UNIVERSIDADE DE LISBOA
Faculdade de Ciências

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

10º ANO

INICIAÇÃO AO ESTUDO DAS FUNÇÕES REAIS DE VARIÁVEL REAL

Luís Sanchez
(com a colaboração de M. Luísa Mascarenhas)

– 2ª edição –
2002

REANIMAT
Projecto Gulbenkian de Reanimação Científica da Matemática no Ensino Secundário

FUNDAÇÃO CALOUSTE GULBENKIAN

NOTA INTRODUTÓRIA

Um dos objectivos do **REANIMAT-Projecto Gulbenkian/F.C.U.L. de reanimação científica da Matemática no Ensino Secundário**, iniciado em 2001/2, é a produção de textos de apoio, destinados a alunos e professores das turmas participantes, cobrindo as matérias que constam dos programas oficiais, tendo em vista as principais directrizes do projecto: dar a conhecer a Matemática como corpo de conhecimentos coerente, organizado e dotado de um método próprio, nunca descurando a sua ligação ao mundo real e o importante papel auxiliar das novas tecnologias, mas também não dissimulando as vantagens da abstracção e a importância da demonstração como critério de validação de resultados.

O presente texto corresponde à materialização daquele objectivo no que respeita ao capítulo sobre *Funções* previsto para o 10º ano. Compreende dez secções, três apêndices e exercícios (ou "actividades", como frequentemente se prefere chamar-lhes). Seguimos as indicações do programa oficial em vigor quanto aos conteúdos, procurando ilustrar e motivar os temas com exemplos sempre que adequado, e destacando os principais resultados sob a forma de *factos* demonstráveis.

Partes do texto que pontualmente extravasam o conteúdo do programa estão impressas em corpo diferente. Quando isso acontece com toda uma secção, o respectivo título está notado com um asterisco.

Uma incomodidade que sentimos na escrita do texto e que queremos deixar expressa, para eventual reflexão por parte de quem tem o poder de definir programas, deriva do facto de se pretender avançar com bastante informação e conceitos importantes a respeito de funções numa fase muito preliminar em que praticamente apenas são conhecidas dos alunos as funções lineares (a que o programa nos obriga, contra o que desejaríamos, a chamar *afins*) e a função associada à proporcionalidade inversa. A gama de exemplos disponíveis fica por isso muito limitada se não quisermos usar como ilustrações apenas as funções que se idealizam a partir de um esquema gráfico arbitrário. Seria desejável trabalhar de início com funções racionais de tipo simples, tendo em vista pelo menos dois objectivos: o desenvolvimento de capacidades de cálculo e a possibilidade de exemplificar o efeito das translacções sobre o gráfico da proporcionalidade inversa.

Por outro lado, decidimos relegar para o texto referente ao 11º ano qualquer referência a "limites nos ramos infinitos". Entendemos que é prematura a abordagem desse tema num contexto que obrigatoriamente o reduziria à superficialidade da introdução de designações. E, ainda pela ausência das funções racionais, nem mesmo alguns dos exemplos mais simples se poderiam invocar como ilustração...

As sugestões dos professores que participam no REANIMAT e as discussões que mantivemos com eles e outros colegas na acção de formação *Matemática 10*, realizada na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa em Julho de 2001, constituem um contributo precioso que influenciou decisivamente o formato final. Para disponibilizar o texto em tempo útil foi necessário pôr um ponto final na elaboração de sucessivas versões com vista a introduzir melhoramentos. Estamos conscientes de que o produto que apresentamos é susceptível de vir a beneficiar de uma revisão ulterior. Ficam aqui expressos os nossos agradecimentos a todos os que nos fizeram chegar sugestões e observações sobre versões iniciais do manuscrito.

O conteúdo não pode, naturalmente, afastar-se muito de um figurino previsível. Observamos, no entanto, que sublinhámos a possibilidade de efectuar a divisão polinomial pelo método dos coeficientes indeterminados. Julgamos que o seu uso tem pelo menos três vantagens: 1) o utilizador não perde de vista o significado da operação, 2) é oportunidade para exercitar um pouco o cálculo algébrico, 3) o aluno fica a conhecer um método de uso muito alargado que virá a encontrar em estudos mais avançados.

Procurámos elaborar um texto suficientemente informativo para poder ser eficazmente usado como material de estudo, mas não temos a menor dúvida de que a transmissão das ideias aqui passadas a escrito depende de uma maneira essencial da acção do professor.

O aspecto gráfico está, certamente, longe do dos livros de texto que se encontram no mercado, com os quais não pretendemos competir. Pretende-se apenas concretizar a nossa visão de como esta parte do programa deveria ser transmitida, num texto que, podendo conter passagens mais exigentes que as dos habitualmente adoptados, dificilmente poderá ser visto como de ruptura. Ao mesmo tempo, esperamos que este trabalho possa vir a ser útil a estudantes e docentes do Ensino Secundário, muito para além do âmbito do REANIMAT.

Janeiro de 2002

Conteúdo

1 Introdução e generalidades

Quer em inúmeras situações da vida corrente, quer na análise científica de fenómenos em Física, Biologia, Economia ou outros domínios, deparamo-nos com a necessidade, ou a conveniência, de estabelecer uma **correspondência** entre dois conjuntos de objectos bem definidos. A noção de **função** (já conhecida do aluno em estudos anteriores) surge da consideração de certos tipos de correspondência e é uma das mais importantes de toda a Matemática.

EXEMPLO 1.1 Na seguinte "tabela de frequências de estações de rádio da zona de Lisboa" faz-se corresponder a determinadas emissoras a respectiva frequência em MHz.

Antena 1	95.7
MEGA FM	92.4
Antena 3	100.3
VOXX	91.6
R. Comercial	97.4
MIX	96.6
RFM	93.2
TSF	89.5

EXEMPLO 1.2 No seguinte quadro associamos a cada um de cinco alunos da turma X a cidade de que é natural.

Miguel	Lisboa
Ana Rita	Setúbal
Nuno	Santarém
Joana	Lisboa
Catarina	Almada

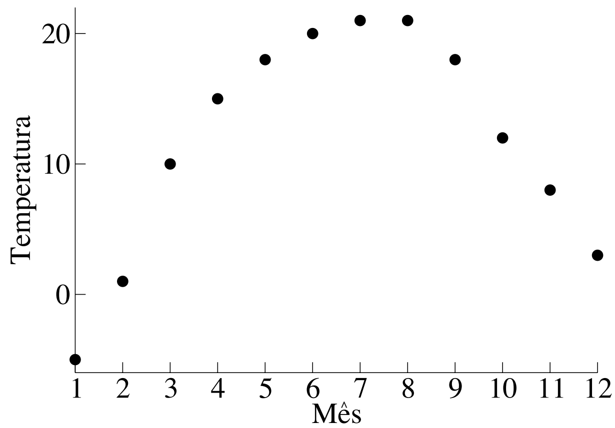
Nestes casos estabeleceu-se uma correspondência entre um conjunto de oito estações de rádio e um conjunto de números (exemplo 1.1) e entre um conjunto de cinco pessoas e o conjunto das cidades portuguesas.

Em certos casos, quando os conjuntos envolvidos podem ser representados por números que podemos dispor por certa ordem e em certa escala, a correspondência torna-se mais fácil de interpretar se, para além de utilizarmos uma tabela, a representarmos graficamente. É o que fazemos nos exemplos seguintes.

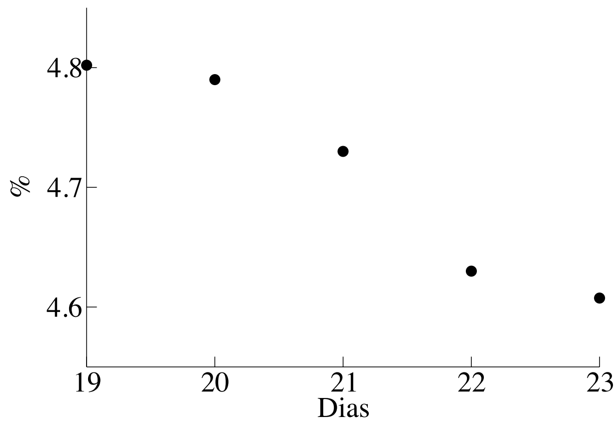
EXEMPLO 1.3 Na cidade C, as temperaturas médias mensais observadas em 2000 foram as dadas na tabela:

Mês	Jan	Fev	Mar	Abr	Mai	Jun	Jul	Ago	Set	Out	Nov	Dez
°C	-5	1	10	15	18	20	21	21	18	12	8	3

A mesma informação é apresentada no seguinte gráfico onde os meses são representados por números da maneira habitual:



EXEMPLO 1.4 O seguinte gráfico dá informação sobre a evolução da taxa de juro entre 19 e 23 de Março de 2001.



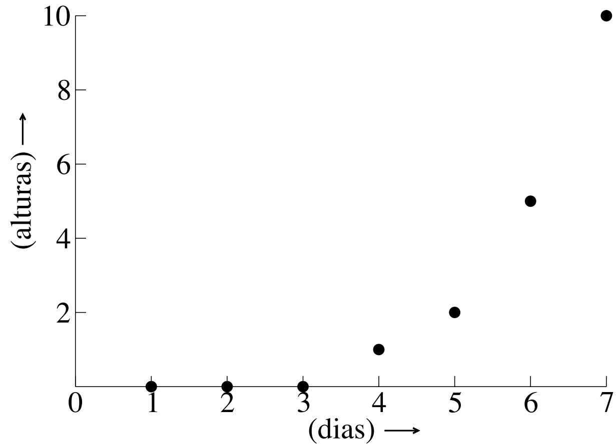
EXEMPLO 1.5 Ao observar o crescimento de determinada planta registámos, numa tabela de duas entradas, a altura em milímetros ao longo de cada um de 7 dias da semana. A medição é efectuada uma única vez em cada dia, a uma hora determinada.

$\rightarrow$ (em mm)

$\downarrow$ (dias)

ALT / DIA	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	$\times$										
2	$\times$										
3	$\times$										
4		$\times$									
5			$\times$								
6						$\times$					
7											$\times$

Os dados obtidos podem ser organizados no gráfico



Observemos, de passagem, que correspondências que envolvem um conjunto de instantes temporais, representados por números, estão entre as mais utilizadas. Foram exemplificadas nos exemplos 1.3-1.5 e poderíamos multiplicar os exemplos: observando o aumento do volume de água num recipiente desde o momento em que abrimos a torneira; a redução do volume de areia numa ampulheta, etc. Mas as correspondências que colocam em confronto conjuntos de números têm aspectos muito mais variados, alguns com significado dentro da própria matemática ou das outras ciências.

EXEMPLO 1.6 A área, A, de um quadrado de lado x é dada por

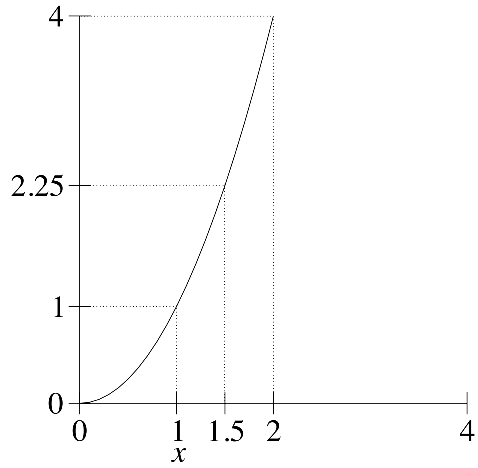
$$A = x^2. \tag{1}$$

Neste caso, a correspondência em jogo associa a cada número positivo x o número positivo x^2 e é dada pela fórmula (1). Podemos construir tabelas que representam esta correspondência para uma escolha de alguns possíveis valores que x pode assumir, por exemplo

x	1	1.5	2	2.5	3	20
A	1	2.25	4	6.25	9	400

,

ou gráficos que a representam num certo intervalo de valores atribuíveis a x:



EXEMPLO 1.7 A Geometria fornece muitos exemplos de correspondências com significado intrínseco. Por exemplo: num plano $\mathcal{P}$ consideremos um movimento rígido; este movimento faz corresponder a cada ponto A de $\mathcal{P}$ um ponto A' bem determinado.

EXEMPLO 1.8 Quando um objecto que emite um som de frequência 10 kHz se move com velocidade v (m/s) relativamente a um observador fixo, a frequência de som que este recebe é

$$f = \frac{10\,c}{c - v} \quad \text{(kHz)}$$

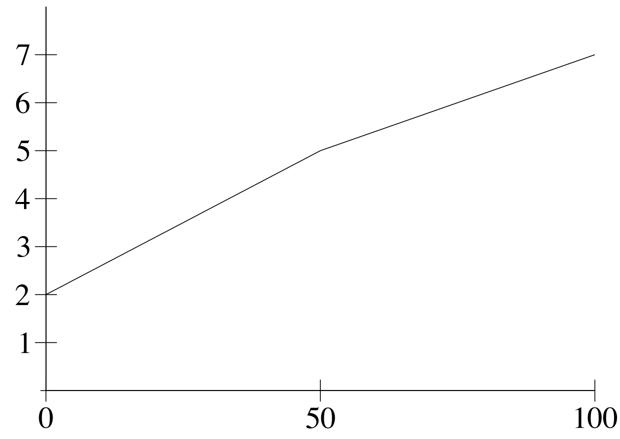
onde $c = 340$ m/s representa a velocidade do som. A cada velocidade v (entre 0 e c) corresponde, por meio desta fórmula, a frequência percebida.

EXEMPLO 1.9 A Electricidade Para Todos, EPT, cobra aos consumidores mensalmente a taxa fixa de 2 € e, além disso, 0.06 € por cada unidade (kWh) consumida até 50 unidades, e 0.04 € por cada unidade consumida além desse limite.

É portanto possível calcular o valor que um cliente da EPT tem a pagar se conhecermos o número (x) de unidades consumidas, e esse valor (V) pode ser expresso na fórmula seguinte

$$\begin{array}{ll} V(x) = 2 + 0.06x & \text{se } 0 \leq x \leq 50, \\ V(x) = 2 + 3 + 0.04(x - 50) & \text{se } x > 50, \end{array}$$

e no gráfico seguinte



Definições e notações

O que há de comum a todos os exemplos apresentados? É o facto de a **cada** elemento de um dado conjunto se fazer **corresponder**, por um **processo ou regra** bem determinado, **um e só um** elemento de outro conjunto. Para fixar ideias consideremos o caso do exemplo 1.5: há colunas que não têm cruz alguma (o que podemos interpretar pelo facto de a planta ter atingido as respectivas alturas nos intervalos entre duas medições; estando a planta a crescer, tais valores nunca puderam ser registados). Seria possível, no entanto, para outra planta, obter uma tabela em que todas as colunas tivessem cruz, ou até mais que uma, desde que as medições prosseguissem pelo menos durante 10 dias! Nunca se obteria, no entanto, mais de uma cruz em cada linha!

Um dos objectivos da Matemática é explorar conceitos que permitam estudar uma grande variedade de situações concretas a que se aplica um sistema de ideias comuns. Identificadas e seleccionadas, essas ideias servem de base à construção de uma noção abstracta que é aplicável às situações concretas que lhe serviram de modelo por partilhar com elas algumas caraterísticas essenciais.

É o caso do conceito de **função**.

DEFINIÇÃO Dados dois conjuntos A e B, chama-se **função** ou **aplicação** de A em B a qualquer processo ou regra que associa, de modo perfeitamente definido, a cada elemento de A um e um só elemento de B.

NOTAÇÃO Representando por f a regra a que se faz referência na definição, escrevemos

$$f : A \to B$$

para indicar que se trata de uma função de A em B. Para cada elemento $x \in A$, representamos por $f(x)$ o elemento de B que lhe é associado pela regra f.

Referimo-nos a $x \in A$ como um **objecto** e a $f(x) \in B$ como a sua **imagem por** f, respectivamente. Também usamos a expressão **"valor de f em x"** para nos referirmos à imagem $f(x)$.

Ao conjunto A damos o nome de **domínio** de f e a B o nome de **conjunto de chegada**.

Notemos que o conhecimento da função $f : A \to B$ fica completo **quando estão perfeitamente definidos o conjunto A e a regra que permite determinar a imagem de cada objecto**.

Representando por f a função do exemplo 1.1, podemos escrever $f(\text{R. Cidade}) = 107.2$; se g representa a função do exemplo 1.2, teremos $g(\text{Nuno}) = \text{Santarém}$; etc.; mas é claro que esta notação se reveste de maior interesse e utilidade nos casos em que os conjuntos A e B são conjuntos de números. Por exemplo, se representarmos por h a função do exemplo 1.6 teremos

$$\begin{aligned} & h :]0, +\infty[\to]0, +\infty[\\ \text{com} \qquad & h(x) = x^2 \qquad \forall x \in]0, +\infty[\end{aligned} \tag{2}$$

Esta notação simbólica adapta-se de modo muito eficaz às operações com números. À pergunta: "por quanto vem multiplicada a área de um quadrado quando o seu lado triplica?" a notação usada permite responder imediatamente: como

$$h(3x) = (3x)^2 = 9x^2 = 9h(x),$$

a resposta é "9".

Quando o conjunto de chegada de uma função f é um subconjunto de $\mathbb{R}$ dizemos que a função f é **real**.

A expressão $f(x)$, que descreve como se calcula o valor de f em x, para uma dada função f, pode ser mais ou menos complicada. É uma expressão designatória que tanto pode ser dada por uma única "fórmula" como por um sistema de "fórmulas" combinadas com certas instruções sobre como as usar. A expressão que representa h, dada em (2), pode ser considerada em certo sentido mais simples do que a que representa a função V do exemplo 1.9, pois nesse caso temos que especificar que o modo como se vai calcular $V(x)$ depende do facto de x estar abaixo, ou não, de 50 unidades.

Para explicitarmos como actua a função $f : A \to B$ também usamos frequentemente a escrita

$$x \overset{f}{\mapsto} y, \qquad x \in A,$$

ou

$$x \mapsto f(x), \qquad x \in A$$

onde mencionámos o domínio e o modo como se calcula a imagem de um objecto.

Assim, a função referida no exemplo 1.8 pode ser descrita por

$$v \mapsto \frac{10\,c}{c-v}, \qquad 0 \leq v < c.$$

Observe-se que explicitámos a condição de v pertencer ao domínio – o intervalo $[0, c[$ – na forma equivalente que consiste em escrever a dupla desigualdade acima.

No presente capítulo consideraremos sobretudo funções em que tanto o domínio como o conjunto de chegada são subconjuntos de $\mathbb{R}$. Dizemos então que uma tal função é uma "função real de variável real" e a expressão que a define é comummente designada por "expressão analítica" da função em causa.

Seja $f : A \rightarrow B$ uma função real de variável real. Ao escrevermos a equação

$$y = f(x) \tag{3}$$

onde estão presentes os dois símbolos x e y (variáveis), sabemos que ela se torna verdadeira no caso de x assumir o papel de um elemento de A e y assumir o papel da imagem desse elemento por f, e só nesse caso. Aos símbolos x e y é costume chamar **variável independente** e **variável dependente**, respectivamente, dizendo-se também que "y é função de x", sendo óbvia a razão desta nomenclatura: depois de fixado um objecto para o papel de x, o elemento y que verifica (3) é bem determinado!

Também se diz frequentemente que $f(x)$, ou $y = f(x)$ (ver(3)), é a "expressão analítica" da função f. E por abuso de linguagem dizemos muitas vezes "a função $y = f(x)$" em vez de "a função f". É claro que, na condição (3), os símbolos x, y podem ser substituídos por outros dois símbolos quaisquer!

A escolha das variáveis a utilizar nas fórmulas que definem certas funções pode ter em vista um valor expressivo adequado à descrição dos fenómenos concretos que se pretende estudar. Consideremos o seguinte exemplo: um carro move-se num percurso rectilíneo à velocidade constante de 30 metros/segundo. Escolhendo os símbolos e, t para representar o espaço percorrido e o tempo gasto em o percorrer, sabemos que

$$e = 30t \tag{4}$$

(desde que e seja expresso em metros e t em segundos). Assim, embora (4) defina uma função que, em abstracto, a cada $t \in \mathbb{R}$ faz corresponder o número $30t \in \mathbb{R}$, a nossa escolha de símbolos recorda que os valores atribuíveis à variável independente ou à variável dependente são identificáveis com valores observáveis de tempo ou espaço.

Por vezes há conveniência em dar a definição de uma função de forma um pouco mais indirecta do que a que consiste em explicitar a expressão designatória $f(x)$. Consideremos, por exemplo, a frase:

Seja f a função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ para a qual dizer que "a imagem do número s é o número t" tem o mesmo significado que afirmar que "$2s - 3t = 1$",

ou, em linguagem simbólica, por isso mais abreviada:

$$\texttt{Seja } f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \texttt{ definida pela condição } t = f(s) \;\Leftrightarrow\; 2s - 3t = 1.$$

A frase define efectivamente uma função, pois ficamos a saber calcular a (única) imagem de cada elemento do domínio. Por exemplo, $f(2) = 1$, visto que $2 \times 2 - 3 \times 1 = 1$. O que se passa com o número 2 passa-se com outro qualquer: **fixado s, a equação** $2s - 3t = 1$ (com incógnita t) **tem solução única**; dito de outro modo

$$\forall_{s \texttt{ real}} \exists^1_{t \texttt{ real}} \; 2s - 3t = 1.$$

Não há qualquer dificuldade em reconhecer que esta função é definida **explicitamente** pela expressão designatória

$$f(s) = \frac{2s - 1}{3}.$$

Dizemos também que a partir da relação $2s - 3t = 1$, se exprimiu t como função de s.

EXEMPLO 1.10 Consideremos de novo o conjunto de alunos do exemplo 1.2 e a cada um associemos os seus irmãos.

Miguel	$\longrightarrow$	Luís, Sónia
Ana Rita	$\longrightarrow$	Mário
Nuno		
Joana	$\longrightarrow$	Susana
Catarina	$\longrightarrow$	João, Rodrigo

Nesta correspondência há dois "elementos" com um só "correspondente" (a Ana Rita e a Joana, que têm apenas um irmão e uma irmã, respectivamente), dois "objectos" com duas "imagens" e um "objecto" sem "imagem" (o Nuno, que não tem irmãos). **A correspondência considerada não é, pois, uma função** (pelas duas razões que acabam de ser apontadas).

EXEMPLO 1.11 Vejamos um exemplo com significado matemático em que encontramos uma situação semelhante. A cada número real x façamos corresponder o(s) número(s) y, caso existam, que elevados ao quadrado dão x, isto é, que satizfazem

$$y^2 = x.$$

Então ao número $x = 0$ corresponde unicamente $y = 0$; mas a cada número $x > 0$ correspondem dois números (por exemplo, a 9 estamos a associar por este processo tanto 3 como

-3); e a números $x < 0$ não corresponde qualquer número! Aqui temos, portanto, uma correspondência que não é função (novamente por duas razões).

Certas expressões matemáticas definem correspondências deste tipo. Por exemplo, resolvendo a equação do 2º grau

$$y^2 + y + b = 0,$$

onde b é um número, obtemos as suas raízes expressas em termos de b:

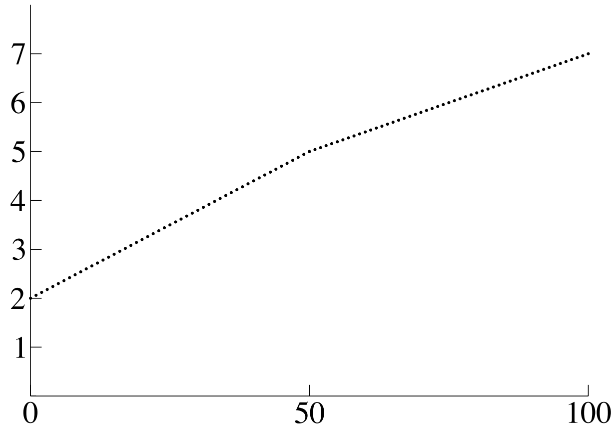
$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4b}}{2}; \tag{5}$$

através desta expressão, a cada b correspondem **dois** valores de y desde que $1 - 4b > 0$; corresponde $y = -\frac{1}{2}$ se $1 - 4b = 0$; e não corresponde nenhum número real se $1 - 4b < 0$. Portanto a equação (5) **não define uma função** com domínio $\mathbb{R}$ que tenha b como variável independente.

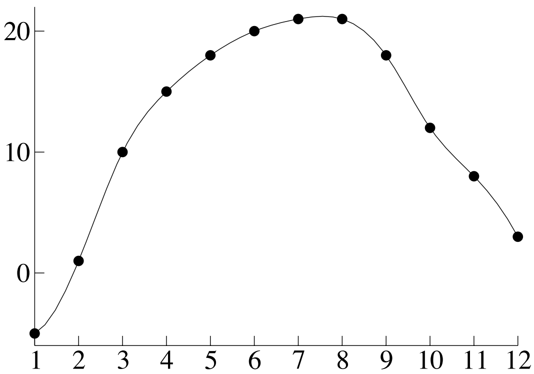
Observações sobre a natureza do domínio de uma função

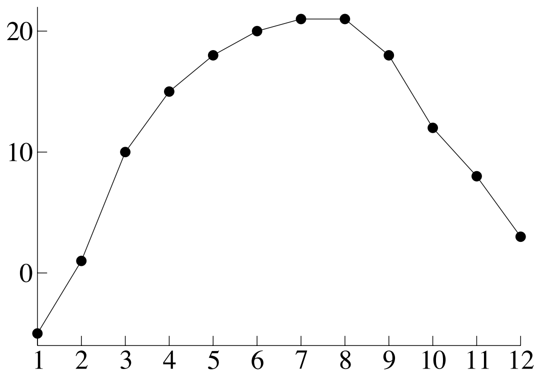
1) Como pudemos observar nos exemplos estudados, por vezes é claro que o domínio natural de uma função é constituído por todo um **intervalo de números reais** (é o caso da função área do quadrado de lado x, em que x é susceptível de tomar qualquer valor positivo). Por outro lado, existem casos em que à variável independente, representando mais uma contagem do que uma medição, só é natural atribuir **valores numéricos inteiros** (veja-se o caso da taxa de juro, em que o domínio é um conjunto de 5 dias, ou o caso das temperaturas médias mensais na cidade C, em que o domínio é um conjunto de 12 meses).

Noutros casos ainda, a situação é ambígua e podemos fazer uma escolha: veja-se o exemplo 1.9, onde tacitamente admitimos que a variável x pode tomar **qualquer valor real positivo**, o que conduz a um gráfico formado por um segmento de recta seguido de uma semirecta; mas poderíamos igualmente assumir (de acordo com a prática) que x só pode assumir como valores números naturais, visto que a facturação não incide sobre fracções de kWh; nessa situação o gráfico seria constituído por uma sucessão de pontos isolados!



