plano α e uma recta r, que não seja perpendicular a α, o conjunto das projecções dos pontos de r sobre o plano α é uma recta r' desse plano. Essa recta pode ser obtida como a intersecção com o plano α com o plano β que contém a recta r e a recta perpendicular ao plano α passando por um ponto escolhido em r.
Dizemos que a recta r' é a *projecção* da recta r sobre o plano α.

Repare-se que, na prática, para determinar a projecção de uma recta sobre um plano não é necessário determinar a projecção de todos os pontos da recta. Uma vez que já sabemos que essa projecção é uma recta, bastar-nos-á determinar a projecção de dois pontos da recta e considerar a recta que contém essas duas projecções.

Exercício 64. **a)** Por que razão nas considerações precedentes sobre a projecção de uma recta r sobre um plano α se exigiu sempre que a recta r não fosse perpendicular ao plano?
b) No caso em que a recta r e o plano α são concorrentes num ponto P (embora não perpendiculares), mostre que a projecção r' de r sobre α passa pelo ponto P.
c) No caso em que a recta r é paralela ao plano α, mostre que a recta r é paralela à sua projecção r' sobre o plano α. **Sugestão:** Lembrar o modo como a projecção foi construída atrás.

Exercício 65. Na figura 72 estão representadas as arestas de um tetraedro com os vértices A, B, C e D, assim como o centro O da base $[ABC]$. Justifique o facto de O ser a projecção de D sobre o plano da base ABC.

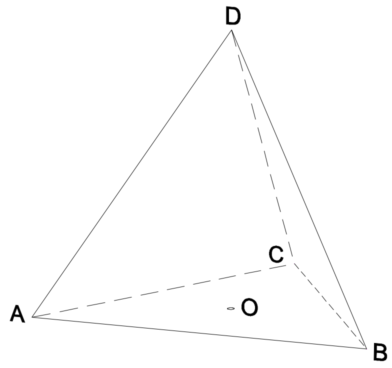


Figura 72

Exercício 66. **a)** Verifique que, se duas rectas r e s, não perpendiculares ao plano α, são paralelas entre si, então as suas projecções r' e s', sobre o plano α, são também paralelas.
b) Verifique que, se dois planos α e α' são paralelos e se a recta r não é perpendicular a estes planos, então as projecções da recta r sobre os planos α e α' são rectas paralelas.
Sugestão: Recorde o modo como a projecção foi construída atrás.

Estamos agora em condições de explicar o que é o ângulo de uma recta com um plano.

> Se a recta r não é perpendicular a um plano α, chama-se ângulo da recta r com o plano α ao ângulo da recta r com a projecção r' de r sobre α. Se a recta r é perpendicular ao plano α, diz-se que o ângulo da recta com o plano é 90°.[22]

Exercício 67. Conside o cubo da figura 73.

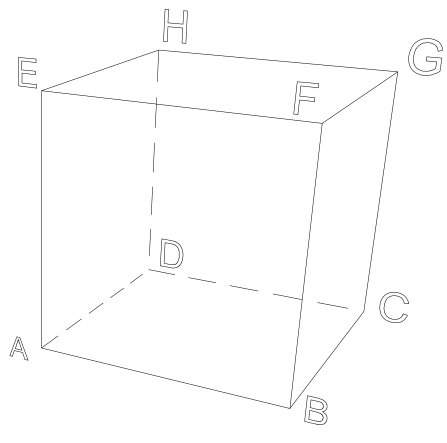


Figura 73

a) Determine o ângulo da recta AF com o plano da face inferior do cubo.
b) Utilizando a máquina de calcular, determine, com aproximação às décimas de grau, o ângulo da recta AG com o plano da face inferior do cubo.

[22]Lembrar que a recta faz então um ângulo de 90° com todas as rectas do plano.

Exercício 68. Seja a o comprimento das arestas do tetraedro na figura 74.

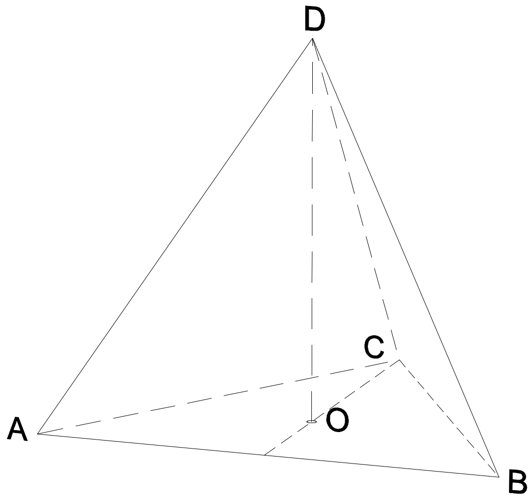


Figura 74

Determine sucessivamente:
a) A distância do centro O da face $[ABC]$ a cada um dos vértices dessa face.
b) A distância de O aos pontos médios das arestas correspondentes à face $[ABC]$.
c) A distância de O ao vértice D.
d) A área de cada face e a área total do tetraedro.
e) O volume do tetraedro.
f) O ângulo do plano da face $[ABC]$ com a recta da aresta $[CD]$, com aproximação às milésimas de grau.

Exercício 69. Consideremos um plano α e uma recta r não perpendicular a α.
a) Quando é que o ângulo da recta r com o plano α é 0°?
b) Seja s uma recta perpendicular ao plano α passando por um ponto P de r. Que relação existe entre o ângulo da recta r com o plano α e o ângulo das rectas r e s (cf. a figura 70)?
c) Concluir que o ângulo da recta r com o plano α não pode ser 90°.

Exercício 70. Seja r uma recta não perpendicular a um plano α e seja r' a projecção da recta r sobre o plano α. Que relação lhe parece existir entre o ângulo da recta r com a recta r' e o ângulo de r com as rectantes rectas do plano α? **Nota:** Não se pede que apresente uma justificação para a sua opinião, que pode ser formada com a ajuda de um modelo concreto, mas apenas que elabore uma conjectura.

★ ★ ★ ★

Vamos terminar o nosso exame das diferentes situações em que intervém a noção de ângulo, descrevendo o que é o ângulo de dois planos, mais uma vez uma noção que utilizamos com frequência na prática mas que importa enunciar com precisão. O que quererá dizer, por exemplo, uma porta entreaberta segundo um ângulo de 30°?

Comecemos por examinar o que se passa com dois planos concorrentes α e β. Podemos considerar a intersecção r dos planos α e β, tomar um ponto P dessa intersecção e tomar as rectas s e t perpendiculares a r, passando por P e contidas nos planos α e β, respectivamente. Define-se então o ângulo dos planos α e β como sendo o ângulo das rectas s e t atrás consideradas.

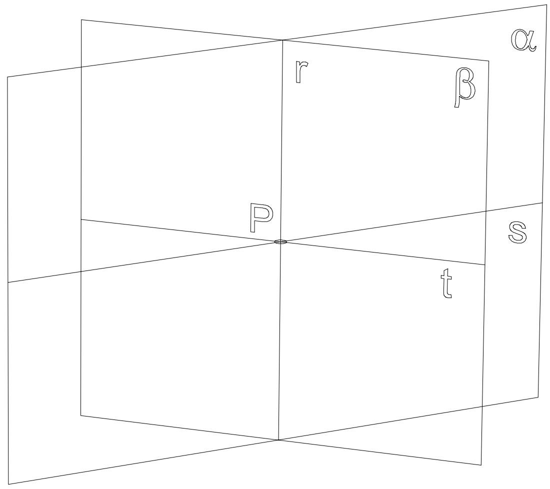


Figura 75

É claro que, para a definição anterior fazer sentido temos que nos assegurar que, se, em vez do ponto P, tivéssemos considerado outro ponto P' na intersecção dos planos, o ângulo das correspondentes rectas r' e s' era o mesmo. Mas isso acontece, uma vez que as rectas s e s' são paralelas, uma vez que se trata de duas rectas do plano α perpendiculares à recta r desse plano, e que, do mesmo modo, as rectas t e t' são também paralelas.

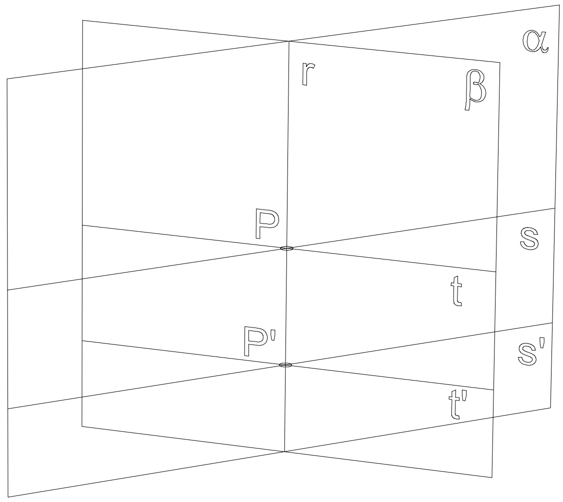


Figura 76

Quando os planos α e β não são concorrentes, ou seja, quando eles são paralelos, dizemos, por definição, que o ângulo entre eles é 0°. Resumindo o que temos estado a dizer:

O ângulo de dois planos paralelos é 0°. O ângulo de dois planos concorrentes é igual ao ângulo de duas rectas desses planos, passando por um ponto da respectiva intersecção e que sejam perpendiculares a essa intersecção.

Exercício 71. **a)** Qual o ângulo dos planos que contêm duas faces consecutivas dum cubo?
b) No seguimento do que fez nas diferentes alíneas do exercício 68, determine, com aproximação às

milésimas de grau, o ângulo dos planos que contêm as faces $[ABC]$ e $[ABD]$.

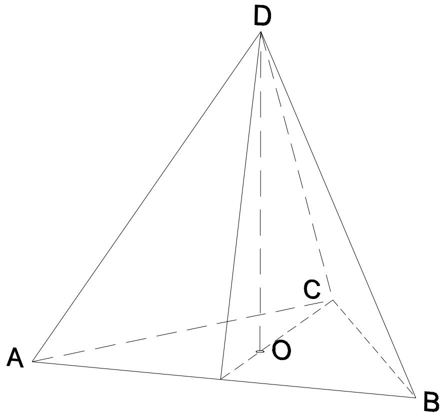
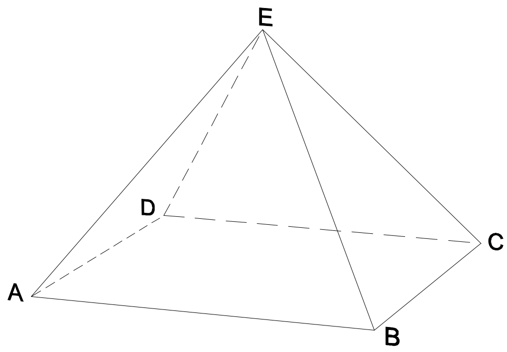


Figura 77

Exercício 72. Na figura 78 estão representadas as arestas de uma pirâmide cuja base $[ABCD]$ é um quadrado e cujas faces laterais são triângulos equiláteros.



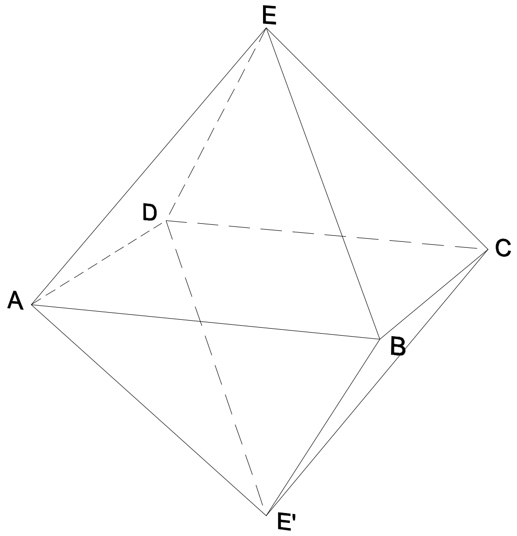


Figura 78 **Figura 79**

a) Determine, com aproximação às milésimas de grau, o ângulo de cada plano que contém uma das faces laterais com o plano que contém a base.
b) Repare que, justapondo pelas bases dois exemplares da pirâmide atrás referida, obtém-se um modelo do octaedro (cf. a figura 79). Utilize o resultado obtido na alínea precedente para determinar, com aproximação às milésimas de grau, o ângulo dos planos que contêm duas faces do octaedro com uma aresta comum.
Nota: Repare que, na definição de ângulo de dois planos, o valor deste deve estar entre $0°$ e $90°$. Se no seu raciocínio for conduzido a um valor maior que $90°$, terá que adaptar convenientemente o resultado. Repare também que, para obter uma aproximação às milésimas nesta alínea, será conveniente trabalhar com o resultado da alínea precedente com uma aproximação superior ou, alternativamente, só fazer o arredondamento depois de resolver as duas alíneas.
c) Comparando os valores aproximados dos ângulos obtidos na alínea precedente e na alínea b) do exercício 71, somos levados a conjecturar que eles poderão ser iguais. Tente interpretar o significado da eventual igualdade dos ângulos em questão, manipulando um modelo do tetraedro e

outro do octaedro. Repare que o facto de se estar a trabalhar com valores aproximados não permite garantir que os ângulos são efectivamente iguais.[23]

Exercício 73. Há uma regra prática que permite determinar, de maneira simples, o ângulo de dois planos α e β:

Por um ponto P do espaço passa-se uma recta s perpendicular ao plano α e um recta t perpendicular ao plano β. O ângulo das rectas s e t é então igual ao ângulo dos planos α e β.

Tente encontrar uma justificação para esta regra. **Sugestão:** Examine separadamente os casos em que os planos são ou não paralelos.

Exercício 74. Sejam α e β dois planos concorrentes. Baseado na sua intuição, e com a ajuda dos modelos manipuláveis que achar convenientes, tente conjecturar a veracidade das seguintes afirmações. Como é habitual nestes casos, poderá ser conveniente riscar a lápis as afirmações que considere incorrectas.
a) O ângulo dos planos α e β é maior ou igual ao ângulo de qualquer recta do plano α com qualquer recta do plano β.
b) O ângulo dos planos α e β é menor ou igual ao ângulo de qualquer recta do plano α com qualquer recta do plano β.
c) O ângulo dos planos α e β é maior ou igual ao ângulo de qualquer recta do plano α com o plano β.
d) O ângulo dos planos α e β é menor ou igual ao ângulo de qualquer recta do plano α com o plano β.

5. Aplicação à interpretação das perspectivas.

Quando tiramos uma fotografia ou fazemos um desenho, estamos, em geral, a representar objectos do espaço sobre um plano de tal modo que a visão dessa representação imita, com mais ou menos precisão, a visão do objecto original. É costume dizer então que a fotografia, ou o desenho, constitui uma perspectiva do objecto.

Para simplificarmos o exame do fenómeno da perspectiva vamos imaginar que o observador tem um dos olhos fechado, de modo a ignorar o fenómeno mais complexo da formação da consciência de relevo no nosso cérebro. Notaremos então P o ponto do espaço onde está colocado o olho aberto e α o plano onde queremos representar este.

Aquilo que explica o facto de ser possível representar no plano α objectos do espaço (situados naturalmente “para lá” do plano) é o facto de haver vários pontos do espaço que dão a mesma a mesma imagem no nosso olho, a saber todos aqueles que estão numa mesma semi-recta com origem no ponto P. De entre esses pontos do espaço com a mesma imagem no nosso olho que um ponto do objecto pode acontecer que exista um no plano α e, nesse caso, consideramos que esse ponto do plano α representa o ponto do objecto.

Para percebermos o que se está a passar poderá ser útil recorrermos, como os artistas começaram a fazer já há alguns séculos, a uma mira, para fixar a posição do olho, e uma folha de papel transparente, constituindo uma parte do plano da representação, e que pode, for exemplo ser fixada

[23]De facto os dois ângulos são efectivamente iguais. Isso pode ser provado quer por um raciocínio geométrico que o estudante mais perseverante poderá talvez descobrir, quer trabalhando com os valores exactos das razões trigonométricas e com uma fórmula para o seno do ângulo duplo que será estudada no décimo primeiro ano.

sobre uma janela aberta. É então simples desenhar sobre a folha de papel transparente pontos que representem vários pontos de um objecto colocado do outro lado da janela e a partir daí desenhar uma representação do objecto.

Geometricamente, a representação A' de um ponto A do objecto é determinada fazendo a intersecção da recta que contém os pontos P e A com o plano α.

Outra situação em que um fenómeno análogo nos aparece na nossa experiência do dia a dia é na formação sobre uma superfície plana da sombra de um objecto causada por uma fonte de luz com origem num certo ponto. Nesse caso o plano α vai ser o plano onde a sombra é formada e a origem P da luz vai jogar o papel do olho do observador. Como antes, a sombra A' dum ponto A é a intersecção da recta que contém os pontos P e A com o plano α.

E um segmento de recta traçado no objecto, por exemplo a aresta $[BC]$ no cubo da figura a seguir, como será representado na perspectiva? Todos nós estamos habituados a ver, por exemplo, representações de um cubo e prevemos assim que uma aresta vai ser representada, em geral, por um segmento de recta. Tentemos perceber porque é que isso vai acontecer. Os pontos do segmento de recta no objecto estão todos sobre uma certa recta r, que, em geral, não passará pelo ponto P, e podemos considerar o plano β que contém o ponto P e a recta r. Esse plano contém também todas as rectas que passam por P e pelos pontos da aresta considerada pelo que as representações dos pontos deste vão estar simultaneamente no plano β e no plano α da representação, ou seja, vão estar na intersecção destes dois planos, que sabemos ser uma recta r'.

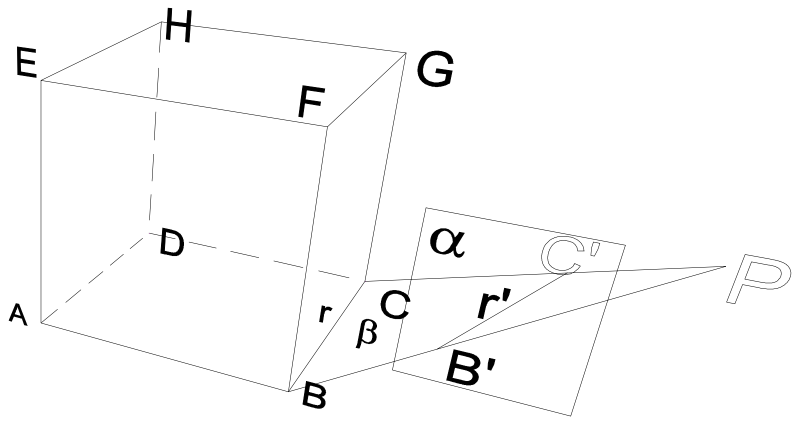


Figura 80

Determinando analogamente as perspectivas das restantes arestas do cubo, obínhamos a representação deste no plano α.

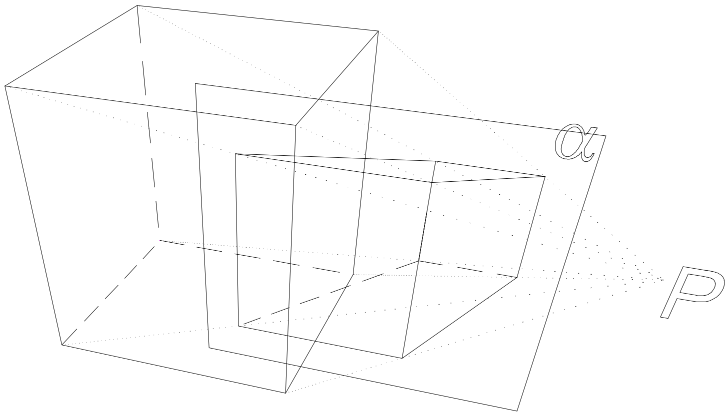


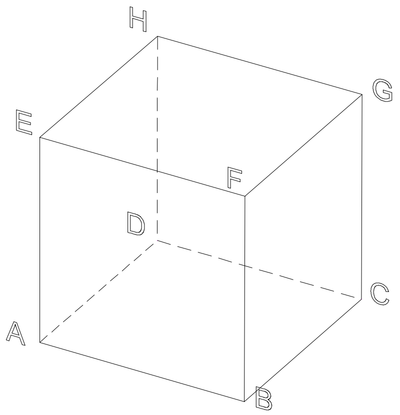
Figura 81

Exercício 75. Descubra o que acontece com a representação de uma aresta do objecto no caso excepcional em que a recta que a contém passa pelo ponto P onde está colocado o olho do observador. Como costumamos fazer na prática quando observamos um sólido com uma aresta nessa situação?

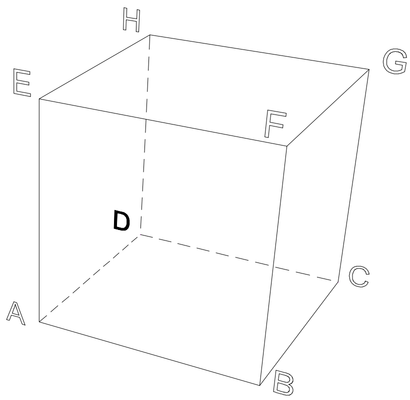
Resumindo as conclusões a que chegámos, podemos dizer:

P66. Pontos dum objecto situados sobre uma recta r que não passe pelo ponto P onde está o obsevador são representados em perspectiva sobre um plano α por pontos de uma recta r', obtida por intersecção do plano α com o plano β que contém o ponto P e a recta r. No caso em que a recta r passasse pelo ponto P os pontos seriam todos representados por um mesmo ponto, a saber, a intersecção da recta r com o plano α da representação.

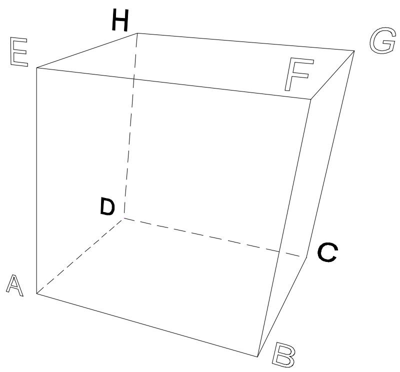
E o que é que se passará com os comprimentos? Será que o comprimento de uma aresta será igual ao comprimento da sua representação? A resposta é evidentemente "não". A nossa experiência diz-nos que os objectos que estão mais longe parecem mais pequenos, tal como parecem mais pequenas as arestas que estão "de esguelha", ou seja, próximas da posição excepcional de serem colineares com o ponto P onde está o olho do observador. A figura seguinte, realizada com o auxílio de um programa de computador, ilustra o que temos estado a examinar, apresentando as representações de um mesmo cubo examinado a distâncias cada vez mais curtas e, em cada caso, convenientemente ampliado com o objectivo de uma maior clareza (na unidade considerada as arestas do cubo têm comprimento 10).



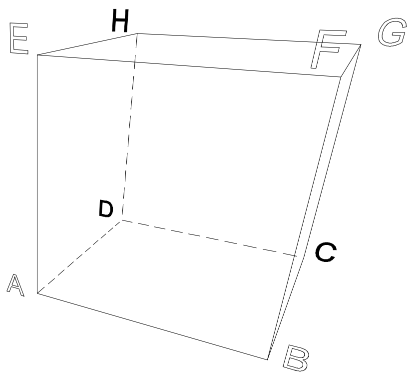
distância $= 2000$



distância $= 50$



distância $= 30$



distância $= 25$

Figura 82

Exercício 76. Utilizando uma régua graduada compare, em cada uma das representações anteriores, os comprimentos das representações das arestas (que no objecto inicial têm o mesmo comprimento). Haverá alguma diferença no que acontece conforme as arestas comparadas sejam ou não paralelas entre si? Que fenómenos se começam a notar quando a distância do observador se torna mais pequena?