Repare-se que, mesmo no caso em que uma função é definida por registo de um número finito de dados empíricos, como no exemplo 1.3, é frequente considerar que o domínio é constituído por todos os números reais de um dado intervalo, sendo os valores da função nos pontos assim introduzidos obtidos por estimativa a partir dos efectivamente registados, de tal modo que o gráfico é uma curva suave que passa pelos pontos inicialmente considerados, ou uma sequência de segmentos de recta que têm aqueles pontos como extremos.





2) Quando se define uma função é importante dar a regra que estabelece a correspondência e é importante também especificar qual o domínio, isto é, o conjunto de valores susceptíveis de ser atribuídos à variável independente. Assim,

$$\begin{aligned} & y = -2x + 1, \quad \text{com domínio } \mathbb{R} \\ \text{e} \quad & y = -2x + 1, \quad \text{com domínio } [0,1] \end{aligned}$$

são funções distintas.

Quando se define uma função real de variável real por uma expressão analítica e o domínio não é especificado subentende-se que se trata do conjunto de **todos** os valores atribuíveis à variável independente que dão sentido à expressão desigatória em $\mathbb{R}$. Por exemplo,

$$y = 1 - \frac{1}{x+1} \quad \text{e} \quad y = \sqrt{x-2}$$

são funções de domínio $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ e $[2, +\infty[$, respectivamente.

2 Gráfico e simetrias

Quando é dada uma função $f : A \to B$ fica seleccionado um conjunto de pares

$$(x, y) \tag{6}$$

que tornam verdadeira a condição $y = f(x)$. Nos pares (6) o primeiro elemento pertence a A; o segundo pertence a B e é precisamente a imagem do primeiro por f.

Por exemplo, no exemplo 1.2 a função em causa seleccionou os pares

$$\text{(Miguel, Lisboa)}, \ \text{(Ana Rita, Setúbal)}, \ldots;$$

todos eles têm no 1º elemento uma pessoa e no 2º uma cidade; mas o par (Miguel, Almada) não foi seleccionado. No exemplo 1.3, os pares seleccionados são

$$(1, -5), \quad (2, 1), \quad \ldots, \quad (12, 3).$$

Considerando agora o exemplo 1.6, podemos afirmar que $(1, 1)$, $(2, 4)$, $(2.5,\ 6.25)$, etc. são pares seleccionados, mas é claro que não podemos efectuar uma listagem completa de todos eles. Mesmo assim, podemos descrevê-los em geral dizendo que são todos os pares da forma

$$(x, x^2) \qquad \text{com } x > 0.$$

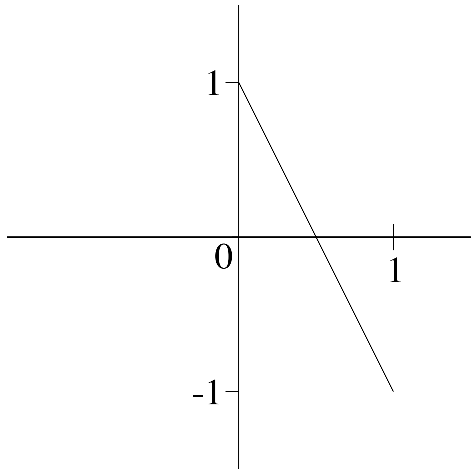
Facilmente reconhecemos, de acordo com estes exemplos e mesmo perante a definição geral, que **o conhecimento do conjunto de pares** (6) **equivale ao conhecimento da função**!

Este conjunto de pares merece, pois, destaque: damos-lhe o nome de **gráfico** da função f. No caso particularmente importante de uma função real de variável real, é um conjunto de pares de números, que, como sabemos, se identifica com um subconjunto do plano cartesiano. Podemos, pois, considerar o gráfico de f como o **lugar geométrico** definido pela condição $y = f(x)$ e $x \in A$.

EXEMPLO 2.1 Consideremos o conjunto dos pares da forma $(x, 1-2x)$, onde x percorre todos os valores do intervalo $[0, 1]$. Trata-se do gráfico da função definida pela expressão analítica

$$y = 1 - 2x \tag{7}$$

em que x é a variável independente e com domínio $[0, 1]$. O gráfico é, por isso, um segmento de recta: é o segmento de recta cujos extremos são $(0, 1)$ e $(1, -1)$.



EXEMPLO 2.2 O conjunto formado pelos 3 pares

$$(0,1) \quad (0,0) \quad \text{e} \quad (1,0)$$

não é o gráfico de uma função. Porque, se o é, e designando por f essa função, temos

$$f(0) = 1 \quad \text{e} \quad f(0) = 0$$

o que é contraditório.

Mais geralmente, reconhecemos que **o gráfico de uma função, identificado com um subconjunto do plano cartesiano, não pode ter mais que um ponto em cada recta vertical**.

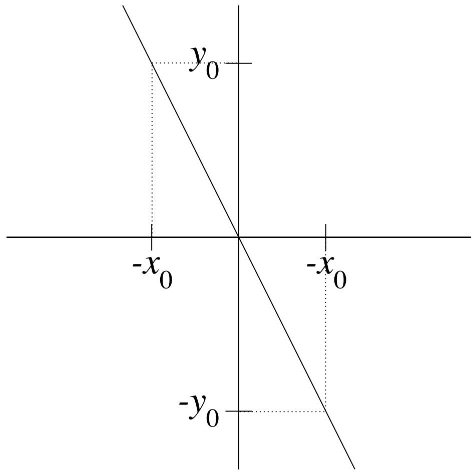
O gráfico de uma função real de variável real contém toda a informação sobre o comportamento da função.

Por exemplo, ao observar o gráfico da função dada no exemplo 5.7 torna-se evidente que, à medida que x se "desloca" desde o extremo 0 até ao extremo 1 do intervalo $[0,1]$, isto é, à medida que x cresce, os valores da função **decrescem** desde o valor 1 até ao valor -1. Em particular, fica muito claro que a função toma um valor maior que todos os outros (o valor 1) e um valor menor que todos os outros (o valor -1).

Alguns atributos das funções são fáceis de traduzir em linguagem geométrica através dos gráficos. Por exemplo, consideremos a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = -2x.$$

Como sabemos, o seu gráfico é uma recta que passa pela origem das coordenadas.



Contém os pontos $(1,-2)$, $(3,-6)$, $(-1,2)$, $(-3,6)$, etc. De um modo geral, sempre que contém um ponto (x,y) também contém o ponto $(-x,-y)$, visto que

$$y = -2x \implies -y = 2x \qquad ({}^1) \tag{8}$$

é uma proposição verdadeira para quaisquer $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$. Em termos analíticos descrevemos esta circunstância dizendo que a função f tem a propriedade

$$f(-x) = -f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{9}$$

Em termos geométricos dizemos, equivalentemente:

sempre que o ponto (x,y) está no gráfico de f, o ponto $(-x,-y)$ também está.

Notemos que o ponto $B \leftrightarrow (-x,-y)$ se relaciona com o ponto $A \leftrightarrow (x,y)$ pela condição de que os vectores $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ são simétricos: $\overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OA}$.

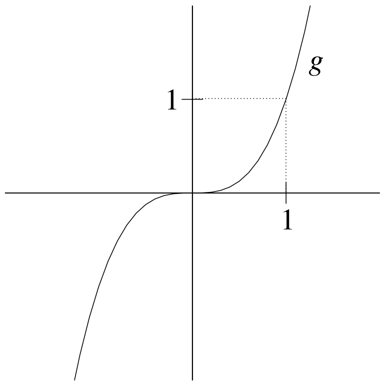
A uma função com a propriedade (9) chamamos **função ímpar**. De acordo com a observação precedente, esta propriedade pode traduzir-se em termos do gráfico dizendo que este é um conjunto **simétrico relativamente à origem**.

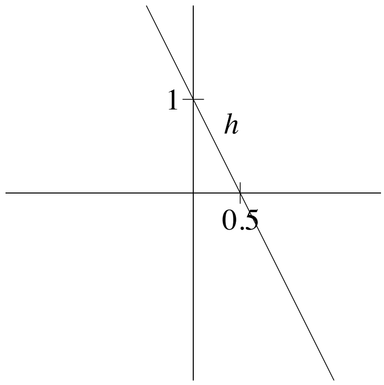
É fácil constatar que, das funções

$$g(x) = x^3, \qquad h(x) = -2x + 1$$

a primeira é ímpar, mas a segunda não.

[1]Na realidade, $y = -2x \Leftrightarrow -y = 2x$.



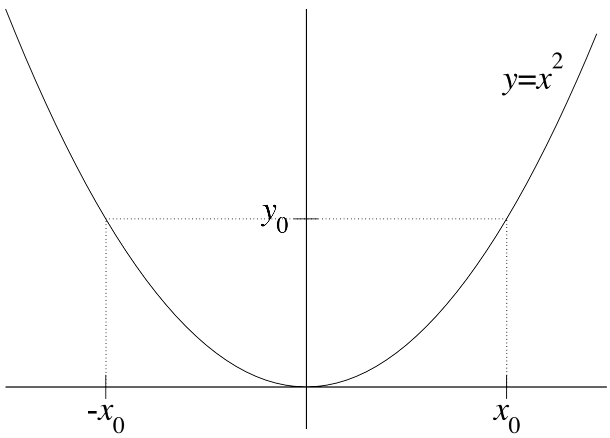


Com efeito, $g(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -g(x)$ para todo o x real, mas $h(1) = -1$ e $h(-1) = 3 \neq 1$!

Outro tipo de simetria ocorre quando uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ possui a propriedade seguinte:

$$f(-x) = f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{10}$$

Um exemplo simples é o da função $f(x) = x^2$, porque neste caso $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$.



Reparemos como é que a condição (10) se traduz em termos do gráfico. Suponhamos que (x, y) está no gráfico de f e que f verifica a propriedade (10). Então $y = f(x)$ e, em virtude de (10), $f(-x) = y$, ou seja, $(-x, y)$ é também ponto do gráfico. Constatamos, pois, que (10) se pode descrever do seguinte modo:

$$\boxed{\text{sempre que o ponto } (x, y) \text{ está no gráfico de } f\text{, o ponto } (-x, y) \text{ também está.}}$$

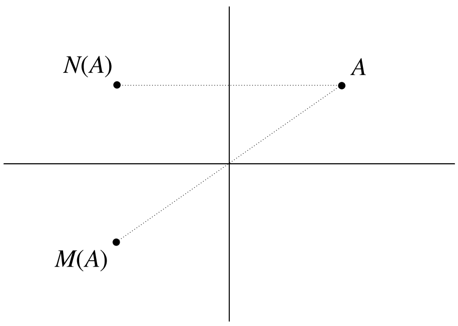
Observemos que $(-x, y)$ pode ser descrito como o ponto que está situado na recta horizontal que passa por (x, y), à mesma distância que (x, y) do eixo $0y$, mas fica situado no outro semiplano definido por aquele eixo.

A uma função com a propriedade (10) chamamos **função par**. Vemos que esta propriedade significa que o gráfico de uma tal função é **simétrico relativamente ao eixo $0y$.**

É como se, para o gráfico de f, o eixo Oy funcionasse como um espelho, reproduzindo num semiplano o que se passa no outro.

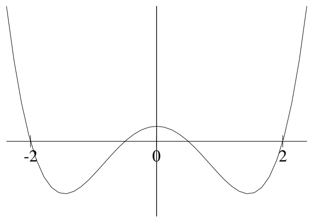
A imparidade e a paridade podem ser descritas usando a linguagem dos movimentos rígidos do plano. Efectivamente, se considerarmos no plano $\mathcal{P}$ onde se situa o nosso referencial ortonormado, as duas aplicações seguintes:

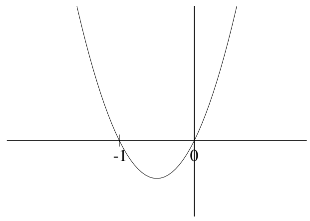
$$(x, y) \overset{M}{\mapsto} (-x, -y) : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$$
$$(x, y) \overset{N}{\mapsto} (-x, y) : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$$

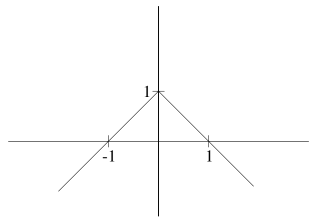


vemos sem dificuldade que se trata de movimentos rígidos: M é a rotação de 180° em torno da origem; N é a reflexão no eixo Oy. Dizemos também que M é a **simetria de centro** $O \leftrightarrow (0, 0)$ e N é a **simetria de eixo** Oy. E o que dissemos acima pode reenunciar-se assim: **uma função é ímpar se, e só se, a simetria M de centro na origem transforma o gráfico de f em si próprio; uma função é par se, e só se, a simetria N de eixo Oy transforma o gráfico de f em si próprio.**

EXERCÍCIO 2.1 Dos gráficos a seguir indicados, apenas dois correspondem a funções pares (quais?).


-2
0
2


-1
0


1
-1
1

3 Funções afins

Já são conhecidas, de anos anteriores, as funções definidas em $\mathbb{R}$ por uma expressão analítica do tipo (onde x é a variável independente)

$$y = ax + b \tag{11}$$

sendo a, b duas constantes (números reais) dadas. De resto, encontrámo-las em exemplos anteriores. Trata-se, afinal, dos **polinómios do** 1^{o} **grau** na variável x. Os seus gráficos são rectas. A uma função deste tipo dá-se o nome de **função afim.**

Quando $b = 0$, a expressão reduz-se a

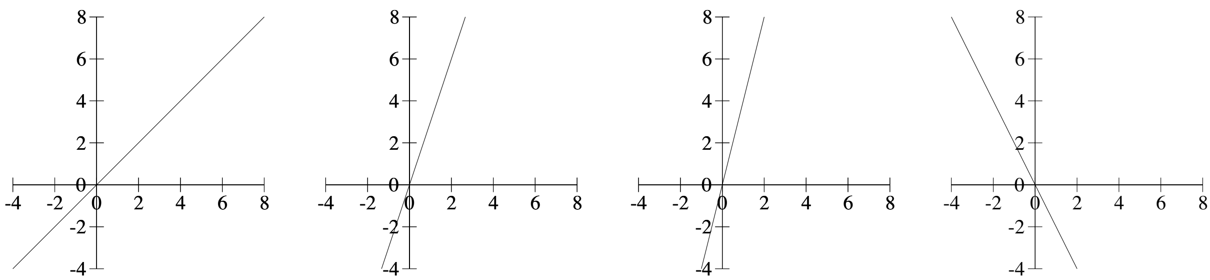
$$y = ax \tag{12}$$

e exprime que entre as variáveis x e y existe **proporcionalidade directa,** visto que o cociente de dois valores correspondentes é constante:

$$\frac{y}{x} = a.$$ ([2])

Dizemos então também que a função definida por (12) é **linear**. Por exemplo, se o preço de 1 litro de determinado tipo de azeite é 3.2 €, então o preço (y) de x litros de azeite é dado por (12) com $a = 3.2$. (É claro que, neste exemplo, x só pode assumir valores positivos.)

Nas figuras seguintes recordamos o aspecto de parte dos gráficos de (12), com $a = 1,\ 3,\ 4,\ -2$.



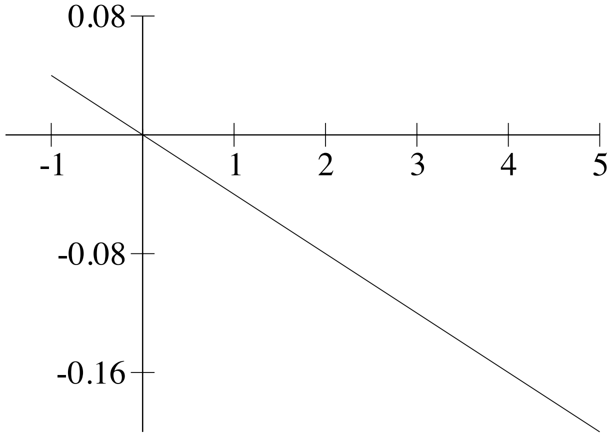
Usámos, nos quatro casos, referenciais cartesianos em que a unidade de comprimento é a mesma em ambos os eixos. Podemos assim comparar, não só o valor da imagem de cada elemento com o próprio elemento, em cada gráfico, como os valores que correspondem ao mesmo elemento nos diversos gráficos. Recordamos assim o efeito do parâmetro a, quer no que respeita ao seu valor absoluto quer ao sinal.

[2]A constante é o número a que figura em (13) e é referida como **constante de proporcionalidade**.

Observemos que para valores de a muito próximos de 0 ou muito elevados a representação gráfica requer o uso de escalas diferentes nos eixos, a fim de ser minimamente utilizável! Por exemplo, para a função

$$y = -0.04x, \qquad -1 \leq x \leq 5$$

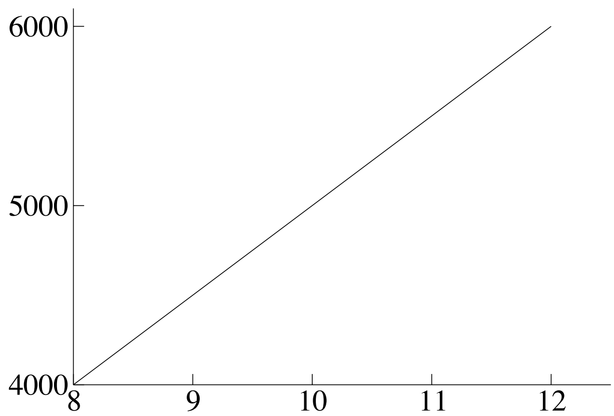
teremos:



A zona do domínio em que estamos interessados, para efeito de representação gráfica, pode também condicionar a colocação dos eixos no plano. Por exemplo, se pretendemos visualizar

$$y = 500x, \qquad 8 \leq x \leq 12$$

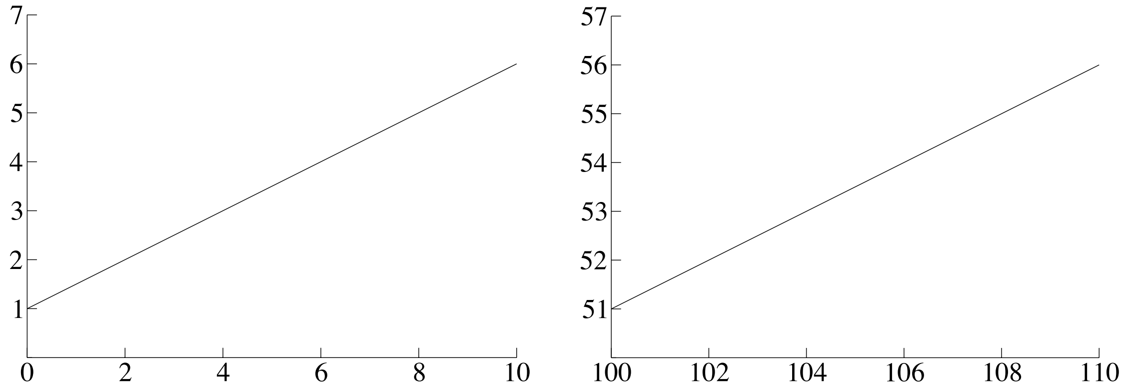
será razoável obter uma figura como a que segue, *onde os eixos coordenados estão ausentes* mas os valores percorridos por x e y se encontram registados na horizontal e vertical, respectivamente, que delimitam o gráfico, tal como sucede no écran de uma máquina.



Uma importante característica das funções afins é que o gráfico "mantém o mesmo aspecto" ao longo de todo o domínio, sofrendo apenas uma translação quando nos movemos de uma zona para outra. Por exemplo, repare-se nas representações de

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 1$$

nos intervalos $[0, 10]$ e $[100, 110]$



Este facto pode interpretar-se facilmente usando a expressão analítica e as operações algébricas a que esta se adequa. Para todo o número real x, tem-se $x \in [100, 110]$ se e só se $x - 100 \in [0, 10]$; é fácil comparar o valor de f em x com o valor de f em $x - 100$:

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{1}{2}(x - 100 + 100) + 1 &= \frac{1}{2}(x - 100) + 50 + 1 \\ &= f(x - 100) + 50 \end{aligned}$$

de onde se pode concluir:

$$f(x) - f(x - 100) = 50 \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Esta equação exprime de modo preciso as nossas considerações anteriores: os valores de f em pontos que diferem de 100 unidades diferem de um número bem determinado: 50.

EXERCÍCIO 3.1 Para a mesma função, comparar $f(x)$ com $f(x + 100)$.

Analisemos agora, em geral, o efeito de uma translação de h unidades na variável x. (Aqui estamos a supor que h é um número dado, positivo ou negativo). Temos:

$$f(x + h) = a(x + h) + b = ax + ah + b = f(x) + ah$$

e esta equação ainda se pode escrever

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = a \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \ \forall h \neq 0$$

propriedade que pode ser descrita escrevendo

$$x_1 = x, \qquad x_2 = x + h,$$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = a, \qquad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R},\ x_1 \neq x_2$$

e que em linguagem comum se traduz dizendo:

> Dados dois valores quaisquer $x_1 \neq x_2$ atribuíveis à variável independente, o cociente das diferenças (ou acréscimos)
>
> $$y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1) \qquad \text{e} \qquad x_2 - x_1$$
>
> é constante.

(Em particular, a acréscimos iguais da variável independente correspondem acréscimos iguais da variável dependente!)

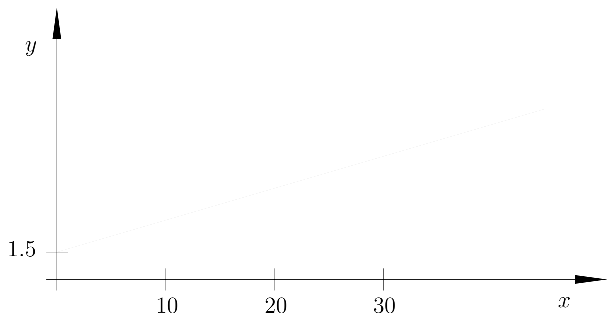
Esta constante a, ou seja, o coeficiente de x na fórmula (11), é, como sabemos, o **declive** ou **coeficiente angular** da recta que constitui o gráfico de (11). [Por abuso de linguagem, falamos também de declive da função (11).] Como sabemos, a mede a “inclinação” da referida recta relativamente ao sistema de eixos coordenados, e o sinal de a contém também informação relevante.

O coeficiente b em (11) tem também um significado preciso: representa a ordenada do ponto em que a recta da equação (11) corta o eixo Oy.

EXEMPLO 3.1. Na factura referente ao consumo mensal de água, na cidade X, o custo imputado a cada cliente obtém-se adicionando uma taxa de serviço fixa, no valor de 1.5 €, ao valor da água consumida, que é calculado tendo em conta que o preço fixado para o metro cúbico é 0.1 €. Assim, o montante (y) que cada cliente tem a pagar, em Euros, é dado em função do respectivo consumo (x), expresso em metros cúbicos, por

$$y = 1.5 + 0.1\,x.$$

O gráfico desta função está representado a seguir:



Representado por f a mesma função, podemos convencionar que o domínio de f é $[0, +\infty[$ (embora também pudéssemos utilizar apenas os números inteiros, já que não são contabilizadas fracções de metro cúbico!). Tem-se $f(0) = 1.5$, o que significa, obviamente, que mesmo na ausência de consumo de água há que pagar a taxa de serviço. O valor a pagar (y) não é directamente proporcional ao volume de água consumido (x), mas se representarmos por x_1, x_2 dois consumos distintos e por y_1, y_2 os valores a pagar que lhes estão respectivamente associados, então

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = 0.1,$$

de forma que podemos dizer que há proporcionalidade directa entre acréscimos de valor a pagar e acréscimos de consumo.

Facto 3.1 *As rectas com equações*

$$y = ax + b, \qquad y = \alpha x + \beta$$

são paralelas se, e só se, $a = \alpha$.

Demonstração 1) Se $a = \alpha$ e $b = \beta$ as rectas são coincidentes. Se $a = \alpha$ e $b \neq \beta$ então elas são estritamente paralelas, visto que não têm qualquer ponto comum: com efeito, um ponto (x, y) comum a ambas verifica

$$y = ax + b \qquad \text{e} \qquad y = ax + \beta$$

pelo que

$$ax + b = ax + \beta.$$

Subtraindo ax aos dois últimos membros da igualdade conclui-se $b = \beta$, contradizendo o que suposemos, isto é, $b \neq \beta$.

2) Se as rectas dadas são paralelas, então não se pode ter $a \neq \alpha$, pois nesse caso a equação

$$ax + b = \alpha x + \beta$$

ou, equivalentemente,

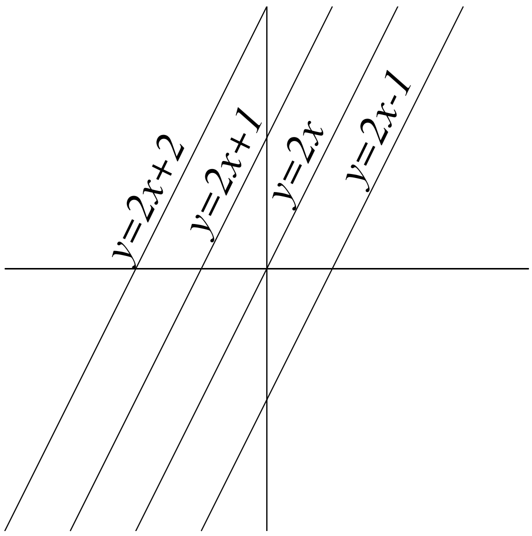
$$(a - \alpha)x = \beta - b$$

tem a solução $x = \frac{\beta - b}{a - \alpha}$, que fornece a abcissa de um ponto que seria comum às duas rectas. Logo, $a = \alpha$. ∎

Assim, por exemplo, as rectas cujas equações são da forma

$$y = 2x + b$$

(com $b \in \mathbb{R}$), tendo todas o mesmo declive, são paralelas entre si e paralelas, em particular, à que passa pela origem (cuja equação é $y = 2x$).



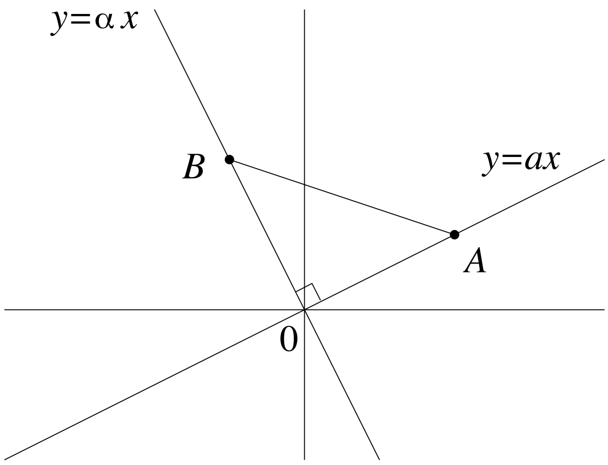
Vamos ver em seguida que não só o paralelismo, mas também a perpendicularidade, é facilmente detectável através de declives.