Exercício 77. Utilizando apenas o facto de segmentos de recta do objecto inicial serem representados por segmentos de recta determine em cada uma das representações, com a ajuda de uma régua não graduada, a posição do centro da face $[ADHE]$ e a posição do centro do cubo.

Exercício 78. Ao lado do cubo representado nas perspectivas anteriores foi colocado outro cubo com as mesmas dimensões de forma a ficar com uma face comum com a face $[ADHE]$ do primeiro. Partindo da representação do primeiro, retomada na figura seguinte, tente completá-la com a representação do segundo, utilizando uma régua não graduada. **Sugestão:** Poderá ser boa ideia começar por determinar, como ponto auxiliar, a representação do centro da face $[ADHE]$.

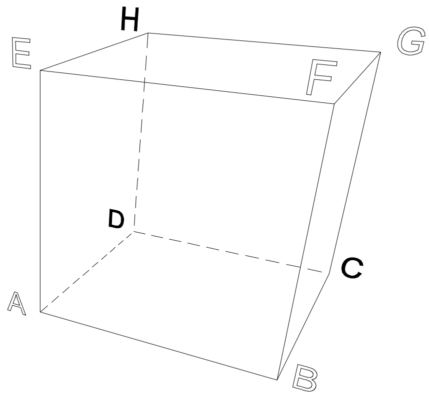


Figura 83

E o que é que se passará relativamente ao paralelismo? Será que rectas paralelas serão representadas por rectas paralelas no plano da representação? Mais uma vez a nossa experiência conduz-nos à conclusão de que isso normalmente não acontecerá. Todos nós já devemos ter reparado que os bordos paralelos de uma estrada rectilínea que se afasta de nós nos aparecem como se estivéssemos em presença de duas rectas que se encontram no horizonte. Alternativamente se examinarmos com alguma atenção a perspectiva do cubo na figura precedente, repararemos que as rectas paralelas que contêm por exemplo as arestas $[AD]$, $[BC]$, $[EH]$ e $[FG]$ são representadas na perspectiva por quatro rectas concorrentes no mesmo ponto[24]. Tentemos perceber porquê e, ao mesmo tempo, descobrir que ponto é esse, considerando, para fixar ideias, as rectas BC e AD.

Relembremos que estamos a chamar P ao ponto onde está colocado o olho do observador e α ao plano da representação. Chamando r e s às rectas paralelas BC e AD, sabemos que as representações no plano α de pontos da recta r e de pontos da recta s vão estar respectivamente sobre as rectas r' e s' obtidas do seguinte modo: Consideramos o plano β que contém o ponto P e a recta r e o plano γ que contém o ponto P e a recta s; a recta r' é a intersecção dos planos α e β e a recta s' é a intersecção dos planos α e γ.

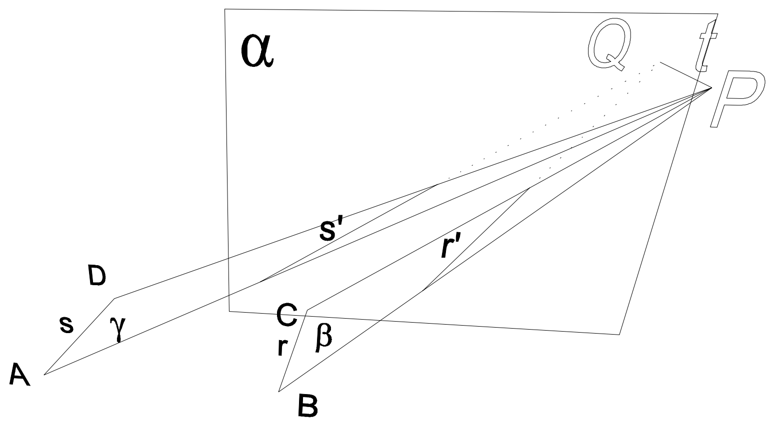


Figura 84

A questão a que queremos responder é a possível existência de um ponto comum às rectas r' e s', ou seja, um ponto comum aos três planos α, β e γ. Mas os planos β e γ têm pelo menos um ponto

---

[24]Esse ponto estará possivelmente fora da página pelo que, se quisermos fazer uma experiência conclusiva convirá trabalhar com uma fotocópia da figura que colaremos numa folha de papel maior.

comum, o ponto P e portanto a sua intersecção é um recta t paralela às rectas r e s. Se a recta t intersectar o plano α num ponto Q, esse será o tal ponto comum às rectas r' e s' que estamos a procurar.

Em que caso é que a recta t intersecta o plano α? É naquele em que ela não for paralela a α, ou seja, naquele em que as rectas paralelas de partida r e s não forem paralelas a α. Podemos assim resumir as considerações anteriores:

P 67. Pontos situados em rectas paralelas entre si, mas não paralelas ao plano da representação são representados em perspectiva por pontos de rectas que se intersectam num certo ponto (a que se dá o nome de *ponto de fuga* das rectas em questão), que pode ser obtido intersectando o plano da representação com a recta paralela às rectas em questão que passa pelo olho do observador.

No caso em que as rectas r e s são paralelas ao plano α da representação, as recta t atrás referida também é paralela a esse plano e portanto não existem pontos comuns aos planos α, β e γ, o que garante que as rectas r' e s', onde os pontos de r e s são representados são paralelas. Podemos neste caso afirmar ainda um pouco mais: Se a recta r estiver no plano α, é claro que ela vai coincidir com a sua representação r'; caso contrário r não tem pontos comuns com α, e portanto também não tem pontos comuns com r'; em qualquer dos casos podemos garantir que as rectas r e r' são paralelas e, evidentemente, o mesmo vai acontecer com as rectas s e s'. Tem-se assim, em resumo

P 68. Pontos situados em rectas paralelas entre si e paralelas ao plano da representação são representados em perspectiva por pontos de rectas paralelas àquelas, em particular paralelas entre si.

Exercício 79. Na figura seguinte está representada em perspectiva a parte visível de um certo cubo. Determine a posição da representação do vértice invisível e represente a tracejado as arestas invisíveis do cubo.

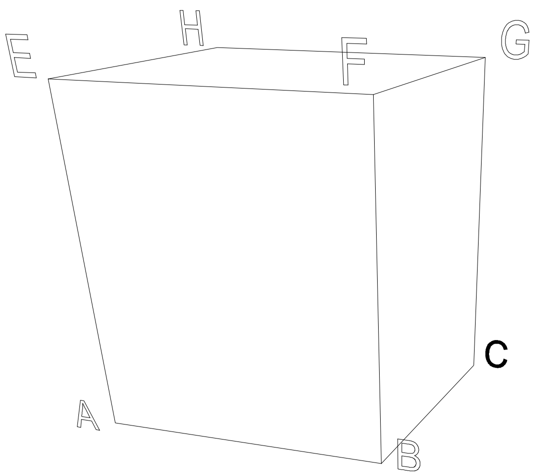


Figura 85

Exercício 80. Considere de novo a representação em perspectiva de um cubo na figura 83, na página 76.

a) Desenhe a perspectiva do octaedro cujos vértices são os centros das faces do cubo, tomando o

cuidado de utilizar o tracejado para representar as arestas invisíveis.
b) Determine a perspectiva dos pontos médios das arestas $[EF]$, $[FG]$ e $[BF]$ (cuidado, porque a perspectiva do ponto médio de um segmento não tem que ser o ponto médio da perspectiva desse segmento).
c) Suponhamos que se cortou o cubo segundo o plano definido pelos pontos médios das arestas atrás referidos e que se retirou a parte que contém o vértice F. Desenhe a perspectiva do sólido que se obteve, tomando o cuidado de assinalar as arestas invisíveis a tracejado.

A perspectiva que temos estado a examinar até agora é aquela a que se pode dar o nome de *perspectiva exacta*, uma vez que corresponde a representar exactamente aquilo que se vê numa dada situação. As figuras que temos encontrado ao longo deste texto foram realizadas com o auxílio de um programa de computador e são, em geral, perspectivas exactas. No entanto, quando pretendemos fazer um esboço rápido e elucidativo de um objecto a perspectiva exacta pode tornar-se demasiado trabalhosa e é substituída com vantagem por uma perspectiva aproximada, bastante mais fácil de realizar e que é ainda compatível com a nossa intuição geométrica. É a chamada *perspectiva cavaleira* que fornece resultados satisfatórios para objectos cujas dimensões são pequenas, em relação à distância a que são observados.

Examinemos de novo as perspectivas de um cubo na figura 82, na página 75, reparando no que acontece quando a distância do observador é maior, nomeadamente nos casos em que esta é 2000 ou 50. Ao contrário do que acontece quando as distâncias são mais curtas, arestas paralelas parecem ser representadas por segmentos de recta paralelos, mesmo quando elas não são paralelas ao plano da representação (não parecem existir pontos de fuga). Também ao contrário do que acontece no caso das distância mais curtas, parece que arestas paralelas, que têm o mesmo comprimento, são representadas por segmentos com o mesmo comprimento.

O que se passa é que, uma vez que a distância do observador é relativamente grande, a perspectiva não fica muito alterada se, em vez de intersectarmos com o plano de representação as rectas que unem os pontos do objecto ao ponto onde está colocado o olho do observador, considerarmos as intersecções com o plano de representação de rectas com a mesma direcção (portanto paralelas entre si) passando pelos pontos do objecto. Supomos naturalmente que a direcção referida não é paralela ao plano da representação. À perspectiva aproximada assim obtida é que se dá o nome de *perspectiva cavaleira*.

O que determina a perspectiva cavaleira é a direcção comum das rectas que partem dos diferentes pontos do objecto (a *direcção da perspectiva*), em vez da posição do olho do observador, como acontecia na perspectiva exacta.

Tal como um fenómeno análogo ao da perspectiva exacta nos aparecia também quando considerávamos a sombra de um objecto sobre uma superfície plana causada por uma fonte de luz situada num certo ponto, encontramos um fenómeno análogo ao da perspectiva cavaleira quando observamos a sombra causada por uma fonte de raios luminosos paralelos. É o que acontece, de forma aproximada, quando a origem da luz está muito longe, por exemplo quando a sombra é causada pela luz solar.

Tentemos perceber como funciona a perspectiva cavaleira. Tal como referimos, a representação de um ponto A é o ponto A' que se obtém intersectando com o plano α da representação a recta que passa por A e tem a direcção da perspectiva. E um segmento de recta traçado no objecto, por exemplo a aresta $[BC]$ no cubo da figura a seguir, como será representado? Tal como acontecia no caso da perspectiva exacta, é fácil de prever que a representação é ainda um segmento de recta.

Tentemos perceber porque é que isso vai acontecer. Os pontos do segmento de recta no objecto estão todos sobre uma certa recta r, que, em geral, não passará pelo ponto P, e podemos considerar o plano β que contém a recta r e as rectas com a direcção da perspectiva que passam pelos pontos de r. As representações dos pontos do segmento vão estar simultaneamente no plano β e no plano α

da representação, ou seja, vão estar na intersecção destes dois planos, que sabemos ser uma recta r'.

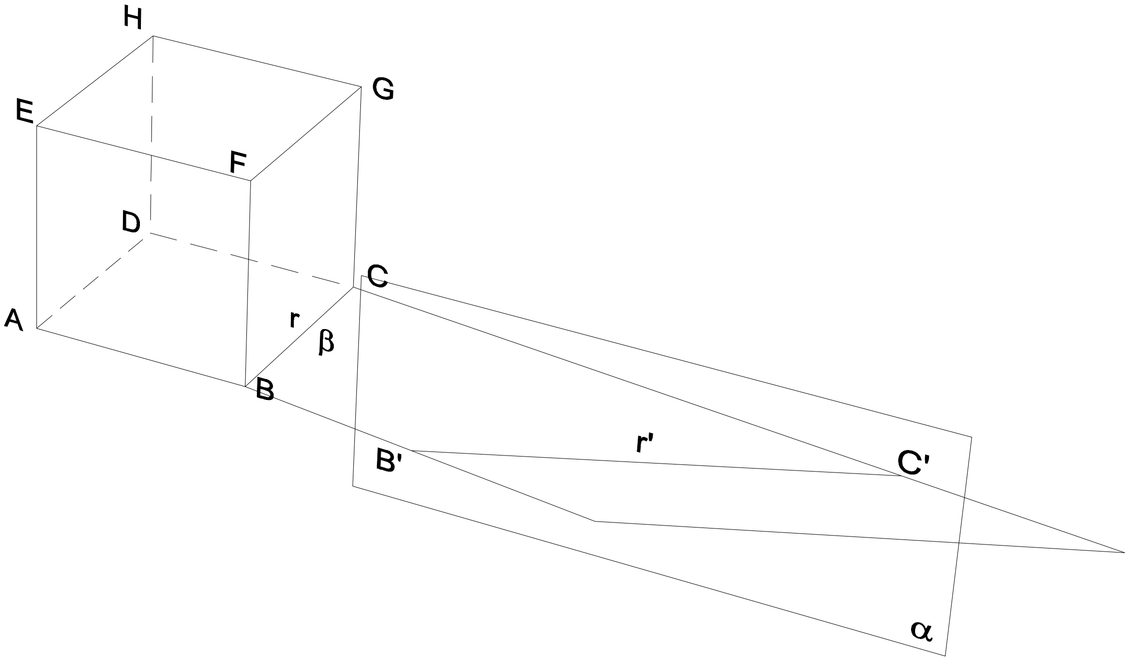


Figura 86

Determinando analogamente as perspectivas das restantes arestas do cubo, obínhamos a representação deste no plano α.

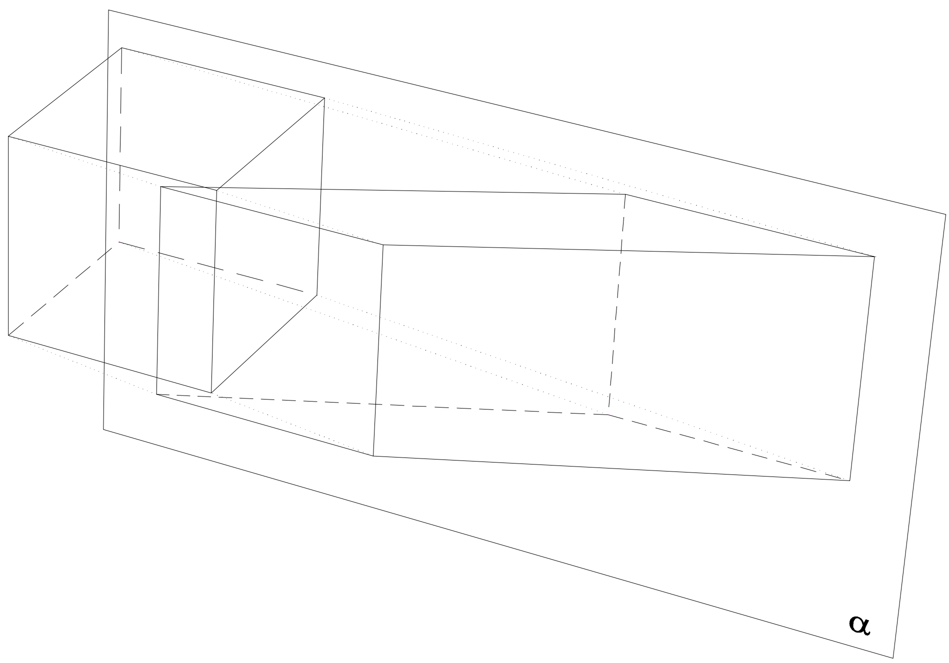


Figura 87

O estudante poderá eventualmente ficar chocado com a perspectiva anterior, pelo facto de a direcção que se utiliza habitualmente para fazer a perspectiva de um cubo não ser a que utilizámos.

No entanto, se fizer experiências com um modelo de um cubo e olhar de diferentes posições, descobrirá decerto uma posição em que o cubo aparece mais ou menos com a imagem que obtivémos.

Exercício 81. Tal como acontecia com a perspectiva exacta, também na perspectiva cavaleira existem segmentos de recta em posição excepcional que são representados por um único ponto. Que posição excepcional será essa?

Resumindo as conclusões a que chegámos, podemos dizer:

P 69. Pontos dum objecto situados sobre uma recta r cuja direcção não seja a da perspectiva são representados em perspectiva cavaleira sobre um plano α por pontos de uma recta r', obtida por intersecção do plano α com o plano β que contém a recta r e as rectas com a direcção da perspectiva que passam por pontos de r. No caso em que a recta r tivesse a direcção da perspectiva, os pontos seriam todos representados por um mesmo ponto, a saber, a intersecção da recta r com o plano α da representação.

E o que é que se passará com o paralelismo? Pensemos de novo no cubo habitual e nas arestas $[BC]$ e $[FG]$, contidas em rectas paralelas r e s. Sabemos então que os pontos daquelas arestas são representados por pontos das rectas r' e s' obtidas por intersecção com o plano α da representação dos planos β e γ que passam por r e s e contêm rectas com a direcção da perspectiva. Mas os planos β e γ são paralelos, porque cada um contém duas rectas concorrentes paralelas ao outro plano, e daqui podemos concluir que as rectas r' e s' são paralelas (por exemplo porque s' é paralela ao plano β e complanar com a recta r' desse plano).

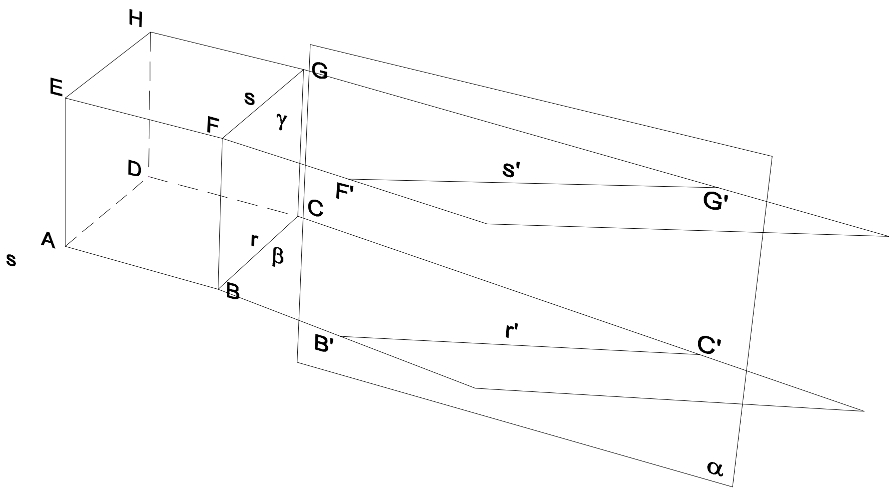


Figura 88

Podemos assim dizer:

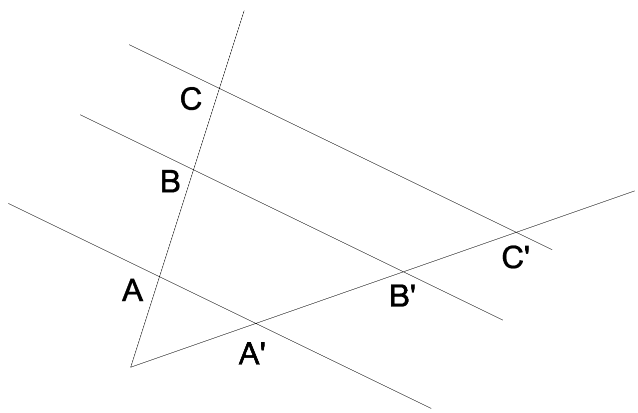
P 70. Segmentos de rectas paralelos são representados em perspectiva cavaleira por segmentos de rectas paralelos entre si (embora não necessariamente paralelos aos segmentos originais).

A propriedade anterior difere do que se passava com a perspectiva exacta, em que segmentos de rectas paralelos podiam ser representados por segmentos de rectas concorrentes (no ponto de fuga comum). Podemos assim dizer que a perspectiva cavaleira é uma perspectiva sem pontos de fuga.

Voltando ao exemplo que examinámos atrás, as arestas $[BC]$ e $[FG]$, além de serem paralelas, têm o mesmo comprimento e portanto $[BCGF]$ é um paralelogramo[25]. Daqui podemos concluir que o quadrilátero $[B'C'G'F']$, que constitui uma perspectiva cavaleira daquele paralelogramo, tem também os lados opostos paralelos entre si, sendo assim um paralelogramo, e isso é suficiente para garantir que os segmentos $[B'C']$ e $[F'G']$ têm também o mesmo comprimento. Podemos assim destacar mais uma propriedade que distingue a perspectiva cavaleira da perspectiva exacta.

P 71. Se dois segmentos de recta forem paralelos e com o mesmo comprimento, então numa perspectiva cavaleira as respectivas representações, além de paralelas têm ambas o mesmo comprimento.

Reparemos que na propriedade precedente não estamos de modo nenhum a afirmar que um segmento seja representado por um segmento com a mesma medida que ele. O que se passa é claro se voltarmos a examinar a figura 88. A única coisa que podemos afirmar é que, para segmentos paralelos, o comprimento do segmento na representação é proporcional ao comprimento do segmento original, com um coeficiente de proporcionalidade que só depende da direcção dos segmentos considerados. Este último facto resulta de uma propriedade bem conhecida da Geometria Plana sobre segmentos determinados em duas rectas por três rectas paralelas entre si[26]:



$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}}$$

Figura 89

Podemos assim dizer:

P 72. Numa perspectiva cavaleira fica bem definido, para cada direcção, um número real (o *coeficiente de escala* associado à direcção) com a propriedade de o comprimento da representação de qualquer segmento com essa direcção ser o comprimento deste multiplicado por esse coeficiente.

Exercício 82. Por que razão, ao contrário do que acontece em geral no caso da perspectiva exacta, numa perspectiva cavaleira o ponto médio de um segmento é sempre representado pelo ponto médio do segmento que o representa?

O coeficiente de escala associado a uma direcção na perspectiva cavaleira é especialmente simples quando a direcção for paralela ao plano α da representação. Vejamos porquê. Suponhamos

[25]Neste caso concreto é mesmo um quadrado mas, em geral, duas arestas paralelas e com o mesmo comprimento só se pode garantir que definam um paralelogramo.
[26]Esta propriedade é também conhecida por teorema de Thales.

que temos um segmento de recta $[AB]$ contido numa recta r paralela ao plano α da representação e consideremos a respectiva representação $[A'B']$ (pensar, por exemplo, na situação nas figuras 86 e 87). A recta r' que contém o segmento $[A'B']$ é então paralela à recta r, por ser uma recta do plano α complanar com r. Mas então o quadrilátero $[AA'B'B]$ tem os lados opostos paralelos entre si e é portanto um paralelogramo. Daqui concluímos que, ao contrário do que acontece em geral, os segmentos $[AB]$ e $[A'B']$ têm o mesmo comprimento. O coeficiente de escala é assim igual a 1 (o segmento é representado "em verdadeira grandeza"). Em resumo:

P 73. Numa perspectiva cavaleira um segmento de recta paralelo ao plano da representação é representado por um segmento de recta paralelo e com o mesmo comprimento.