Facto 3.2 *As rectas com equações*

$$y = ax + b, \qquad y = \alpha x + \beta$$

são perpendiculares se, e só se, $a\alpha = -1$.

Demonstração 1) Suponhamos em primeiro lugar que $b = \beta = 0$. **Se as rectas são perpendiculares**, o triângulo formado pela origem das coordenadas, 0, e por dois outros pontos A, B, pertencentes respectivamente à primeira e à segunda, é rectângulo.



Suponhamos $A = (x_1, ax_1)$ e $B = (x_2, \alpha x_2)$. Pelo teorema de Pitágoras, $AB^2 = OA^2 + OB^2$:

$$(x_2 - x_1)^2 + (\alpha x_2 - ax_1)^2 = x_1^2 + a^2 x_1^2 + x_2^2 + \alpha^2 x_2^2.$$

Desenvolvendo os quadrados no 1^{o} membro obtemos

$$x_2^2 + x_1^2 - 2x_1 x_2 + \alpha^2 x_2^2 + a^2 x_1^2 - 2a\alpha x_1 x_2 = x_1^2 + a^2 x_1^2 + x_2^2 + \alpha^2 x_2^2$$

e, subtraindo a ambos os membros as parcelas comuns, ficamos reduzidos a

$$-2x_1 x_2 - 2a\alpha x_1 x_2 = 0.$$

Finalmente, como $x_1 \neq 0$ e $x_2 \neq 0$, podemos dividir ambos os membros da última igualdade por $-2x_1 x_2$ e obtemos

$$1 + a\alpha = 0$$

que é o que pretendíamos.

Se a condição $a\alpha = -1$ é satisfeita, consideremos a recta que é perpendicular à recta de equação $y = ax$ e que passa pela origem. Tal recta terá uma equação da forma $y = a'x$, por que não pode ser o eixo $0y$ (caso em que teríamos $a = 0$, contrariando $a\alpha = -1$). Pelo que já demonstrámos, tem-se então $aa' = -1$, e concluímos, de acordo com a hipótese, $a' = \alpha$, ou seja: $y = ax$ e $y = \alpha x$ são rectas perpendicula-
res.

2) No caso geral em que b e β são números reais dados, as rectas em questão são, de acordo com o facto anterior, paralelas às rectas de equações

$$y = ax \qquad \text{e} \qquad y = \alpha x,$$

respectivamente. Ora, já se viu que a condição $a\alpha = -1$ equivale à perpendicularidade destas e, por conseguinte, à perpendicularidade de $y = ax + b$ e $y = \alpha x + \beta$. ■

4 Função associada à proporcionalidade inversa

Consideremos a função definida pela expressão

$$y = \frac{1}{x}$$

no domínio $\mathbb{R}\backslash\{0\} =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$. Verifica-se que o produto de valores que se correspondem é sempre 1:

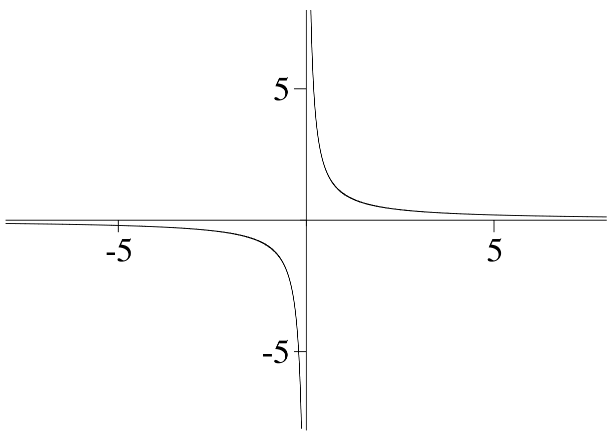
$$xy = 1.$$

O exame de uma tabela de valores correspondentes permite-nos formar uma ideia do aspecto do gráfico:

x	y
-0.001	-1000
-0.01	-100
-0.1	-10
-1	-1
1	1
10	0.1
100	0.01
1000	0.001

Veja-se como, para valores de x positivos, a função toma valores muito grandes quando x é pequeno (isto é, próximo de 0) e muito pequenos quando x é grande!

Observa-se sem dificuldade que a função é ímpar.



Se, em vez do número 1, no numerador figurar outro número **positivo** C, obtemos a função

$$y = \frac{C}{x}, \tag{13}$$

cujo comportamento e cujo gráfico são semelhantes.

Se C é negativo, o gráfico desta função fica no 2º e 4º quadrantes.

Em qualquer caso, a expressão (13) significa que as variáveis x e y são **inversamente proporcionais**, visto que o produto de valores que se correspondem é constante,

$$xy = C,$$

sendo esta constante o número C que figura na fórmula (13). Chama-se a C a **constante de proporcionalidade**.

EXEMPLO 4.1 A distância entre as cidades A e B é 300 km. Quanto tempo demora o percurso entre A e B se nos deslocarmos à velocidade constante de 60 km/h? E se a velocidade fosse 100 km/h? E 120 km/h? E 150 km/h?

A velocidade (V) é a razão entre a distância (d) percorrida e o tempo (t) gasto em percorrê-la:

$$V = \frac{d}{t}.$$

Como pretendemos calcular o valor de t, obtemos, a partir desta equação,

$$t = \frac{d}{V}$$

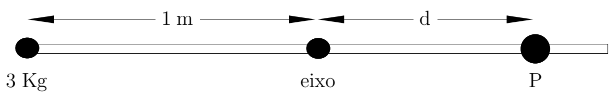
e, como no caso presente $d = 300$ (km), o tempo vem dado em horas pela fórmula

$$t = \frac{300}{V}$$

em que V se exprime em km/h. As variáveis t e V são, portanto, inversamente proporcionais (o produto de valores correspondentes é sempre 300). Fazendo $V = 60,\ 100,\ 120,\ 150$, obtemos, respectivamente, os valores dos tempos de percurso:

$$5;\ 3;\ 2.5;\ 2.$$

EXEMPLO 4.2. Uma haste rígida, feita de material muito leve, de modo que podemos considerar o seu peso desprezável, gira em torno de um eixo:



Numa das extremidades, à distância de 1 metro do eixo, está colocado um peso de 3 Kg. Para que a haste fique em equilíbrio (isto é, no plano horizontal do eixo), colocamos um outro peso de P Kg no outro lado da haste e à distância d (metros) do eixo; verifica-se experimentalmente que o equilíbrio é conseguido se os valores de d e P se correspondem de acordo com a tabela

d	1	0.5	0.3	0.1	0.05
P	3	6	10	30	60

De um modo geral, o produto de d por P deve ser constante e igual a $3 \times 1 = 3$:

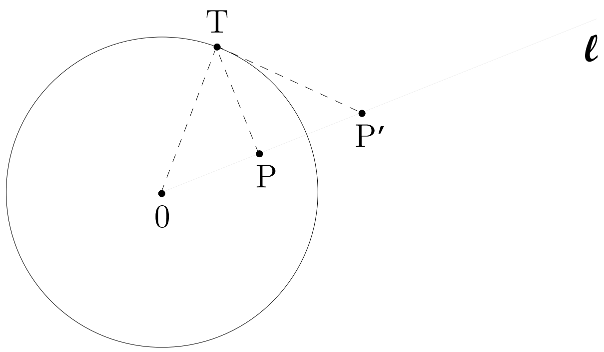
$$dP = 3$$

Por outra palavras: d e P são inversamente proporcionais e P é dado, em função de d, pela expressão analítica

$$P = \frac{3}{d}.$$

Os valores admissíveis para d, ou seja os que constituem o domínio da função, são os números positivos que não excedem o comprimento da porção da haste, onde os pesos vão ser colocados.

EXEMPLO 4.3. Consideremos uma circunferência de raio R, centrada em 0, e uma semirecta ℓ com origem 0. Para cada ponto P de ℓ interior à circunferência, vamos construir um outro ponto P' de ℓ do seguinte modo



(i) a perpendicular a ℓ que passa por P encontra a circunferência num ponto T;

(ii) a tangente à circunferência em T encontra ℓ no ponto desejado P'.

Como $0T$ e TP' são perpendiculares, os triângulos $0TP$ e $0TP'$ são semelhantes (visto que são triângulos rectângulos e têm um ângulo comum). Por isso,

$$\frac{0P}{0T} = \frac{0T}{0P'}$$

e concluimos

$$0P \times 0P' = R^2. \tag{14}$$

Assim, as distâncias

$$d = \|0P\|, \qquad d' = \|0P'\|$$

são inversamente proporcionais, e d' é dada em função de d pela expressão

$$d' = \frac{R^2}{d}\,,$$

O leitor facilmente imaginará as posições assumidas por P' quando P se desloca: que se passa com P' quando P está muito próximo do centro da circunferência? E quando P se aproxima do ponto comum a ℓ e à circunferência? Se o movimento de P em ℓ se faz no sentido positivo determinado por esta semirecta (na figura, da esquerda para a direita), em que sentido se move P'?

Se os pontos P, P' verificam a condição (14) diz-se que P' é o *inverso* de P relativamente à circunferência dada.

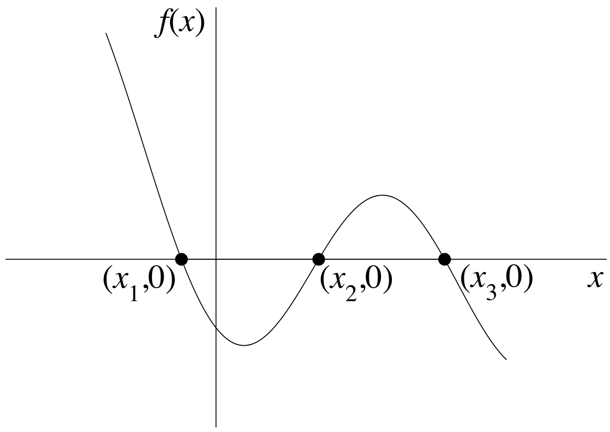
5 Raízes. Contradomínio. Restrição.

Raízes: Se f é uma função real de variável real, a uma solução da equação

$$f(x) = 0$$

damos o nome de **raiz** ou **zero** de f.

As raízes são, pois, os elementos x do domínio de f tais que $(x, 0)$ pertence ao gráfico de f; representando o gráfico num plano com eixos cartesianos que se cruzam no ponto $(0, 0)$ as raízes são as abcissas dos pontos de intersecção do gráfico com o eixo $0x$.



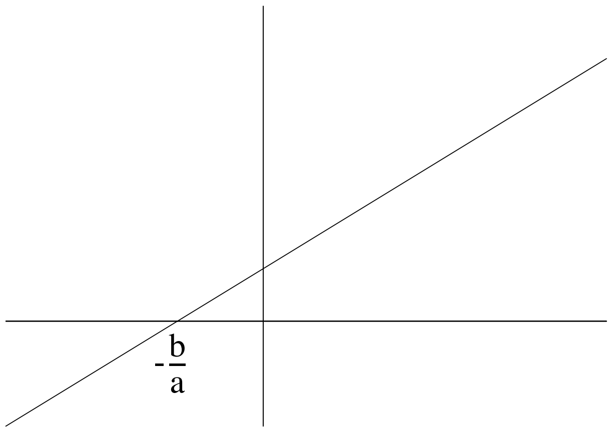
EXEMPLO 5.1 Para uma função afim (11) dois casos se podem dar:

1º) $a \neq 0$. Então a equação

$$ax + b = 0$$

tem uma única raiz

$$x = -\frac{b}{a}.$$



2º) $a = 0$. Então temos $f(x) = b$, $\forall x \in \mathbb{R}$ e, portanto, ou f não tem zeros (se $b \neq 0$), ou todos os números reais são zeros de f (se $b = 0$).

EXEMPLO 5.2 A função $y = \frac{1}{x}$ associada à proporcionalidade inversa não tem raízes (porquê?). Mas a função $g(x) = \frac{1}{x} + 2$ tem uma raiz: a equação $\frac{1}{x} + 2 = 0$ conduz a $\frac{1}{x} = -2$, ou seja, $x = -\frac{1}{2}$.

Contradomínio: O conjunto dos valores $f(x)$ obtidos quando x percorre todos os valores do domínio de f chama-se **contradomínio** de f. Assim, o contradomínio de f é constituído por todas as ordenadas de pontos do gráfico de f.

EXEMPLO 5.3 Estivemos a analisar acima em que condições é que 0 pertence ao contradomínio de uma função afim.

Mais geralmente, podemos resolver o problema: dado um número $\alpha \in \mathbb{R}$, ele pertence ou não ao contradomínio de f dado por (11)?

Trata-se de ver **se existe** $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \alpha$, ou seja

$$ax + b = \alpha \tag{15}$$

Tal como anteriormente, temos

1º) Se $a \neq 0$, existe efectivamente um único x nessas condições,

$$x = \frac{\alpha - b}{a}.$$

2º) Se $a = 0$ e $\alpha = b$, **todos** os $x \in \mathbb{R}$ satisfazem a condição (15). Se $a = 0$ e $\alpha \neq b$ **nenhum** $x \in \mathbb{R}$ é solução de (15).

Portanto: o contradomínio da função afim f é $\mathbb{R}$ se $a \neq 0$ e é o conjunto com um só elemento $\{b\}$ se $a = 0$.

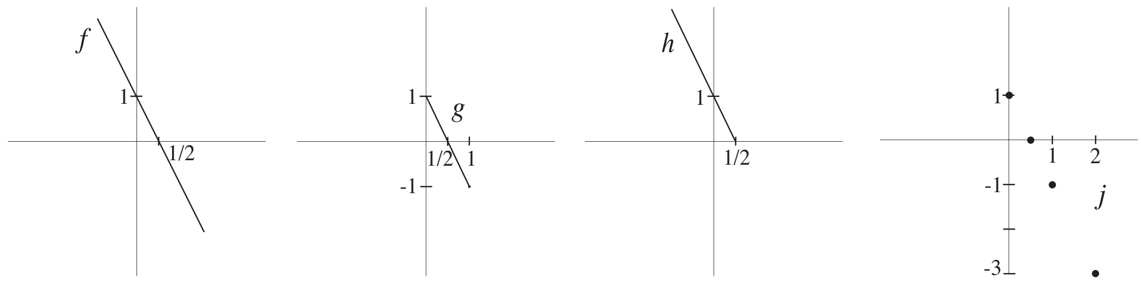
EXEMPLO 5.4 O contradomínio da função $y = \frac{1}{x}$ é formado pela união dos dois intervalos $]-\infty, 0[$ e $]0, +\infty[$, ou seja, é o conjunto $\mathbb{R}$ privado do número 0.

Restrição: No conceito de função tem um papel central a **correspondência** que se estabelece entre os elementos de dois conjuntos, mas não é menos importante o papel do **domínio**, isto é, o conjunto de partida a cujos objectos a função associa outros.

Uma mesma expressão designatória em que intervém uma variável pode ser usada para definir muitas funções, visto que, para que a definição fique completa, temos que especificar o domínio da variável x. Assim, por exemplo,

$$-2x + 1$$

pode exprimir uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, outra $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$, outra $h :]-\infty, 1/2] \to \mathbb{R}$, outra $j : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, etc. Em cada um dos casos o processo de associação do objecto à sua imagem não mudou, mas mudou o conjunto de objectos a que a correspondência é aplicável!



A cada uma das funções g, h, j damos o nome de **restrições** de f (respectivamente a $[0, 1]$, $]-\infty, 1/2]$ e $\mathbb{N}$).

Mais geralmente, se $f : A \to B$ é uma função e $C \subset A$, a função $g : C \to B$ que actua por meio da fórmula

$$g(x) = f(x) \quad \forall x \in C$$

chama-se **restrição de f a C**.

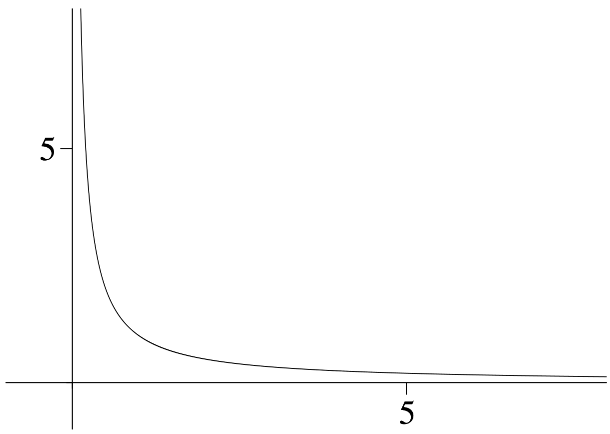
Em vez de falarmos da "restrição de f a C" referimo-nos muitas vezes, mais simplesmente, à "função f **em** C".

Assim, quando consideramos a restrição de f a C, é como se esquecêssemos tudo o que a função faz fora do conjunto C.

OBSERVAÇÃO A restrição de uma função afim (ou linear) será ainda chamada uma função afim (ou linear). Assim, no exemplo acima, a função $x \overset{g}{\mapsto} -2x+1 : [0,1] \to \mathbb{R}$ pode ser referida como uma função afim.

EXEMPLO 5.5 Na pág. 26 obtivemos o gráfico da função $y = 500x$ restringida ao intervalo $[8,12]$.

EXEMPLO 5.6 Restrinjamos a função $y = \frac{1}{x}$ ao intervalo $]0,+\infty[$. O gráfico correspondente a esta restrição resulta do gráfico da função inicialmente considerada eliminando a parte dele que fica no 3º quadrante, isto é, o conjunto dos pontos que tem abcissas negativas.

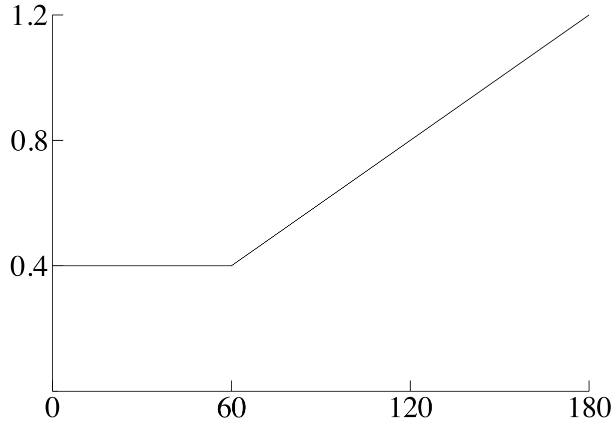


EXEMPLO 5.7 O custo de uma chamada de voz na rede LOQUACIUS é de 0.4 € no 1º minuto e é facturado ao segundo após o 1º minuto. Então o custo (y) de uma chamada com a duração de x segundos é:

$$\begin{aligned} y &= 0.4 \qquad \text{se } 0 < x \leq 60, \\ y &= 0.4 + \frac{0.4}{60}(x-60) \qquad \text{se } x > 60. \end{aligned} \tag{16}$$

Estas condições definem uma função f em que o domínio da variável x é o conjunto dos números positivos.

A representação gráfica da função é fácil de obter:



Repare-se que, em cada um dos intervalos $]0, 60]$ e $[60, +\infty[$, a função f tem um comportamento bastante simples e que nos é familiar: os gráficos destas restrições de f são, respectivamente, um segmento de recta e uma semi-recta.

Embora possamos tomar para domínio de f, do ponto de vista estritamente matemático, o intervalo $]0, +\infty[$, para a maioria das aplicações em vista só necessitamos de trabalhar com uma restrição de f, digamos, ao intervalo $]0, 86400[$ (ninguém faz uma chamada de voz com duração de 24 horas!)[3]. É fácil constatar que a imagem de f, restringida a este intervalo, é $[0.4,\ 576[$.

Observemos que mesmo o intervalo $]0, 86400[$ não é utilizado na totalidade, visto que a contabilização se faz ao segundo, e fracções de segundo não são tidas em conta. Na prática, a utilização de $\mathbb{N} \cap]0, 86400[$ como domínio de f é largamente suficiente para as aplicações...

[3]Na realidade, nem mesmo com a duração de 23 horas, nem de 22 horas...

6 Funções crescentes e decrescentes. Máximos e mínimos.

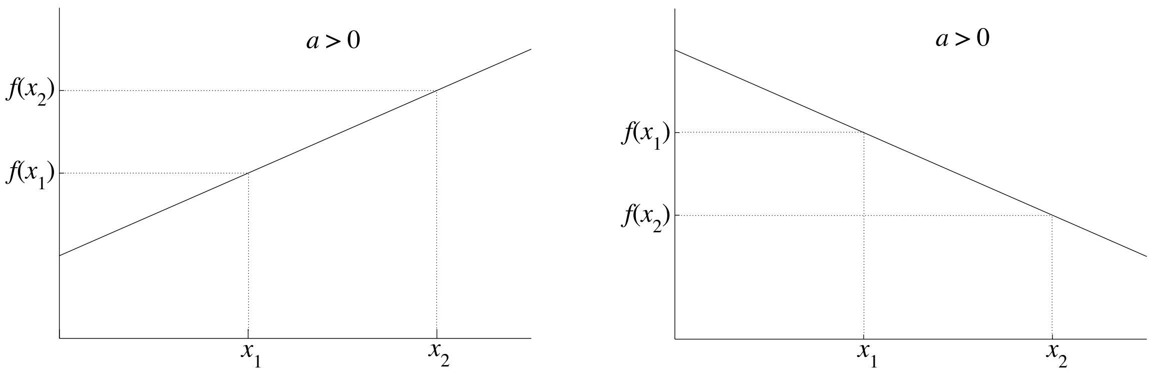
Consideremos a função afim f definida por

$$f(x) = ax + b.$$

Facilmente se reconhece que

$$\begin{array}{l} 1^{\text{o}})\ \text{se}\ a > 0,\quad x_1 < x_2 \ \Rightarrow\ f(x_1) < f(x_2); \\ 2^{\text{o}})\ \text{se}\ a < 0,\quad x_1 < x_2 \ \Rightarrow\ f(x_1) > f(x_2). \end{array}$$

Efectivamente, no 1º caso, multiplicando a desigualdade $x_1 < x_2$ pelo número $a > 0$, vem $ax_1 < ax_2$, e adicionando b a ambos os membros deduz-se $ax_1 + b < ax_2 + b$. Analogamente se prova a 2ª afirmação.



Assim, quando os valores atribuídos à variável independente aumentam, os valores correspondentes da variável dependente também aumentam, se $a > 0$; diminuem, se $a < 0$.

Com a função $y = \frac{1}{x}$ passa-se o seguinte

$$\begin{array}{l} 1^{\text{o}})\ 0 < x_1 < x_2 \ \Longrightarrow\ \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}; \\ 2^{\text{o}})\ x_1 < x_2 < 0 \ \Longrightarrow\ \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}. \end{array}$$

Exprimimos estes factos dizendo que: a função $y = ax + b$ é **crescente** se $a > 0$; é **decrescente** se $a < 0$; a função $\frac{1}{x}$, restringida ao intervalo $]0, +\infty[$ é **decrescente**; a mesma função, restringida ao intervalo $]-\infty, 0[$, é igualmente **decrescente**.

DEFINIÇÃO Em geral, dizemos que uma função real de variável real $f : A \to \mathbb{R}$ é **crescente** se **para quaisquer** $x_1, x_2 \in A$

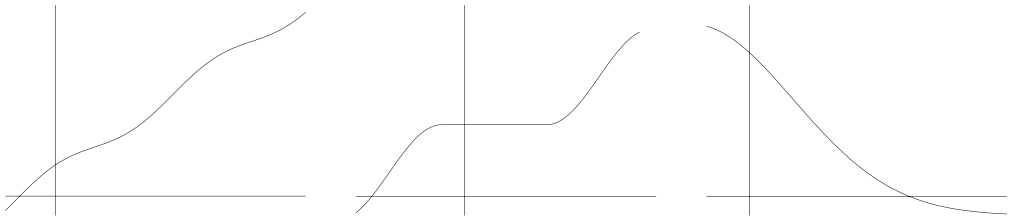
$$x_1 < x_2 \ \Rightarrow\ f(x_1) \leq f(x_2)$$

e dizemos que f é decrescente se para quaisquer $x_1, x_2 \in A$

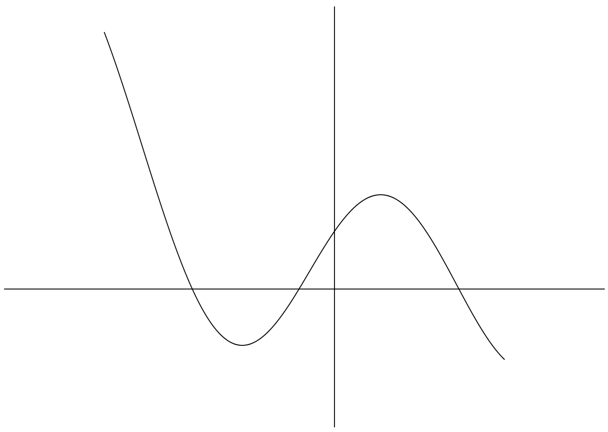
$$x_1 < x_2 \ \Rightarrow\ f(x_1) \geq f(x_2).$$

Quando, na Definição precedente, os sinais $\leq$ e $\geq$ que figuram nos segundos membros das implicações são substituídos por $<$ e $>$, obtemos a definição de função **estritamente crescente** ou **estritamente decrescente**, respectivamente. (É o caso, como vimos acima, das funções do tipo $f(x) = ax + b$ com $a \neq 0$.)

Examinando os gráficos que seguem, encontrar-se-ão exemplos de funções crescentes, estritamente crescentes e estritamente decrescentes.



O gráfico seguinte mostra uma função que não é crescente nem decrescente, mas tem restrições, a determinados intervalos, dos dois tipos.



Podemos dizer, por exemplo, numa linguagem menos formal, que uma função é crescente quando, a cada aumento do valor da variável independente ao longo do domínio, corresponde um aumento do valor da variável dependente.

DEFINIÇÃO Dizemos que uma função real de variável real $f : A \to \mathbb{R}$ tem **(valor) máximo** se assumir um valor que é maior ou igual do que todos os outros. O máximo de f é, por outras palavras, um valor $f(z)$, para um certo $z \in A$, com a propriedade

$$f(z) \geq f(x) \qquad \forall x \in A.$$

Trocando o sinal $\geq$ por $\leq$ obtemos a definição de **(valor) mínimo** de f.

EXEMPLO 6.1 A função do exemplo 1.3 tem o máximo 21 (atingido no mês 8); a função do exemplo 1.4 tem o máximo 4.8 (atingido no dia 19).

EXEMPLO 6.2 Consideremos a restrição da função afim $f(x) = ax+b$ ao intervalo $[c, d]$. É claro que ela é crescente (respectivamente decrescente) se $a > 0$ (respectivamente $a < 0$), visto que a propriedade de ser crescente ou decrescente não se perde quando ignoramos uma parte do domínio inicial. Assim, podemos afirmar: se $a > 0$,

$$c \leq x \leq d \;\Rightarrow\; f(c) \leq f(x) \leq f(d) \qquad \forall x \in [c, d]$$

enquanto, se $a < 0$,

$$c \leq x \leq d \;\Rightarrow\; f(c) \geq f(x) \geq f(d) \qquad \forall x \in [c, d].$$

Portanto **a restrição referida tem máximo** $f(d)$ **e mínimo** $f(c)$ **no** 1^{o} **caso**; **e máximo** $f(c)$ **e mínimo** $f(d)$ **no** 2^{o}. Note-se que a função afim, **com domínio $\mathbb{R}$, não tem máximo nem mínimo, a não ser que seja constante!**

Uma função dada pode ter, ou não, máximo ou mínimo. De acordo com o que acabamos de ver, a função $f(x) = -2x+1$ (com domínio $\mathbb{R}$) não tem máximo nem mínimo; no entanto, a sua **restrição** ao intervalo $[0, 1]$ tem máximo 1 (atingido no ponto 0) e mínimo -1 (atingido no ponto 1); por isso dizemos que f tem máximo e mínimo **em** $[0, 1]$.

De uma maneira geral, se A é o domínio de f e $B \subset A$, falamos do **máximo** (ou **mínimo**) **de** f **em B**, querendo com isso significar o máximo (ou mínimo, respectivamente) da **restrição** de f a B.

É fácil descrever de modo informal o máximo, ou o mínimo, de uma função, em termos do seu gráfico. O máximo é a ordenada do(s) ponto(s) "mais alto(s)" do gráfico.[4] O mínimo é a ordenada do(s) ponto(s) "mais baixo(s)".

Facto 6.1 *Suponhamos que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é crescente. Então o máximo (respectivamente, mínimo) de f em $[a, b]$ é $f(b)$ (respectivamente, $f(a)$).*

Facto 6.2 *Suponhamos que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é decrescente. Então o máximo (respectivamente, mínimo) de f em $[a, b]$ é $f(a)$ (respectivamente, $f(b)$).*

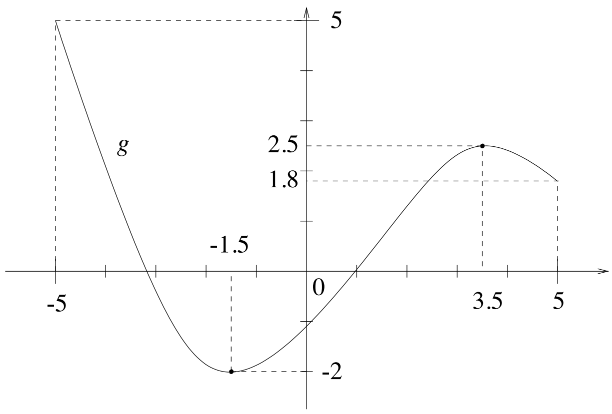
A demonstração deste(s) facto(s) faz-se imitando o argumento do exemplo 6.2.

No que segue vamos referir-nos a intervalos de $\mathbb{R}$ *centrados num certo ponto*. Exemplos de intervalos centrados no ponto 2 são $[1, 3]$, $[-18, 22]$, $[3/2, 5/2]$, $[1.98, 2.02]$, etc. Assim, de

[4] Note-se que pode existir mais do que um ponto do gráfico com ordenada máxima, ou mínima.

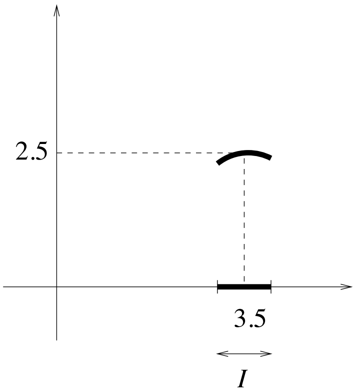
um modo geral, se $a \in \mathbb{R}$, um **intervalo centrado em** a será da forma $[a-\delta, a+\delta]$, com δ positivo. (O número 2δ representa o comprimento do intervalo, isto é, a distância entre os extremos; retomaremos esta noção na secção seguinte.)

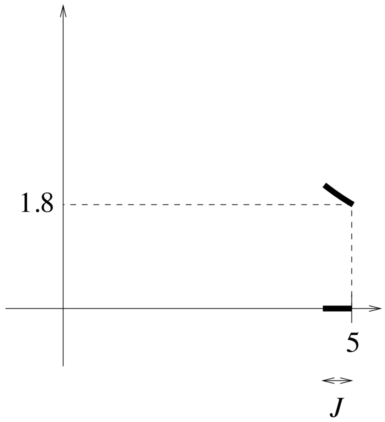
Consideremos a função g, definida no intervalo $[-5, 5]$, cujo gráfico está representado a seguir.



De acordo com as definições já apresentadas, podemos afirmar que a função tem valor máximo 5 e valor mínimo -2 (atingidos em -5 e -1.5, respectivamente), o que confere aos pontos do gráfico $(-5, 5)$ e $(-1.5, -2)$ um interesse particular (um é o "mais alto" e outro o "mais baixo"). Mas outros dois pontos têm também interesse dentro de um ponto de vista semelhante:

– o ponto $(3.5, 2.5)$, porque, apesar de não corresponder ao máximo de g, **corresponde ao máximo de uma restrição de** g **a** I, onde I é um certo intervalo centrado em 3.5





(podemos tomar $I = [3, 4]$, por exemplo, ou $I = [3.4, 3.6]$, etc.)

– o ponto $(5, 1.8)$, porque, apesar de não corresponder ao mínimo de g, corresponde ao **mínimo de uma restrição de** g **a** J, onde J é a intersecção com o domínio $[-5, 5]$ de um certo intervalo centrado em 5: podemos tomar $J = [4, 5]$, $J = [4.7, 5]$, etc.

Para traduzir este facto dizemos que a função g tem um **máximo relativo** ou **máximo local** com o valor 2.5, atingido no ponto 3.5; e tem um **mínimo relativo**, ou **mínimo local**, com o valor 1.8, atingido no ponto 5.

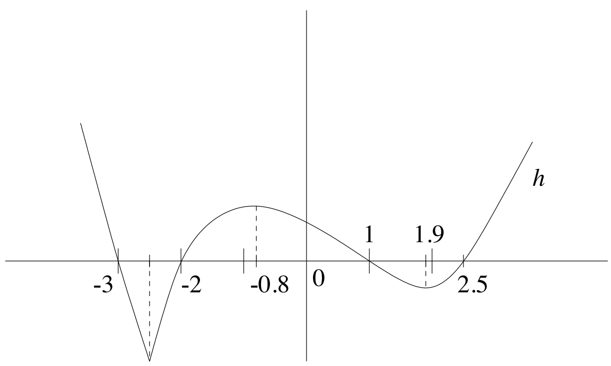
DEFINIÇÃO Dizemos que a função real de variável real $f : A \to \mathbb{R}$ tem **máximo relativo** ou **local** no ponto $a \in A$ se **há** um intervalo I centrado em a tal que $f(a)$ é o máximo de f restringida a $A \cap I$. Substituindo o vocábulo "máximo" por "mínimo" obtemos a definição de **mínimo relativo** ou **local**.

Assim, um máximo relativo de uma função é simplesmente um máximo de uma sua restrição conveniente. Analogamente para um mínimo relativo.

O máximo (respectivamente, mínimo) duma função, quando existe, é obviamente máximo (mínimo) relativo. Quando pretendemos sublinhar a distinção entre máximo relativo e máximo, usamos a expressão **máximo absoluto** como sinónimo de máximo. Do mesmo modo se introduz a definição de **mínimo absoluto**.

Dá-se o nome de **extremo (absoluto, relativo)** a um máximo (absoluto, relativo) ou um mínimo (absoluto, relativo).

EXEMPLO 6.3 Suponhamos que da função $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, parte de cujo gráfico está representada na figura, sabemos que:



(i) h é estritamente decrescente em $]-\infty, -2.5]$.

(ii) h é estritamente crescente em $[1.9, +\infty]$.

Então os únicos extremos relativos de h são os valores que h atinge em -2.5, 0.8 e 1.9; h não tem máximo e o seu mínimo é o valor atingido no ponto -2.5.

A nossa pesquisa de máximos e mínimos relativos é implicitamente baseada na observação de princípios simples para os quais não é nada difícil dar uma justificação:

Facto 6.3 *Se há um intervalo $[a-\delta, a+\delta]$ tal que a função f é crescente em $[a-\delta, a]$ e decrescente em $[a, a+\delta]$, então f tem um máximo local em a.*

Facto 6.4 *Se há um intervalo $[a-\delta, a+\delta]$ tal que a função f é decrescente em $[a-\delta, a]$ e crescente em $[a, a+\delta]$, então f tem um mínimo local em a.*

NOTA SOBRE TERMINOLOGIA Dá-se o nome de **função (estritamente) monótona** a qualquer função que seja (estritamente) crescente ou (estritamente) decrescente.

EXERCÍCIOS

6.1 A função x^2 em $\mathbb{R}$ tem o valor mínimo 0 e não tem valor máximo. E se a restringíssemos ao intervalo $[-1, 2]$?

6.2 A função $1-2x$ tem máximo ou mínimo em $]0, 1[$?

6.3 A função x^2 tem máximo ou mínimo no intervalo $]-1, 2[$? E no intervalo $[-1, 2]$?

6.4 A função $\frac{1}{x}$ tem máximo ou mínimo no intervalo $]0, 10]$? E no intervalo $]0, +\infty[$?

Facto 6.5 *A soma de duas funções crescentes (respectivamente, decrescentes) definidas num dado domínio A é crescente (repectivamente, descrescente).*

Demonstração Sejam $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : A \to \mathbb{R}$ crescentes. Se $x_1, x_2 \in A$ e $x_1 < x_2$ tem-se $f(x_1) \leq f(x_2)$ e $g(x_1) \leq g(x_2)$. Podemos adicionar estas desigualdades membro a membro e obtemos uma desigualdade ainda válida:

$$f(x_1) + g(x_1) \leq f(x_2) + g(x_2).$$

Mostámos, pois, que a função definida pela expressão $f(x) + g(x)$ [a que chamamos a **soma** de f e g] é crescente. Analogamente se trata o caso das funções decrescentes. ■

EXEMPLO 6.4 A função $-2x + 1 + \frac{1}{x}$ é decrescente em $]0, +\infty[$.

Facto 6.6 *Sejam $f : A \to \mathbb{R}$, $g : A \to \mathbb{R}$ funções crescentes e* **positivas**. *Então a função definida pela expressão $f(x)g(x)$ (a que chamamos* **produto** *de f e g) é crescente.*

Demonstração Repetir (com cuidado!) a demonstração do facto anterior, substituindo soma por produto. Observar a utilização da condição ‘‘positivas’’. ■

Facto 6.7 *Seja* $f : A \to \mathbb{R}$ *uma função crescente (respectivamente, decrescente). Então a sua simétrica (isto é, definida por* $-f(x)$*) é descrescente (respectivamente, crescente).*

Demonstração No caso em que f é crescente, $x_1, x_2 \in A$ e $x_1 < x_2$, tem-se $f(x_1) \leq f(x_2)$. Mas então, multiplicando esta desigualdade por -1 obtém-se $-f(x_1) \geq -f(x_2)$ e isto mostra que a função definida pela expressão $-f(x)$ é decrescente. Analogamente se faz a demonstração no caso em que f é decrescente. ■

É fácil dar uma interpretação gráfica deste facto. (Ver o que está dito na secção 8 a respeito dos gráficos de f e $-f$.)

Facto 6.8 *Seja* $f : A \to \mathbb{R}$ *uma função crescente (respectivamente, decrescente) positiva. Então a função definida pela expressão* $1/f(x)$ *é decrescente (respectivamente, crescen te).*

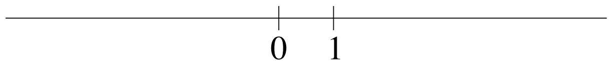
EXEMPLO 6.5 Combinando adequadamente alguns dos factos anteriores, não é difícil concluir que:

a) a função $(3x+1)(x-5)^2$ é crescente em $[5, +\infty[$;

b) a função $\frac{x}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x}$ é crescente em $[-1, +\infty[$.

7 A noção de distância e a função módulo

Consideremos o eixo cartesiano $0x$ no qual estão representados os números reais:



Como sabemos, fixados os pontos correspondentes a 0 e a 1, qualquer número real tem um único representante sobre a recta, à direita ou à esquerda de zero, consoante o número é positivo ou negativo.

É importante avaliar a **distância** entre dois pontos da recta, ou seja, entre os dois números que lhes correspondem. A **distância** entre dois pontos é o comprimento do segmento que os une, sendo esse comprimento referido à unidade de medida que é o segmento de extremos 0 e 1. Está relacionada com a noção que introduzimos a seguir:

DEFINIÇÃO Dado $x \in \mathbb{R}$, chamamos **módulo** ou **valor absoluto** de x ao número definido por:

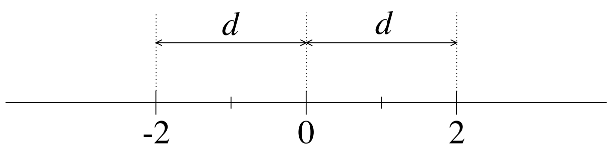
$$|x| := \begin{cases} x, & \text{se } x > 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

À **função** $x \mapsto |x|$, definida de $\mathbb{R}$ para $\mathbb{R}$, chama-se **função módulo** ou **função valor absoluto**.

EXEMPLO 7.1

Se $x = -2$ então $|x| = 2$. Se $x = 2$ então também $|x| = 2$. A **distância** d entre -2 e 0 é igual à distância entre 0 e 2 e tem valor 2.

Se $x = 3$ então $|x| = 3$.



Facto 7.1 *Para qualquer número real x, $|x|$ é o maior dos dois números x, $-x$.*

Demonstração Se $x \geq 0$, então $-x \leq 0 \leq x$ e portanto o maior dos números $x, -x$ é $x = |x|$. Se $x \leq 0$, então $x \leq 0 \leq -x$ e desta vez o maior dos números $x, -x$ é $-x = |x|$. ■

Facto 7.2 *Dados* $a, b \in \mathbb{R}$*, tem-se*
$$|a+b| \leq |a| + |b|.$$

Demonstração Do facto anterior, decorre que $\forall x \in \mathbb{R}$
$$x \leq |x| \qquad \text{e} \qquad -x \leq |x|.$$
Logo,
$$a+b \leq |a| + |b|$$
e
$$-a-b \leq |a| + |b|.$$
Das duas desigualdades anteriores conclui-se que o maior dos números $a+b, -a-b$ é $\leq |a|+|b|$ e por isso
$$|a+b| \leq |a| + |b|.$$
■

Facto 7.3 *Dados* $a, b \in \mathbb{R}$*, tem-se*
$$|ab| = |a|\,|b|.$$

Demonstração

Se $a \geq 0$ e $b \geq 0$, tem-se $ab \geq 0$ e $|ab| = ab = |a|.|b|$.

Se $a \geq 0$ e $b \leq 0$, tem-se $ab \leq 0$ e $|ab| = -ab = a.(-b) = |a|.|b|$.

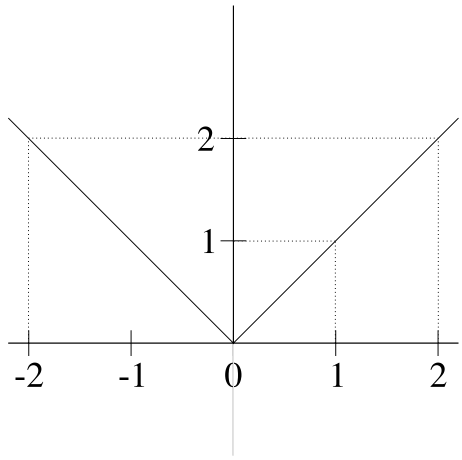
Se $a \leq 0$ e $b \leq 0$, tem-se $ab \geq 0$ e $|ab| = ab = (-a).(-b) = |a|.|b|$. ■

Facilmente se verifica que a função módulo é uma função par: $|-x| = |x|, \forall x \in \mathbb{R}$. É claro, da definição, que $|x|$ é sempre positivo, se $x \neq 0$ e 0, se $x = 0$; e que

$$\boxed{\text{o valor } |x| \text{ representa a } \textbf{distância} \text{ de } x \text{ a } 0,}$$

visto que ele pode ser interpretado como o comprimento do segmento cujos extremos são os pontos que correspondem a **0** e ***x***.

Estudemos o gráfico da função módulo:



Notemos que:

1) A função, restringida a cada um dos intervalos $[0, +\infty[$ e $]-\infty, 0]$, é linear. Cada um dos respectivos gráficos é uma semi-recta.

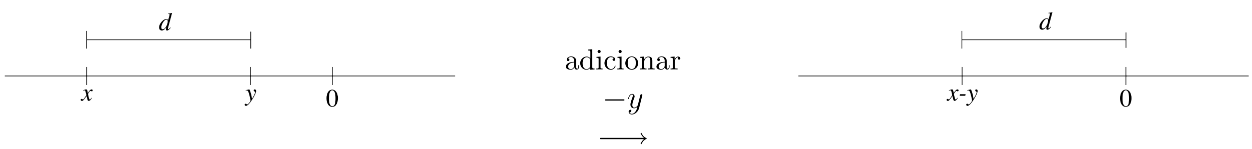
2) O contradomínio da função é $[0, +\infty[$. Porquê?

3) $x^2 = |x|^2$ para todo o $x \in \mathbb{R}$.

Consideremos agora dois pontos arbitrários x e y. Como exprimir a distância entre eles?

Se um deles for a origem, por exemplo $y = 0$, vimos que essa distância é $|x|$.

Suponhamos que ambos são diferentes de zero. A distância entre eles não se altera se a ambos somarmos o mesmo valor, por exemplo, o simétrico de um deles, ou seja, se efectuarmos uma translação do segmento por eles formado, de modo a que uma das suas extremidades coincida com a origem:



$\boxed{\text{Então a distância entre } x \text{ e } y \text{ é } |x - y|!}$

Notemos que:

1) A distância entre x e y é igual à distância entre y e x. Porquê?

2) A distância entre x e x é 0. Porquê?

Fixemos agora $a \in \mathbb{R}$ e tomemos $d > 0$:

Quais os pontos que estão à distância d de a?

Resposta: $a - d$ e $a + d$.

Vejamos porquê:

Para resolver a equação $|x - a| = d$ (em que a incógnita é x e a e d são dados), notamos que, pela definição de módulo,

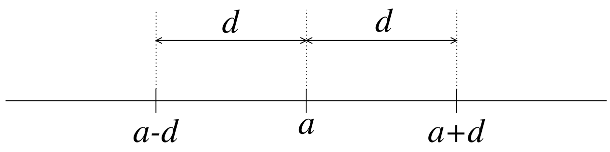
$$|x - a| = d \qquad \text{sse} \qquad x - a = d \qquad \text{ou} \qquad a - x = d,$$

ou seja,

$$|x - a| = d \qquad \text{sse} \qquad x = a + d \qquad \text{ou} \qquad x = a - d.$$

Concluímos, então, que as soluções são $a + d$ e $a - d$.

Do ponto de vista geométrico este resultado é bastante intuitivo, como se vê na figura:



Os números que resolvem a inequação

$$|x - a| \leq d$$

são os que correspondem aos pontos da recta que estão entre $a - d$ e $a + d$, incluindo estes, ou seja:

$$\{x \in \mathbb{R} : \ |x - a| \leq d\} = [a - d, a + d] \tag{17}$$

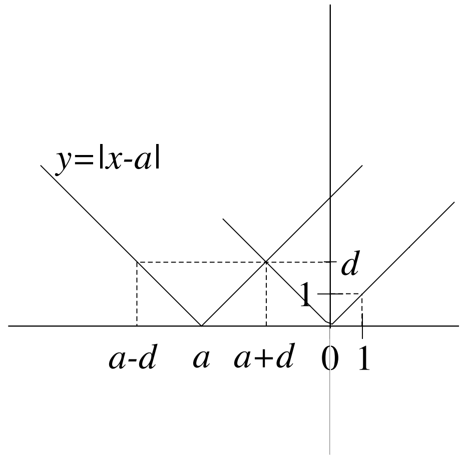
De facto:

Se $x \geq a$ então $x - a \geq 0$ e $|x - a| = x - a$. Assim $|x - a| \leq d$ e $x \geq a$ equivale a $a \leq x \leq a + d$.

Se $x \leq a$ então $x - a \leq 0$ e $|x - a| = a - x$. Assim, $|x - a| \leq d$ e $x \leq a$ equivale a $a - d \leq x \leq a$, o que, juntamente com a conclusão anterior, nos leva a concluir a igualdade (17).

Representemos graficamente a função

$$x \mapsto |x-a|, \qquad x \in \mathbb{R}.$$



Da leitura do gráfico (ou directamente a partir da definição de módulo) se conclui:

1) Se $x = a$ então $|x-a| = 0$.

2) Se $x \geq a$ então $|x-a| = x-a$.

3) Se $x \leq a$ então $|x-a| = a-x$.

4) $\{x \in \mathbb{R} : \ |x-a| = d\} = \{a-d, a+d\}$

5) $\{x \in \mathbb{R} : \ |x-a| \leq d\} = [a-d, a+d]$

6) $\{x \in \mathbb{R} : \ |x-a| > d\} =]-\infty, a-d[\, \cup \,]a+d, +\infty[$

EXERCÍCIOS

7.1 Dizer se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas.

a) $|2-x| < 4 \implies x < 2$

b) $x < 2 \implies |2-x| < 4$

c) $\forall x \ \exists y : \ |x-y| = 3$

d) $\forall x \ \exists y > 0 : \ |x-y| = 3$

7.2 Descrever, utilizando intervalos (ou indicar os seus elementos, caso sejam em número finito) os conjuntos seguintes:

a) $\{x \in \mathbb{R} : \ |x-4| = |x-2|\}$

b) $\{x \in \mathbb{R} : \ |x-4| < |x+2|\}$

c) $\{x \in \mathbb{R} : \ x-2 \geq |x|\}$

d) $\{x \in \mathbb{R} : \ |x-2| \geq x\}$

7.3 Exprimir, através de uma condição contendo módulos, a propriedade que caracteriza:

a) "os elementos x de $\mathbb{R}$ que estão a uma distância da origem superior a M"

b) "os elementos x da recta que distam de 2 o dobro do que distam de -2"

c) "os elementos x da recta equidistantes de -3 e 5"

e determinar, sob forma de intervalos (ou indicar os seus elementos, caso sejam em número finito) os conjuntos definidos em a), b) e c).

Outras funções exprimíveis a partir do valor absoluto

Suponhamos dadas três constante reais: a, m, p.

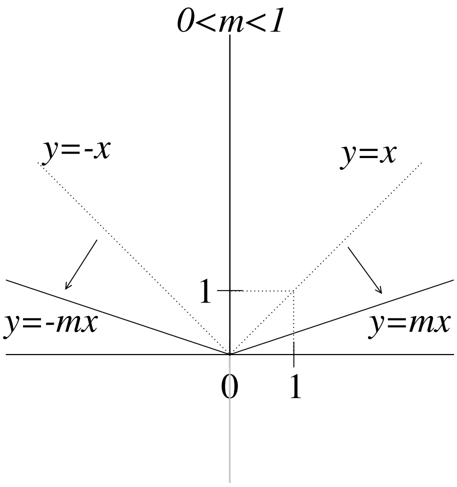
Pretendemos estudar a representação gráfica da função

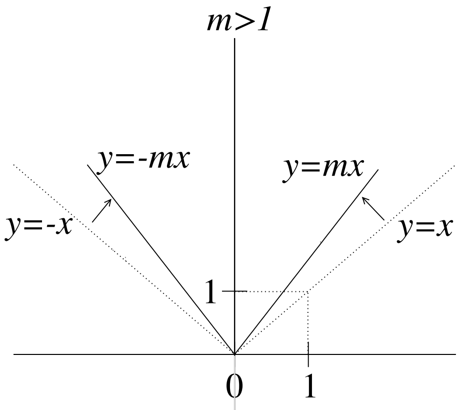
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) &= m|x-a|+p \end{aligned}$$

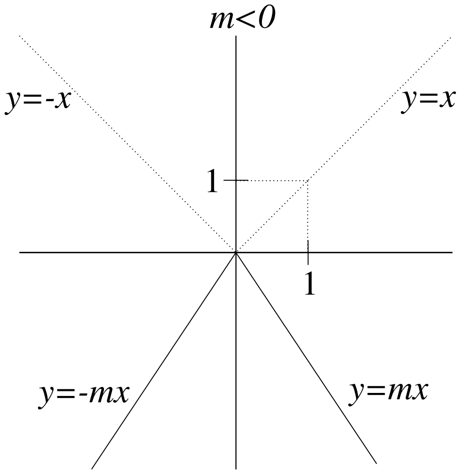
Estudemos alguns casos particulares e relacionemo-los:

1) $a = p = 0$.

$f(x) = m|x| = \begin{cases} mx, & \text{se } x \geq 0 \\ -mx, & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$



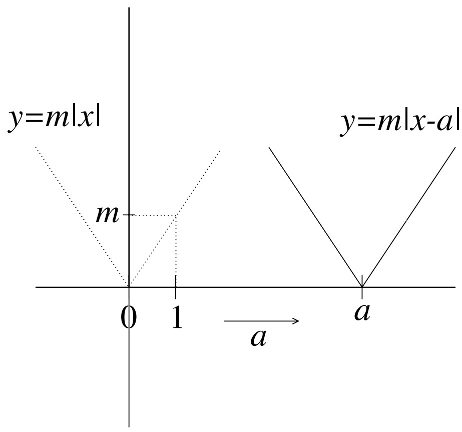




O parâmetro m tem como efeito: no caso $m > 0$ "abrir" ou "fechar" o "V" do gráfico de $|.|$, consoante $m < 1$ ou $m > 1$, respectivamente; no caso $m < 0$, "inverter" o "V", para além de o abrir ou fechar.

2) $p = 0$.

$f(x) = m|x-a| = \begin{cases} m(x-a) & \text{se } x \geq a \\ m(a-x) & \text{se } x \leq a \end{cases}$.



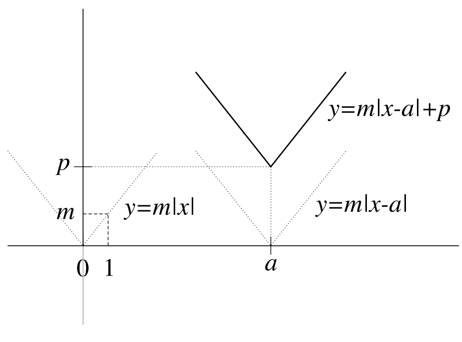
Trata-se de uma função cuja restrição a cada um dos intervalos $]-\infty, a]$ e $[a, +\infty[$ é afim, com o mesmo declive da anterior, mas anulando-se para $x = a$ e não para $x = 0$. A introdução do parâmetro a tem como efeito a translação de 0 para a, ao longo do eixo $0x$, do gráfico de $x \mapsto m|x|$.