Exercício 83. O que será o coeficiente de escala da própria direcção que se utiliza numa perspectiva cavaleira?

Exercício 84. Numa perspectiva cavaleira os ângulos no objecto não são, em geral, iguais aos ângulos na representação (pense, por exemplo na situação na figura 87). No entanto, os ângulos envolvendo segmentos paralelos ao plano da representação não são alterados nesta. Será capaz de descobrir porque é que isso acontece? **Sugestão:** Basta examinar o que se passa com segmentos com um vértice comum.

As propriedades da perspectiva cavaleira que estivémos a examinar até agora conduzem a regras práticas para desenhar a perspectiva cavaleira de um objecto.

Começamos por imaginar um plano para a representação, usualmente um plano prependicular ao plano horizontal, e consideramos um cubo auxiliar cuja aresta pode ser tomada como unidade de comprimento e que, para simplificar, se coloca com duas faces horizontais (chamamos-lhes a *face superior* e a *face inferior*) e outras duas paralelas ao plano da representação (chamamos-lhes a *face anterior* e a *face posterior*). A representação do cubo em perspectiva cavaleira pode então ser uma figura como a seguinte, onde, como é usual, se representaram a tracejado as arestas invisíveis:

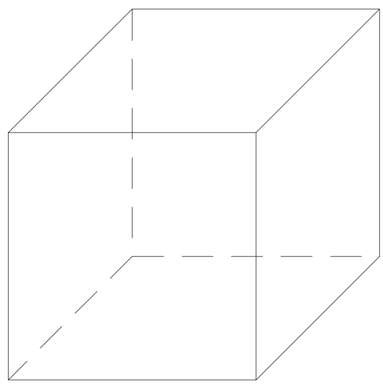


Figura 90

Nesta representação as faces anterior e posterior são quadrados em verdadeira grandeza, uma vez que são formadas por arestas paralelas ao plano da representação. A perspectiva ficará determinada se conhecermos o ângulo com a horizontal da representação das restantes arestas e o comprimento dessas representações (a escala da direcção ortogonal ao plano da representação), valores que dependem da direcção da perspectiva. Apesar desses valores serem essencialmente arbitrários, a experiência mostra que alguns valores dão uma imagem mais de acordo com a nossa intuição que outros. Uma convenção possível é a que seguimos atrás: O valor do ângulo referido é $45°$ e a escala da direcção ortogonal ao plano da representação é aproximadamente 0.7 (mais precisamente é $\frac{\sqrt{2}}{2}$). Esta convenção tem vantagens e desvantagens e pode ser sempre alterada quando for necessário evitar eventuais desvantagens.

Exercício 85. **a)** Tente descobrir a vantagem da convenção anterior quando se deseja desenhar a perspectiva em papel quadriculado (ou papel milimétrico).
b) Que situação desagradável aconteceria na perspectiva anterior do cubo se lhe pedissem para desenhar as quatro diagonais espaciais do cubo?

Até agora limitámo-nos a falar da representação do cubo que dissémos ser apenas auxiliar. O que se passa se quisermos representar outro tipo de objectos?

Nalguns casos especialmente favoráveis conseguimos isso utilizando directamente certos pontos ligados ao cubo de partida como vértices do objecto a representar

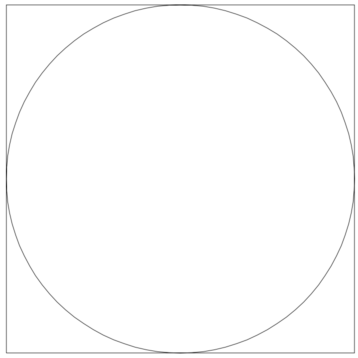
Exercício 86. Partindo da perspectiva cavaleira do cubo, tente desenhar uma perspectiva cavaleira dos seguintes sólidos, utilizando como vértices, os vértices do cubo, os pontos médios das suas arestas ou os pontos médios das suas faces. Utilize papel transparente, de forma a poder dispensar no fim o cubo utilizado como auxiliar, e represente a tracejado as arestas invisíveis dos sólidos obtidos. Repare que a representação fica pouco elucidativa se utilizar, como acima sugerimos, o ângulo de 45° e o coeficiente de escala 0.7. Altere assim esse ângulo e esse coeficiente de escala de modo a obter resultados mais interessantes.
a) Um octaedro.
b) Um tetraedro.
c) Uma pirâmide hexagonal regular.

Em geral, quando o objecto a representar não está numa situação tão favorável, podemos socorrer-nos de outro método para determinar a posição dos vértices na perspectiva: Para cada vértice que queremos representar imaginamos uma sucessão de segmentos de recta paralelos às arestas do cubo partindo de um dos vértices do cubo e cheganto ao vértice a representar e desenhamos esses segmentos de recta na perspectiva, de modo a obter a posição do vértice em questão. É claro que, depois de obtida a posição do vértice, a construção auxiliar pode ser apagada.

Exercício 87. Considere um hexágono regular no plano horizontal tendo um lado comum com a aresta da intesecção das faces anterior e inferior do cubo. Desenhe uma perspectiva cavaleira desse hexágono. Utilize a sua calculadora para determinar os comprimentos dos segmentos auxiliares que o conduzem à determinação dos vértices na perspectiva.

Exercício 88. Com o auxílio da sua calculadora desenhe a perspectiva cavaleira de um tetraedro com uma das faces no plano horizontal. Pode utilizar os resultados obtidos na resolução do exercício 68, na página 70.

Note-se que as observações feitas até agora não nos dizem nada sobre o modo de desenhar uma larga classe de objectos, como aqueles que são limitados por superfícies curvas. Como desenhar a perspectiva de uma circunferência, de um cilindor, de um cone, etc…? A título de exemplo, apresentamos a seguir duas perspectivas cavaleiras de circunferências inscritas em quadrados, a primeira no plano da face anterior de um cubo e a segunda numa sua face lateral.



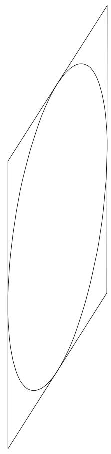


Figura 91 **Figura 92**

No primeiro caso a perspectiva aparece-nos como uma circunferência, o que não é de espantar uma vez que os segmentos de recta desse plano (em particular os raios da circunferência) são representados em verdadeira grandeza. No segundo caso a perspectiva aparece-nos como uma curva, que nos é familiar da nossa observação de todos os dias, e a que se dá o nome de elipse.

A elipse é uma curva que nos há de aparecer adiante em várias situações mas, para já, podemos tomar a propriedade anterior como definição:

Chamam-se *elipses* às curvas que se podem obter como perspectiva cavaleira de uma circunferência situada sobre um plano não paralelo à direcção que define a perspectiva.

Exercício 89. O que seria a perspectiva cavaleira de uma circunferência situada num plano paralelo à direcção que define a perspectiva?

Diga-se, a título de informação, e embora não estejamos neste momento em condições de poder dar uma justificação para esse facto, que uma perspectiva exacta de uma circunferência (situada para trás do plano da representação) é ainda uma elipse.

6. Introdução à Geometria Analítica Plana.

Começando com o cientista e filósofo Descartes, no século XVII, os matemáticos foram reconhecendo a fecundidade da ideia de identificar um ponto do plano ou do espaço por um par ou triplo de números e relacionar a partir daí as propriedades geométricas das figuras com as propriedades dos números que estão associados aos respectivos pontos.

Decerto já estudou no ensino básico o modo de definir as coordenadas de um ponto no plano, depois de fixado um sistema de eixos. Aquilo que estudámos atrás sobre vectores dum plano permite olhar para essa mesma definição de um ponto de vista ligeiramente diferente e que por vezes se revela mais fecundo.

Relembremos que, quando se está a trabalhar num plano α, chamámos referencial vectorial do plano a um par de vectores não colineares desse plano. Será cómodo nas considerações que vamos fazer em seguida chamar $\overrightarrow{e_x}$ e $\overrightarrow{e_y}$ aos vectores de um certo referencial vectorial do plano α (por vezes também se usam outras notações, como $\overrightarrow{e_1}$ e $\overrightarrow{e_2}$). Lembremos que, dado um vector arbitrário $\overrightarrow{w}$ do plano α, pode-se escrever de maneira única $\overrightarrow{w}$ na forma

$$\overrightarrow{w} = x\,\overrightarrow{e_x} + y\,\overrightarrow{e_y},$$

com x e y números reais e que então se diz que x e y são as *coordenadas* de $\overrightarrow{w}$ relativas àquele referencial vectorial ou que $\overrightarrow{w}$ é *representado pelo par ordenado* (x, y) naquele referencial vectorial.

Mas o que nós pretendemos agora é representar pontos do plano α e não apenas vectores desse plano. Para o conseguirmos o que vamos fazer é considerar, para além do referencial vectorial constituído pelos vectores $\overrightarrow{e_x}$ e $\overrightarrow{e_y}$, um ponto fixado O no plano α, que tomamos como *origem*. Conhecer um ponto A do plano α é então o mesmo que conhecer o vector $\overrightarrow{OA}$ (o *vector de posição* do ponto A) pelo que o ponto A fica perfeitamente determinado pelas coordenadas do vector $\overrightarrow{OA}$.

Chama-se *referencial* de um plano α à escolha de um ponto O desse plano (a *origem* do referencial) e de dois vectores $\overrightarrow{e_x}$ e $\overrightarrow{e_y}$ do plano, que constituam um referencial vectorial deste. Relativamente a um tal referencial, chamam-se *coordenadas* de um ponto A do plano às coordenadas do vector de posição $\overrightarrow{OA}$ relativas ao referencial vectorial, isto é, aos números reais x e y para os quais se tem

$$\overrightarrow{OA} = x\,\overrightarrow{e_x} + y\,\overrightarrow{e_y}.$$

Quando o referencial está implícito, também se diz que o ponto A é representado pelo par ordenado de números reais (x, y); de forma mais abreviada, pode escrever-se também $A \leftrightarrow (x, y)$ ou ainda simplesmente $A(x, y)$.

A notação $A \leftrightarrow (x, y)$ tem o mérito de lembrar que, como acontecia no quadro do estudo dos vectores dum plano, estamos em presença de uma correspondência biunívoca entre o conjunto dos pontos do plano α e o conjunto $\mathbb{R}^2$ dos pares ordenados de números reais.

Exercício 90. Considerando o referencial do plano da página sugerido na figura seguinte, determine as coordenadas dos pontos A, B, C e D. Obtenha os resultados aproximados com a ajuda de um esquadro e um régua graduada.

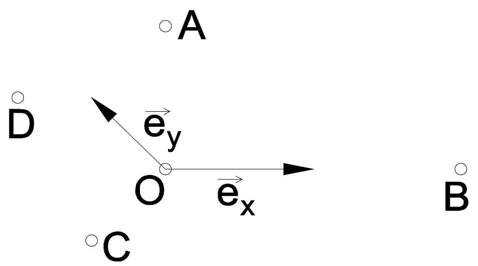


Figura 93

Existe um modo alternativo de representar o referencial precedente, que estará possivelmente mais habituado a encontrar. Em vez de se representarem explicitamente os vectores que constituem o referencial vectorial representam-se as rectas que passam pela origem e têm as direcções desses vectores, assinalando com as letras x e y os sentidos dos vectores e sugerindo uma escala de medição em cada um dos eixos de modo que os vectores do referencial, colocados com origem na origem deste, tenham extremidades nos pontos correspondentes ao valor 1 da escala (cf. a figura a seguir).

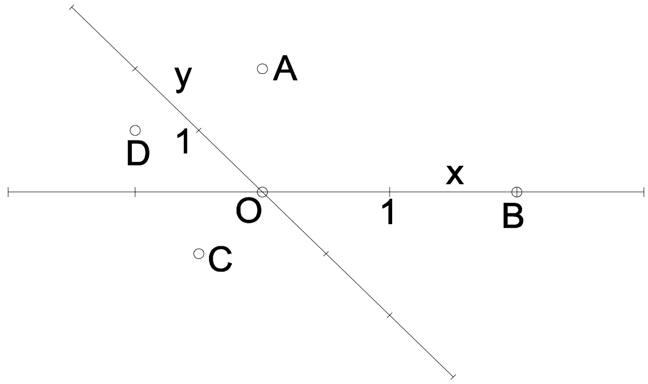


Figura 94

Costuma-se então dizer que se fixou no plano um referencial definido pelo sistema de eixos orientados xOy ou, mais simplesmente, um referencial xOy. É também comum assinalar com uma seta o sentido positivo de cada eixo, como na figura a seguir, sendo importante reparar que, neste contexto, a seta **não** indica a extremidade do vector do referencial.

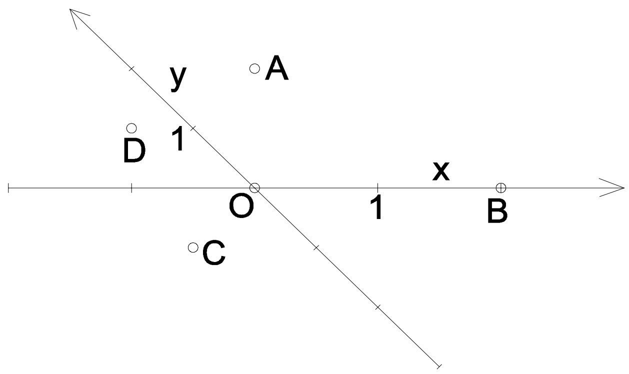


Figura 95

Pelo próprio modo como definimos as coordenadas dum ponto a partir das coordenadas do seu vector de posição, é muito fácil determinar, a partir das coordenadas dos pontos, as coordenadas dos vectores com origem O. Por exemplo, na situação das figuras anteriores, considerando os pontos $A(1,2)$ e $B(2,0)$, os vectores $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ são representados respectivamente pelos pares $(1,2)$ e $(2,0)$ de números reais. E se nos perguntarem qual o par de números reais que representa o vector $\overrightarrow{AB}$? A resposta é muito simples se relacionarmos este vector com vectores de origem O: Uma vez que $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$, podemos escrever $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$, e portanto

$$\overrightarrow{AB} \leftrightarrow (2-1, 0-2) = (1,-2).$$

O que fizémos atrás no caso particular dos pontos $A(1,2)$ e $B(2,0)$ pode ser feito no caso de dois pontos quaisquer o que nos permite enunciar o resultado geral:

P 74. Fixado um referencial no plano α e dados dois pontos desse plano

$$A_1 \leftrightarrow (x_1, y_1), \quad A_2 \leftrightarrow (x_2, y_2)$$

tem-se

$$\overrightarrow{A_1A_2} \leftrightarrow (x_2 - x_1, y_2 - y_1).$$

Por este motivo é costume usar a notação $A_2 - A_1$ como designação alternativa para o vector $\overrightarrow{A_1A_2}$.

A notação $A_2 - A_1$ como alternativa a $\overrightarrow{A_1A_2}$ destina-se a tornar mnemónica a fórmula para $\overrightarrow{A_1A_2}$ que destacámos atrás, tal como já o era a fórmula para as coordenadas da soma de dois vectores em P 48 na página 50. No mesmo espírito podemos apresentar uma fórmula para as coordenadas da soma $A + \overrightarrow{u}$ de um ponto com um vector, soma essa que, recordemo-lo, designa o ponto B tal que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$:

P 75. Fixado um referencial no plano α e dados um ponto e um vector desse plano

$$A \leftrightarrow (x, y), \qquad \overrightarrow{u} \leftrightarrow (a, b),$$

tem-se

$$A + \overrightarrow{u} \leftrightarrow (x + a, y + b).$$

A explicação é semelhante à anterior. Sendo $B = A + \overrightarrow{u}$, tem-se $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$ e portanto

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{u};$$

daqui se conclui que as coordenadas de $B = a + \overrightarrow{u}$ (iguais às de $\overrightarrow{OB}$) se obtêm como soma das coordenadas de $\overrightarrow{OA}$ (iguais às de A) com as coordenadas de $\overrightarrow{u}$.

Em Geometria Analítica não se pretende apenas determinar as coordenadas de vectores e de pontos; a ideia é estudar propriedades geométricas envolvendo os pontos e os vectores em termos das propriedades das respectivas coordenadas. Para o fazermos de forma simples convém trabalhar com um tipo particular de referenciais:

Um referencial vectorial dum plano α, constituído pelos vectores $\overrightarrow{e_x}$ e $\overrightarrow{e_y}$, diz-se *ortogonal* quando os vectores $\overrightarrow{e_x}$ e $\overrightarrow{e_y}$ forem ortogonais, isto é formarem um ângulo de 90°. Ele diz-se *ortogonal e monométrico* se, além disso, os dois vectores tiverem o mesmo comprimento.
No caso em que esteja implícita uma unidade de comprimento, um referencial vectorial diz-se *ortonormado* quando for ortogonal e monométrico e o comprimento comum dos dois vectores for igual a 1.

É claro que todo o referencial vectorial ortogonal e monométrico passa a ser ortonormado, desde que se modifique convenientemente a unidade de comprimento considerada, pelo que na prática não costuma ser muito importante a distinção entre os dois conceitos.

Apesar de serem os referenciais ortonormados aqueles com que trabalharemos daqui em diante com mais frequência, há situações em que é importante trabalhar com outros tipos de referenciais. Por exemplo, se já utilizou as capacidades gráficas da sua calculadora já deve ter reparado que, em geral, e salvo ordem dada em contrário, ela propõe um referencial que, apesar de ortogonal, não é monométrico, com o objectivo de representar de forma mais elucidativa aquilo que é pedido.

Note-se também que as definições precedentes, envolvendo referenciais vectoriais, aplicam-se também a referenciais de um plano, uma vez que estes, além da origem, incluem também um referencial vectorial.

A razão da importância dos referenciais vectorais ortogonais entronca na propriedade que enunciamos em seguida e que pode ser considerada como uma versão vectorial do conhecido teorema de Pitágoras.

Relembremos que dois vectores não nulos se dizem ortogonais quando o respectivo ângulo é de 90°. Apesar de o ângulo de dois vectores não estar definido quando algum deles for o vector $\overrightarrow{0}$, será cómodo extender a definição de vectores ortogonais de forma a considerar que o vector $\overrightarrow{0}$ é ortogonal a qualquer vector. Lembremos ainda que, quando uma unidade de comprimento está implícita, usa-se a notação $\|\overrightarrow{u}\|$ para designar a norma, ou comprimento, de um vector $\overrightarrow{u}$.

P 76 (Versão vectorial do teorema de Pitágoras) Sejam $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ dois vectores ortogonais. Tem-se então

$$\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2.$$

A justificação é muito simples: A igualdade é evidentemente verdadeira no caso em que um dos vectores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ é o vector $\overrightarrow{0}$. No caso em que eles são diferentes de $\overrightarrow{0}$, podemos considerar um ponto O de partida, escolhemos um ponto A tal que $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{u}$ e um ponto B tal que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{v}$ e aplicamos o teorema de Pitágoras ao triângulo rectângulo $[OAB]$.

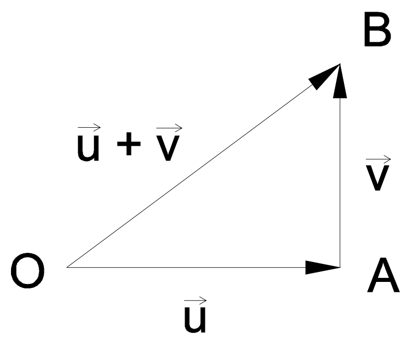


Figura 96

Exercício 91. Utilizar a propriedade precedente para mostrar que, se $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são vectores ortogonais, então tem-se também

$$\|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2.$$

Sugestão: A ideia é utilizar a propriedade precedente e não procurar uma demonstração parecida.

É agora muito fácil determinar o comprimento de um vector quando conhecemos as suas coordenadas relativas a um referencial vectorial ortonormado. Suponhamos, com efeito, que temos um tal referencial vectorial, constituído pelos vectores $\overrightarrow{e_x}$ e $\overrightarrow{e_y}$. Os vectores $\overrightarrow{e_x}$ e $\overrightarrow{e_y}$ são assim ortogonais e verificam as condições $\|\overrightarrow{e_x}\| = 1$ e $\|\overrightarrow{e_y}\| = 1$. Dado um vector

$$\overrightarrow{u} = x\,\overrightarrow{e_x} + y\,\overrightarrow{e_y},$$

os vectores $x\,\overrightarrow{e_x}$ e $y\,\overrightarrow{e_y}$ são ainda ortogonais e têm normas

$$\|x\,\overrightarrow{e_x}\| = |x|\,\|\overrightarrow{e_x}\| = |x|, \quad \|y\,\overrightarrow{e_y}\| = |y|\,\|\overrightarrow{e_y}\| = |y|,$$

pelo que, tendo em conta a versão vectorial do teorema de Pitágoras,

$$\|\overrightarrow{u}\|^2 = \|x\,\overrightarrow{e_x}\|^2 + \|y\,\overrightarrow{e_y}\|^2 = x^2 + y^2$$

(reparar que um número real e o seu valor absoluto têm o mesmo quadrado). Podemos assim dizer:

P 77. Consideremos um referencial vectorial ortonormado dum plano α, constituído pelos vectores $\overrightarrow{e_x}$ e $\overrightarrow{e_y}$. Se $\overrightarrow{u} \leftrightarrow (x, y)$ é um vector do plano α, então

$$\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

A partir da fórmula que nos dá o comprimento de um vector é muito fácil encontrar uma fórmula para a distância entre dois pontos A_1 e A_2, se repararmos que essa distância não é mais do que o comprimento do vector $\overrightarrow{A_1A_2} = A_2 - A_1$.

P 78. Considerando um referencial ortonormado dum plano e dois pontos A_1 e A_2 desse plano, com

$$A_1 \leftrightarrow (x_1, y_1), \quad A_2 \leftrightarrow (x_2, y_2),$$

a distância $\text{dist}(A_1, A_2)$ destes pontos é dada por

$$\text{dist}(A_1, A_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Exercício 92. Considerando um referencial ortonormado do plano verifique que os pontos

$$A_1(-4, 2), \quad A_2(-2, 6), \quad A_3(1, 7), \quad A_4(5, 5), \quad A_5(5, -1),$$

estão todos sobre uma mesma circunferência de centro no ponto $C(1, 2)$. Utilizando papel quadriculado ou papel milimétrico, desenhe um sistema de eixos para este referencial e represente os pontos referidos.

Exercício 93. Considere num referencial ortonormado os pontos $A(-1, 2)$, $B(2, 0)$ e $C(3, -2)$. Utilizando a sua calculadora, determine, com aproximação às milésimas, o perímetro do triângulo com vértices neste pontos.

Quando se está a considerar um referencial ortonormado, é usual chamar *abcissa* e *ordenada* de um ponto às suas primeira e segunda coordenadas, respectivamente e dar o nome de *eixo das abcissas* e *eixo das ordenadas* às rectas que passam pela origem e têm as direcções dos primeiro e segundo vectores do referencial vectorial.

Há ainda alguns procedimentos habituais que, que têm carácter mais psicológico que matemático e que **não é obrigatório seguir**:

1) É usual associar a letra x à primeira coordenada e a letra y à segunda.