3) Caso geral.

$f(x) = m|x - a| + p$.

Os valores desta função obtêm-se dos da anterior somando-lhes p unidades. A introdução do parâmetro p tem como efeito a translação de p unidades, ao longo do eixo $0y$, do gráfico da função $x \mapsto m|x - a|$.

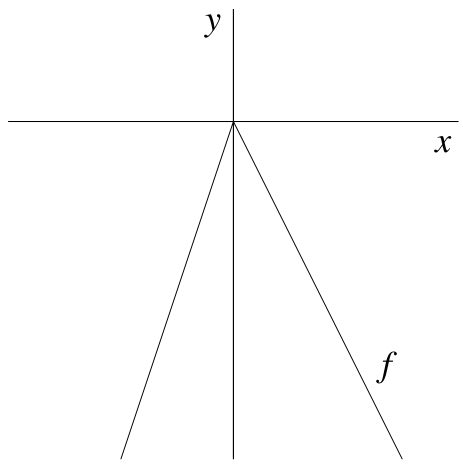
Assim, se $m > 0$, a função $f(x) = m|x - a| + p$ tem mínimo absoluto no ponto $x = a$ com o valor p. Se $m < 0$, vale a mesma afirmação com "máximo" em vez de "mínimo".



`A utilização do valor absoluto permite exprimir numa fórmula única funções que não são afins, mas para as quais existe` $a \in \mathbb{R}$ `tal que a sua restrição a` $]-\infty, a]$ `é afim e a restrição a` $[a, +\infty[$ `é também afim.`

Por exemplo, consideremos a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ assim definida:

$$f(x) = \begin{cases} 3x & \text{se } x \leq 0 \\ -2x & \text{se } x \geq 0 \end{cases} \tag{18}$$



Não é do tipo anteriormente estudado nesta secção porque os declives das restrições a $]-\infty, 0]$ e $[0, +\infty[$ não são simétricos. Mas é fácil ver que podemos escrever f na forma de soma de uma função afim com um múltiplo da função módulo:

$$cx + d|x|$$

escolhendo adequadamente os coeficientes c e d. Com efeito, a expressão anterior é igual a

$$(c+d)x \qquad \text{se } x \geq 0$$

e a

$$(c-d)x \qquad \text{se } x \leq 0.$$

Logo, pretendemos que

$$c + d = -2 \qquad \text{e} \qquad c - d = 3.$$

Daqui concluímos, resolvendo este sistema linear, $c = \frac{1}{2}$ e $d = -\frac{5}{2}$. Então podemos dizer que (18) é a função que se pode descrever simplesmente como

$$f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}|x|.$$

8 Mais sobre funções e gráficos. Transformações de funções e gráficos.

Já recordámos que o gráfico de uma função afim é uma recta e recordámos também o aspecto do gráfico da função que expressa a lei de proporcionalidade inversa.

Se nos for dada uma função real de variável real, através de uma expressão analítica, como formar uma primeira ideia do seu comportamento? Um gráfico pode ser de grande utilidade, pois ele permite-nos visualizar, por exemplo, os intervalos onde a função é crecente ou decrescente.

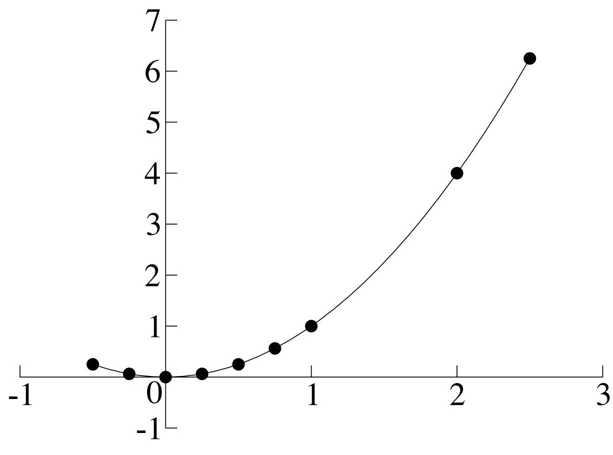
Tomemos, por exemplo, a função

$$y = x^2 \tag{19}$$

de domínio $\mathbb{R}$. Realizar representações gráficas desta função não é tão simples como no caso das funções afins, em que se trata de desenhar segmentos de recta. Podemos, no entanto, calcular coordenadas de um certo número de pontos correspondendo a um espaçamento razoável de valores de x, por exemplo, os que figuram na tabela seguinte:

x	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	2	2.5	$\ldots$
y	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{9}{16}$	1	4	6.25	$\ldots$

Representando-os num sistema de eixos cartesianos obtemos um total de 9 pontos aos quais ajustámos uma curva suave. Note-se como a rapidez com que os valores de y aumentam nos leva a usar escalas diferentes nos eixos, com a escolha de uma unidade menor no eixo Oy.



Conjecturando que a curva que traçámos dá uma representação aceitável do gráfico $y = x^2$, podemos então utilizá-la para obter, pelo menos em aproximação, valores da função:

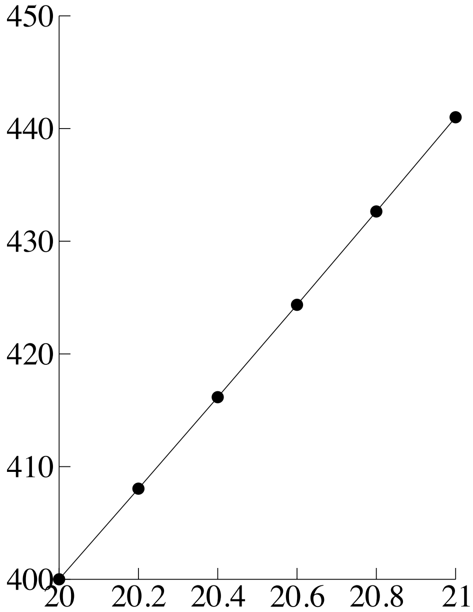
por exemplo, para $x = \frac{1}{8}$ e $x = 1.5$ obtemos algo como $y = 0$ e $y = 2$; o que, comparado com os valores exactos (0.015625 e 2.25), mostra a relativa eficácia da representação obtida.

EXERCÍCIO 8.1 Considerando a restrição de x^2 ao intervalo $[-0.5, 2.5]$, que acabamos de representar graficamente, indicar os seus máximos e mínimos (absolutos e relativos).

A respeito da mesma função construamos agora a tabela

x	20	20.2	20.4	20.6	20.8	21
y	400	408.04	416.16	429.36	432.64	441

e, usando um processo análogo, e com uma escala ainda menor no eixo Oy, o gráfico que ela sugere:

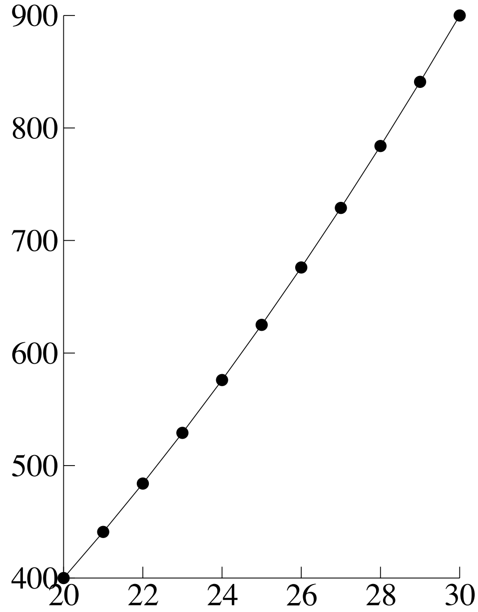


Observemos que somos levados, novamente, a utilizar um sistema de eixos com unidades de medida diferentes, uma vez que, ao incremento de uma unidade em x corresponde em y um incremento de 41 unidades! Repare-se que a função parece ter um comportamento aproximadamente afim no intervalo $[20, 21]$: a incrementos de x no valor de 0.2 correspondem incrementos de y com o valor **aproximado** de 8 unidades. Mais uma vez, poderemos obter uma estimativa do valor de y que corresponde a 20.1, 20.3, etc. utilizando o gráfico.

Se agora considerarmos os valores da função nos pontos inteiros do intervalo $[20, 30]$

x	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
y	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841	900

o carácter não afim de f evidencia-se mais (relembrar o que dissemos sobre acréscimos das funções afins na secção 3):



a intervalos de 1 unidade no eixo Ox correspondem, no eixo Oy, intervalos que no início são da ordem de 40 unidades e no final excedem as 50 unidades.

Este desvio em relação ao comportamento afim acentua-se à medida que consideramos intervalos de valores de x progressivamente maiores.

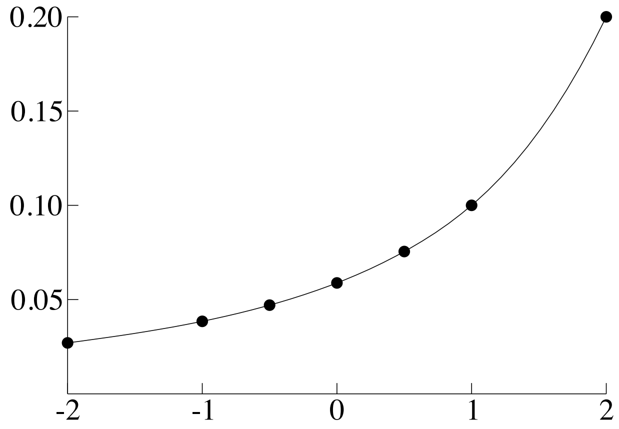
Consideremos seguidamente a função dada por

$$y = \frac{1}{1 + (x-4)^2}$$

Após construirmos a tabela de valores correspondentes

x	0	$\frac{1}{2}$	1	2	$-\frac{1}{2}$	-1	-2
y	0.059	0.075	0.1	0.2	0.047	0.038	0.027

podemos tentar esquematizar o gráfico no intervalo $[-2, 2]$:

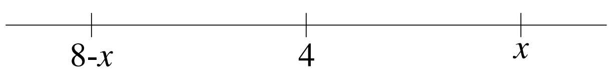


Colhemos uma primeira impressão de que a função dada é crescente no intervalo considerado e podemos usar o gráfico para procurar aproximações dos valores que toma em pontos do intervalo $[-2, 2]$ distintos dos considerados. É natural interrogarmo-nos: a função em estudo será crescente em todo o domínio? Facilmente reconhecemos que não pode ser assim, se atendermos a que os valores encontrados para f vão repetir-se noutros pontos: por exemplo,

$$f(0) = f(8), \qquad f(1) = f(7), \qquad \text{etc.}$$

uma vez que $(-4)^2 = (8-4)^2$, $(1-4)^2 = (7-4)^2, \ldots$

Na verdade, não só nos pares de pontos 0 e 8, 1 e 7, etc., mas em todos os pares de pontos equidistantes do ponto 4, f toma sempre o mesmo valor! Vamos exprimir este facto em forma simbólica. Repare-se que, para cada número $x > 4$, o número que tem a mesma distância que x ao ponto 4 é $4 - (x - 4) = 8 - x$:



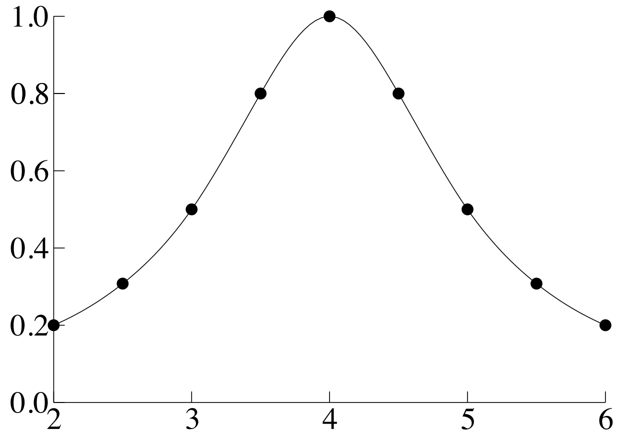
Por conseguinte, a propriedade de f a que acabamos de nos referir é

$$f(x) = f(8-x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Esta observação sugere que o ponto 4 tem um papel destacado na descrição do comportamento da função, e por isso deveríamos tentar executar um gráfico da sua restrição a um intervalo centrado em 4; formando nova tabela de valores

x	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	5.5	6
y	0.2	0.31	0.5	0.8	1	0.8	0.5	0.31	0.2

chegamos a construir a curva com o aspecto seguinte



o qual nos revela com maior clareza como evoluem os valores de f à medida que x varia. É agora aparente que f se comporta como função crescente no intervalo $[2, 4]$, sendo decrescente em $[4, 6]$; no ponto $x = 4$ parece, pois, assumir o seu valor maior, $f(4) = 1$; e a recta vertical $x = 4$ assume o papel de um **eixo de simetria** do gráfico, tal como o eixo $0y$ é eixo de simetria do gráfico de qualquer função par.

A consideração destes exemplos sugere que:

1) De um modo geral, o comportamento da função definida por uma dada expressão analítica tem características muito próprias, variando de função para função; e a mesma função exibe comportamentos distintos em diferentes zonas do seu domínio.

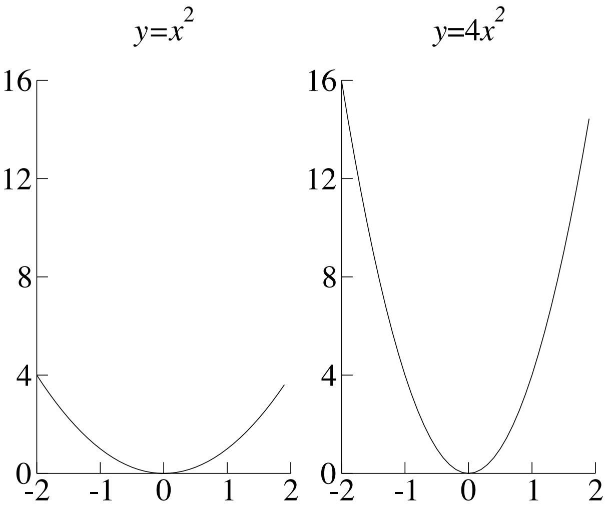
2) É desejável individualizar características da função dada que facilitem o seu estudo e alguma antevisão do aspecto do gráfico. É desejável também introduzir técnicas para a detecção de tais características que sejam aplicáveis a uma larga classe de funções.

Ora, é precisamente do estudo de tais técnicas que nos ocuparemos, nos capítulos dedicados a funções, ao longo dos três anos de estudo agora iniciados.

Voltemos a considerar a função $f(x) = x^2$ em $\mathbb{R}$. Procuremos relacionar com ela a função

$$g(x) = 4x^2.$$

O valor de g num dado ponto x obtém-se multiplicando por 4 o correspondente valor de f. Por outras palavras: se (x, y) é um ponto do gráfico de f, então $(x, 4y)$ é um ponto do gráfico de g. Portanto, o gráfico de g obtém-se do gráfico de f "dilatando" a ordenada de cada ponto deste (que é multiplicada pelo factor 4) enquanto a abcissa do ponto fica invariante.



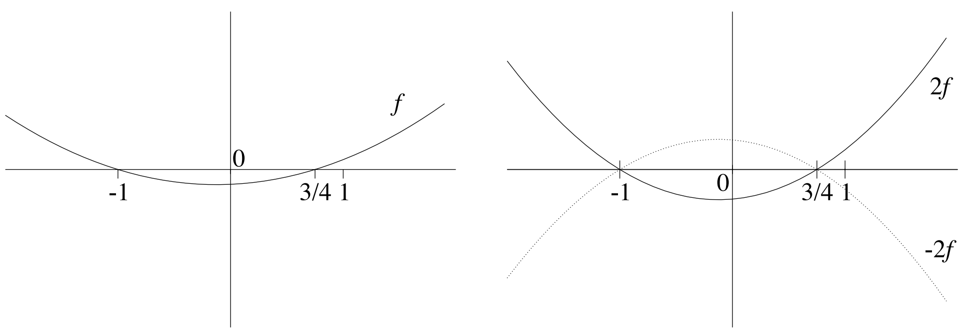
De um modo geral, é fácil relacionar os gráficos das funções

$$f(x) \qquad \text{e} \qquad af(x)$$

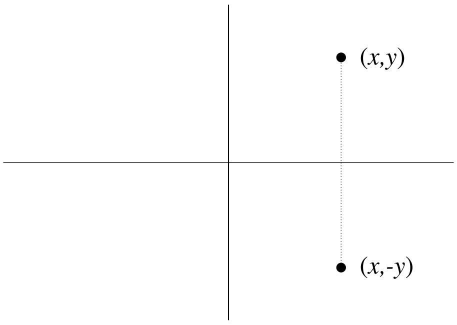
onde a é um número dado, positivo ou negativo.

Um ponto (x, y) está no gráfico da primeira se, e só se, o ponto (x, ay) está no gráfico da segunda.

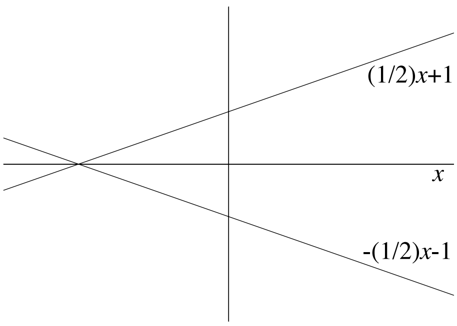
E dizemos, por isso, que o gráfico da segunda é obtido por aplicação ao gráfico da primeira do factor de escala a no eixo $0y$. Se $a > 1$ há alongamento na direcção do eixo $0y$ e falamos de **dilatação**. Se $0 < a < 1$ há encurtamento na direcção do eixo $0y$ e falamos de **contracção**. Se $a < 0$ é preciso contar com um efeito de reflexão em relação ao eixo $0x$ (o efeito da multiplicação de ordenadas por -1). A figura seguinte dá ideia dos gráficos das funções $2f(x)$ e $-2f(x)$ obtidos a partir do gráfico da função f, que surge em primeiro lugar:

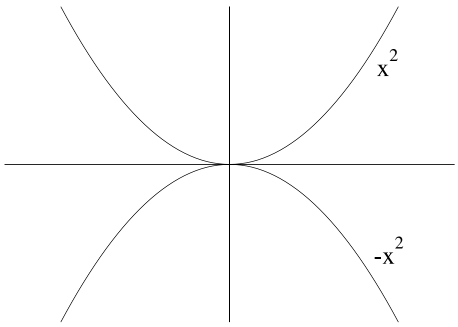


Em particular, a passagem da função f para a função $-f$ é fácil de descrever! A cada ponto (x, y) do gráfico de f corresponde o ponto $(x, -y)$ do gráfico de $-f$, o qual é o simétrico do primeiro em relação ao eixo $0x$.



Portanto o gráfico de $-f$ obtém-se reflectindo o de f no eixo Ox, como se este actuasse como um espelho:



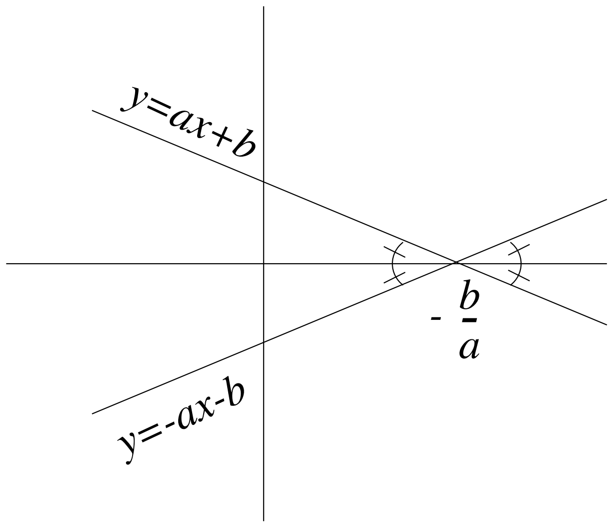


Vale a pena observar o efeito da reflexão que permite passar de f a $-f$ no caso geral de uma função afim $ax + b$. O seu gráfico é o lugar geométrico definido por

$$y = ax + b$$

e o gráfico da sua simétrica é o lugar geométrico definido por

$$y = -ax - b$$



Trata-se de duas rectas que passam pelo ponto $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$ e que fazem o mesmo ângulo com o eixo $0x$. O declive da segunda é simétrico do declive da primeira.

Vejamos agora outro tipo de relacionamento entre funções, em que intervém uma dilatação.

Reconsideremos a função $f(x) = x^2$ e observemos que a fórmula que define a função $g(x) = 4x^2$ do início deste parágrafo pode ser escrita assim:

$$g(x) = (2x)^2$$

ou ainda

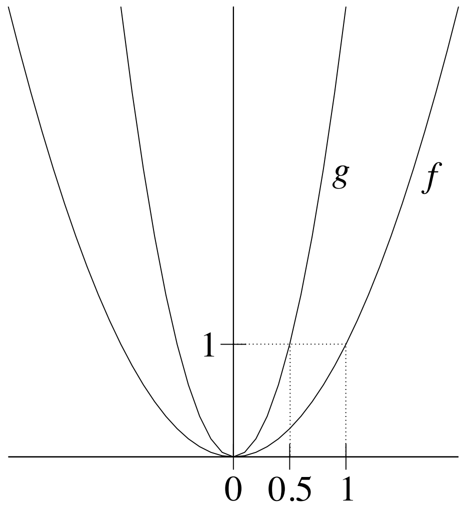
$$g(x) = f(2x).$$

Assim, g faz corresponder a cada número real x o mesmo valor que f faz corresponder a $2x$. Dito doutro modo: (x, y) é ponto do gráfico de g se e só se $(2x, y)$ é ponto do gráfico de f. Ou ainda, já que nesta afirmação x é "variável muda",

$$\begin{array}{l}(\frac{x}{2}, y) \text{ é ponto do gráfico de } g \text{ se e só se} \\ (x, y) \text{ é ponto do gráfico de } f.\end{array}$$

Esta observação constitui uma regra para construir o gráfico de g a partir do de f. Por exemplo, ao ponto $(1, 1)$ do gráfico de f corresponde o ponto $(\frac{1}{2}, 1)$ do gráfico de g.

Assim, a função g pode também obter-se a partir de f por um processo de contracção, mas efectuada ao longo do eixo das abcissas.



Mais geralmente,

Dada uma função f e um número $b \neq 0$, a nova função g dada por $g(x) = f(bx)$ tem um gráfico fácil de caracterizar: um ponto (x, y) está no gráfico de g se e só se (bx, y) está no gráfico de f.

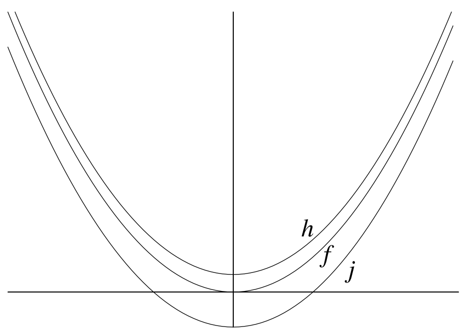
Seguidamente, consideremos as duas funções

$$h(x) = x^2 + 1, \qquad j(x) = x^2 - 2.$$

Podemos escrever (reservando ainda a letra f para representar $f(x) = x^2$)

$$h(x) = f(x) + 1, \qquad j(x) = f(x) - 2.$$

Cada ponto (x, y) do gráfico de f dá origem ao ponto $(x, y + 1)$ do gráfico de h; e ao ponto $(x, y - 2)$ do gráfico de j; dizemos que o gráfico de h é obtido a partir do de f por uma translação vertical de 1 unidade; e que o gráfico de j é obtido a partir do de f por uma translação vertical de -2 unidades.

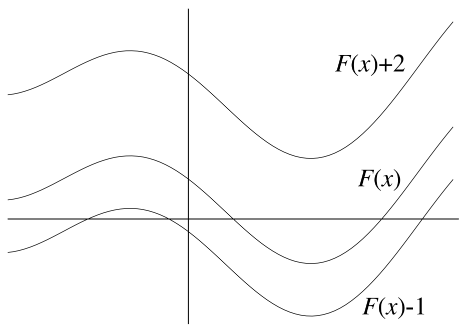


É fácil generalizar esta consideração a uma função arbitrária $F : D \to \mathbb{R}$ e a uma constante arbitrária b. A função

$$G(x) = F(x) + b$$

tem um gráfico que se obtém deslocando o de F na vertical de um valor igual a b (sendo a deslocação na direcção positiva, ou negativa, do eixo Oy, conforme $b > 0$ ou $b < 0$.)

Um ponto (x, y) está no gráfico de F se e só se $(x, y + b)$ está no gráfico de G.



Noutras palavras: a adição de um número à expressão analítica de uma função corresponde, em termos de gráficos, a uma translação na vertical.

É o vector (vertical) $\vec{v} \leftrightarrow (0, b)$ que realiza esta translação. Efectivamente, sabemos (Geometria, P75) que $\vec{v}$ transforma cada ponto $A \leftrightarrow (x, y)$ do plano no ponto $A + \vec{v} \leftrightarrow (x, y + b)$. Noutras palavras, o gráfico de G obtém-se aplicando a translação $\vec{v} \leftrightarrow (0, b)$ ao gráfico de F.

Quando fizemos a revisão das funções afins observámos que elas se comportam de uma maneira muito especial em relação às translações (na variável independente, isto é, ao longo do eixo $0x$). Mais precisamente, comparámos uma função dada $F(x)$ com a função $F(x+h)$, em que h é um número fixo.

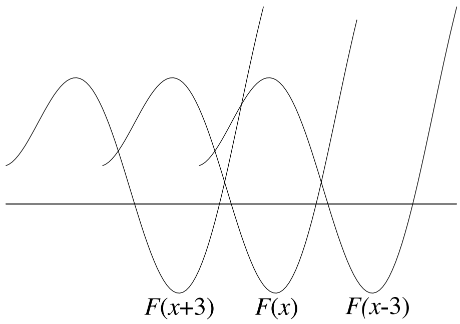
Refaçamos esta comparação relativamente a uma função arbitrária, F. Suponhamos, por exemplo, que $h = -3$. Que relação se pode descrever entre as funções

$$F(x) \qquad \text{e} \qquad H(x) = F(x - 3)?$$

Reparemos que a segunda toma o mesmo valor que a primeira em pontos que foram deslocados 3 unidades para a direita no eixo Ox:

$$H(3) = F(0), \qquad H\left(\frac{5}{2}\right) = F\left(-\frac{1}{2}\right), \text{ etc.}$$

Por conseguinte, a cada ponto (x, y) do gráfico de F está naturalmente associado o ponto $(x+3, y)$ do gráfico de H. E reciprocamente, ao ponto (x, y) do gráfico de H está associado o ponto $(x-3, y)$ do gráfico de F. O gráfico de H obtém-se translatando o de F três unidades na direcção positiva do eixo $0x$.



Considerações análogas levam a reconhecer que a função

$$H(x) = F(x+3)$$

tem como gráfico o que resulta do de F após translação de 3 unidades na direcção negativa do eixo Ox.

Seja h um número real dado. O leitor inferirá facilmente a relação entre os gráficos de $F(x)$ e de $H(x) = F(x+h)$:

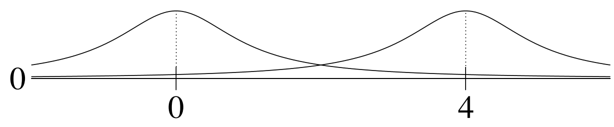
Um ponto (x, y) está no gráfico de F se e só se o ponto $(x-h, y)$ está no gráfico de H. (Em particular, na passagem de F para H o gráfico é translatado para a direita se $h < 0$ e para a esquerda se $h > 0$.)

É o vector (horizontal) $\vec{u} \leftrightarrow (-h, 0)$ que realiza esta translação, visto que ele transforma cada ponto $A \leftrightarrow (x, y)$ no ponto $A + \vec{u} \leftrightarrow (x-h, y)$. Por outras palavras: o gráfico de H obtém-se aplicando a translação $\vec{u} \leftrightarrow (-h, 0)$ ao gráfico de F.

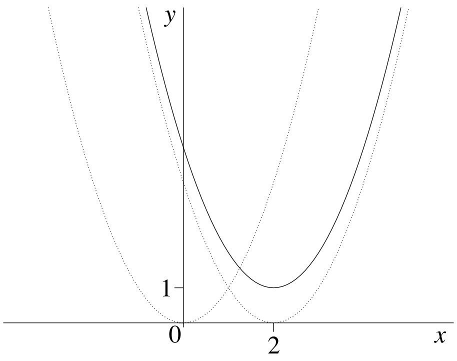
EXEMPLO 8.1 Na secção 3 estudámos o exemplo da função $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$: com a linguagem agora introduzida podemos afirmar que o que aí observámos foi que

O gráfico de f restringida ao intervalo $[100, 110]$ é o resultado de efectuar sobre o gráfico de f restringida ao intervalo $[0, 10]$ duas translações sucessivas: uma de 100 unidades na direcção positiva do eixo $0x$ e outra de 50 unidades na direcção positiva do eixo $0y$.

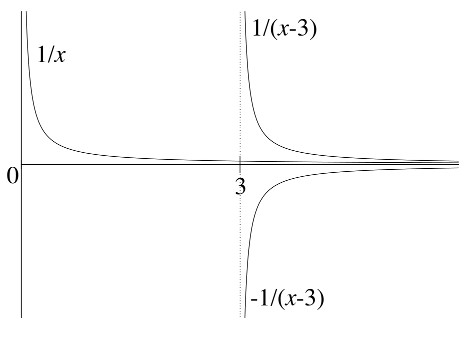
EXEMPLO 8.2 Os gráficos de $\frac{1}{1+x^2}$ e $\frac{1}{1+(x-4)^2}$ resultam um do outro por translação na direcção do eixo $0x$. O segundo é resultado de translatar o primeiro de 4 unidades na direcção positiva do eixo $0x$ e surgiu-nos num exemplo anterior.



EXEMPLO 8.3 Consideremos a função $1+(x-2)^2$. Podemos obter o seu gráfico a partir do da função x^2 pela sequência de operações: translação horizontal de 2 unidades para a direita; translação vertical de 1 unidade para cima.



EXEMPLO 8.4 O gráfico da função $-\frac{1}{x-3}$ no domínio $]3,+\infty[$, pode ser obtido a partir do de $\frac{1}{x}$ pela sequência de operações: translação de 3 unidades para a direita; reflexão em relação ao eixo Ox.



EXEMPLO 8.5 A função x^3+x+2 tem a raiz -1. Para obter a sua translatada que tem a raiz 0 basta considerar $(x-1)^3+(x-1)+2$. Com efeito, $(-1,0)$ pertence ao gráfico da primeira e queremos que $(0,0)$ esteja no gráfico da segunda. Requer-se, pois, uma translação (de uma unidade) para a direita.

EXEMPLO 8.6 Consideremos a função f definida em $\mathbb{R}$ por

$$f(x) = x^3 + x^2 - 2.$$

Facilmente se reconhece que f não é ímpar nem par. No entanto, **podemos obter a partir dela uma função ímpar** g definida por

$$g(x) = (x-h)^3 + (x-h)^2 - 2 + b$$

onde h e b são constantes, o que significa que, para passar de f para g, em termos de gráficos, efectuámos uma translação vertical $\vec{v} \leftrightarrow (0, b)$ seguida de uma translação horizontal $\vec{u} \leftrightarrow (h, 0)$. (Ou $\vec{u}$ seguida de $\vec{v}$.)

Vejamos que é possível escolher h e b de acordo com o que pretendemos. Efectuando os cálculos temos

$$\begin{aligned}
g(x) &= (x-h)^2(x-h+1-2+b) \\
&= (x^2 - 2hx + h^2)(x-h+1) + b - 2 \\
&= x^3 + (-2h - h + 1)x^2 + (h^2 + 2h^2 - 2h)x - h^3 + h^2 + b - 2 \\
&= x^3 + (1-3h)x^2 + (3h^2 - 2h)x - h^3 + h^2 + b - 2.
\end{aligned}$$

Escolhendo

$$1 - 3h = 0, \qquad -h^3 + h^2 + b - 2 = 0$$

ou seja, $h = \frac{1}{3}$ e $b = \frac{52}{27}$ a função g fica, efectivamente, ímpar.

Como o gráfico de g se obtém do de f pela translação

$$\vec{u} + \vec{v} \leftrightarrow \left(\frac{1}{3}, \frac{52}{27}\right)$$

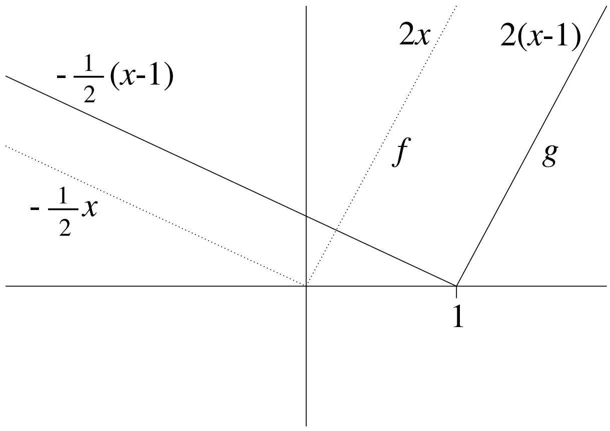
e a origem $(0, 0)$ é centro de simetria do gráfico de g, ficamos a saber, em particular, que o ponto

$$C = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{52}{27}\right)$$

é centro de simetria do gráfico da função f. Este resultado pode ser verificado numa máquina.

EXEMPLO 8.7 Consideremos a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}(x-1) & \text{se } x \leq 1 \\ 2(x-1) & \text{se } x \geq 1 \end{cases} \tag{20}$$



É uma função que se obtém, por translação na direcção do eixo Ox, a partir da função

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x & \text{se } x \leq 0 \\ 2x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

a qual é semelhante à que surgiu no final da secção 7. Assim, tendo em conta o que aí foi visto, é fácil inferir que podemos exprimir g como a soma

$$c(x-1) + d|x-1| \tag{21}$$

com uma escolha adequada dos coeficientes c e d. Uma vez que a expressão anterior é igual a

$$(c-d)(x-1) \qquad \text{se } x \leq 1$$

e a

$$(c+d)(x-1) \qquad \text{se } x \geq 1$$

basta escolher c e d de modo que

$$\begin{cases} c - d = -\frac{1}{2} \\ c + d = 2 \end{cases}$$

e, resolvendo este sistema, encontramos $c = \frac{3}{4}$, $d = \frac{5}{4}$. Podemos pois dizer que (20) é o mesmo que a função

$$g(x) = \frac{3}{4}(x-1) + \frac{5}{4}|x-1|.$$

EXEMPLO 8.8 Vejamos outro exemplo do mesmo tipo. A função introduzida a propósito do exemplo 5.7 (LOQUACIUS) tem também restrições afins a $[0, 60]$ e $[60, +\infty[$. A única diferença relativamente ao caso precedente é que o “vértice do ângulo” que constitui o gráfico não está no eixo $0x$, mas a função pode considerar-se como resultando de uma nestas condições por adição de 0.4 unidades. É natural esperar, pois, que se possa representar a referida função na forma

$$0.4 + a(x-60) + b|x-60|.$$

A determinação de a e b faz-se como anteriormente. Desta vez somos conduzidos ao sistema

$$\begin{aligned} a - b &= 0 \\ a + b &= \tfrac{0.4}{60} \end{aligned}$$

de onde $a = b = \frac{1}{300}$.

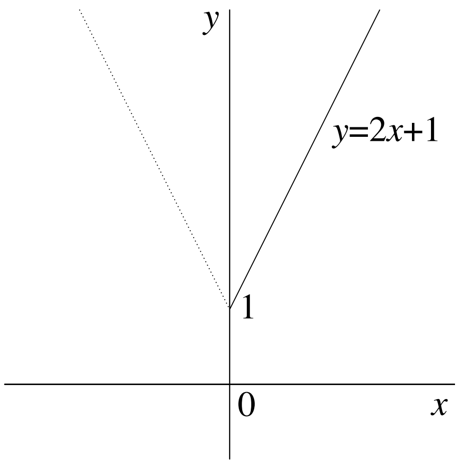
Portanto, a função do exemplo 5.7 é

$$0.4 + \frac{1}{300}(x - 60 + |x-60|).$$

Debrucemo-nos agora sobre outro tipo de transformação que se pode aplicar a funções para obter novas funções.

Consideremos a questão seguinte: pretende-se definir em $\mathbb{R}$ uma função **par** cuja restrição a $[0,+\infty[$ seja a função dada por

$$x \xrightarrow{f} 2x+1, \qquad\qquad x \geq 0.$$



Em termos genéricos, o que se pretende é ampliar o gráfico de f juntando-lhe a sua "imagem no espelho" que é a reflexão no eixo Oy da semirecta $y = 2x+1$, $x \geq 0$. É imediato reconhecer que a função par pedida $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pode ser definida por

$$P(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{se } x \geq 0 \\ -2x+1 & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

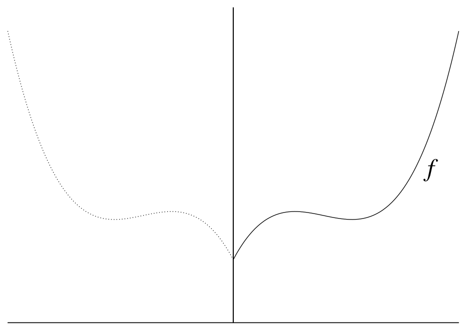
Não é difícil reconhecer que este procedimento pode ser generalizado. Dada uma função $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, é possível construir a partir dela uma função par

$$P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

através da regra

$$P(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \geq 0 \\ f(-x) & \text{se } x \leq 0. \end{cases} \tag{22}$$

É imediato que esta função **é efectivamente par** e que a restrição de P a $[0, +\infty[$ é f.



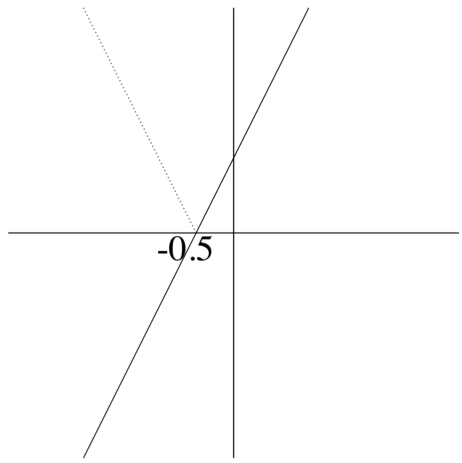
O gráfico de P é a união do gráfico de f com a sua "reflexão" no eixo Oy.

Observemos que a nova função P pode ser definida simplesmente pela fórmula

$$P(x) = f(|x|)$$

que condensa as instruções de cálculo dadas por (22).

Voltemos a considerar a função $2x + 1$, agora com domínio $\mathbb{R}$, e recordemos o comportamento da nova função $|2x + 1|$.

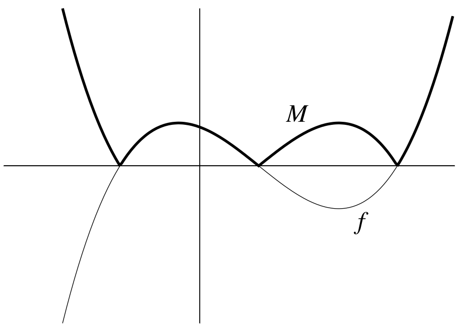


Esta é sempre ≥ 0; coincide com a primeira quando esta é positiva e toma valores simétricos das da primeira quando esta é negativa. O efeito de calcular o **módulo de** $2x+1$ pode traduzir-se, em termos do gráfico, dizendo que o gráfico da nova função se obtém do de $2x+1$ "reflectindo" no eixo Ox as partes deste que ficam abaixo do eixo e deixando inalterada a porção restante.

Em geral, dada uma função $f : A \to \mathbb{R}$ com domínio A, a nova função $M : A \to \mathbb{R}$ dada por

$$M(x) = |f(x)| \tag{23}$$

tem um gráfico que se obtém do de f segundo o processo que acabamos de descrever. Na figura seguinte o gráfico de f está desenhado a traço fino e o de M em traço forte (havendo sobreposição nas zonas onde $f \geq 0$).



Observemos que a fórmula (23) pode ser descompactada escrevendo

$$M(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{se } f(x) \geq 0. \end{cases}$$

Revisão

Retomemos exemplos já estudados para os analisar sob outros pontos de vista.

(a) **Monotonia**. A função x^2 é (estritamente) **crescente** no intervalo $[0, +\infty[$ e **decrescente** no intervalo $]-\infty, 0]$. Efectivamente, sabemos que

$$\begin{array}{rl} & 0 < x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; x_1^2 < x_2^2 \\ \text{e} & x_1 < x_2 < 0 \;\Rightarrow\; x_2^2 < x_1^2 \end{array}$$

A primeira implicação demonstra-se assim: começamos por multiplicar ambos os membros de $x_1 < x_2$ por x_1 e obtemos $x_1^2 < x_1 x_2$; seguidamente multiplicamos ambos os membros da mesma desigualdade por x_2 e vem $x_1 x_2 < x_2^2$. Da propriedade transitiva resulta $x_1^2 < x_2^2$. Deixamos ao leitor a demonstração da segunda implicação.

A função $\frac{1}{1+(x-4)^2}$ é estritamente crescente no intervalo $]-\infty, 4]$ e decrescente em $[4, +\infty[$, como fora intuído no exemplo do parágrafo anterior. Verifiquemos, por exemplo, a 2ª afirmação, que resulta facilmente das propriedades de ordem dos números reais:

$$\begin{aligned}
&4 \leq x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; 0 \leq x_1 - 4 < x_2 - 4 \\
&\Rightarrow\; (x_1-4)^2 < (x_2-4)^2 \;\Rightarrow\; 1+(x_1-4)^2 < 1+(x_2-4)^2 \\
&\Rightarrow\; \frac{1}{1+(x_1-4)^2} > \frac{1}{1+(x_2-4)^2}.
\end{aligned}$$

(no último passo, usámos o facto de ser $1+(x_1-4)^2 > 0$!)

(b) **Contradomínios**

(b_1) O contradomínio da função x^2 é formada por todos os números ≥ 0; isto é, é o intervalo $[0, +\infty[$. Com efeito, $x^2 \geq 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$; por outro lado, **dado um qualquer** número $b \geq 0$, existe z tal que

$$z^2 = b$$

(existem mesmo dois valores de x nessas condições se $b > 0$, e são $\sqrt{b}$ e $-\sqrt{b}$!).

Vamos ser um pouco mais específicos a respeito da existência destes números: não basta escrever um símbolo para provar que um determinado objecto existe; o símbolo já pressupõe a existência do objecto e serve unicamente para nos referirmos a ele com rapidez.

Vamos dar uma ideia de como se pode construir a solução positiva da equação (por exemplo)

$$z^2 = 5.$$

Como $2^2 = 4 < 5 < 3^2 = 9$ e a função $f(x) = x^2$ é crescente em $[0, +\infty[$, o número z procurado deve estar entre 2 e 3:

$$2 < z < 3. \tag{24}$$

Por outro lado, cálculos simples mostram que

$$2.2^2 = 4.84 < 5 < 2.3^2 = 5.29.$$

Assim, pela mesma razão,

$$2.2 < z < 2.3. \tag{25}$$

Ao fim destes dois passos ficamos informados de que o número z, caso exista, tem como aproximação até às décimas $z_1 = 2.2$. Com isto queremos dizer que o erro cometido ao tomar 2.2 no lugar de z, ou seja, a diferença $z - 2.2$,é inferior a 0.1:

$$0 < z - 2.2 < 2.3 - 2.2 = 0.1.$$

Fixada a primeira casa decimal de z, tentemos agora descobrir a segunda. O mesmo método (por tentativas) mostra que

$$2.23^2 = 4.9729 < 5 < 2.24^2 = 5.0176$$

e portanto

$$2.23 < z < 2.24$$

o que significa que a aproximação até às centésimas de z é $z_2 = 2.23$.

Repetindo este processo indefinidamente conseguimos descobrir **todos** os algarismos da representação decimal do número procurado, e fica portanto construído um número real positivo

$$z = 2.2360679775\ldots$$

cujo quadrado é exactamente 5.

(b_2) A função $\frac{1}{1+(x-4)^2}$ tem como contradomínio o conjunto dos números positivos inferiores ou iguais a 1, isto é, o intervalo $]0,1]$. Com efeito:

— o denominador $1+(x-4)^2$ é ≥ 1 $\forall x \in \mathbb{R}$; logo, para o seu inverso temos $0 < \frac{1}{1+(x-4)^2} \leq 1$.

— **dado um número qualquer** $b \in]0,1]$, **existe** $x \in \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{1}{1+(x-4)^2} = b.$$

Consideremos, por exemplo, o caso $b = \frac{1}{2}$. A nossa equação é então

$$\frac{1}{1+(x-4)^2} = \frac{1}{2}$$

e, por definição de fracção, equivalente a

$$1 + (x-4)^2 = 2$$

(já que o denominador $1+(x-4)^2$ nunca se anula). Esta equação do 2º grau escreve-se simplificadamente

$$(x-4)^2 = 1$$

e por isso tem as raízes

$$x_1 = 5 \qquad \text{e} \qquad x_2 = 3.$$

Encontrámos, pois, dois valores de x cuja imagem é $\frac{1}{2}$. No caso geral, a nossa equação é equivalente a

$$(x-4)^2 + 1 = \frac{1}{b}$$

ou ainda

$$(x-4)^2 = \frac{1}{b} - 1$$

onde $\frac{1}{b} - 1 \geq 0$, porque $0 < b \leq 1$! Logo, obtemos os valores possíveis para x:

$$x - 4 = \pm\sqrt{\tfrac{1}{b} - 1}$$
$$x = +4 \pm \sqrt{\tfrac{1}{b} - 1}.$$

(c) **Raízes.** A função x^2 tem uma única raiz: $x = 0$. A função $\frac{1}{1+(x-4)^2}$ não tem raízes. Isto resulta das considerações feitas acima. A função $1 - \frac{1}{x-3}$ tem raiz $x = 4$, como se conclui imediatamente resolvendo a equação

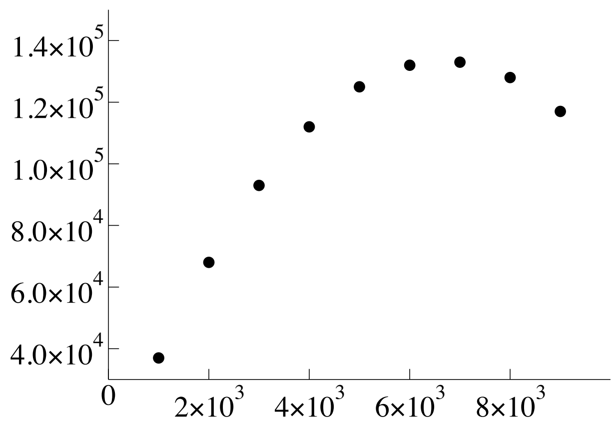
$$1 - \frac{1}{x-3} = 0.$$

9 Função quadrática

EXEMPLO 9.1 Um fabricante de têxteis vai lançar no mercado determinado modelo de camisola. Para vender x exemplares, deve impôr um preço de $40 - 0.003x$ € por exemplar. (Naturalmente, quanto mais exemplares se pretende vender, menor será o preço a cobrar; daí a parcela $0.003x$ com sinal negativo). Qual é o número de exemplares que é necessário vender para obter o máximo produto da venda?

O produto total é $x(40 - 0.003x) = 40x - 0.003x^2$. Esta expressão define uma função de x que não é afim; podemos ter uma primeira ideia do seu comportamento executando uma tabela de valores e o correspondente gráfico; seleccionamos valores inteiros de x espaçados de $1000 = 10^3$ unidades.

x	1000	2000	3000	4000	5000	6000	7000	8000	9000
$40x - 0.003x^2$	37000	68000	93000	112000	125000	132000	133000	128000	117000



O esquema obtido evidencia o carácter não afim da função em causa. Quando avançamos desde $x = 10^3$ até $x = 7 \times 10^3$, a acréscimos de 10^3 na variável independente correspondem acréscimos no valor da função progressivamente menores. O conjunto de valores encontrado leva a crer que a função é crescente no intervalo $[10^3, 7 \times 10^3]$ e passa a ser decrescente em $[7 \times 10^3, 9 \times 10^3]$. O maior valor do produto de venda seria, em face desta análise, o que corresponde a cerca de 7×10^3, ou seja, 133000 €.

Esta solução pode ser aceitável como primeira aproximação ao problema, mas com vista a uma resposta segura é necessário efectuar uma análise mais fina. (Como só testámos valores da função espaçados de 10^3, fica por saber ao certo o que se passa nos intervalos entre cada dois valores consecutivos.) A função $40x - 0.003x^2$ é definida por um polinómio de 2º grau na variável x; é caso particular de uma importantíssima classe de funções de que passamos a ocupar-nos neste capítulo.

Designaremos de modo geral por **função quadrática** qualquer função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por uma expressão do tipo

$$f(x) = ax^2 + bx + c \tag{26}$$

onde $a \neq 0, b, c$ são números (constantes) dados. O 2º membro da equação (26) é um **polinómio do 2º grau em** x. Em geral tem três termos, e por isso se chama também frequentemente **trinómio do 2º grau**; mas é claro que alguns deles podem ser nulos.

Assim, a função $y = x^2$, já estudada num exemplo anterior, é dada por um trinómio com $a = 1$, $b = c = 0$, portanto apenas com um termo não nulo; e no exemplo anterior tem-se $a = -0.003$, $b = 40$, $c = 0$, havendo portanto um termo nulo.

Aos números a, b, c em (26) dá-se o nome de **coeficientes** do trinómio.

As funções quadráticas já nos surgiram em situações anteriores. Por exemplo, o problema de "resolver a equação do 2º grau"

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{27}$$

não é senão, na linguagem que introduzimos no parágrafo anterior, o de determinar as raízes de f dada por (26).

Passamos agora a fazer um estudo sistemático das funções quadráticas que nos habilitará, em particular, a responder a questões como a colocada no exemplo com que iniciámos este parágrafo.

9.1 Funções quadráticas com o vértice em evidência

Vimos atrás qual o aspecto do gráfico da função

$$y = x^2. \tag{28}$$

Observámos que a origem das coordenadas tem um papel especial relativamente a (28). Trata-se do ponto do gráfico com ordenada mínima ou, em termos menos formais, do ponto "situado mais abaixo". Vimos no estudo da Geometria Analítica que a curva que constitui o gráfico de (28) é uma **parábola**; e damos ainda o nome de **parábola** ao gráfico de qualquer função (26). Destacamos o papel da origem dizendo que $(0, 0)$ é o **vértice** da parábola $y = x^2$ ([5]). Recordemos ainda que esta parábola tem simetria a respeito do eixo $0y$:

$$\boxed{\text{se } (x, y) \text{ pertence ao gráfico de (28), o mesmo sucede com } (-x, y).}$$

[5] Uma definição clara do **vértice**, bem como o seu significado, surgem no facto 9.2 desta subsecção e na frase que o precede.

Por esta razão dizemos que o eixo $0y$ é o **eixo** da parábola.

Consideremos agora, por exemplo, a função

$$g(x) = (x-2)^2 - 1. \tag{29}$$

Trata-se, como imediatamente se reconhece, de uma função quadrática, uma vez que a sua expressão analítica é equivalente a

$$x^2 - 4x + 4 - 1,$$

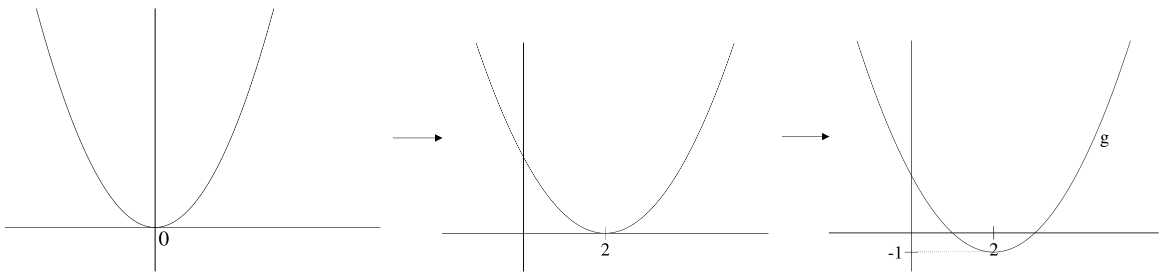
isto é, ao trinómio

$$x^2 - 4x + 3. \tag{30}$$

Mas a forma como (29) está apresentada é mais informativa do que a expressão reduzida (30). Com efeito, sabemos que o gráfico de g se obtém a partir do de $y = x^2$ pela sequência das duas operações seguintes:

1ª) translação de 2 unidades na direcção positiva do eixo Ox

2ª) translação de uma unidade na direcção negativa do eixo Oy.



Em particular, o ponto $(0,0)$ converte-se no ponto $(2,-1)$ que é aquele que tem significado especial para g e que se lê facilmente na expressão (29) com que g foi apresentada.

O gráfico de g é uma parábola de vértice $(2,-1)$.