2) No caso em que a posição do plano considerado permita que isso tenha algum significado para nós, é usual escolher o referencial de modo que o primeiro vector (e portanto o eixo das abcissas) fique com a direcção horizontal e o sentido da esquerda para a direita e que o segundo vector (e

portanto o eixo das ordenadas) fique com a direcção vertical e o sentido de baixo para cima.

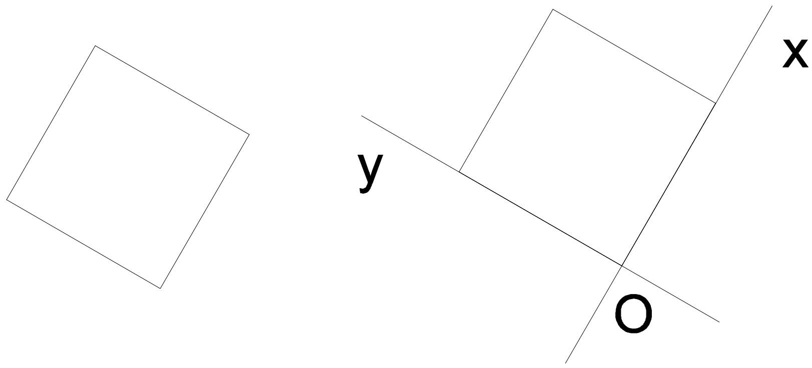


Figura 97

Se é verdade que, na ausência de uma razão para o não fazermos, será conveniente seguirmos os procedimentos apontados (podemos relembrar esse facto dizendo que seguimos a *convenção psicológica*), devemos estar preparados para, nos casos em que isso se revelar cómodo, sabermos proceder a outro tipo de escolha. Por exemplo, se jogar um papel importante no nosso estudo um quadrado como o da figura 97, poderá ser cómodo escolher um referencial com a origem num dos vértices do quadrado e os vectores com as direcções de dois lados deste.

★ ★ ★ ★

Todos nós já encontrámos dois processos diferentes de caracterizar um conjunto de objectos dum certo tipo.

No primeiro processo, por exemplo quando nos referimos ao conjunto $\{2,3,5,7\}$ de números naturais, temos a chamada *caracterização em extensão*, em que enumeramos os elementos do conjunto , ou, dito de outro modo, damos um método de encontrar todos os elementos do conjunto.

No segundo processo, por exemplo quando nos referimos ao conjunto $\{n \in \mathbb{N} \mid n$ é primo $\wedge\, n < 8\}$, temos a chamada *caracterização em compreensão*, em que o conjunto é definido a partir de uma condição (expressão proposicional), de tal forma que os seus elementos são exactamente os objectos que tornam a expressão proposicional verdadeira. Repare-se que, no dois exemplos que apresentámos encontrámos um mesmo conjunto definido primeiro em extensão e depois em compreensão.

Cada um dos dois processos tem as suas vantagens e os seus defeitos: Na definição em extensão é muito simples encontrar elementos do conjunto mas pode ser trabalhoso, se o número de elementos do conjunto for grande, decidir se um dado objecto pertence ou não ao conjunto[27]. Na definição em compreensão é em geral muito simples verificar se um dado objecto pertence ou não ao conjunto mas pode ser trabalhoso encontrar elementos do conjunto.[28]

Exercício 94. Suponhamos que estamos a trabalhar no contexto dos números naturais.
a) Dê duas caracterizações em compreensão do conjunto $\{2,4\}$.
b) Dê uma caracterização em extensão do conjunto $\{n \in \mathbb{N} \mid n^2 = 6n - 8\}$.

No sentido estrito da nomeação explícita de todos os elementos, a definição em extensão só é possível no caso dos conjuntos finitos. Existe, no entanto, uma variante, que também pode ser considerada uma forma de definição em extensão, e que partilha as qualidades e defeitos que atrás apontámos para esta: facilidade de exibir elementos e dificuldade de determinar se um objecto

[27]O que pensaria do seu professor se este lhe pedisse para verificar se aparece na lista telefónica de Lisboa o telefone com o número 218437105?
[28]Tente encontrar um elemento do conjunto $\{x \in \mathbb{R} \mid x^5 + x + 1 = 4\}$.

pertence ou não ao conjunto. É por exemplo a definição que aparece quando definimos o conjunto dos quadrados perfeitos como o conjunto dos números da forma n^2, com $n \in \mathbb{N}$, ou quando nos referimos à representação vectorial da recta em P 45, na página 48, dizendo que, fixado um ponto A e um vector director $\overrightarrow{u}$, os pontos desta são os que se podem escrever na forma $A + a\overrightarrow{u}$, com $a \in \mathbb{R}$. Neste tipo de caracterização, a que podemos dar o nome de *caracterização em extensão generalizada* ou *caracterização paramétrica*, o que se faz é dar uma expressão designatória com uma variável[29], o *parâmetro* (n no primeiro exemplo e a no segundo), e considerar que os elementos do conjunto são exactamente aqueles que podem ser obtidos como valores da expressão designatória quando o parâmetro é substituído por elementos dum conjunto dado ($\mathbb{N}$ no primeiro exemplo e $\mathbb{R}$ no segundo). Uma notação possível para nomear conjuntos caracterizados parametricamente corresponde a escrever, nos casos exemplificados atrás

$$\{n^2\}_{n\in\mathbb{N}}, \quad \{A + a\overrightarrow{u}\}_{a\in\mathbb{R}}.$$ [30]

Exercício 95. No contexto dos números naturais, apresente uma caracterização paramétrica do conjunto dos números ímpares.

★ ★ ★ ★

Quando o contexto em que estamos a trabalhar é o dos pontos do espaço ou dum plano, é costume falar de *lugar geométrico* para nos referirmos ao conjunto dos pontos que verificam uma certa condição. Os lugares geométricos são assim conjuntos de pontos definidos em compreensão. Relembremos alguns lugares geométricos que já conhecemos:

1) Dados dois pontos distintos A e B do plano, o lugar geométrico dos pontos do plano que estão à mesma distância de A e B é uma recta, nomeadamente a prependicular à recta AB que passa pelo ponto médio do segmento $[AB]$ (a *mediatriz* do segmento $[AB]$).

2) Dados dois pontos distintos A e B do espaço, o conjunto dos pontos do espaço que estão à mesma distância de A e B é um plano, a saber o plano perpendicular à recta AB que passa pelo ponto médio do segmento $[AB]$ (o *plano mediador* do segmento $[AB]$).

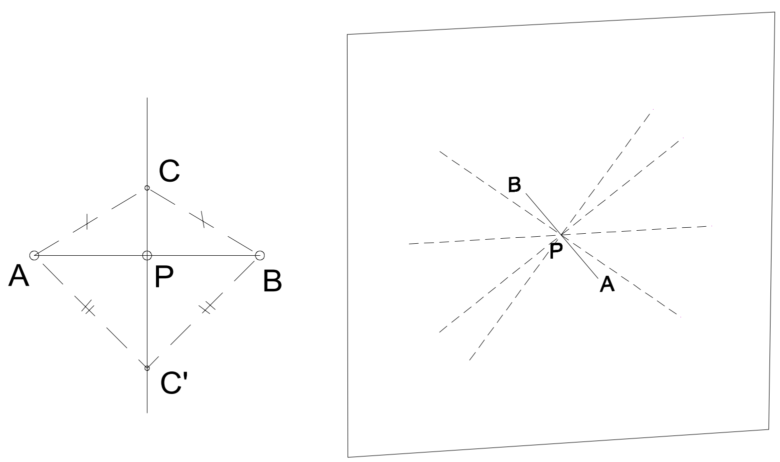


Figura 98

[29]Ou mais variáveis; pensar, por exemplo na representação vectorial dum plano, referida em P 49, na página 51.

[30]Por vezes também são utilizadas as notações $\{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$ e $\{A + a\overrightarrow{u} \mid a \in \mathbb{R}\}$ mas preferimos evitá-las para não correr o risco de fazer confusão com as definições em compreensão que utilizam notações deste tipo.

3) Dadas duas rectas r e s concorrentes num plano α, o conjunto dos pontos do plano α que estão à mesma distância de r e de s é a união de duas rectas, nomeadamente, as bissectrizes dos ângulos definidos por aquelas rectas.

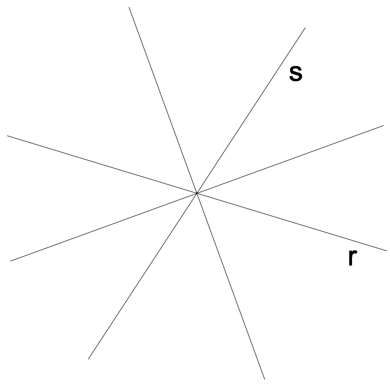


Figura 99

4) Dados um ponto C dum plano α e um número $r > 0$, o lugar geométrico dos pontos do plano α a distância r do ponto C é a circunferência de centro C e raio r.

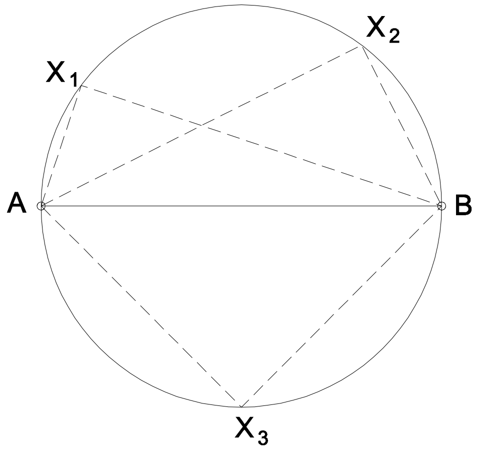


Figura 100

5) Dados dois pontos distintos A e B do plano, o lugar geométrico dos pontos X do plano tais que o ângulo $A\widehat{X}B$ é 90° é uma circunferência com diâmetro $[AB]$, com os pontos A e B retirados.

Exercício 96. Descrever os seguintes lugares geométricos:
a) Dadas duas rectas estritamente paralelas r e s no plano α, o lugar geométrico dos pontos de α à mesma distância das rectas r e s.
b) Dados três pontos não colineares, o lugar geométrico dos pontos do espaço equidistantes desses três pontos. **Sugestão:** Reparar que este lugar geométrico se pode obter como intersecção de dois outros lugares geométricos.
c) Dados dois pontos distintos A e B do plano, o lugar geométrico dos pontos X do plano tais que o ângulo $A\widehat{X}B$ é 60°.

Para além dos lugares geométricos atrás referidos, há outros que, apesar de aparentemente simples, não sabemos ainda identificar. Por exemplo:

1) Dados dois pontos distintos A e B do plano, o que será o lugar geométrico dos pontos X do plano cuja distância a A é dupla da sua distância a B?

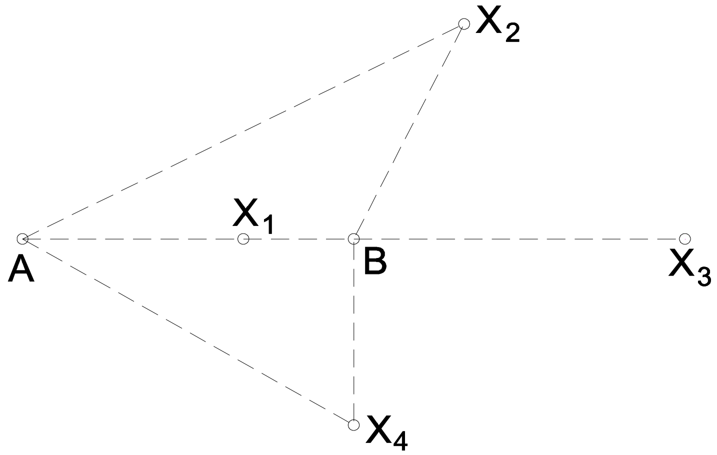


Figura 101

2) Dados, num plano, uma recta r e um ponto A não pertencente a r, o que será o lugar geométrico dos pontos X do plano tais que a distância de X a r é igual à distância de X a A?

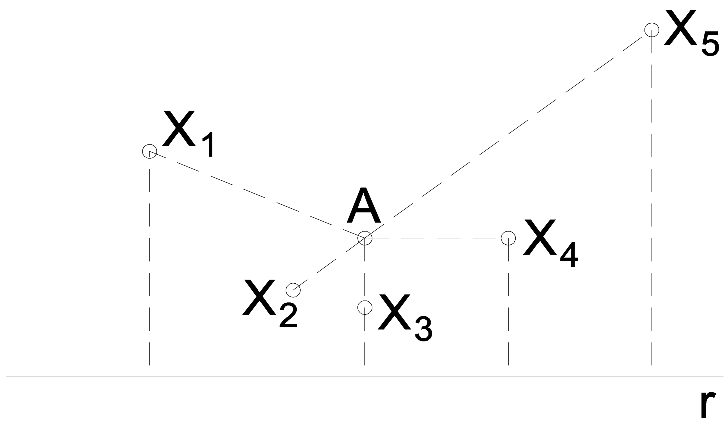


Figura 102

Uma das vantagens da Geometria Analítica, que estamos a estudar, é a de fornecer um método sistemático de examinar este tipo de questões. A ideia é caracterizar certos conjuntos de pontos através de condições envolvendo as respectivas coordenadas num referencial ortonormado.

De agora em diante, nesta secção, estará sempre implícito que estamos a trabalhar num plano, no qual se fixou um referencial ortonormado definido pela origem O e pelos vectores $\overrightarrow{e_x}$ e $\overrightarrow{e_y}$.

Como primeiro exemplo, tentemos encontrar uma condição que caracterize os pontos de uma certa recta r cuja direcção seja a do vector $\overrightarrow{e_y}$ (ou seja, se utilizarmos a “convenção psicológica” uma *recta vertical*).

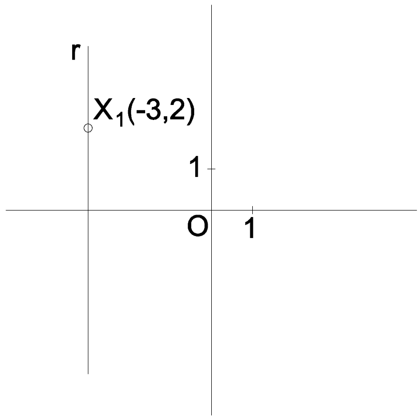


Figura 103

Se $X_1 \leftrightarrow (x_1, y_1)$ é um ponto particular da recta r, sabemos que os pontos da recta são exactamente aqueles que podem ser escritos na forma $X_1 + t\,\overrightarrow{e_y}$, com $t \in \mathbb{R}$, onde, uma vez que $\overrightarrow{e_y} \leftrightarrow (0,1)$, e portanto $t\,\overrightarrow{e_y} \leftrightarrow (0,t)$,

$$X_1 + t\,\overrightarrow{e_y} \leftrightarrow (x_1, y_1 + t).$$

Chegámos assim à conclusão que um ponto $X \leftrightarrow (x,y)$ está na recta r se, e só se, $x = x_1$ e y se pode escrever na forma $y_1 + t$, para algum $t \in \mathbb{R}$, por outras palavras, a recta em questão admite a caracterização paramétrica

$$r = \{X(x_1, y_1 + t)\}_{t \in \mathbb{R}}.$$

Mas, y_1 sendo dado, que números reais é que se podem escrever na forma $y_1 + t$, com $t \in \mathbb{R}$? Todos! (será capaz de arranjar uma justificação deste facto para um colega seu excepcionalmente céptico?). Em resumo, podemos dar também a caracterização em compreensão da recta:

Um ponto $X \leftrightarrow (x,y)$ está em r se, e só se, $x = x_1$

ou ainda

A recta r pode ser caracterizada pela *equação* $x = x_1$.

Um raciocínio inteiramente análogo levar-nos-ia à conclusão que, se s é uma recta com a direcção do vector $\overrightarrow{e_x}$ (uma *recta horizontal*) passando pelo ponto $X_1 \leftrightarrow (x_1, y_1)$, então s admite a caracterização paramétrica

$$s = \{X(x_1 + t, y_1)\}_{t \in \mathbb{R}}$$

e a caracterização em compreensão

Um ponto $X \leftrightarrow (x,y)$ está em s se, e só se, $y = y_1$,

o que ainda pode ser enunciado na forma

A recta s pode ser caracterizada pela *equação* $y = y_1$.

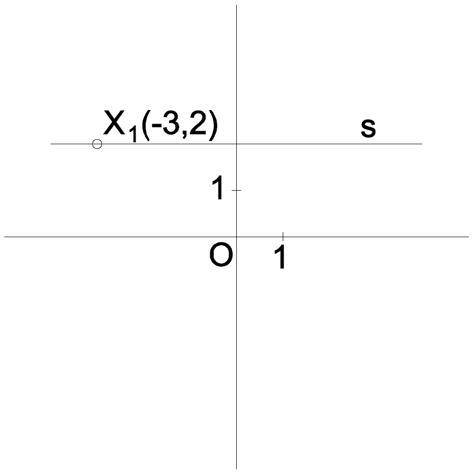


Figura 104

Usando a "convenção psicológica", podemos assim dizer:

P 79. As rectas verticais são os conjuntos de pontos do plano que podem ser caracterizados por uma equação do tipo $x = x_1$ (com x_1 número real fixado) e as rectas horizontais são aqueles que podem ser caracterizados por uma equação do tipo $y = y_1$ (com y_1 número real fixado).

É fácil caracterizar também no mesmo espírito outros conjuntos relacionados com os anteriores.

Suponhamos, por exemplo, que queremos caracterizar um dos semiplanos determinados pela recta vertical de equação $x = -3$, por exemplo o constituído pelos pontos que estão para a direita desta recta. É fácil concluir que uma condição que caracteriza os pontos deste semiplano é a de terem uma abcissa maior que a abcissa comum dos pontos daquela recta. Podemos assim dizer que os pontos do semiplano à direita da recta de equação $x = -3$ são caracterizados pela condição $x > -3$ (neste caso uma *inequação*). O semiplano que caracterizámos é o chamado *semiplano aberto*, uma vez que não inclui a própria recta. Se quiséssemos encontrar uma condição que caracterizasse o *semiplano fechado* correspondente, poderíamos tomar a condição $x \geq -3$.

Noutros casos, para arranjar uma condição que caracterize um conjunto mais complexo, isso virá facilitado se conseguirmos representar o conjunto como intersecção, ou união, de conjuntos mais simples: Se soubermos caracterizar estes por condições, a intersecção pode ser caracterizada pela conjunção das condições e a união pode ser caracterizada pela disjunção destas. Ainda noutros casos pode acontecer que o conjunto que nos é proposto seja o complementar de outro mais facilmente caracterizável. Podemos então obter uma caracterização do primeiro tomando simplesmente a negação da condição que caracteriza o segundo.

Exercício 97. Determine condições que caracterizem os conjuntos seguintes.

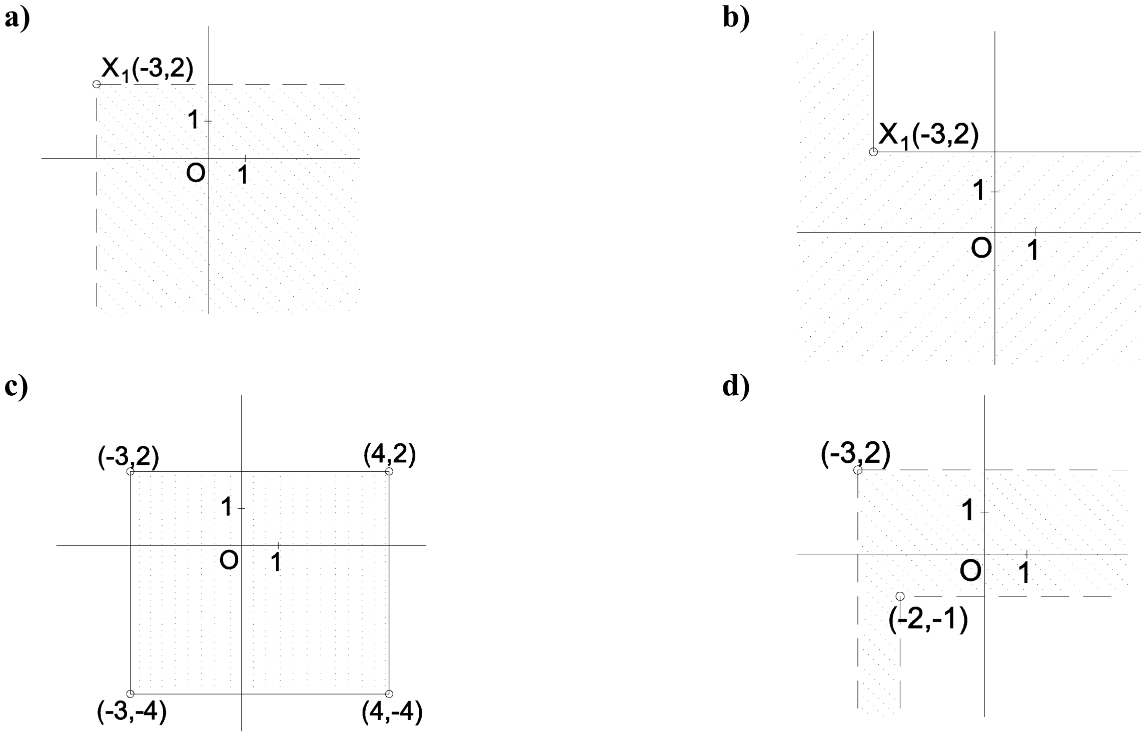


Figura 105

Utilizámos a convenção de representar a cheio as rectas cujos pontos estão incluídos no conjunto considerado e a tracejado aquelas cujos pontos não pertencem a este.

Um caso particular importante de conjuntos do tipo dos que encontrámos na alínea a) do exercício precedente são os quadrantes de que decerto já falou: O complementar da união dos dois eixos coordenados é formado pelos pontos cujas coordenadas são ambas não nulas[31] e pode ser assim decomposto como união de quatro conjuntos, consoante o sinal de cada uma das coordenadas.

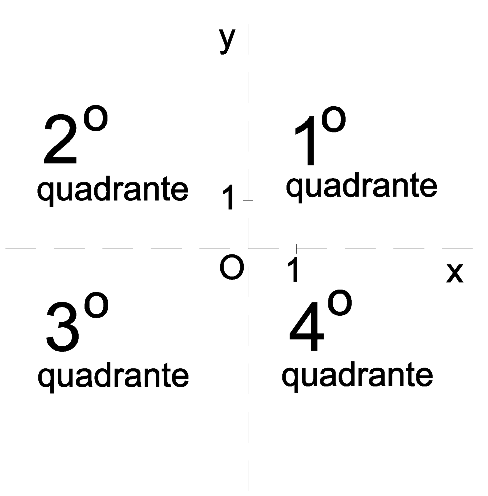


Figura 106

[31]Será que reconheceu nesta afirmação uma aplicação das primeiras leis de de Morgan?

Quadrante	**Abcissa**	**Ordenada**
Primeiro	maior que 0	maior que 0
Segundo	menor que 0	maior que 0
Terceiro	menor que 0	menor que 0
Quarto	maior que 0	menor que 0

Repare-se que a imagem visual da identificação dos diferentes quadrantes, que acaba por se tornar inconsciente, pressupõe que estamos a seguir aquilo a que chamámos a "convenção psicológica" sobre a posição dos eixos. Como identificaria os quadrantes se o referencial considerado fosse o correspondente à figura a seguir (onde o eixo das abcissas está agora na posição vertical)?

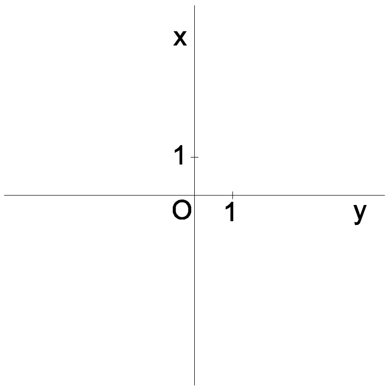


Figura 107

Depois de termos estudado representações paramétricas e equações das rectas horizontais e das rectas verticais, é natural tentarmos proceder do mesmo modo relativamente às restantes rectas do plano. Relativamente às representações paramétricas, já temos o resultado praticamente estudado desde o momento em que referimos em P 45, na página 48, a representação vectorial duma recta. Consideremos, com efeito uma recta r, em qualquer posição, que passe por um ponto, $A \leftrightarrow (x_1, y_1)$ e que admita um vector director $\overrightarrow{u} \leftrightarrow (c, d)$. Sabemos então que r admite a representação paramétrica

$$r = \{A + t\overrightarrow{u}\}_{t\in\mathbb{R}},$$

que, traduzida em termos das coordenadas, pode ser escrita na forma

$$r = \{X(x_1 + tc, y_1 + td)\}_{t\in\mathbb{R}}.$$

À caracterização anterior é costume dar o nome de *equação vectorial da recta*, embora fosse mais apropriado falar de "representação vectorial da recta", para tornar claro que não estamos em presença de uma equação, no sentido habitual[32]. Por vezes também se escreve a equação vectorial da recta na forma

$$\begin{cases} x = x_1 + tc \\ y = y_1 + td, \end{cases}$$

que devemos entender como significando o mesmo que a formulação que apresentámos anteriormente.

[32]As equações aparecem é nas caracterizações em compreensão.

Repare-se que uma mesma recta admite muitas representações vectoriais, uma vez que podemos partir de qualquer ponto particular A e de qualquer vector director $\overrightarrow{u}$.

Exercício 98. Uma recta do plano admite a representação vectorial

$$r = \{X(1+t, 2t)\}_{t\in\mathbb{R}}.$$

a) Determine as coordenadas de um ponto particular da recta e de um vector director desta.
b) Determine as coordenadas de mais três pontos da recta.
c) Verifique se o ponto $(3, 6)$ pertence ou não à recta r.
d) Tente arranjar uma caracterização em compreensão dos pontos desta recta (uma *equação da recta*).

Já descobrimos como escrever a representação vectorial duma recta quando conhecemos um ponto particular e um vector director da recta. Em muitos casos uma recta aparece-nos caracterizada a partir de dois pontos distintos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ por onde ela passa. Para determinar então uma equação vectorial da recta basta escolher um desses dois pontos como ponto particular e tomar para vector director o vector $\overrightarrow{AB} \leftrightarrow (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ (lembrar que qualquer vector não nulo da recta pode servir como vector director).

Exercício 99. Determine uma equação vectorial da recta que passa pelos pontos $A(1, 2)$ e $B(-1, 4)$. A partir da equação vectorial obtida, tente encontrar uma caracterização em compreensão dos pontos dessa recta (uma equação da recta).

Tentemos agora examinar em geral o que possivelmente já fez nos casos particulares dos dois exercícios precedentes: Procuremos obter uma caracterização em compreensão dos pontos de uma recta r, da qual conhecemos um ponto particular $A(x_1, y_1)$ e um vector director $\overrightarrow{u} \leftrightarrow (c, d)$. A recta será vertical se, e só se, o vector director tiver a direcção de $\overrightarrow{e_y}$, ou seja, se, e só se, $c = 0$. Uma vez que, para a recta vertical, já sabemos que ela admite a equação $x = x_1$, vamos centrar a nossa atenção apenas nas rectas não verticais, isto é, naquelas onde $c \neq 0$. O nosso problema está em procurar uma condição necessária e suficiente para que um ponto $X(x, y)$ pertença à recta, envolvendo apenas as coordenadas x e y. Ora, o conhecimento da equação vectorial da recta, que obtivémos atrás diz-nos que $X(x, y)$ está sobre a recta se, e só se, **para algum** valor de $t \in \mathbb{R}$, se tiver simultaneamente

$$\begin{cases} x = x_1 + tc \\ y = y_1 + td. \end{cases}$$

Mas que valor de t poderá verificar estas duas condições? Uma vez que $c \neq 0$, sabemos que existe um, e um só valor de t que verifica a primeira condição, a saber o valor

$$t = \frac{x - x_1}{c},$$

que se obtém resolvendo a primeira equação em ordem a t. A existência de um valor de t que verifique **ambas** as condições anteriores é assim equivalente à condição de o valor de t que determinámos verificar **também** a segunda equação, isto é de se ter

$$y = y_1 + \frac{x - x_1}{c}\, d.$$

Obtivémos assim a equação procurada, que pode ainda ser transformada noutra equivalente com um aspecto mais útil:

$$y = \frac{d}{c}\,x + (y_1 - \frac{dx_1}{c}).$$

O resultado a que chegámos pode ser enunciado do seguinte modo:

P 80. Uma recta não vertical passando pelo ponto $A(x_1, y_1)$ e admitindo o vector $\overrightarrow{u} \leftrightarrow (c, d)$ como vector director pode ser caracterizada pela equação

$$y = mx + b,$$

chamada *equação reduzida da recta*, onde os números reais m e b são dados por

$$m = \frac{d}{c}, \quad b = y_1 - mx_1.$$

As fórmulas para m e b atrás referidas merecem algum comentário.

Em primeiro lugar não é necessário conhecer de cor a fórmula para b, uma vez que ela pode ser deduzida muito facilmente em cada caso concreto: Uma vez que o ponto $A(x_1, y_1)$ pertence à recta, as suas coordenadas devem verificar a equação, ou seja $y_1 = mx_1 + b$, donde se deduz que $b = y_1 - mx_1$. O valor de b também tem outra interpretação muito importante: Se na equação $y = mx + b$ tomarmos $x = 0$, obtemos $y = b$, o que pode ser interpretado dizendo que $(0, b)$ é o único ponto da recta que está no eixo das ordenadas.

Passemos agora à interpretação do valor de m que aparece na equação reduzida da recta.

Comecemos por considerar um vector não nulo $\overrightarrow{u}$ do plano que, relativamente ao referencial ortonormado que estamos a considerar, não seja vertical. Tem-se assim $\overrightarrow{u} \leftrightarrow (c, d)$, com $c \neq 0$. Nessas condições, ao número real $\frac{d}{c}$ dá-se o nome de *declive* do vector $\overrightarrow{u}$ (relativamente ao referencial ortonormado que está implícito). A interpretação intuitiva do declive fica clara se olharmos para o vector como translação. Uma vez que se tem $\overrightarrow{u} = c\,\overrightarrow{e_x} + d\,\overrightarrow{e_y}$, o translação pode ser interpretada como um movimento "para a direita" de c unidades seguido de um movimento "para cima" de d unidades[33]; o declive é assim o quociente daquilo que se subiu por aquilo que se andou para a direita, noção que possivelmente já encontrámos quando falamos do declive de uma estrada.

Uma propriedade fundamental do declive dum vector, que, de certo modo, está na base da sua importância em Geometria, é a de que ele não se altera quando subsituímos o vector $\overrightarrow{u}$ por outro com a mesma direcção, ou seja, por outro da forma $t\overrightarrow{u}$, com $t \in \mathbb{R}$ não nulo. Com efeito, sendo $\overrightarrow{u} \leftrightarrow (c, d)$, tem-se $t\overrightarrow{u} \leftrightarrow (tc, td)$ e portanto os declives $\frac{d}{c}$ e $\frac{td}{tc}$ são iguais. De facto podemos dizer mesmo mais, não só dois vectores não verticais com a mesma direcção têm o mesmo declive como dois vectores não verticais com o mesmo declive têm a mesma direcção (há portanto equivalência entre os vectores terem o mesmo declive e terem a mesma direcção). Com efeito, sendo $\overrightarrow{u} \leftrightarrow (c, d)$ e $\overrightarrow{v} \leftrightarrow (c', d')$ com o mesmo declive, portanto com $\frac{d}{c} = \frac{d'}{c'}$, então, tomando $t = \frac{c'}{c}$, vem $c' = tc$ e, da igualdade $\frac{d}{c} = \frac{d'}{tc}$, concluímos que se tem também $d' = td$, ou seja, $\overrightarrow{v} = t\overrightarrow{u}$.

Uma vez que todos os vectores duma dada recta têm a mesma direcção, as considerações anteriores permite-nos apresentar a seguinte definição:

Chama-se declive de uma recta não vertical (relativamente ao referencial ortonormado que está implícito) ao declive de qualquer um dos vectores não nulos da recta.

[33]Interpretamos, como é usual, um movimento para a esquerda de, por exemplo, 5 unidades como sendo um movimento para a direita de -5 unidades, uma convenção análoga sendo feita para os movimentos na vertical.

Além disso, uma vez que duas rectas são paralelas se, e só se, os vectores das duas rectas são os mesmos, podemos também dizer:

P 81. Duas rectas não verticais são paralelas se, e só se, têm o mesmo declive.

Reparemos enfim que o resultado que obtivémos atrás sobre o equação reduzida de uma recta não vertical pode agora ser enunciado de forma mais precisa.

P 82. Uma recta não vertical pode ser caracterizada em compreensão por uma equação do tipo $y = mx + b$, onde m é o declive da recta e b é a ordenada do ponto de intersecção da recta com o eixo das ordenadas.

Exercício 100. Verifique que a recta r, *bissectriz dos quadrantes ímpares* (cf. a figura 108), admite a equação reduzida $y = x$. Obtenha analogamente a equação reduzida da recta r', *bissectriz dos quadrantes pares*.

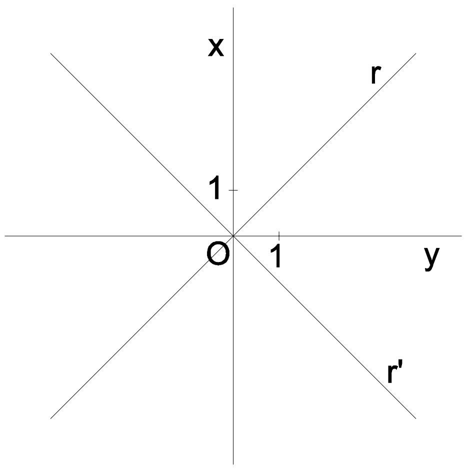


Figura 108

Exercício 101. Determine um ponto particular e um vector director da recta com equação reduzida $y = -3x + 5$.

Exercício 102. Como pode caracterizar, em termos do declive, as rectas horizontais.

Exercício 103. Considerando a recta r de equação reduzida $y = 2x - 3$, determine uma equação da recta s paralela à recta r e que passa pelo ponto $B \leftrightarrow (-1, 2)$.

Exercício 104. Dada uma recta não vertical com equação reduzida $y = mx + b$, determine uma equação paramétrica desta recta, com um parâmetro t a variar em $\mathbb{R}$. Repare que essa representação paramétrica não tem que ser obtida a partir de uma representação vectorial da recta. **Sugestão:** Para cada $t \in \mathbb{R}$, considerar o ponto da recta com abcissa $x = t$.

Exercício 105. Determine os valores de t para os quais o ponto $X \leftrightarrow (t^2, 2t)$ pertence à recta de equação reduzida $y = -2x + 4$.

Exercício 106. Determine as coordenadas do ponto de intersecção das rectas r e r', sabendo que:
a) As rectas r e r' admitem as equações reduzidas $y = 2x - 4$ e $y = -3x + 6$, respectivamente.
b) A recta r está definida pela equação reduzida $y = x + 2$ e a recta r' passa pelo ponto $A(2, 1)$ e

tem $\overrightarrow{u} \leftrightarrow (-1, 2)$ como um dos seus vectores directores. **Sugestão:** Determine a equação vectorial da recta r' e utilize-a para a resolução.
c) As rectas r e r' admitem respectivamente as representações paramétricas

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - t \end{cases}, \qquad \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 + t \end{cases}.$$

Cuidado! Deverá pensar com cuidado no significado das representações paramétricas, para evitar cair numa situação aparentemente sem saída.
Em qual das alíneas foi mais simples determinar as coordenadas do ponto de intersecção?

★ ★ ★ ★

Vamos estudar agora a caracterização em compreensão, por condições envolvendo as coordenadas dos seus pontos, de outros conjuntos que podem ser definidos como lugares geométricos ligados à noção de distância.

O primeiro exemplo é a circunferência. Comecemos com um caso concreto muito simples: Uma circunferência de centro na origem do referencial e de raio, digamos 3. Um ponto $X(x, y)$ está sobre essa circunferência se, e só se, a distância de X à origem O é igual a 3, isto é, a norma do vector $\overrightarrow{OX}$ é igual a 3. Mas, uma vez que $\overrightarrow{OX} \leftrightarrow (x, y)$, a norma deste vector é igual a $\sqrt{x^2 + y^2}$. Podemos assim caracterizar a circunferência em compreensão na forma

$$\{X(x, y) \mid \sqrt{x^2 + y^2} = 3\}$$

ou ainda, com um aspecto mais bonito,

$$\{X(x, y) \mid x^2 + y^2 = 9\}.$$

A possibilidade de escrever esta segunda caracterização, conhecida a primeira, vem de que que podemos escrever

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 3 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 9.$$

A validade desta equivalência exige alguma atenção. Que o primeiro membro implica o segundo é evidente, uma vez que se dois números são iguais, os seus quadrados também o são e $x^2 + y^2$ é o quadrado de $\sqrt{x^2 + y^2}$! Mas como é que sabemos que o segundo membro implica o primeiro? Em geral dois número diferentes (como 3 e -3) podem ter o mesmo quadrado! A razão por que, neste caso, o segundo membro implica o primeiro está no facto de $\sqrt{x^2 + y^2}$ e 3 serem ambos positivos (no sentido lato).

O que fizémos atrás com aquela circunferência particular pode ser facilmente adaptado para circunferências com centro num ponto qualquer e com qualquer raio. Estudemos então o caso geral da circunferência com centro num ponto $C(x_1, y_1)$ e raio $R > 0$. Uma vez que a distância dum ponto $X(x, y)$ ao ponto C é dada pela fórmula $\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}$ a circunferência vai ser caracterizada pela equação $\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} = R$ ou, o que é equivalente, pela equação $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = R^2$.

P 83. Uma circunferência de centro no ponto $C(x_1, y_1)$ e raio R pode ser caracterizada pela equação

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = R^2.$$

Exercício 107. Seja r a recta que passa pelos pontos $A(1,-6)$ e $B(3,-2)$. Determine as coordenadas dos pontos de intersecção desta recta com a circunferência de centro no ponto $C(2,1)$ e raio 5.

Exercício 108. Considere a circunferência de centro na origem O do referencial e raio 20. De entre todas as rectas do plano que passam pelo ponto $A(0,25)$, algumas não intersectam a circunferência, outras intersectam-na em dois pontos e duas intersectam-na apenas num ponto. Determine a equação reduzida destas últimas rectas.

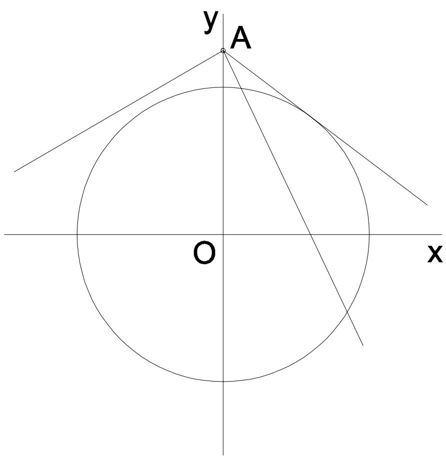


Figura 109

Exercício 109. **a)** Determine uma condição que caracterize os pontos do círculo de centro no ponto $C(2,1)$ e raio 5.
b) A intersecção do círculo referido com a recta vertical de equação $x=-1$ é um segmento de recta. Determine uma condição que caracterize essa intersecção e o comprimento do segmento de recta.

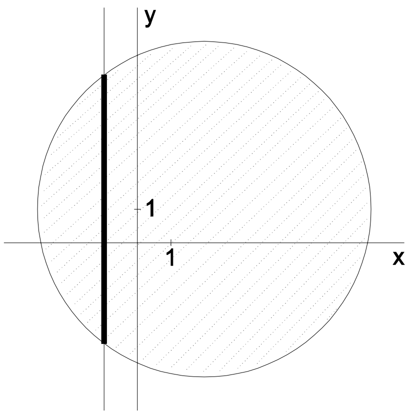


Figura 110

Em certos casos concretos a equação que obtivémos para a circunferência pode ser transformada numa equação mais simples, por desenvolvimento dos quadrados que aparecem no primeiro membro. Suponhamos, por exemplo que estamos a estudar a circunferência de centro no ponto $C(1,0)$ e raio 1. De acordo com o que vimos, esta circunferência pode ser caracterizada pela equação

$$(x-1)^2+y^2=1.$$

Desenvolvendo o quadrado no primeiro membro e simplificando, podemos obter sucessivamente outras equações equivalentes:

$$x^2-2x+1+y^2=1$$
$$x^2-2x+y^2=0.$$

Esta última equação é talvez mais simples que a original mas, em compensação[34], olhando para ela não era imediatamente aparente que o conjunto representado era uma circunferência nem havia indicações sobre quais os possíveis raio e centro. Em certos casos uma equação como esta última pode-nos aparecer na resolução de um problema concreto e pode ser importante tentar o caminho inverso de modo a fazer aparecer a equação que nos identifica a circunferência (naturalmente isso só é possível se e equação representar efectivamente uma circunferência…). No exercício seguinte vamos aplicar esse método para responder a uma das questões que foi levantada sem resposta na página 93.

Exercício 110. Dados dois pontos distintos A e B dum plano, mostre que o conjunto dos pontos X do plano cuja distância a A é dupla da distância a B é uma circunferência e explique como se pode obter o centro e o raio dessa circunferência:
Sugestão: 1) Tome a distância de A a B como unidade de comprimento e escolha um referencial ortonormado com origem A e $\overrightarrow{e_x}=\overrightarrow{AB}$.[35]
2) Escreva uma equação para o lugar geométrico, relativamente ao referencial considerado.
3) Transforme a equação obtida de forma a identificar a equação de uma circunferência.

Exercício 111. Seguindo um caminho análogo ao seguido no exercício anterior, generalize-o no seguinte sentido: Sejam A e B dois pontos distintos dum plano e k um número real maior que 0 e diferente de 1. Mostre que o conjunto dos pontos X do plano tais que dist$(X,A)=k\,$dist(X,B) é uma circunferência e identificar o raio e o centro desta. O que seria este conjunto no caso em que $k=1$?

Recordemos que, se A e B são dois pontos distintos dum plano, a mediatriz do segmento $[AB]$, isto é, a recta perpendicular à recta AB e passando pelo ponto médio deste segmento pode ser caracterizada como o conjunto dos pontos X desse plano que estão equidistantes de A e B. Vejamos num exemplo concreto como se pode tirar partido desta caracterização para obter uma equação da mediatriz. Tomemos, para fixar ideias, $A\leftrightarrow(1,2)$ e $B\leftrightarrow(-1,3)$. Um ponto $X(x,y)$ está na mediatriz se, e só se dist$(X,A)=$ dist(X,B), condição equivalente à equação

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}=\sqrt{(x+1)^2+(y-3)^2}$$

ou ainda, uma vez que ambos os membros desta igualdade são sempre positivos (no sentido lato), à equação

$$(x-1)^2+(y-2)^2=(x+1)^2+(y-3)^2.$$

Desenvolvendo ambos os membros desta equação e simplificando o resultado, obtemos sucessivamente as equações equivalentes

[34]Não se pode ter tudo…
[35]Este é um dos passos fundamentais que pode contribuir para simplificar a resolução de um problema geométrico pelos métodos da Geometria Analítica. Devemos procurar escolher um referencial que pareça simplificar a resolução.

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = x^2 + 2x + 1 + y^2 - 6y + 9$$
$$-4x + 2y - 5 = 0.$$

Obtivémos assim a equação do primeiro grau a duas incógnitas

$$-4x + 2y - 5 = 0$$

como equação da recta mediatriz do segmento $[AB]$.

Exercício 112. Seria possível prever que o conjunto

$$\{X(x, y) \mid -4x + 2y - 5 = 0\}$$

tinha que ser uma recta, mesmo sem saber que ele é a mediatriz do segmento $[AB]$? Determine, em particular, o declive desta recta e a ordenada do ponto em que ela intersecta o eixo das ordenadas.

Exercício 113. **a)** Verifique que o simétrico do ponto $A \leftrightarrow (2, -3)$ relativamente à bissectriz dos quadrantes ímpares é o ponto $B \leftrightarrow (-3, 2)$. **Sugestão:** Repare que dizer que um ponto B é o simétrico de um ponto A relativamente a uma recta r é o mesmo que dizer que r é a mediatriz do segmento $[AB]$. Lembre a equação para a mediatriz dos quadrantes ímpares encontrada no exercício 100.
b) Quais serão as coordenadas do ponto simétrico do ponto $A \leftrightarrow (2, -3)$ relativamente à bissectriz dos quadrantes pares?
c) Generalize o que fez na alínea a) de forma a mostrar que o simétrico de um ponto $A \leftrightarrow (a, b)$ relativamente à bissectriz dos quadrantes ímpares é o ponto $B \leftrightarrow (b, a)$. O que será o simétrico do ponto $A \leftrightarrow (a, b)$ relativamente à bissectriz dos quadrantes pares?

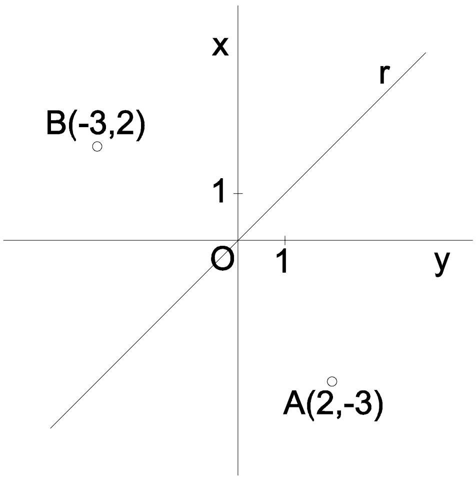


Figura 111

Exercício 114. Lembre que o circuncentro de um triângulo, isto é, o centro de circunferência que passa pelos vértices deste, pode ser obtido como intersecção das mediatrizes de dois quaisquer dos seus lados. Determine o circuncentro do triângulo de vértices nos pontos $A(1, 2)$, $B(-1, 3)$ e $C(0, -1)$. Utilize a sua calculadora para determinar, com aproximação às centésimas, o raio da circunferência circunscrita a este triângulo.