A observação do gráfico de g evidencia que g tem duas raízes distintas (o que não se passava com a função $y = x^2$, que se anula só para $x = 0$.) E até é fácil calculá-las com base na fórmula dada: trata-se de determinar que valores de x satisfazem

$$(x-2)^2 - 1 = 0$$

ou ainda

$$(x-2)^2 = 1;$$

ora, os únicos números que elevados ao quadrado dão 1 são 1 e -1; logo,

$$(x-2) = \pm 1$$

e, finalmente,

$$x = 2+1 = 3 \qquad \text{ou} \qquad x = 2-1 = 1.$$

Antes de prosseguir, observemos o seguinte

Facto 9.1 Seja a um número positivo dado. *Tem-se, para todo o $x \in \mathbb{R}$,*

$$x^2 \leq a^2 \;\Leftrightarrow\; |x| \leq a \;\Leftrightarrow\; -a \leq x \leq a.$$

Demonstração A equivalência entre a 1ª e a 2ª condição resulta de ser $a^2 - x^2 = a^2 - |x|^2 = (a+|x|)(a-|x|)$, de modo que esta expressão é ≥ 0 se , e só se, $|x| \leq a$ (visto que $a + |x| \geq 0$ sempre). A equivalência com a última condição resulta do que vimos na secção 7. ∎

Outro problema que é fácil resolver tirando partido do cálculo das raízes e da nossa construção do gráfico é o seguinte: quais são os valores de x para os quais se verifica a inequação

$$x^2 - 4x + 3 < 0?$$

A simples observação do gráfico de g sugere que tais valores de x constituem o intervalo $]1, 3[$, isto é, o intervalo cujos extremos são as duas raízes: é aí que os valores de g são negativos, pois é aí que os pontos do gráfico estão situados abaixo do eixo Ox.

Se quisermos chegar ao resultado por via exclusivamente analítica, escrevemos sucessivamente as desigualdades equivalentes

$$(x-2)^2 - 1 < 0, \qquad (x-2)^2 < 1, \qquad -1 < x-2 < 1$$

e obtemos finalmente a condição a que deve satisfazer a variável x (somando 2 aos três membros da última desigualdade):

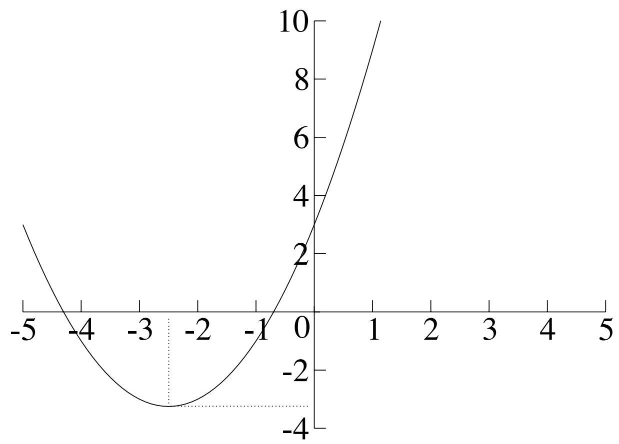
$$1 < x < 3.$$

Observemos que, quando passámos da 2ª para a 3ª desigualdade, usámos o facto (análogo ao demonstrado acima) de que $y^2 < 1$ é equivalente a $-1 < y < 1$.

Até agora, apenas estudámos um exemplo em que o vértice da função quadrática surge em evidência na expressão analítica desta. Consideremos seguidamente o problema visto ao contrário: dado um trinómio do 2º grau, transformá-lo numa expressão equivalente onde se possa "ler" claramente o vértice.

Tomemos, por exemplo, o trinómio $x^2 + 5x + 3$. Com o objectivo de fazer aparecer a expressão de um quadrado, notemos que

$$\begin{aligned} x^2 + 5x + 3 &= x^2 + 2.\frac{5}{2}x + \frac{25}{4} - \frac{25}{4} + 3 \\ &= \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 3 \end{aligned}$$

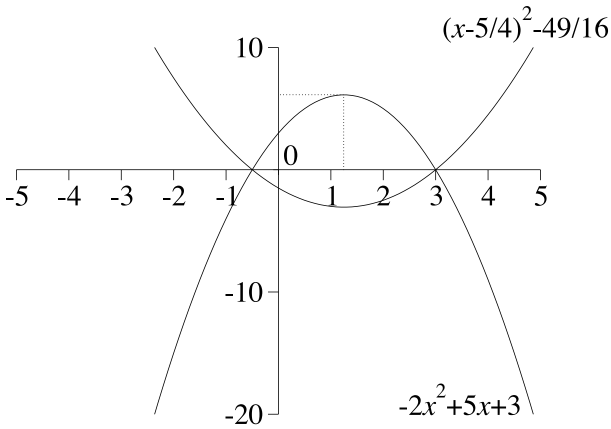


A expressão obtida é em tudo análoga à do exemplo anterior: repetindo as nossas considerações anteriores sobre o gráfico, podemos dizer que o vértice da parábola $y = x^2 + 5x + 3$ é o ponto $(-\frac{5}{2}, -\frac{13}{4})$. (Ver a figura acima.)

Vale um procedimento análogo mesmo que o coeficiente a do termo de maior grau seja $\neq 1$. A diferença é que nessa altura é necessário considerar, além das duas translações, a dilatação (ou contracção) segundo o eixo $0y$ que é dada pelo número a. Por exemplo:

$$\begin{aligned} &-2x^2 + 5x + 3 = -2\left(x^2 - \tfrac{5}{2}x - \tfrac{3}{2}\right) = \\ &= -2\left(x^2 - 2.\tfrac{5}{4}x + \tfrac{25}{16} - \tfrac{25}{16} - \tfrac{3}{2}\right) = \\ &= -2\left[\left(x - \tfrac{5}{4}\right)^2 - \tfrac{49}{16}\right] = -2\left(x - \tfrac{5}{4}\right)^2 + \tfrac{49}{8} \end{aligned}$$

O gráfico da função $-2x^2 + 5x + 3$ pode considerar-se obtido a partir do da função $-2x^2$ por aplicação sucessiva de duas translações: uma horizontal, de $\frac{5}{4}$ na direcção positiva do eixo Ox; outra vertical, de $\frac{49}{8}$, na direcção positiva do eixo Oy.



O vértice é, neste caso, $\left(\frac{5}{4}, \frac{49}{8}\right)$.

Não é difícil agora estudar o caso geral em que a função quadrática é dada na forma

$$g(x) = a(x-h)^2 + k \tag{31}$$

onde $a \neq 0$, h e k são números dados. O **vértice** da parábola que constitui o gráfico de (31) é o ponto (h, k). Vejamos como podemos descrever o seu significado.

Facto 9.2 *(i) Se $a > 0$, a função g dada por (31) é crescente no intervalo $[h, +\infty[$ e decrescente no intervalo $]-\infty, h]$.*

Por conseguinte, toma o seu valor **mínimo** *no ponto $x = h$, e esse valor é k.*

(ii) Se $a < 0$, a função g dada por (31) é crescente no intervalo $]-\infty, h]$ e decrescente no intervalo $[h, +\infty[$.

Portanto, toma o seu valor **máximo** *no ponto $x = h$, e esse valor é k.*

Demonstração (i) Suponhamos $a > 0$. Dados números x_1, x_2 tais que

$$h \leq x_1 < x_2$$

temos, subtraindo h a cada um dos três membros,

$$0 \leq x_1 - h < x_2 - h$$

e portanto, elevando ao quadrado e depois multiplicando pelo número *positivo* a,

$$a(x_1 - h)^2 < a(x_2 - h)^2$$

de onde, finalmente, adicionando k a ambos os membros,

$$g(x_1) = a(x_1 - h)^2 + k < a(x_2 - h)^2 + k = g(x_2).$$

Se, por outro lado, y_1, y_2 são números tais que

$$y_1 < y_2 \leq h$$

então

$$y_1 - h < y_2 - h \leq 0$$

e, já que a função x^2 é decrescente em $]-\infty, 0[$ (recordar Secção 8, Revisão, (a))

$$(y_1 - h)^2 > (y_2 - h)^2,$$

de onde

$$a(y_1 - h)^2 > a(y_2 - h)^2$$

e finalmente

$$g(y_1) = a(y_1 - h)^2 + k > a(y_2 - h)^2 + k = g(y_2).$$

Conclui-se, pois, que

$$\begin{array}{ll} \forall x \geq h & g(x) \geq g(h) = k, \\ \forall y \leq h & g(y) \geq g(h) = k \end{array}$$

e k é, efectivamente, o menor valor que g assume.

(ii) Análoga. (Exercício) ■

EXEMPLO 9.2 Podemos agora retomar o exemplo do início deste capítulo e escrever a função que nos foi dada para análise na forma em que o vértice está em evidência:

$$\begin{array}{l} -0.003x^2 + 40x = -0.003\left(x^2 - \frac{40}{0.003}x\right) \\ = -0.003\left(x^2 - \frac{40000}{3}x\right) = 0.003\left(x^2 - 2\frac{40000}{6}x\right) \\ = -0.003\left(x^2 - 2\frac{40000}{6}x + \frac{16\times10^8}{36} - \frac{16\times10^8}{36}\right) \\ = -0.003\left(x - \frac{40000}{6}\right)^2 + \frac{16\times10^5}{12} \\ = -0.003\left(x - \frac{20000}{3}\right)^2 + \frac{4\times10^5}{3} \end{array}$$

Ficamos agora informados de que o gráfico da função a estudar tem o vértice $\left(\frac{20000}{3}, \frac{4\times10^5}{3}\right)$ e a sua ordenada corresponde ao valor máximo da função. Este máximo é $\frac{4\times10^5}{3}$ ϵ, e é atingido no ponto $\frac{20000}{3} = 6666.6\ldots$. Interpretando este resultado à luz do problema inicialmente proposto podemos afirmar então que, de acordo com o nosso modelo matemático, o produto máximo de venda é obtido com a venda de 6667 exemplares do artigo a promover. (É claro, dada a natureza do problema, que resultado numérico procurado só pode ser dado por um inteiro.)

9.2 Caso geral. Decomposição em factores.

O procedimento exemplificado no parágrafo anterior é susceptível de generalização. Assim, dado um trinómio do 2º grau

$$ax^2 + bx + c \tag{32}$$

podemos transformá-lo, segundo a técnica da completação do quadrado, sucessivamente em

$$\begin{aligned} a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) &= a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right) \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right] \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} \end{aligned} \tag{33}$$

e concluímos:

— a parábola que é o gráfico de (32) tem por vértice o ponto $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$.

— se $a > 0$ a função (32) é crescente no intervalo $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right[$ e decrescente no intervalo $\left]-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$. O valor mínimo da função é $\frac{4ac-b^2}{4a}$.

— se $a < 0$ a função (32) é crescente no intervalo $\left]-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$ e decrescente no intervalo $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right[$. O valor máximo da função é $\frac{4ac-b^2}{4a}$.

A decomposição (33) mostra que o lugar geométrico definido pela equação

$$y = ax^2 + bx + c \tag{34}$$

resulta do lugar geométrico definido pela equação mais simples

$$y = ax^2 \tag{35}$$

pela aplicação sucessiva de duas translações: uma horizontal, levando o ponto $(0,0)$ para o ponto $\left(-\frac{b}{2a}, 0\right)$, e outra vertical, levando o ponto $\left(-\frac{b}{2a}, 0\right)$ para o ponto $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$. Assim, (34) resulta de (35) por um movimento rígido: trata-se de dois conjuntos congruentes. Justifica-se, em particular, o nome de "parábola" dado a ambos.

A fórmula (33) mostra, em particular, que a função definida por (32) pode sempre transformar-se, mediante uma translação na direcção do eixo Ox, numa função par. A translação é a que transforma o ponto $(0,0)$ em $\left(-\frac{b}{2a}, 0\right)$ e a nova função par é

$$ax^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Observemos de seguida que a decomposição (33) pode ser utilizada para calcular os zeros de (32), isto é, para resolver a equação

$$ax^2 + bx + c = 0. \tag{36}$$

Na verdade, a equação é agora equivalente, sucessivamente, a

$$a\left(x + \tfrac{b}{2a}\right)^2 + \tfrac{4ac-b^2}{4a} = 0,$$
$$\left(x + \tfrac{b}{2a}\right)^2 = \tfrac{b^2-4ac}{4a^2}$$

Vê-se agora que a equação tem solução real somente no caso em que

$$b^2 - 4ac \geq 0.$$

Se esta condição é satisfeita, um valor possível para $x + \frac{b}{2a}$ é $\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$; o outro valor possível é $-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Concluímos assim que a equação (36) é equivalente a

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \text{ou} \qquad x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{37}$$

representando os segundos membros destas equações os únicos valores possíveis da incógnita x em (36). É costume condensar a disjunção (37) na fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

que dá as duas raízes de (36) quando $b^2 - 4ac \geq 0$. Observemos que, se $b^2 - 4ac = 0$, as duas raízes confundem-se, valendo ambas $-\frac{b}{2a}$; falamos então de uma **raiz dupla**.

Pela sua importância na discussão da equação (36), a expressão $b^2 - 4ac$ merece uma designação especial: é costume chamar-lhe **binómio discriminante**.

Podemos desde logo observar os seguintes factos.

Facto 9.3 *A abcissa do vértice é a média das raízes, isto é, é o ponto do eixo Ox equidistante dos pontos que correspondem às raízes.*

Demonstração Sejam

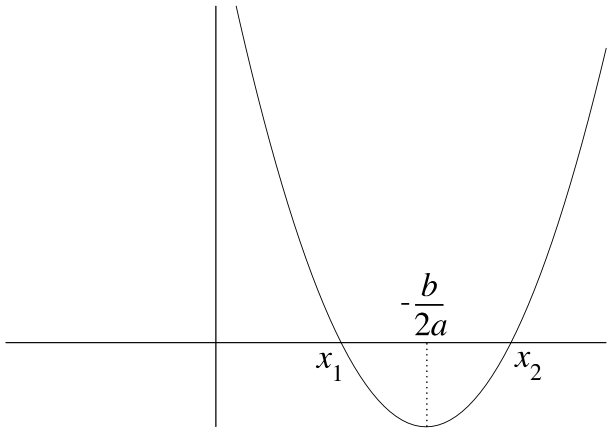
$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \leq \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

as raízes de (36). Então

$$-\tfrac{b}{2a} - x_1 = \tfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x_2 - \left(-\tfrac{b}{2a}\right) = \tfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Portanto, a distância de $-\frac{b}{2a}$ a x_1 é igual à distância de x_2 a $-\frac{b}{2a}$. ■



Facto 9.4 *A soma das raízes é* $-\frac{b}{a}$.

Com efeito, $x_1 + x_2 = -\frac{2b}{2a} = -\frac{b}{a}$. ■

NOTA Em particular $\frac{x_1+x_2}{2} = -\frac{b}{2a}$, outro modo de exprimir o facto 9.3.

Facto 9.5 *O produto das raízes é* $\frac{c}{a}$.

Com efeito,

$$\begin{aligned} x_1 x_2 &= \frac{\left(-b - \sqrt{b^2 - 4ac}\right)\left(-b + \sqrt{b^2 + 4ac}\right)}{4a^2} \\ &= \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}. \end{aligned}$$

■

Facto 9.6 *Se* x_1 *e* x_2 *são as raízes do trinómio* $ax^2 + bx + c$*, então para todos os valores reais de* x

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2). \tag{38}$$

Demonstração Efectuando o produto dos dois polinómios do 1º grau $x - x_1$, $x - x_2$ obtemos

$$\begin{aligned} (x - x_1)(x - x_2) &= x^2 - x_1 x - x_2 x + x_1 x_2 \\ &= x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 \end{aligned}$$

e, em virtude dos factos 9.4 e 9.5

$$(x-x_1)(x-x_2)=x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}.$$

Multiplicando por a ambos os membros obtemos a igualdade pretendida. ■

O que acabámos de demonstrar é que **um trinómio do** 2^o grau com duas raízes reais $x_1,\ x_2$ e tendo a como coeficiente do termo de maior grau **é decomponível no produto dos factores do** 1^o **grau** $x-x_1$ **e** $x-x_2$ **afectado do coeficiente** a**.**

9.3 Sinal da função quadrática

Temos agora elementos suficientes para resolver a inequação

$$ax^2+bx+c<0 \tag{39}$$

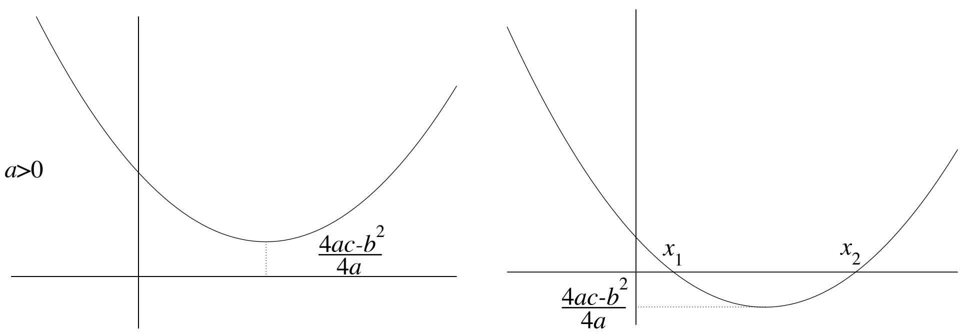
onde $a\neq 0$.

O nosso conhecimento do gráfico da função $y=ax^2+bx+c$ permite-nos avançar desde logo com uma resposta. Na verdade:

1^o) **Suponhamos** $a>0$. Sabemos então que a parábola correspondente ao gráfico tem o vértice $\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ como ponto de **menor** ordenada. Por conseguinte,

— se $b^2-4ac\leq 0$ a inequação (39) não tem soluções (porque a função só toma valores ≥ 0).

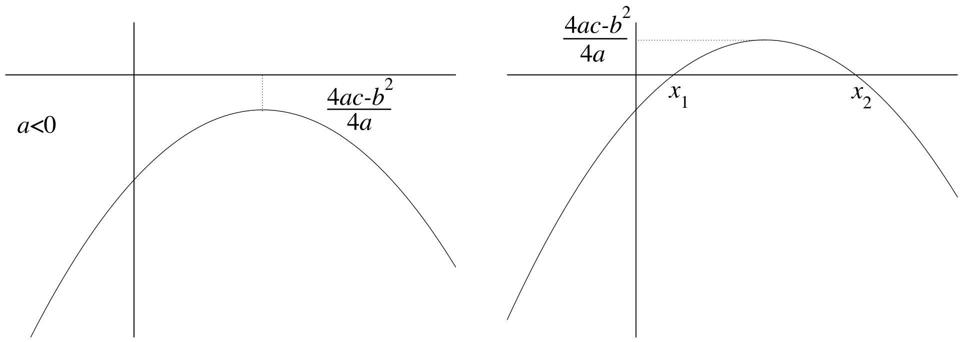
— se $b^2-4ac>0$ os valores de x que satisfazem (39) são os que estão situados entre as raízes x_1,x_2, e só esses: o conjunto das soluções é o intervalo $]x_1,x_2[$.



2^o) **Suponhamos** $a<0$. Sabemos então que a parábola correspondente ao gráfico tem o vértice $\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ como ponto de **maior** ordenada. Por conseguinte,

— se $b^2 - 4ac < 0$ a inequação (39) tem como soluções todos os números reais (porque a função só toma valores < 0).

— se $b^2 - 4ac \geq 0$ os valores de x que satisfazem (39) são os que estão situados fora do intervalo cujos extremos são as raízes x_1, x_2, e só esses: o conjunto das soluções é $]-\infty, x_1[\cup]x_2, +\infty[$.



Por outras palavras, estamos a conjecturar o seguinte

Facto 9.7 *Se $a > 0$, as soluções de (39) constituem o intervalo aberto cujos extremos são as suas raízes, quando estas existem.*

Na realidade podemos facilmente **demonstrar** este facto: atendendo à decomposição (38) a desigualdade (39) escreve-se

$$a(x - x_1)(x - x_2) < 0$$

e, como $a > 0$, esta fica equivalente sucessivamente a

$$\begin{aligned} &(x - x_1 > 0 \wedge x - x_2 < 0) \vee (x - x_1 < 0 \wedge x - x_2 > 0) \\ \Leftrightarrow\ &(x_1 < x < x_2) \vee (x < x_1 \wedge x > x_2) \\ \Leftrightarrow\ &x_1 < x < x_2 \end{aligned}$$

visto que a condição $x < x_1 \vee x > x_2$ é falsa para qualquer valor real de x. ∎

Um modo equivalente, menos formal na sua aparência, de chegar a estas conclusões, consiste em fazer um esquema dos sinais que assume cada factor de acordo com a localização de x e tirar conclusões sobre o sinal do produto:

Como $x_1 < x_2$, tal quadro tem o aspecto

x		x_1		x_2	
$x - x_1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x - x_2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$a(x - x_1)(x - x_2)$	$+$	0	$-$	0	$+$

E, já agora, como consequência, temos:

Facto 9.8 *Se $a > 0$, o trinómio é: positivo para todos os valores reais de x, se não tem raízes reais; positivo na união de intervalos $]-\infty, x_1[\cup]x_2, +\infty[$, e negativo em $]x_1, x_2[$ se $x_1 \leq x_2$ são as suas raízes reais.*

Deixamos ao leitor o cuidado de enunciar factos análogos para o caso $a < 0$.

9.4 Identidade de duas funções quadráticas

Consideremos o seguinte problema: dadas duas funções quadráticas

$$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad g(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma,$$

quando é que elas são a mesma, isto é, quando se tem $f(x) = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$?

É evidente que tal acontece desde que

$$a = \alpha, \qquad b = \beta, \qquad c = \gamma.$$

Mas é interessante verificar o seguinte:

Facto 9.9 *Se existem 3 números reais distintos x_1, x_2, x_3 tais que $f(x_1) = g(x_1)$, $f(x_2) = g(x_2)$ e $f(x_3) = g(x_3)$, então $a = \alpha$, $b = \beta$, $c = \gamma$ e portanto f e g são idênticas.*

Demonstração Consideremos a função diferença

$$d(x) = f(x) - g(x) = (a - \alpha)x^2 + (b - \beta)x + (c - \gamma).$$

Tem-se $d(x_1) = d(x_2) = d(x_3) = 0$. Se fosse $a - \alpha \neq 0$, d seria um trinómio de 2º grau e portanto teria 0, 1 ou 2 raízes (nunca 3 raízes) e portanto $a - \alpha = 0$, isto é, $a = \alpha$. Logo,

$$d(x) = (b - \beta)x + c - \gamma.$$

Se fosse $b - \beta \neq 0$, d teria uma única raiz única; logo $b = \beta$. Finalmente, $d(x) = c - \gamma$ e, como d se anula, forçosamente $c = \gamma$. ■

9.5 Divisão de um polinómio do 2^{o} grau por um polinómio do 1^{o} grau

Recordemos que o problema da **divisão inteira**, no âmbito dos números naturais, consiste no seguinte: dados $a, b \in \mathbb{N}$ determinar $q, r \in \mathbb{N}_0$ tais que

$$\frac{a}{b} = q + \frac{r}{b} \qquad \text{e} \qquad 0 \leq r < b,$$

ou, escrito de outro modo:

$$a = bq + r \qquad \text{e} \qquad 0 \leq r < b.$$

A q e r dá-se o nome de **cociente** e **resto**, respectivamente, da divisão de a por b; estes números são bem determinados, representando q o maior número de vezes que b "cabe" em a, o que significa exactamente o seguinte:

$$bq \leq a \qquad \text{mas} \qquad b(q+1) > a.$$

Podemos dizer ainda que se trata de decompor $\frac{a}{b}$ na soma de um inteiro com uma fracção própria.

No âmbito dos polinómios formula-se um problema semelhante: dados dois polinómios $A(x)$, $B(x)$, não sendo $B(x)$ o polinómio nulo, determinar dois outros, $Q(x)$ e $R(x)$, tais que

$$A(x) = B(x)Q(x) + R(x) \qquad \text{e} \qquad \text{grau de R} < \text{grau de B} \tag{40}$$

Observemos que outra maneira de escrever (40) é

$$\frac{A(x)}{B(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{B(x)} \qquad \text{para todo o } x \in \mathbb{R} \text{ tal que } B(x) \neq 0.. \tag{41}$$

Nesta operação chamamos a $A(x)$ **dividendo**, a $B(x)$ **divisor**, a $Q(x)$ **cociente** e a $R(x)$ **resto**. Tal como se dispõe de um algoritmo para a divisão inteira, há um algoritmo semelhante para a divisão de polinómios. Mas, para já, vamos limitar-nos a considerar o caso em que $A(x)$ tem grau 2 e $B(x)$ tem grau 1. Neste caso, de (40) resulta logo que $Q(x)$ tem de ter grau 1 e $R(x)$ deve ser uma constante!

Consideremos, a título de exemplo, o seguinte problema: **decompor a fracção algébrica**

$$\frac{x^2 + 3x + 5}{2x - 1}$$

na soma de um polinómio de grau 1 com uma fracção do tipo $\frac{C}{(2x-1)}$, com $C \in \mathbb{R}$.

De acordo com a equivalência (40)-(41), trata-se de calcular o cociente

$$Q(x) = \alpha x + \beta$$

e o resto

$$R(x) = r$$

da divisão de $x^2 + 3x + 5$ por $2x - 1$, isto é: trata-se de escrever $x^2 + 3x + 5$ com o aspecto

$$(x^2 + 3x + 5) = (2x - 1)(\alpha x + \beta) + r \tag{42}$$

onde α, β e r são três números a determinar. Vejamos que a nossa técnica de decomposição do trinómio (para evidenciar o vértice) permite facilmente resolver o problema. Com efeito, atendamos a que $2x + 1 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)$ e procuremos destacar o factor $\left(x - \frac{1}{2}\right)$: teremos sucessivamente,

$$\begin{aligned}
x^2 + 3x + 5 &= \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} = \left(x - \frac{1}{2} + 2\right)^2 + \frac{11}{4} \\
&= \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 4\left(x - \frac{1}{2}\right) + 4 + \frac{11}{4} \\
&= \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2} + 4\right) + \frac{27}{4} \\
&= \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{7}{2}\right) + \frac{27}{4} \\
&= 2\left(x - \frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}\left(x + \frac{7}{2}\right) + \frac{27}{4} \\
&= (2x - 1)\left(\frac{x}{2} + \frac{7}{4}\right) + \frac{27}{4}
\end{aligned}$$

e obtivemos, portanto, $Q(x) = \frac{x}{2} + \frac{7}{4}$ e $r = \frac{27}{4}$.

Outra forma de proceder, porventura com maior sistematização, consiste com começar por reduzir o 2º membro de (42) à forma usual da representação do trinómio:

$$2\alpha x^2 + (2\beta - \alpha)x - \beta + r$$

e, por isso, para que seja igual ao 1º, deve ter-se, em virtude do que vimos no facto 9.9:

$$\begin{cases} 2\alpha = 1 \\ 2\beta - \alpha = 3 \\ -\beta + r = 5 \end{cases}$$

equações que permitem calcular, de modo sucessivo, $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{7}{4}$, $r = \frac{27}{4}$.