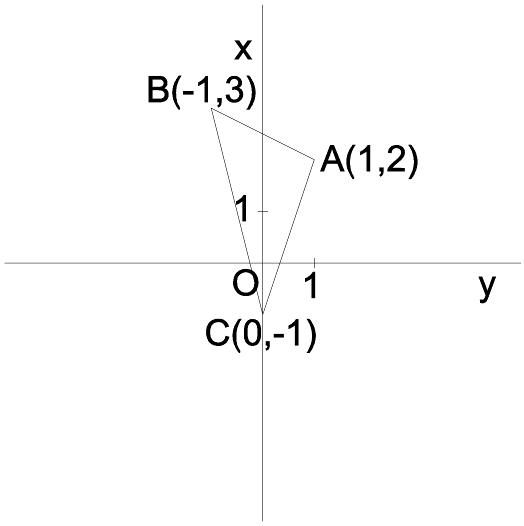


Figura 112

Um dos pontos da mediatriz dum segmento de recta $[AB]$ é evidentemente o *ponto médio* M desse segmento.

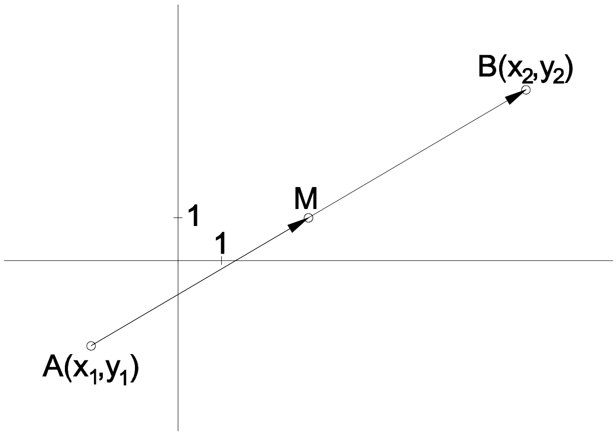


Figura 113

Existe um modo muito simples de determinar as coordenadas desse ponto médio, conhecidas as coordenadas dos pontos A e B, que se baseia na observação simples de que se tem $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{AB}$.

Sendo $A \leftrightarrow (x_1, y_1)$ e $B \leftrightarrow (x_2, y_2)$, deduzimos sucessivamente que

$$\begin{array}{l}
\overrightarrow{AB} \leftrightarrow (x_2 - x_1, y_2 - y_1) \\
\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{2}\,\overrightarrow{AB} \leftrightarrow (\dfrac{x_2 - x_1}{2}, \dfrac{y_2 - y_1}{2}) \\
M = A + \overrightarrow{AM} \leftrightarrow (x_1 + \dfrac{x_2 - x_1}{2}, y_1 + \dfrac{y_2 - y_1}{2}) = (\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}).
\end{array}$$

Podemos assim enunciar uma propriedade com características mnemónicas:

P 84. Se M é o ponto médio do segmento $[AB]$ e se $A \leftrightarrow (x_1, y_1)$ e $B \leftrightarrow (x_2, y_2)$, então

$$M \leftrightarrow (\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}),$$

por outras palavras, as coordenadas do ponto médio são as médias das coordenadas correspondentes dos pontos de partida.

Ainda no quadro do exame de lugares geométricos em que intervém a noção de distância vamos examinar outra das questões que levantámos, sem resposta, na página 93. Uma vez que o lugar geométrico em questão não é ainda nosso conhecido, começamos por apresentar uma definição.

Chama-se *parábola* ao conjunto dos pontos de um plano α que estão equidistantes de um ponto $A \in \alpha$ e de uma recta $r \subset \alpha$ que não passa por A. Diz-se então que a parábola tem o *foco* A e a *directriz* r.

Uma vez que não sabemos ainda utilizar a Geometria Analítica para determinar a distância de um ponto a uma recta em posição arbitrária, vamos tentar obter uma equação para a parábola no caso em que a directriz está numa posição especialmente simples, por exemplo que seja uma recta horizontal (o caso em que temos uma recta vertical é igualmente simples). No sentido de obter um resultado visualmente mais agradável vamos ainda particularizar mais a posição da directriz e do foco. Mais precisamente, vamos fixar um número $k > 0$ e procurar uma equação para a parábola com foco no ponto $A(0, k)$ e com directriz horizontal com equação $y = -k$.

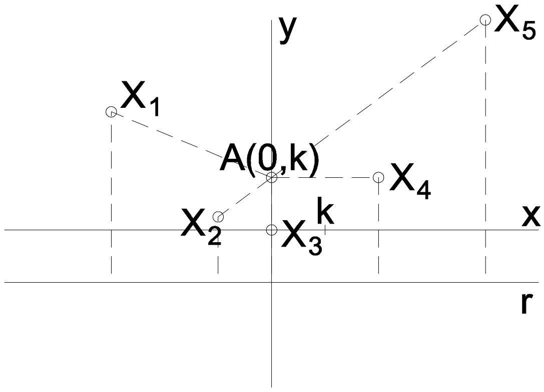


Figura 114

Tentemos então encontrar uma condição para que um ponto $X(x, y)$ pertença à parábola. A distância do ponto X à recta r é a distância de X à sua projecção sobre a recta r que tem coordenadas $(x, -k)$, e é portanto igual a

$$\sqrt{(x-x)^2 + (y+k)^2} = \sqrt{(y+k)^2} = |y+k| .$$[36]

Por outro lado, a distância de $X(x, y)$ a $A(0, k)$ é igual a $\sqrt{x^2 + (y-k)^2}$. A equação procurada pode ser assim escrita na forma

$$\sqrt{(y+k)^2} = \sqrt{x^2 + (y-k)^2},$$

sucessivamente equivalente a

[36]Repare-se que não se pode escrever simplesmente $\sqrt{(y+k)^2} = y + k$, uma vez que não sabemos se $y + k \geq 0$.

$$
\begin{aligned}
&(y+k)^2 = x^2 + (y-k)^2 \\
&y^2 + 2ky + k^2 = x^2 + y^2 - 2ky + k^2 \\
&4ky = x^2 \\
&y = \frac{x^2}{4k}.
\end{aligned}
$$

Chegámos assim à seguinte conclusão :

P 85. A equação $y = \frac{x^2}{4k}$ caracteriza uma parábola tendo como foco o ponto $A \leftrightarrow (0, k)$ e como directriz a recta horizontal de equação $y = -k$.

Exercício 115. Adapte o raciocínio precedente de forma a obter equações para as seguintes parábolas:
a) O foco é o ponto $A(0, -k)$ e a directriz é a recta horizontal de equação $y = k$.
b) O foco é o ponto $A(k, 0)$ e a directriz é a recta vertical de equação $x = -k$.

Exercício 116. A equação $y = x^2$ representa uma parábola. Diga quais o seu foco e a sua directriz. Utilize papel quadriculado ou papel milimétrico para representar, com o auxílio da sua calculadora, um certo número de pontos da parábola referida e, a partir daí, procure esboçar um desenho de parte da parábola. Utilize em seguida as capacidades gráficas da sua calculadora para representar no respectivo mostrador uma parte do desenho da parábola. Compare os resultados obtidos no papel e no mostrador da calculadora, descobrindo a razão de eventuais diferenças.

As parábolas aparecem na vida real em várias situações. Em muitas delas não é a parábola que aparece exactamente mas uma superfície que se obtém rodando esta em torno do seu eixo (isto é da recta perpendicular à directriz que passa pelo foco). Uma tal superfície, a que se dá o nome de parabolóide de revolução, tem uma propriedade importante de reflexão que está a base da maioria das suas aplicações: Uma recta paralela ao eixo ao chegar à superfície é reflectida[37] numa recta que vai passar pelo foco (e vice-versa, um recta que passa pelo foco é reflectida numa recta paralela ao eixo).

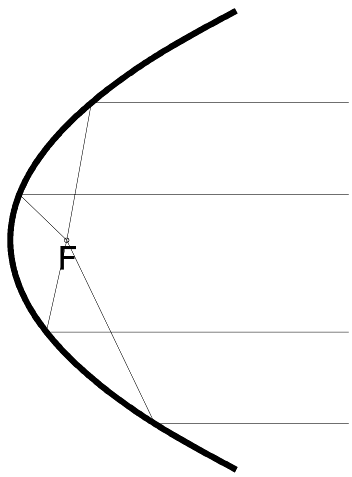


Figura 115

[37]de acordo com as leis usuais estudadas em Física.

É esta propriedade, que não estamos em condições de justificar neste momento, que está na base da utilização de partes de parabolóides em situações como a construção de objectivas para os telescópios, de antenas “parabólicas” para a recepção de sinais de rádio, de reflectores para os faróis de automóveis ou de concentradores da energia solar.

Forno solar do CNRS em França na região dos Pirinéus

Foto: Fernando Marques

Outra situação em que as parábolas nos aparecem na vida real está ligada com o fenómeno da perspectiva exacta. Referimos atrás, embora sem apresentar justificação para esse facto, que, quando representamos em perspectiva exacta uma circunferência situada para lá do plano da representação, a imagem que se obtém é uma elipse. De facto, mesmo que a circunferência original não esteja toda para lá do plano da representação mas esteja ainda para lá do plano paralelo a este que passa pelo observador, pode ainda provar-se que, apesar de não se poder representar toda a circunferência, a parte que se representa é uma parte de uma elipse. Se continuarmos a aproximar a circunferência, no momento em que esta toca com um único ponto o último plano referido, pode provar-se que a representação da parte visível é uma parte de uma parábola. Se continuássemos a aproximar a circunferência, de forma a que esta intersecte o plano em dois pontos, passaríamos a ter uma parte duma hipérbole, uma curva que ainda não encontrámos no nosso estudo e que, a título de informação esboçamos a seguir.

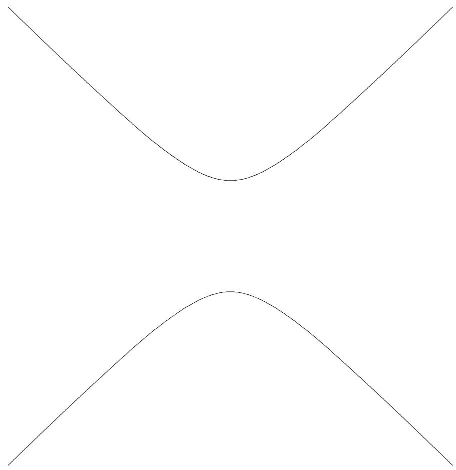


Figura 116

Na figura a seguir tentamos descrever esta situação "vista de cima", de forma que o plano da representação e o plano paralelo a este, passando pelo observador, nos aparecem como rectas (a segunda representada a tracejado).

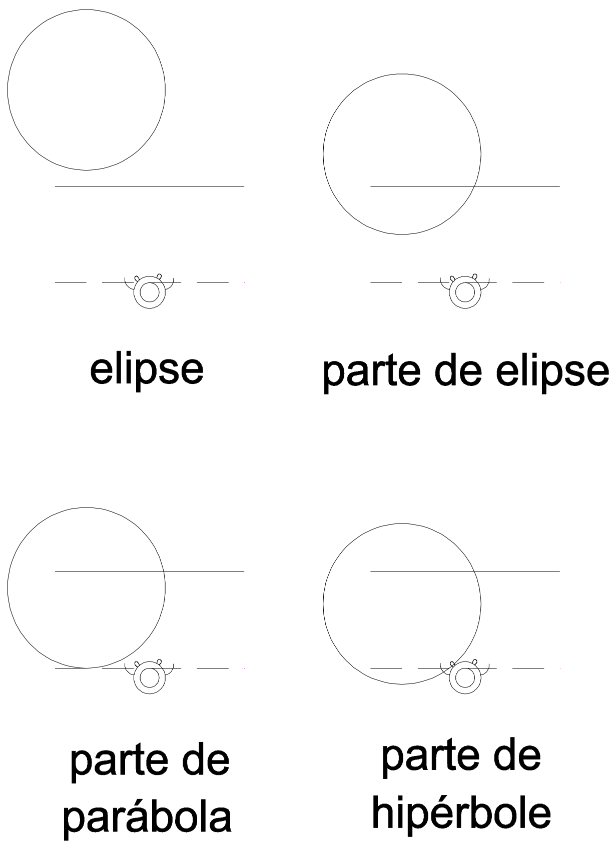


Figura 117

★ ★ ★ ★

Vamos agora examinar, através de alguns exemplos, como se modificam as equações que caracterizam alguns conjuntos quando efectuamos certas transformações sobre eles.

O primeiro tipo de transformação que vamos considerar é a translação. Consideremos, para fixar ideias, a translação correspondente a $\overrightarrow{u} \leftrightarrow (2, -1)$, que sabemos transformar cada ponto $X \leftrightarrow (x, y)$ no ponto

$$X' = X + \overrightarrow{u} \leftrightarrow (x + 2, y - 1).$$

Essa translação vai transformar cada conjunto de pontos, noutro conjunto de pontos, nomeadamente o conjunto dos pontos transformados dos primeiros. Por exemplo, na figura seguinte aparece um quadrado e a sua imagem pela translação, outro quadrado.

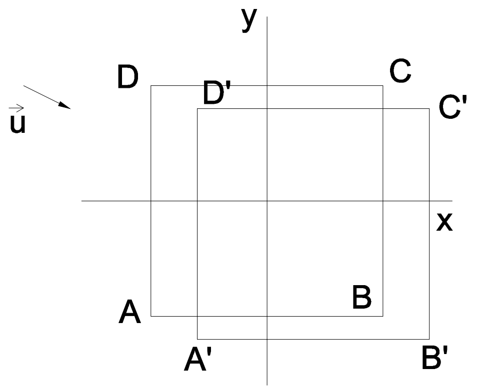


Figura 118

Na figura a seguir esboçámos um conjunto definido paramétricamente por

$$\begin{cases} x = t^3 - t \\ y = t^2 \end{cases},$$

com t a variar no intervalo $[-\frac{6}{5}, \frac{6}{5}]$, seguido da imagem do transformado desse conjunto pela translação que estamos a considerar.

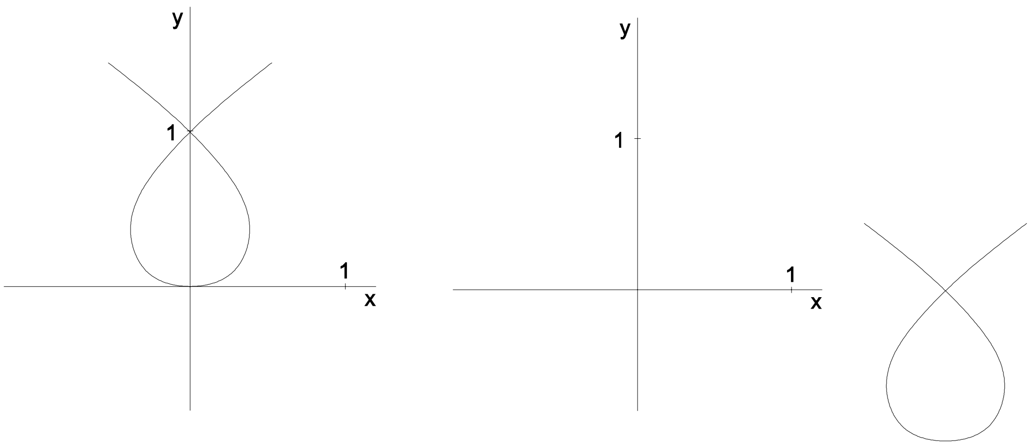


Figura 119

Como poderíamos representar parametricamente este segundo conjunto? A reposta é muito simples, uma vez que cada ponto $X \leftrightarrow (t^3 - 3, t^2)$ é transformado no ponto $X' \leftrightarrow (t^3 - 3 + 2, t^2 - 1)$, este segundo conjunto admite a representação paramétrica

$$\begin{cases} x = t^3 - t + 2 \\ y = t^2 - 1 \end{cases},$$

com t a variar no mesmo intervalo.

Exercício 117. Repare que a sua calculadora gráfica possui a capacidade de, sob certas condições, esboçar conjuntos definidos parametricamente. Utilize-a para representar o conjunto que considerámos, assim como o seu transformado pela translação.

Já quando aplicamos uma translação a um conjunto caracterizado em compreensão temos que ser um pouco mais cuidadosos. Na figura a seguir representámos um esboço do conjunto $\mathcal{C}$ definido pela equação $y^2 = 4x^2(1-x^2)$,

$$\mathcal{C} = \{X(x,y) \mid y^2 = 4x^2(1-x^2)\},$$

assim como o seu transformado $\mathcal{C}'$ pela translação que estamos a considerar.[38]

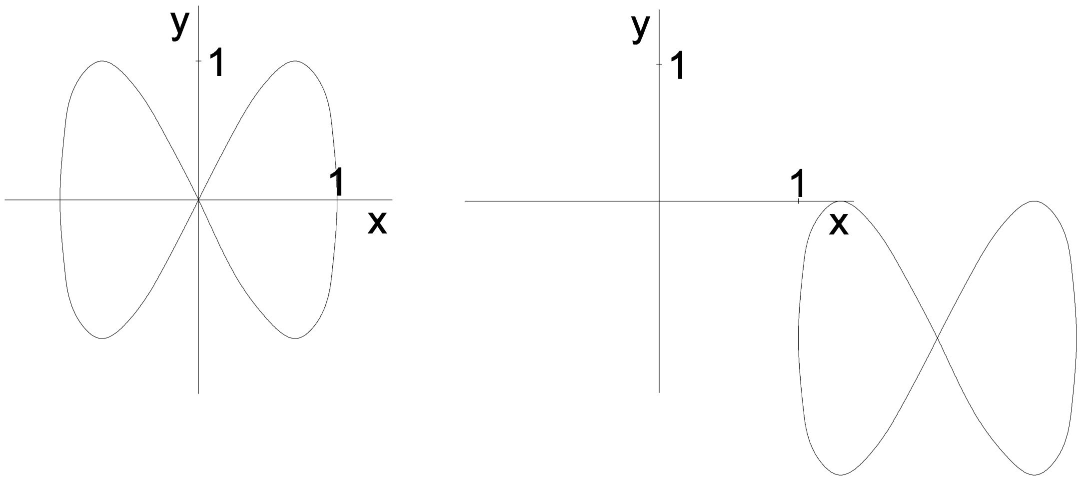


Figura 120

Como poderemos caracterizar o conjunto $\mathcal{C}'$ por uma equação? Uma resposta demasiado apressada poderia eventualmente levar-nos a pensar na equação

$$(y-1)^2 = 4(x+2)^2(1-(x+2)^2),$$

que se obtém da de $\mathcal{C}$ substituindo y por $y-1$ e x por $x+2$. No entanto, se pensarmos com um pouco mais de cuidado no problema, verificamos que não é assim: Um ponto $X(x,y)$ pertence ao conjunto $\mathcal{C}'$ se, e só se, for o transformado de um ponto de $\mathcal{C}$ ou seja, se, e só se, o único ponto do plano do qual ele é o transformado, o ponto

$$X - \overrightarrow{u} \leftrightarrow (x-2, y+1),$$

pertencer a $\mathcal{C}$. Podemos assim chegar à caracterização correcta:

$$\mathcal{C}' = \{X(x,y) \mid (y+1)^2 = 4(x-2)^2(1-(x-2)^2)\}.$$

Valerá talvez a pena destacar os fenómenos que aqui constatámos:

[38]Não nos preocupemos de momento em saber como este esboço foi obtido. Apesar de a sua calculadora gráfica não ser possivelmente capaz de esboçar imagens de conjuntos definidos neste modo, existem programas de computador que o fazem com alguma facilidade.

O transformado de um conjunto definido parametricamente pode ser caracterizado parametricamente por utilização directa da transformação em questão. Para encontrar uma equação que descreva o transformado de um conjunto, definido em compreensão, torna-se necessário utilizar a transformação inversa.

As transformações que consideramos em seguida são as simetrias relativas ao eixo das ordenadas e ao eixo das abcissas. A simetria relativa ao eixo das ordenadas transforma um ponto $X \leftrightarrow (x, y)$ no ponto $X' \leftrightarrow (-x, y)$ e a simetria relativa ao eixo das abcissas transforma aquele ponto no ponto $X'' \leftrightarrow (x, -y)$.

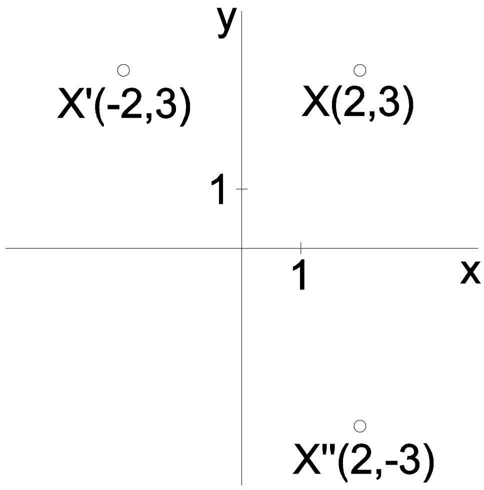


Figura 121

Aquilo que fizémos atrás com as translações pode ser feito de maneira análoga com qualquer destas duas simetrias, havendo mesmo um facilidade suplementar que é explicada pelo exercício seguinte:

Exercício 118. Na simetria relativamente ao eixo das ordenadas cada ponto $X \leftrightarrow (x, y)$ é transformado no ponto $X' \leftrightarrow (-x, y)$. E qual é o ponto cujo transformado é X? Quer relação existe entre esta transformação e a transformação inversa? Repare que o mesmo fenómeno está presente na simetria relativamente ao eixo das abcissas.

Exercício 119. Considere de novo o conjunto da figura 119, definido parametricamente por

$$\begin{cases} x = t^3 - t \\ y = t^2 \end{cases},$$

com $t \in [-\frac{6}{5}, \frac{6}{5}]$.
a) Esboce à mão os transformados deste conjunto por meio das simetrias relativas aos dois eixos e determine representações paramétricas desses transformados.
b) Este conjunto é simétrico relativamente ao eixo das ordenadas. Defina o que isso significa e tente descobrir uma razão que nos levasse a prever esse facto, independente do exame da figura.

Exercício 120. Considere de novo o conjunto $\mathcal{C}$ da figura 120, definido por

$$\mathcal{C} = \{X(x, y) \mid y^2 = 4x^2(1 - x^2)\}.$$

Determine equações que caracterizem os simétricos de $\mathcal{C}$ relativamente ao eixo das ordenadas e ao eixo das abcissas e descubra a razão que explica porque é que este conjunto é simétrico relativamente aos dois eixos.

Para além das simetrias relativamente aos dois eixos, é também importante considerar a simetria relativa à origem O das coordenadas. Trata-se da simetria que transforma cada ponto $X(x, y)$ no ponto $X'(-x, -y)$. Como qualquer simetria que se preze, também esta transformação tem a propriedade de coincidir com a sua transformação inversa.

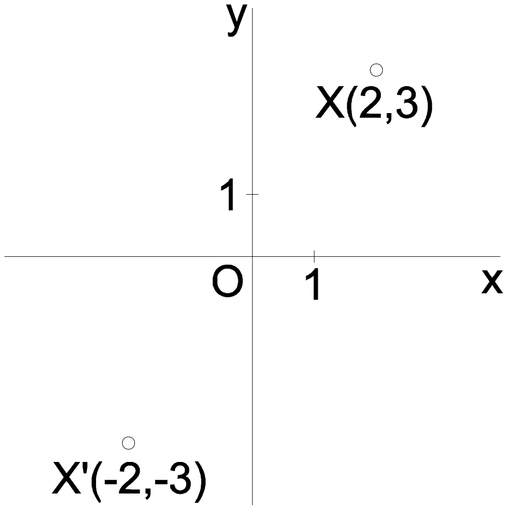


Figura 122

Exercício 121. Determine a imagem por meio da simetria relativamente à origem das coordenadas da recta de equação reduzida $y = 2x + 3$.

Exercício 122. Por que razão um conjunto que seja simétrico tanto em relação ao eixo das ordenadas como em relação ao eixo das abcissas é também simétrico relativamente à origem? Dê exemplo de um conjunto, definido por uma equação, que, apesar de não ser simétrico relativamente a nenhum dos dois eixos, seja simétrico relativamente à origem.

Outra simetria que é frequente encontrar nas aplicações é a simetria relativa à bissectriz dos quadrantes ímpares. Já verificámos no exercício 113 que o simétrico de um ponto $A \leftrightarrow (x, y)$ relativamente a essa recta é o ponto $B \leftrightarrow (y, x)$. A partir daí é muito fácil obter caracterizações, paramétricas ou em compreensão, do simétrico de um certo conjunto relativamente à bissectriz dos quadrantes ímpares a partir das caracterizações correspondentes do conjunto de partida.

Exercício 123. Consideremos de novo o conjunto representado parametricamente por

$$\begin{cases} x = t^3 - t \\ y = t^2 \end{cases},$$

com $t \in [-\frac{6}{5}, \frac{6}{5}]$. Obtenha uma representação paramétrica do simétrico deste conjunto relativamente à bissectriz dos quadrantes ímpares.

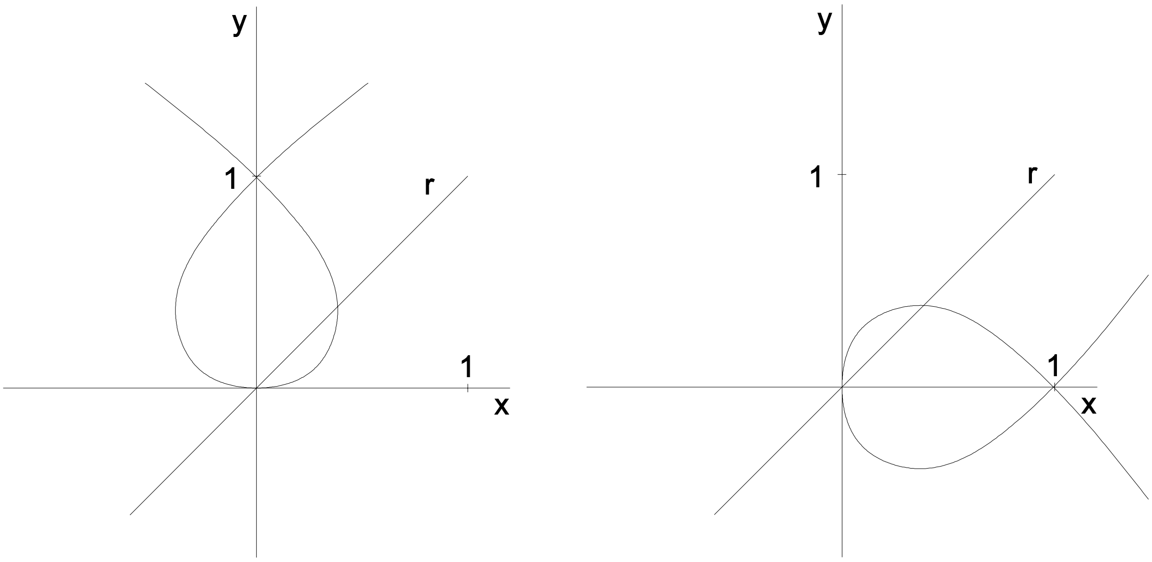


Figura 123

Exercício 124. Considerando de novo o conjunto

$$\mathcal{C} = \{X(x,y) \mid y^2 = 4x^2(1-x^2)\},$$

obtenha uma equação que caracterize o simétrico deste conjunto, relativamente à bissectriz dos quadrantes ímpares.

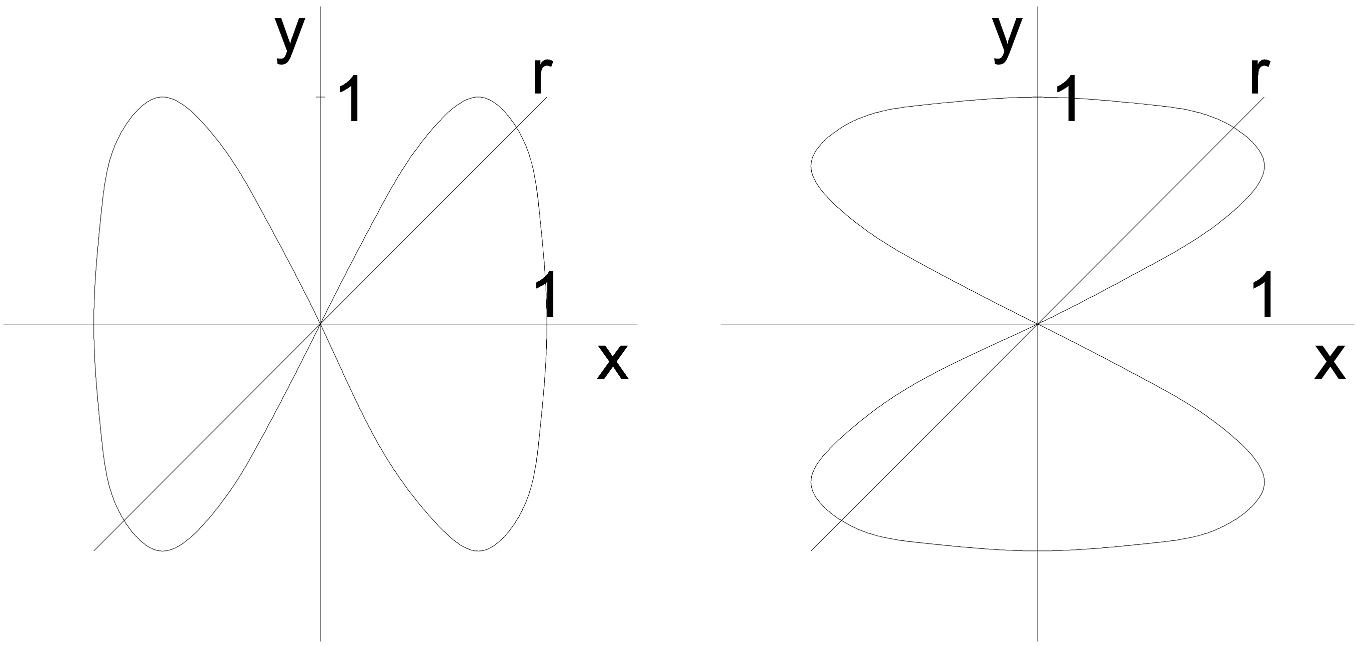


Figura 124

Exercício 125. Considere os conjuntos definidos em compreensão por:

$$\begin{aligned} A &= \{X(x,y) \mid x^2 + y^2 + x = 5\}, \\ B &= \{X(x,y) \mid x^2 - y^3 = 2\}, \\ C &= \{X(x,y) \mid (x^2 - x)^3 + (y^2 - y)^3 = -2\}. \end{aligned}$$

Sem tentar esboçar estes conjuntos diga quais os que pode garantir serem:
a) Simétricos relativamente ao eixo das abcissas.
b) Simétricos relativamente ao eixo das ordenadas.
c) Simétricos relativamente à bissectris dos quadrantes ímpares.

Outra transformação do plano que se encontra com frequência é a *homotetia* com *centro* na origem O das coordenadas e com *razão* $k > 0$. A homotetia transforma O em O e cada ponto $X \neq O$ no ponto X' situado na mesma semi-recta de origem O que X e cuja distância à origem é a de X multiplicada por k. Por outras palavras, em termos vectoriais, se X' é o transformado de X, tem-se $\overrightarrow{OX'} = k\,\overrightarrow{OX}$ e portanto, sendo $X \leftrightarrow (x,y)$, tem-se $X' \leftrightarrow (kx, ky)$.

Às homotetias de razão $k > 1$ também se dá o nome de *dilatações* e às de razão $k < 1$ o de *contracções*.

Nas figuras a seguir retomamos os conjuntos das figuras 119 e 120, acompanhados dos seus transformados por uma homotetia de razão $\frac{3}{2}$.

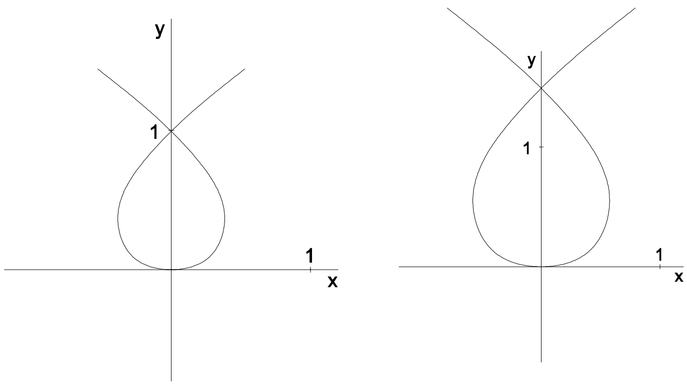


Figura 125

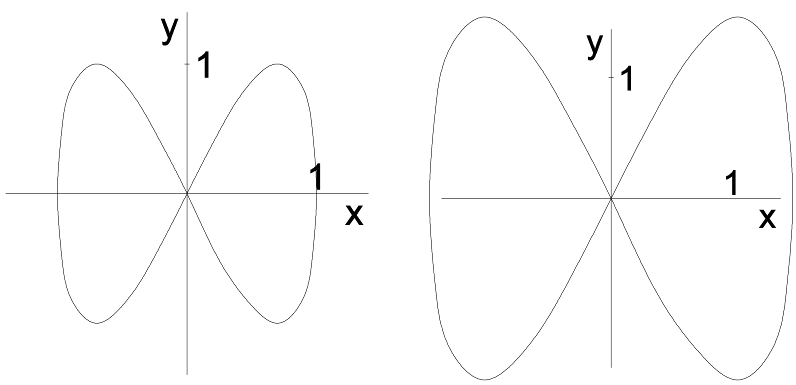


Figura 126

Exercício 126. Lembrando que o primeiro conjunto conjunto na figura 125 era caracterizado parametricamente por

$$\begin{cases} x = t^3 - t + 2 \\ y = t^2 - 1 \end{cases},$$

com $t \in [-\frac{6}{5}, \frac{6}{5}]$, escreva uma caracterização paramétrica do seu transformado por meio da homotetia de centro na origem das coordenadas e razão $\frac{3}{2}$.

Exercício 127. Lembrando que o primeiro conjunto na figura 126 era caracterizado em compreensão pela equação $y^2 = 4x^2(1 - x^2)$, encontre uma equação que caracterize o seu transformado por meio da homotetia de centro na origem das coordenadas e razão $\frac{3}{2}$. **Cuidado!** Repare que o fenómeno que tornava as simetrias mais simples que as translações já não está presente no caso das homotetias.

Exercício 128. Por definição, na homotetia de origem O e razão k, para cada X com transformado X' tem-se $\overrightarrow{OX'} = k\,\overrightarrow{OX}$.
a) Mostre que, mais geralmente, dados dois pontos A e B, com os transformados A' e B', respectivamente, tem-se ainda $\overrightarrow{A'B'} = k\,\overrightarrow{AB}$.
b) De que modo esta propriedade permite justificar a afirmação “Numa homotetia de razão k todas as distâncias vêm multiplicadas por k”?
c) Numa homotetia de razão k uma recta é sempre transformada numa recta. Utilize a equação vectorial da recta para justificar este facto.
d) Como pode justificar que numa homotetia de razão k os vértices de qualquer triângulo são transformados nos vértices dum triângulo semelhante e concluir daí que uma homotetia não altera os ângulos?

Para motivar o último exemplo de transformação geométrica que vamos examinar no quadro da Geometria Analítica Plana, vamos voltar a pensar no que se passa quando se considera uma perspectiva cavaleira, embora agora numa posição muito particular.

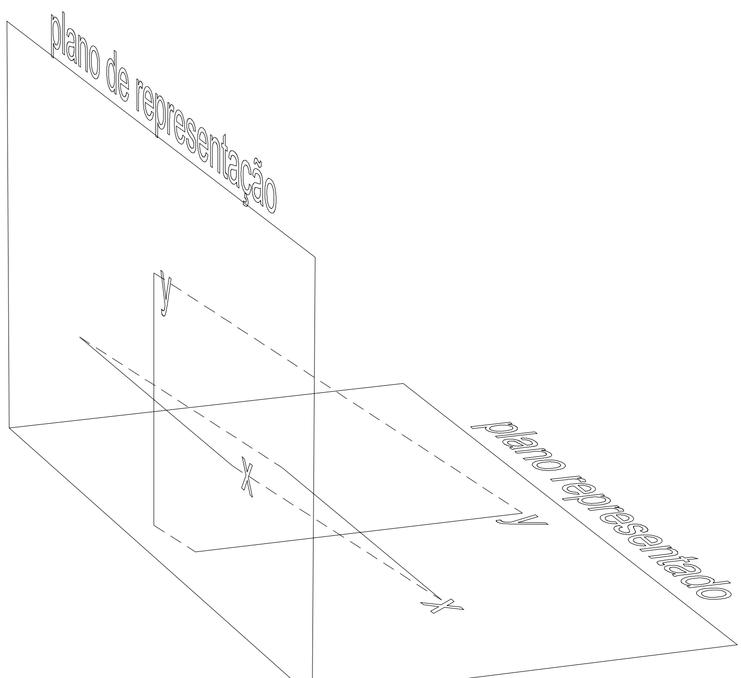


Figura 127

Mais precisamente, vamos representar figuras situadas num plano horizontal (o plano representado), usamos um plano vertical como plano de representação e supomos que a direcção da perspectiva é perpendicular à intersecção dos dois planos mas não é paralela ao plano representado.

Escolhemos um referencial ortonormado no plano representado de forma que o eixo das abcissas seja paralelo à intersecção dos dois planos. Nas condições particulares que escolhemos para a perspectiva cavaleira, as representações dos eixos das abcissas e das ordenadas vão ser rectas perpendiculares no plano da representação. Podemos assim considerar neste último um referencial ortonormado tendo como eixos das abcissas e das ordenadas as representações do eixos correspondentes do plano representado e como sentido positivos nesses eixos aqueles que representam os sentido positivos dos eixos originais.

Os segmentos do plano representado paralelos ao eixo das abcissas são paralelos ao plano da representação e portanto, como sabemos, são representados em verdadeira grandeza. Os segmentos do plano representado paralelos ao eixo das ordenadas já não são obrigatoriamente representados em verdadeira grandeza e tudo o que podemos dizer é que, para um certo real $k > 0$ (o coeficiente de escala associado à direcção), o comprimento do segmento representado é igual ao do segmento original multiplicado por k.

O valor de k determina-se muito facilmente se olharmos "de lado" para a figura anterior, de forma que os planos representado e de representação nos apareçam como rectas;

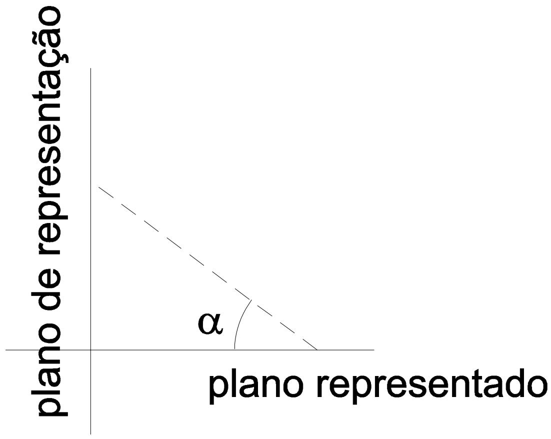


Figura 128

o valor de k é assim o quociente do cateto oposto ao ângulo α pelo cateto adjacente, ou seja, é a tangente do ângulo α. O valor de k pode assim tomar qualquer valor do intervalo $]0, +\infty[$, conforme a direcção escolhida para a perspectiva.

É agora fácil estudar analíticamente o modo como funciona a perspectiva, usando a convenção de notar O', X', A', etc… as representações dos pontos O, X, A, etc… Sendo $X \leftrightarrow (x, y)$, sabemos que podemos ir de O para X indo primeiro de O para A, com a direcção do eixo das abcissas e seguidamente de A para X com a direcção do eixo das ordenadas. Podemos então ir de O' para X' começando por ir de O' para A', com a direcção do eixo das abcissas, e seguidamente de A' para X', com a direcção do eixo das ordenadas. Uma vez que $\overrightarrow{OA} = x\,\overrightarrow{e_x}$ e que esta direcção é representada em verdadeira grandeza, tem-se também $\overrightarrow{O'A'} = x\,\overrightarrow{e'_x}$. Uma vez que $\overrightarrow{AX} = y\,\overrightarrow{e_y}$ e que nesta direcção temos o coeficiente de escala k, tem-se $\overrightarrow{A'X'} = ky\,\overrightarrow{e'_y}$. Chegamos assim à conclusão que o ponto X' é representado no novo referencial ortonormado pelo par ordenado (x, ky).

Destaquemos então a conclusão a que acabámos de chegar:

P 86. Considerando uma perspectiva cavaleira nas condições atrás descritas e os referenciais ortonormados escolhidos do modo indicado, A imagem de um ponto $X \leftrightarrow (x, y)$ é o ponto $X' \leftrightarrow (x, ky)$, onde $k \in]0, +\infty[$ é o coeficiente de escala associado à direcção do eixo das ordenadas.[39]

Repare-se que a transformação atrás referida é também utilizada fora do contexto da perspectiva cavaleira com alguma frequência. Por exemplo, é ela que é utilizada nas calculadoras gráficas para adaptar os gráficos pedidos à dimensão da janela visível.

Exercício 129. Considere uma perspectiva cavaleira com coeficiente de escala $k = \frac{3}{4}$. Considere no plano representado o conjunto da figura 119, que pode ser definido parametricamente por

$$\begin{cases} x = t^3 - t + 2 \\ y = t^2 - 1 \end{cases},$$

com $t \in [-\frac{6}{5}, \frac{6}{5}]$. Determine uma equação paramétrica da sua perspectiva e utilize a sua calculadora gráfica para comparar a figura original com a perspectiva correspondente.

Exercício 130. Considere uma perspectiva cavaleira com coeficiente de escala k. Considere no plano representado um circunferência de centro na origem das coordenadas e raio R. Mostre que a perspectiva desta circunferência admite a equação

$$x^2 + (\frac{y}{k})^2 = R^2.$$

Se nos lembrarmos que chamámos *elipses* às figuras que podem aparecer como perspectiva cavaleira de uma circunferência, podemos assim dizer:

P 87. Dados $k > 0$ e $R > 0$ a equação $x^2 + (\frac{y}{k})^2 = R^2$ representa uma elipse.

Exercício 131. Explique a afirmação "As circunferências são casos particulares de elipses".

Exercício 132. Mostre que o conjunto representado pela equação

$$4x^2 + 9y^2 = 36$$

é uma elipse e determine o coeficiente de escala e o raio da circunferência que o originou como perspectiva.

Se resolveu o exercício precedente, facilmente constatará que aquilo que fez com os coeficientes 4, 9 e 36 poderia ser feito de modo análogo com quaisquer outros, o que permite enunciar o seguinte resultado geral:

[39]Repare na semelhança com as homotetias, a diferença estando em que apenas a segunda coordenada vem multiplicada por k.

P 88. Dados $c > 0$, $d > 0$ e $R > 0$, a equação

$$c^2\, x^2 + d^2\, y^2 = R^2$$

representa uma elipse, que pode aparecer como perspectiva cavaleira, com coeficiente de escala $\frac{c}{d}$, de uma circunferência de raio $\frac{R}{c}$.[40]

Exercício 133. Mostre que o conjunto representado pela equação

$$2x^2 + y^2 = 1$$

é uma elipse e determine o coeficiente de escala e o raio da circunferência que o originou como perspectiva. **Sugestão:** Pode utilizar a caracterização em P 88.

A equação obtida em P 88 pode ser escrita numa forma equivalente que tem o mérito de fazer aparecer constantes a e b com um significado geométrico mais rico. Para a obtermos começamos por dividir ambos os membros da equação por R^2, o que conduz à equação equivalente

$$(\frac{c}{R}\, x)^2 + (\frac{d}{R}\, y)^2 = 1$$

e introduzimos então as constantes a e b pelas igualdades $a = \frac{R}{c}$ e $b = \frac{R}{d}$, o que conduz a escrever a equação na forma

$$(\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 = 1.$$

Podemos assim dizer:

P 89. Dados $c > 0$, $d > 0$ e $R > 0$, a elipse de equação

$$c^2\, x^2 + d^2\, y^2 = R^2$$

pode ser caracterizada equivalentemente pela equação

$$(\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 = 1,$$

onde $a = \frac{R}{c}$ e $b = \frac{R}{d}$.

Exercício 134. Considere a elipse representada num certo referencial ortonormado pela equação

$$(\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 = 1.$$

a) Em que condições se pode afirmar que a elipse anterior é uma circunferência?
b) Repare que os eixos coordenados do referencial considerado são eixos de simetria da elipse e determine os pontos desses eixos que pertencem à elipse.

[40] Só por uma questão de comodidade escrevemos os coeficientes na forma de quadrados, c^2, d^2 e R^2. É claro que quaisquer números positivos se podem escrever daquela maneira.

7. Introdução à Geometria Analítica no Espaço.

Os fundamentos da Geometria Analítica no Espaço são muito semelhantes aos da Geometria Analítica Plana e a razão por que começámos por estudar estes com algum detalhe foi a de nos tentarmos manter desde o início num quadro mais intuitivo e em que é mais fácil esboçar figuras.

Relembremos que, quando estudámos os vectores do espaço, chamámos referencial vectorial a um triplo de vectores não complanares do espaço. Será cómodo nas considerações que vamos fazer em seguida chamar $\overrightarrow{e_x}$, $\overrightarrow{e_y}$ e $\overrightarrow{e_z}$ aos vectores de um certo referencial vectorial do plano α (por vezes também se usam outras notações, como $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$ e $\overrightarrow{e_3}$). Lembremos que, dado um vector arbitrário $\overrightarrow{w}$ do espaço, pode-se escrever de maneira única $\overrightarrow{w}$ na forma

$$\overrightarrow{w} = x\,\overrightarrow{e_x} + y\,\overrightarrow{e_y} + z\,\overrightarrow{e_z},$$

com x, y e z números reais e que então se diz que x, y e z são as *coordenadas* de $\overrightarrow{w}$ relativas àquele referencial vectorial ou que $\overrightarrow{w}$ é *representado pelo triplo ordenado* (x, y, z) naquele referencial vectorial.

Mais uma vez, o que nós pretendemos agora é representar pontos do espaço e não apenas vectores. Para o conseguirmos o que vamos fazer é considerar, para além do referencial vectorial constituído pelos vectores $\overrightarrow{e_x}$, $\overrightarrow{e_y}$ e $\overrightarrow{e_z}$, um ponto fixado O, que tomamos como *origem*. Conhecer um ponto A do espaço é então o mesmo que conhecer o vector $\overrightarrow{OA}$ (o *vector de posição* do ponto A) pelo que o ponto A fica perfeitamente determinado pelas coordenadas do vector $\overrightarrow{OA}$.

Chama-se *referencial* do espaço à escolha de um ponto O (a *origem* do referencial) e de três vectores $\overrightarrow{e_x}$, $\overrightarrow{e_y}$ e $\overrightarrow{e_z}$ constituindo um referencial vectorial. Relativamente a um tal referencial, chamam-se *coordenadas* de um ponto A do espaço às coordenadas do vector de posição $\overrightarrow{OA}$ relativas ao referencial vectorial, isto é, aos números reais x, y e z para os quais se tem

$$\overrightarrow{OA} = x\,\overrightarrow{e_x} + y\,\overrightarrow{e_y} + z\,\overrightarrow{e_z}.$$

Quando o referencial está implícito, também se diz que o ponto A é representado pelo triplo ordenado de números reais (x, y, z); de forma mais abreviada, pode escrever-se também $A \leftrightarrow (x, y, z)$ ou ainda simplesmente $A(x, y, z)$.

Exercício 135. Tomando como referência o cubo na figura a seguir, considere o referencial de origem O definido pelos vectores $\overrightarrow{e_x} = \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{e_y} = \overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{e_z} = \overrightarrow{OC}$.

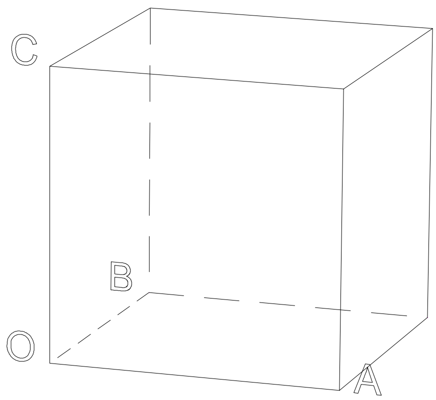


Figura 129

Determine, relativamente a este referencial:
a) As coordenadas dos oito vértices do cubo;
b) As coordenadas do ponto médio da face superior;
c) As coordenadas do ponto médio de uma aresta da base superior à sua escolha;
d) As coordenadas do centro do cubo.

Como no caso do plano também aqui é comum um método alternativo para representar um referencial como o precedente. Em vez de se nomearem explicitamente os vectores que constituem o referencial vectorial representam-se as rectas que passam pela origem e têm as direcções desses vectores, assinalando com as letras x, y e z os sentidos dos vectores e sugerindo uma escala de medição em cada um dos eixos de modo que os vectores do referencial, colocados com origem na origem deste, tenham extremidades nos pontos correspondentes ao valor 1 da escala (cf. a figura a seguir).

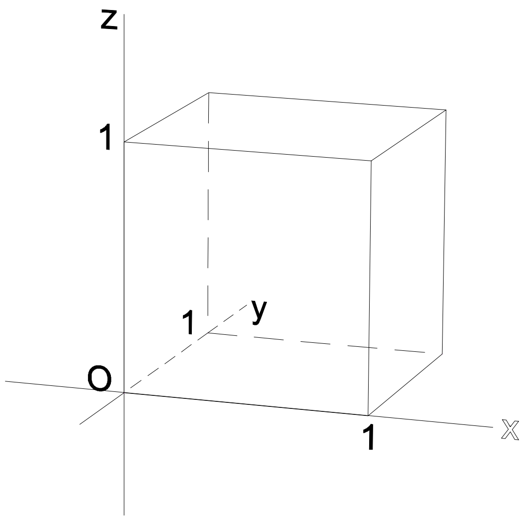


Figura 130

Repetindo os argumentos utilizados no quadro da Geometria Analítica Plana, também aqui é muito fácil justificar as duas propriedades seguintes:

P 90. Fixado um referencial do espaço e dados dois pontos

$$A_1 \leftrightarrow (x_1, y_1, z_1), \quad A_2 \leftrightarrow (x_2, y_2, z_2)$$

tem-se

$$\overrightarrow{A_1A_2} \leftrightarrow (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1),$$

o que dá um carácter mnemónico para a notação $A_2 - A_1$ como designação alternativa para o vector $\overrightarrow{A_1A_2}$.

P 91. Fixado um referencial do espaço e dados um ponto e um vector

$$A \leftrightarrow (x, y, z), \quad \overrightarrow{u} \leftrightarrow (a, b, c),$$

tem-se

$$A + \overrightarrow{u} \leftrightarrow (x + a, y + b, z + c),$$

o que explica a notação mnemónica $A + \overrightarrow{u}$ para designar o transformado do ponto A pela translação $\overrightarrow{u}$.

Um referencial vectorial do espaço, constituído pelos vectores $\overrightarrow{e_x}$, $\overrightarrow{e_y}$ e $\overrightarrow{e_z}$, diz-se *ortogonal* quando estes vectores forem ortogonais dois a dois. Ele diz-se *ortogonal e monométrico* se, além disso, os três vectores tiverem o mesmo comprimento.
No caso em que esteja implícita uma unidade de comprimento, um referencial vectorial diz-se *ortonormado* quando for ortogonal e monométrico e o comprimento comum dos três vectores for igual a 1.
As designações anteriores aplicam-se também naturalmente a referenciais do espaço, uma vez que estes têm um referencial vectorial associado.

Como acontecia no caso do plano, a importância de se considerarem referenciais vectoriais ortonormados resulta da facilidade com que se pode calcular a norma de um vector. Consideremos, com efeito, um referencial vectorial ortonormado constituído pelos vectores $\overrightarrow{e_x}$, $\overrightarrow{e_y}$ e $\overrightarrow{e_z}$. Suponhamos que $\overrightarrow{u} \leftrightarrow (x, y, z)$, ou seja, que $\overrightarrow{u} = x\,\overrightarrow{e_x} + y\,\overrightarrow{e_y} + z\,\overrightarrow{e_z}$. Uma vez que o vector $\overrightarrow{e_z}$ é ortogonal aos dois vectores $\overrightarrow{e_x}$ e $\overrightarrow{e_y}$, a sua direcção é ortogonal a duas direcções distintas dum plano, e portanto também ortogonal a todas as direcções desse plano. Em particular $\overrightarrow{e_z}$ é também ortogonal ao vector $x\,\overrightarrow{e_x} + y\,\overrightarrow{e_y}$ desse plano e o mesmo vai acontecer ao vector $z\,\overrightarrow{e_z}$, que tem a mesma direcção que $\overrightarrow{e_z}$. Podemos então aplicar a versão vectorial do teorema de Pitágoras, enunciada em P 76, para deduzir que se tem

$$\|\overrightarrow{u}\|^2 = \|x\,\overrightarrow{e_x} + y\,\overrightarrow{e_y}\|^2 + \|z\,\overrightarrow{e_z}\|^2 = \|x\,\overrightarrow{e_x} + y\,\overrightarrow{e_y}\|^2 + z^2.$$

Mas, quando estudámos a Geometria Analítica Plana, já tínhanos verificado que

$$\|x\,\overrightarrow{e_x} + y\,\overrightarrow{e_y}\|^2 = x^2 + y^2,$$

pelo que podemos concluir que

$$\|\overrightarrow{u}\|^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

A fórmula obtida é suficientemente importante para merecer ser destacada:

P 92. Consideremos um referencial vectorial ortonormado do espaço, constituído pelos vectores $\overrightarrow{e_x}$, $\overrightarrow{e_y}$ e $\overrightarrow{e_z}$. Se $\overrightarrow{u} \leftrightarrow (x, y, z)$, então

$$\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Como antes, a partir da fórmula que nos dá o comprimento de um vector é muito fácil encontrar uma fórmula para a distância entre dois pontos A_1 e A_2, se repararmos que essa distância não é mais do que o comprimento do vector $\overrightarrow{A_1A_2} = A_2 - A_1$.

P 93. Considerando um referencial ortonormado do espaço e dois pontos A_1 e A_2, com

$$A_1 \leftrightarrow (x_1, y_1, z_1), \quad A_2 \leftrightarrow (x_2, y_2, z_2),$$

a distância $\text{dist}(A_1, A_2)$ destes pontos é dada por

$$\text{dist}(A_1, A_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Exercício 136. Retomando o que fez no exercício 135 e supondo que a unidade de comprimento utilizada coincide com a medida da aresta do cubo, determine o comprimento das diagonais espaciais do cubo, assim como a distância de cada vértice aos pontos médios das arestas que concorrem no vértice oposto.

Quando se está a considerar um referencial ortonormado, é usual chamar *abcissa*, *ordenada* e *cota* de um ponto às suas primeira, segunda e terceira coordenadas, respectivamente. Analogamente, dá-se o nome de *eixo das abcissas*, *eixo das ordenadas* e *eixo das cotas* às rectas que passam pela origem e têm as direcções dos primeiro, segundo e terceiro vectores do referencial vectorial.

De agora em diante, nesta secção, estará sempre implícito que se fixou um referencial ortonormado definido pela origem O e pelos vectores $\overrightarrow{e_x}$, $\overrightarrow{e_y}$ e $\overrightarrow{e_z}$.

Há ainda algumas convenções habituais que, que têm carácter mais psicológico que matemático e que **não é obrigatório seguir**:

1) É usual associar a letra x à primeira coordenada, a letra y à segunda e a letra z à terceira.

2) No caso em que está implícito um observador numa posição normal, toma-se o eixo das abcissas e o eixo das ordenadas num plano horizontal e o eixo das cotas numa posição vertical e com o sentido positivo a apontar para cima. Relativamente aos eixos das abcissas e das ordenadas seguem-se se possível as “convenções psicológicas” que referimos no estudo da Geometria Analítica Plana.

Como no caso da Geometria Analítica Plana, referimo-nos às convenções anteriores como sendo as “convenções psicológicas” para lembrar que, apesar de serem irrelevantes do ponto de vista matemático, elas condicionam e explicam certas expressões que utilizamos, como a de chamar verticais às rectas paralelas ao eixo das cotas.

Tal como fizémos no caso da Geometria Plana, vamos agora verificar como certos conjuntos podem ser caracterizados, em termos das coordenadas dos seus pontos, parametricamente ou em compreensão.

Como primeiro exemplo, tentemos encontrar uma condição que caracterize os pontos de uma certa recta r cuja direcção seja a do vector $\overrightarrow{e_z}$ (ou seja, se utilizarmos a "convenção psicológica" uma *recta vertical*).

Se $X_1 \leftrightarrow (x_1, y_1, z_1)$ é um ponto particular da recta r, sabemos que os pontos da recta são exactamente aqueles que podem ser escritos na forma $X_1 + t\,\overrightarrow{e_z}$, com $t \in \mathbb{R}$, ou seja, uma vez que $\overrightarrow{e_z} \leftrightarrow (0,0,1)$, e portanto $t\,\overrightarrow{e_z} \leftrightarrow (0,0,t)$ e

$$X_1 + t\,\overrightarrow{e_z} \leftrightarrow (x_1, y_1, z_1 + t),$$

chegámos à conclusão que um ponto $X \leftrightarrow (x,y,z)$ está na recta r se, e só se, $x = x_1$, $y = y_1$ e z se pode escrever na forma $z_1 + t$, para algum $t \in \mathbb{R}$. Por outras palavras, a recta em questão admite a caracterização paramétrica

$$r = \{X(x_1, y_1, z_1 + t)\}_{t \in \mathbb{R}}.$$

Mas, z_1 sendo dado, todos os números reais se podem escrever na forma $z_1 + t$, com $t \in \mathbb{R}$. Podemos assim dar também a caracterização em compreensão da recta:

Se $X \leftrightarrow (x,y,z)$ então $X \in r \Leftrightarrow (x = x_1 \wedge y = y_1)$

ou ainda

A recta r pode ser caracterizada pelo *sistema de equações* $\begin{cases} x = x_1 \\ y = y_1 \end{cases}$.

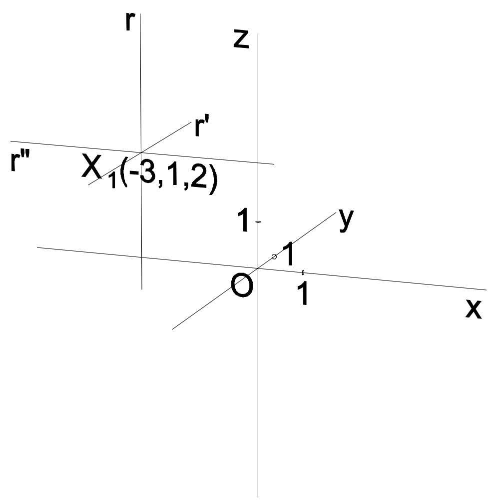


Figura 131

Exercício 137. Caracterize parametricamente e por sistemas de equações as rectas r' e r'' que passam pelo ponto $X_1 \leftrightarrow (x_1, y_1, z_1)$ e têm respectivamente a direcção do vector $\overrightarrow{e_y}$ e a direcção do vector $\overrightarrow{e_x}$.

Exercício 138. Utilize as regras da perspectiva cavaleira para verificar se o ponto X_1 na figura anterior está bem colocado.

Quando estamos a trabalhar com um referencial no espaço, para além dos eixos coordenados, das abcissas, das ordenadas e das cotas, é importante considerar também os *planos coordenados*, que são os três planos que contêm dois dos três eixos coordenados. É costume designar esses planos fazendo referência aos eixos que cada um deles contém. Fala-se assim do plano coordenado xOy

(com a convenção psicológica, o *plano horizontal*) e nos planos coordenados xOz e yOz (com a convenção psicológica, o *plano frontal* e o *plano lateral*).

Dado um ponto $X_1(x_1, y_1, z_1)$, vamos agora procurar caracterizar, parametricamente e em compreensão, o plano α paralelo ao plano xOy e que passa por X_1.

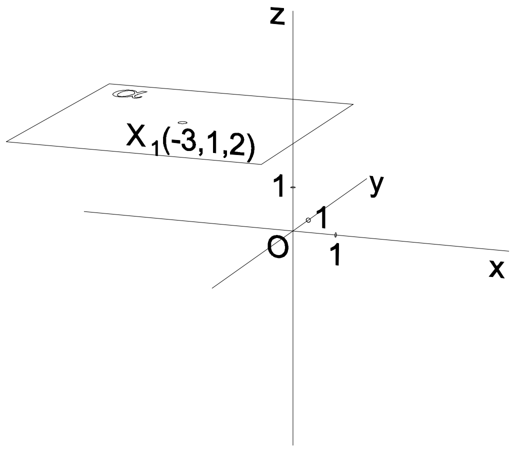


Figura 132

Uma vez que os vectores $\overrightarrow{e_x}$ e $\overrightarrow{e_y}$ constituem um referencial vectorial do plano α, a representação vectorial deste que estudámos atrás garante-nos que os pontos de α são exactamente os que podem ser escritos na forma $X_1 + t\,\overrightarrow{e_x} + t'\,\overrightarrow{e_y}$, com t e t' arbitrários em $\mathbb{R}$. Uma vez que $t\,\overrightarrow{e}_x \leftrightarrow (t, 0, 0)$ e $t'\overrightarrow{e}_y \leftrightarrow (0, t', 0)$, e portanto $X_1 + t\,\overrightarrow{e_x} + t'\,\overrightarrow{e_y} \leftrightarrow (x_1 + t, y_1 + t', z_1)$, podemos assim escrever a caracterização paramétrica de α

$$\alpha = \{X(x_1 + t, y_1 + t', z_1)\}_{t,t' \in \mathbb{R}}.$$

Como no caso das rectas paralelas aos eixos coordenados, também aqui é fácil de obter uma caracterização do plano α em compreensão: Uma vez que quaisquer números reais x e y se podem escrever na forma $x = x_1 + t$ e $y = y_1 + t'$ com t e t' números reais convenientemente escolhidos, podemos escrever

$$\alpha = \{X(x, y, z) \mid z = z_1\},$$

o que também costuma ser enunciado dizendo que o plano α pode ser caracterizado pela equação $z = z_1$.

Exercício 139. Caracterize parametricamente e por uma equação o plano que passa pelo ponto $X_1(x_1, y_1, z_1)$ e é paralelo ao plano xOz e aquele que passa pelo mesmo ponto e é paralelo ao plano yOz.

Exercício 140. Caracterize em compreensão, por um sistema de equações, a intersecção dos planos que passam pelo ponto $X_1(-3, 1, 2)$ e são respectivamente paralelos ao plano xOz e ao plano yOz. Compare o resultado com a caracterização que encontrámos atrás para as rectas paralelas aos eixos coordenados.

O método que seguimos atrás para determinar uma caracterização paramétrica das rectas paralelas aos eixos coordenados pode ser aplicado na situação mais geral em que queremos obter uma caracterização paramétrica duma recta com qualquer direcção. Como no caso da Geometria Analítica Plana, o problema já está praticamente resolvido desde que estudámos, em P 45, na página 48, a representação vectorial duma recta. Consideremos, com efeito uma recta r, em qualquer posição, que passe por um ponto, $X_1 \leftrightarrow (x_1, y_1, z_1)$ e que admita um vector director $\overrightarrow{u} \leftrightarrow (c, d, e)$. Sabemos então que r admite a representação paramétrica

$$r = \{X_1 + t\overrightarrow{u}\}_{t\in\mathbb{R}},$$

que, traduzida em termos das coordenadas, pode ser escrita na forma

$$r = \{X(x_1 + tc, y_1 + td, z_1 + te)\}_{t\in\mathbb{R}}.$$

À caracterização anterior é costume dar o nome de *equação vectorial da recta*. Essa caracterização também costuma ser apresentada dizendo que r é caracterizada vectorialmente por

$$\begin{cases} x = x_1 + tc \\ y = y_1 + td \\ z = z_1 + te, \end{cases}$$

com $t \in \mathbb{R}$.

Exercício 141. Determine uma equação vectorial da recta r que passa pelo ponto $X_1 \leftrightarrow (1, 0, -1)$ e tem a direcção do vector $\overrightarrow{u} \leftrightarrow (-1, 2, 0)$. Utilize essa caracterização para determinar a intersecção da recta r com o plano α que passa pelo ponto $X_2(-3, 1, 2)$ e é paralelo ao plano xOz.

Exercício 142. Determine uma equação vectorial da recta que passa pelos pontos $X_1(1, 0, -1)$ e $X_2(-3, 1, 2)$.

Haveremos de estudar, no décimo primeiro ano, um método para caracterizar em compreensão uma recta com qualquer direcção. Tal como a caracterização encontrada atrás no caso das rectas paralelas aos eixos coordenados, também no caso geral as rectas serão então caracterizadas por um sistema de duas equações.

★ ★ ★ ★

Tal como fizémos no quadro da Geometria Analítica Plana, vamos estudar agora a caracterização em compreensão, por condições envolvendo as coordenadas dos seus pontos, de conjuntos que podem ser definidos como lugares geométricos ligados à noção de distância.

O primeiro exemplo é a superfície esférica. Do mesmo modo que a circunferência de centro C e raio $R > 0$ dum certo plano é o conjunto de pontos **desse plano** cuja distância a C é R, sabemos que a superfície esférica de centro C e raio R é o conjunto dos pontos do espaço cuja distância a C é igual a R. Se nos recordarmos da fórmula para a distância de dois pontos dos espaço referida em P 93, podemos assim concluir que

P 94. A superfície esférica de centro no ponto $C(x_1, y_1, z_1)$ e raio R é o conjunto dos pontos $X(x, y, z)$ que verificam a equação

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = R^2.$$

Exercício 143. **a)** Determine uma equação que caracterize a superfície esférica de centro no ponto $C(-1, 1, 1)$ e raio 3.
b) Determine as coordenadas dos pontos de intersecção da superfície esférica atrás referida com a recta que passa pelos pontos $A(-2, 2, 1)$ e $B(-4, 1, -1)$. **Sugestão:** Comece por determinar uma equação vectorial da recta.

O segundo exemplo é também uma generalização simples do que foi feito no quadro da Geometria Analítica Plana e limitamo-nos a propô-lo como exercício.

Relembremos que, dados dois pontos distintos A e B do espaço, o *plano mediador*, isto é, o plano perpendicular ao segmento $[AB]$ passando pelo seu ponto médio, pode ser caracterizado como o conjunto dos pontos do espaço que estão à mesma distância de A e de B.

Exercício 144. Considerando os pontos $A \leftrightarrow (1, 2, -1)$ e $B \leftrightarrow (-1, 0, 1)$, obtenha uma equação que caracterize os pontos do plano mediador do segmento $[AB]$.

Um dos pontos do plano mediador do segmento $[AB]$ é o ponto médio M deste segmento. Repetindo o raciocínio feito no quadro da Geometria Analítica Plana, também aqui é muito fácil obter uma fórmula para as coordenadas do ponto médio, quando são conhecidas as coordenadas dos pontos A e B de partida (comparar com o enunciado em P 84):

P 95. Se M é o ponto médio do segmento $[AB]$ e se $A \leftrightarrow (x_1, y_1, z_1)$ e $B \leftrightarrow (x_2, y_2, z_2)$, então

$$M \leftrightarrow (\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}),$$

por outras palavras, as coordenadas do ponto médio são as médias das coordenadas correspondentes dos pontos de partida.

Algumas das transformações que examinámos no quadro da Geometria Analítica Plana, como as translações, as simetrias e as homotetias, podem ser estudadas de modo análogo no quadro da Geometria Analítica do Espaço. Em vez de examinar, uma por uma, cada uma dessas transformações, o que, não sendo difícil, seria talvez fastidioso, limitamo-nos a propor o exercício seguinte em que se procurará descobrir como algumas das simetrias podem ser caracterizadas em termos de coordenadas.

Exercício 145. Considere o ponto $A \leftrightarrow (2, 5, -1)$ e sejam B o ponto simétrico de A relativamente ao plano xOy, C o ponto simétrico de A relativamente ao eixo das abcissas e D o ponto simétrico de A relativamente à origem O. Determine as coordenadas destes três pontos e represente-os em perspectiva na figura seguinte.

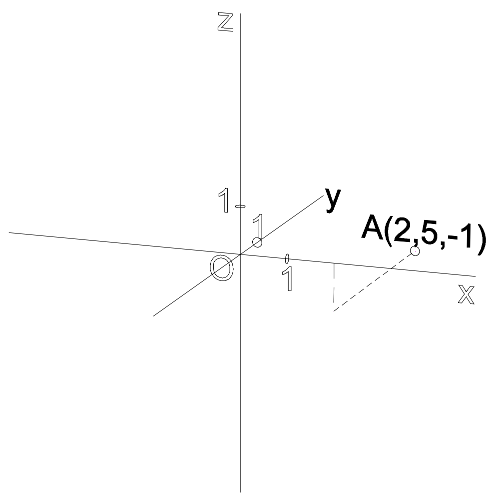


Figura 133

Bibliografia

D. W. Farmer, *Grupos e Simetria, um guia para descobrir a Matemática*, Gradiva, O Prazer da Matemática, nº 24, 1999. ISBN 972-662-661-7.

H. R. Jacobs, *Geometry*, second edition, W. H. Freeman, 1987. ISBN 0-7167-1745-X.

Yolanda Lima & Francelino Gomes, *XEQMAT*, ed. O Livro, Lisboa, 1996. ISBN 972-552-471-3.

G. G. Soler, *Poliedros*, Editorial Sintesis, Madrid, Matematicas: cultura e aprendizaje, 15, 1991. ISBN 84-7738-114-3.