Reparemos que estes cálculos mostram que **o cociente e o resto da divisão são bem determinados**. Por outras palavras: o cociente e o resto da divisão de dois polinómios são únicos. (O que se passa com este exemplo repete-se com outro exemplo qualquer – obtemos fórmulas para calcular os coeficientes do divisor e do resto sem ambiguidade.)

Consideremos agora o caso geral. Seja

$$A(x) = ax^2 + bx + c$$

o trinómio dado, com $a \neq 0$, e

$$B(x) = x - k$$

o polinómio do 1º grau. (É claro que basta considerar o caso em que o coeficiente do termo em x é igual a 1, pois noutro caso pode pôr-se esse coeficiente em evidência.) Procuremos $\alpha, \beta, r \in \mathbb{R}$ tais que

$$ax^2 + bx + c = (x - k)(\alpha x + \beta) + r. \tag{43}$$

Efectuando os cálculos no 2º membro obtemos

$$ax^2 + bx + c = \alpha x^2 + (\beta - k\alpha)x + r - bk$$

e concluímos que deverá ser:

$$\begin{aligned} \alpha &= a; \\ \beta - k\alpha &= b; \qquad \text{portanto } \beta = ka + b \\ r - k\beta &= c; \qquad \text{portanto } r = k^2a + kb + c. \end{aligned}$$

Resumimos o resultado no enunciado do seguinte

Facto 9.10 *O cociente e o resto da divisão de $A(x) = ax^2 + bx + c$ por $x - k$ são, respectivamente, $\alpha x + \beta$ e r, com*

$$\alpha = a, \qquad \beta = ka + b, \qquad r = A(k).$$

Quando, nesta operação, resulta $r = 0$, dizemos que o polinómio $A(x)$ é **divisível** pelo polinómio $x - k$. E do anterior resulta imediatamente:

Facto 9.11 *$A(x)$ é divisível por $x - k$ se, e só se, $A(k) = 0$ [isto é, se, e só se, k é raiz de $A(x)$]. (Nesta situação, (40) reduz-se à decomposição de $A(x)$ em factores do 1º grau.)*

OBSERVAÇÃO O algoritmo de cálculo de α, β, r (dados acima no facto 9.10) pode esquematizar-se assim.

$$\begin{array}{c|ccc} & a & b & c \\ k & & ak & ak^2 + bk \\ \hline & a(=\alpha) & ak + b(=\beta) & ak^2 + bk + c(=r) \end{array}$$

onde na primeira linha se dispõem os coeficientes do polinómio; na última linha vão aparecer

– em 1º lugar a;

– em 2º lugar a soma de b com o produto de a por k, o que dá β;

– em 3º lugar a soma de c com o produto de β por k, o que dá r.

Este procedimento para o cálculo de α, β, r costuma designar-se por "regra de Ruffini".

9.6 Propriedades geométricas das parábolas*

Intersecção de uma parábola com uma recta. Recta tangente.

Consideremos o seguinte

PROBLEMA Dadas uma parábola e uma recta no plano, determinar a intersecção de uma e outra, isto é, o conjunto dos pontos comuns a ambas.

O nosso conhecimento de rectas e parábolas enquanto gráficos de funções permite-nos antecipar que a resposta ao problema depende das posições relativas da parábola e da recta dadas, mas o número de pontos comuns a ambas só pode ser 0, 1 ou 2.

Vamos tratar o problema analiticamente considerando a parábola dada pela equação

$$y = ax^2 + bx + c \tag{44}$$

$(a \neq 0)$ e a recta descrita pela equação

$$x = k \qquad (k \text{ constante}) \tag{45}$$

ou

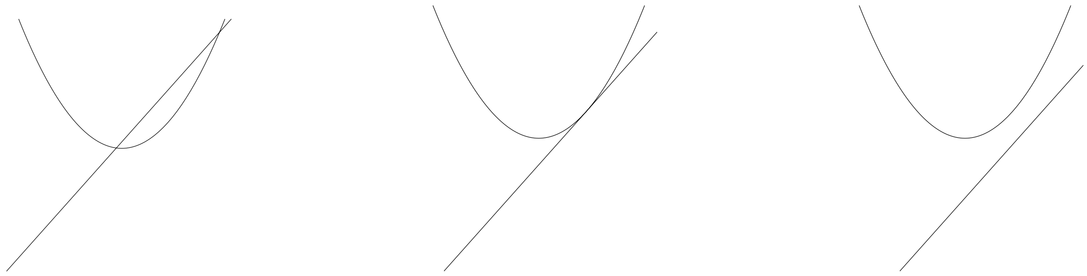
$$y = mx + p. \tag{46}$$

Se a recta é vertical, isto é, dada na forma (45), o problema tem a solução única

$$(k, ak^2 + kx + c).$$

O caso mais interessante é então aquele em que a recta não é paralela ao eixo da parábola, sendo portanto da forma (46). Procurar os pontos que satisfazem (44) e (46) é **resolver o sistema de duas equações**

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = mx + p \end{cases} \tag{47}$$



Ora, (x, y) é um ponto que satisfaz (47) no caso

$$ax^2 + bx + c = mx + p \tag{48}$$

e só nesse caso (com y dado por $mx + p$). Deste modo, discutir a existência e o número de soluções de (47) é o mesmo que discutir a existência e o número de soluções da equação do 2º grau (48).

EXEMPLO 9.3 Determinar os pontos comuns à parábola $y = x^2 - x$ e à recta $y = x + 1$.

Neste caso o sistema a resolver é composto pelas duas equações

$$y = x^2 - x, \qquad y = x + 1$$

e conduz à equação do 2º grau

$$x^2 - x = x + 1$$

ou seja

$$x^2 - 2x - 1 = 0$$

a qual tem as soluções

$$x_1 = 1 + \sqrt{2} \qquad \text{e} \qquad x_2 = 1 - \sqrt{2}.$$

Por conseguinte, os pontos comuns pedidos são

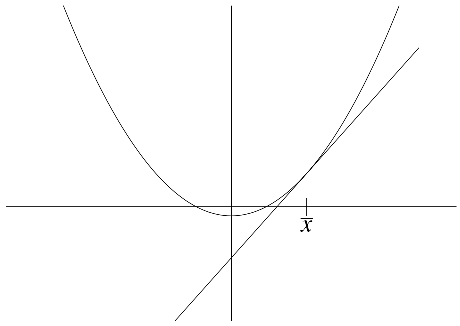
$$(1 + \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}) \qquad \text{e} \qquad (1 - \sqrt{2}, 2 - \sqrt{2}).$$

Uma situação particularmente interessante é aquela em que uma recta não vertical (46) tem **um único** ponto comum com a parábola; isto só acontece em condições muito precisas, que são aquelas em que (48) tem solução única:

$$(b - m)^2 - 4a(c - p) = 0 \tag{49}$$

Além disso, a solução única de (48) é então, como sabemos,

$$\overline{x} = \frac{m - b}{2a}. \tag{50}$$



Daqui concluímos imediatamente o seguinte

Facto 9.12 *Se a recta não vertical (46) e a parábola (44) têm um, e um só, ponto comum,* $(\overline{x}, \overline{y})$*, então*

$$m = 2a\overline{x} + b. \tag{51}$$

Estes resultados têm uma interpretação geométrica nítida que pode sumarizar-se assim:

(i) **Dado** o declive m, existe uma única recta (46) que tem um só ponto comum com a parábola (44), e o ponto comum fica bem determinado,

(porque (49) permite calcular p e (50) permite calcular a abcissa do ponto comum).

(ii) **Dado** um ponto $(\overline{x}, \overline{y})$ da parábola (44) existe uma única recta (46) cujo único ponto comum com a parábola é $(\overline{x}, \overline{y})$,

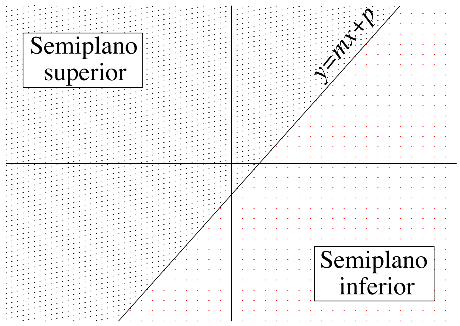
(porque (51) permite calcular m e (49) permite calcular p).

A recta com a propriedade indicada em (ii) chama-se **recta tangente** à parábola no ponto $(\overline{x}, \overline{y})$.

Há uma outra circunstância interessante no contexto deste problema.

Uma recta (46) divide o plano em duas regiões, chamadas **semiplanos**: o **semiplano superior**, que é o conjunto dos pontos (x, y) tais que

$$y \geq mx + p$$



e o **semiplano inferior**, que se obtém trocando nesta condição o sinal $\geq$ por $\leq$. Estas denominações têm razões evidentes: no semiplano superior, por exemplo, estão os pontos situados "acima" da recta e os da própria recta, e só esses; com efeito, um ponto (x, y) onde $y > mx + p$ tem ordenada **maior** que a ordenada do ponto (x, y_0), com $y_0 = mx + p$, e este está na recta.

Ora bem: como é fácil intuir, por observação do gráfico a que corresponde a situação (ii) em que a parábola (44) e a recta (46) têm um só ponto comum, temos o seguinte resultado:

Facto 9.13 *Se a recta (46) é tangente à parábola (44), então a parábola fica inteiramente situada num dos semiplanos determinados por essa mesma recta. Mais precisamente:*

(a) Se $a > 0$, $ax^2 + bx + c \geq mx + p \quad \forall x \in \mathbb{R}$*, com igualdade somente no caso em que* x *é a abcissa do ponto comum.*

(b) Se $a < 0$, $ax^2 + bx + c \leq mx + p \quad \forall x \in \mathbb{R}$*, com igualdade somente no caso em que* x *é a abcissa do ponto comum.*

Demonstração Suponhamos que $a > 0$. Então a equação (48) tem uma única raiz e isso significa que o trinómio

$$ax^2 + (b - m)x + c - p$$

é **positivo** para todo o $x \in \mathbb{R}$, com a única excepção da referida raiz, que o anula. (Ver subsecção 9.3 - factos 9.7 e 9.8). Está provada a afirmação (a), e em particular resulta que, se (x, y) é ponto da parábola (44), então $y \geq mx + p$, o que significa que (x, y) fica no semiplano superior determinado por (46).

Análogamente se trata o caso $a < 0$. ∎

Foco e directriz

Recordemos agora uma outra propriedade importante das parábolas, e que permite caracterizá-las em termos geométricos.

Para facilitar os cálculos, suponhamos a parábola dada tem vértice na origem das coordenadas, isto é, tem a equação

$$y = ax^2 \tag{52}$$

e $a > 0$.

Consideremos um ponto do eixo da parábola

$$F = (0, c), \qquad c > 0 \tag{53}$$

e a recta perpendicular ao eixo

$$d: \qquad y = -c \tag{54}$$

tais que ponto e recta têm a mesma distância (c) ao vértice $(0, 0)$. Pois bem: vamos ver que **podemos escolher** c de modo que fica válida a propriedade seguinte:

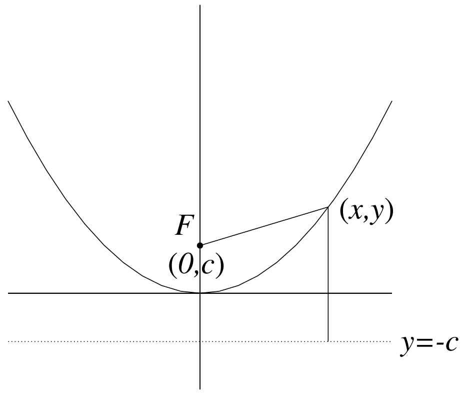
$$\boxed{\text{Qualquer ponto } (x, y) \text{ da parábola (52) é equidistante do ponto } F \text{ e da recta } d.} \tag{55}$$

Efectivamente, a distância de (x, y) ao ponto F é, como sabemos

$$\sqrt{x^2 + (y - c)^2}$$

e a distância de (x, y) à recta d é

$$|y - (-c)| = |y + c|,$$



de modo que a condição para que estas distâncias sejam iguais pode escrever-se

$$x^2 + (y - c)^2 = (y + c)^2 \tag{56}$$

já que ambas são números positivos (ou zero). Desenvolvendo os quadrados em (56) e eliminando parcelas comuns nos dois membros obtemos, sucessivamente, as condições equivalentes

$$x^2 + y^2 - 2cy + c^2 = y^2 + 2cy + c^2,$$
$$x^2 = 4cy \tag{57}$$

Ora, esta última é equivalente a (52) precisamente quando $4c = \frac{1}{a}$, ou

$$c = \frac{1}{4a}. \tag{58}$$

Portanto:

(i) Dado a, então o ponto F e a recta d com c dado por (58) têm a propriedade (55).

(ii) Dados F e d em (53) e (54), o lugar geométrico dos pontos que são equidistantes de F e d é a parábola (57).

Pela importância do ponto F e da recta d, eles merecem designações especiais: ao ponto F damos o nome de **foco** e à recta d damos o nome de **directriz** da parábola.

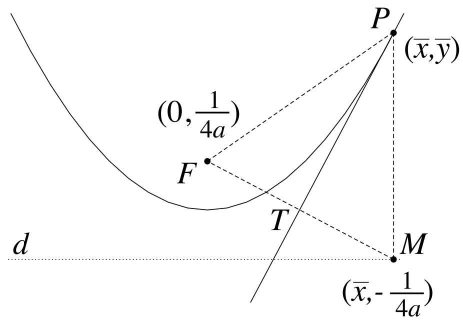
OBSERVAÇÃO As considerações feitas para a parábola (52) poderiam repetir-se para uma outra em posição mais geral, com equação

$$y = ax^2 + bx + c. \tag{59}$$

Mas, atendendo a que esta pode considerar-se obtida a partir de (52) por efeito combinado de uma translação horizontal e outra vertical (ver subsecção 9.2), e a que as distâncias são conservadas pelas translações, o leitor facilmente indicará as coordenadas do foco e a equação da directriz da parábola (59).

Reflexão de raios luminosos num espelho parabólico

Consideremos a parábola $y = ax^2$, o seu foco, $F = \left(0, \frac{1}{4a}\right)$, e a sua directriz, $y = -\frac{1}{4a}$.

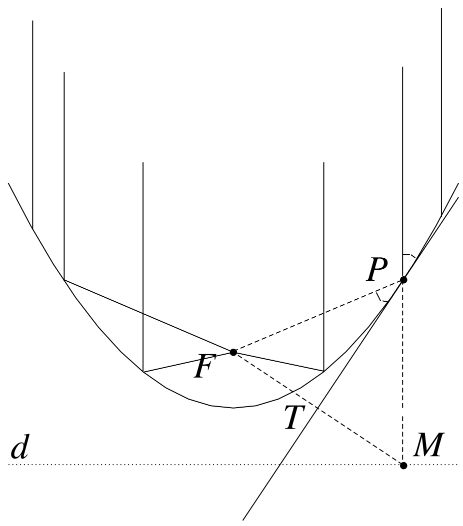


Para cada ponto da parábola, digamos $P = (\overline{x}, \overline{y})$, consideremos os segmentos de recta PF e PM, onde M é o pé da perpendicular a d que passa por P. Então $M = \left(\overline{x}, -\frac{1}{4a}\right)$ e a recta FM tem declive

$$\frac{\frac{1}{4a} - \left(-\frac{1}{4a}\right)}{0 - \overline{x}} = -\frac{1}{2a\overline{x}}.$$

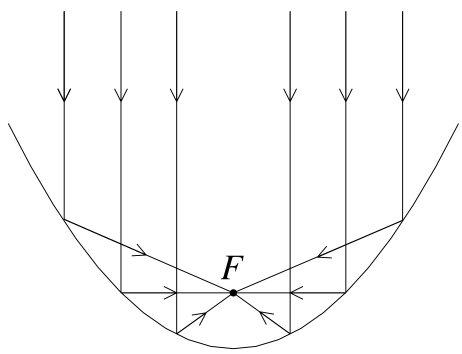
Ora, no início desta secção vimos que $2a\overline{x}$ é exactamente o declive da recta tangente à parábola no ponto $(\overline{x}, \overline{y})$. Portanto a tangente é perpendicular a FM (recordemos que o declive de uma recta perpendicular a outra recta dada é o simétrico do inverso desta – ver o facto 3.2 da secção 3). Isto significa que o ponto T, comum à tangente em P e a FM, é o ponto médio de FM (visto que $PF = PM$). Resulta que os triângulos FPT e TPM são iguais e que

$$\angle FPT = \angle TPM.$$



Imaginemos agora que a parábola funciona como espelho e reflete raios luminosos enviados de uma fonte pontual muito distante colocada no seu eixo. Os raios incidentes podem considerar-se paralelos ao eixo. Ao incidir no ponto P, o raio reflecte-se de modo que o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão e portanto de modo que o raio reflectido vai passar pelo foco F. Isto passa-se com **todos** os raios incidentes paralelos ao eixo: no foco vão convergir todos os raios reflectidos.

Esta propriedade de um espelho parabólico mantém-se válida não só para raios luminosos mas também para radiação electromagnética como ondas portadoras de rádio e TV. Por este facto, a secção das “antenas parabólicas” destinadas a captar sinais muito fracos, é efectivamente uma parábola, devendo o eixo ser alinhado com o satélite cuja emissão se pretende receber e estando a antena colocada no foco.



10 Outras funções polinomiais

10.1 Generalidades

Nesta secção iniciaremos o estudo de funções polinomiais – isto é, cuja expressão analítica é um polinómio – de grau arbitrário, embora nos exemplos tenhamos apenas que nos confrontar com "graus pequenos".

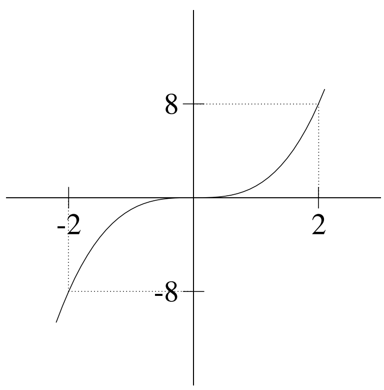
Comecemos por considerar as funções polinomiais mais simples de graus 3 e 4, respectivamente:

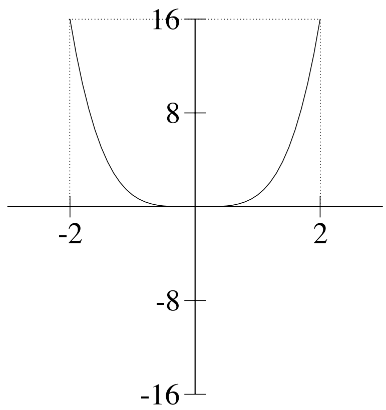
$$g(x) = x^3, \qquad h(x) = x^4, \qquad x \in \mathbb{R},$$

e observemos as respectivas tabelas de valores e representação gráfica:

x	-2	-1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
$g(x)$	-8	-1	$-\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	1	8

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
$h(x)$	16	1	$\frac{1}{16}$	0	$\frac{1}{16}$	1	16





Desde logo pode observar-se que g é ímpar e h é par.

Mas vale a pena reparar um pouco melhor no seu comportamento tanto para valores de x "pequenos" (próximos de 0) como para valores de x "grandes".

É útil confrontar os valores destas funções com os da já nossa conhecida função quadrática $f(x) = x^2$. Por isso as reunimos nas tabelas seguintes, onde apenas consideramos valores de x positivos, sendo dispensável o cálculo dos valores tomados em pontos negativos, pelas propriedades de simetria.

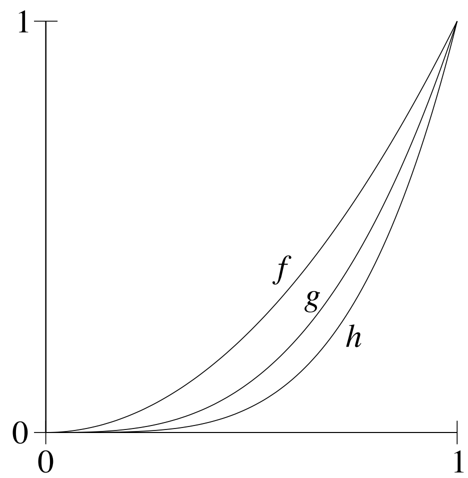
Valores “pequenos”

x	$1/4$	$1/8$	0.1	0.01
$f(x)$	$1/16 = 0.0625$	$1/64 = 0.015625$	0.01	0.0001
$g(x)$	$1/64 = 0.015625$	$1/512 = 0.00195312$	0.001	0.000001
$h(x)$	$1/256 = 0.00390625$	$1/4096 = 0.000244141$	0.0001	0.00000001

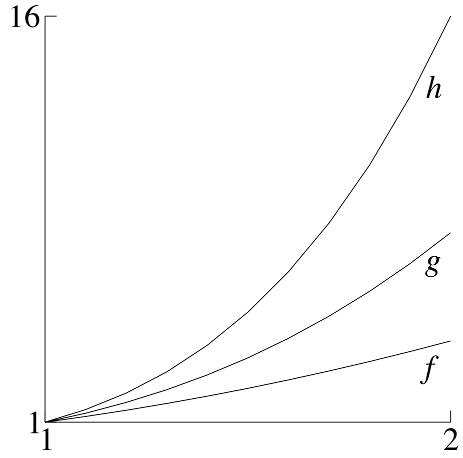
Valores “grandes”

x	1.5	2	3	4	10
$f(x)$	2.25	4	9	16	100
$g(x)$	3.375	8	27	64	1000
$h(x)$	5.0625	16	81	256	10000

Embora os gráficos não permitam fazer cálculos com grande precisão a tais escalas, é interessante observar gráficos simultaneamente de f, g e h no intervalo $[0, 1]$ (para apreciar as diferenças de comportamento entre as funções para valores pequenos)

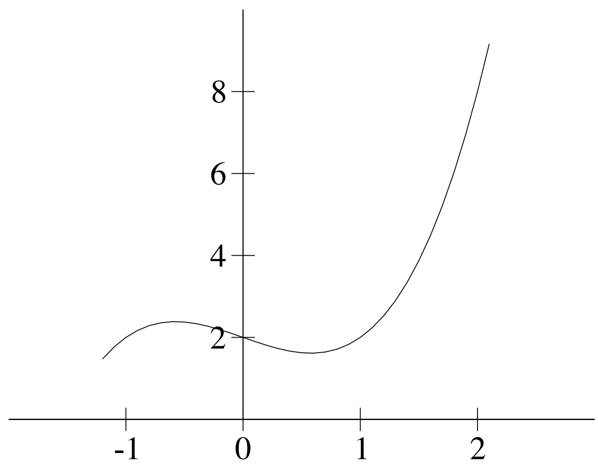


e também no intervalo $[1, 2]$ (para observar como começam a afastar-se umas das outras)



Estes resultados dão-nos uma primeira ideia de como as funções polinomiais podem assumir, para os mesmos valores da variável independente, valores de ordem de grandeza muito diferentes, e de como este facto é observável no gráfico respectivo.

Dito isto, devemos também estar preparados para uma variedade grande de comportamentos quando a expressão analítica se complica. Por exemplo, se em vez de x^3 considerarmos o polinómio $x^3 - x + 2$, uma tabela de valores ou um instrumento de cálculo gráfico mostra que o aspecto da representação gráfica no intervalo $[-1, 2]$ é:



Procuraremos, pois, sistematizar alguma informação que nos permita compreender e prever alguns dos possíveis comportamentos destas funções.

EXEMPLO 10.1 Em muitas aplicações da Matemática há necessidade de recorrer ao uso de polinómios. Por exemplo, em Economia é frequente tomar como modelo para o custo de produção de determinado produto, em função do número de cópias produzidas, uma função polinomial do 3º grau.

Suponhamos que a empresa E estima que a produção diária de x cópias do produto X tem o custo

$$C(x) = 300 + 2x - 0.5x^2 + 0.2x^3$$

expresso em euros. Com o auxílio de uma calculadora gráfica podemos obter uma ideia do comportamento desta função no intervalo $[0, 100]$. Uma janela de visualização adequada é, por exemplo,

$$[0, 100] \times [0, 200000].$$

Podemos então responder a perguntas como: quanto custa produzir 50 cópias do produto X? Quantas cópias se podem produzir com um custo de 50000 €?

10.2 Polinómios e divisão

Para começar, observemos que uma **função polinomial de grau** n é, por definição, uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cuja expressão analítica pode ser dada por um polinómio de grau n, isto é:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \tag{60}$$

onde os números reais

$$a_n,\ a_{n-1},\ \ldots,\ a_1,\ a_0$$

são dados, são chamados **coeficientes** de f, e $a_n \neq 0$.

A expressão de uma função polinomial pode não ser dada necessariamente com este aspecto. Com efeito, os polinómios podem ser combinados através das operações mais simples (adição e multiplicação); assim,

$$x - x(2 + x^2) \qquad \text{e} \qquad (x-1)^2(x^2+2)$$

são polinómios de graus 3 e 4, respectivamente, os quais se escrevem na forma (60) após realização das operações indicadas:

$$-x^3 - x \qquad \text{e} \qquad x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 2.$$

Um importante algoritmo para trabalhar com polinómios é o da **divisão**, que já nos surgiu na secção 9 a propósito das funções quadráticas. Para o ilustrar, consideremos o problema seguinte: pretende-se decompor a fracção (cujo numerador tem grau maior que o denominador)

$$\frac{3x^4 + 5x^3 - x + 1}{x^2 + 2}$$

na soma de um polinómio $Q(x)$ com outra fracção com o mesmo denominador mas com um polinómio $R(x)$ de grau < 2 no numerador:

$$\frac{3x^4 + 5x^3 - x + 1}{x^2 + 2} = Q(x) + \frac{R(x)}{x^2 + 2} \tag{61}$$

O que se pede é, pois, o cálculo dos polinómios $Q(x)$ e $R(x)$, isto é, o cociente e o resto da divisão de $3x^4 + 5x^3 - x + 1$ por $x^2 + 2$. Como $R(x)$ tem grau 1 ou 0, será da forma

$$R(x) = Ax + B$$

e, observando que (61) pode ser escrita com o aspecto

$$3x^4 + 5x^3 - x + 1 = (x^2 + 2)Q(x) + R(x) \tag{62}$$

imediatamente reconhecemos que $Q(x)$ deve ser um polinómio de grau 2, para que o 2º membro de (62) tenha grau 4 – o grau do 1º membro. Portanto

$$Q(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

e agora escrevemos a última equação com o aspecto

$$3x^4 + 5x^3 - x + 1 = (x^2 + 2)(\alpha x^2 + \beta x + \gamma) + Ax + B, \tag{63}$$

estando o nosso problema reduzido à determinação dos coeficientes α, β, γ, A, B. Efectuando os cálculos e reduzindo termos semelhantes em (63) obtemos

$$3x^4 + 5x^3 - x + 1 = \alpha x^4 + \beta x^3 + (2\alpha + \gamma)x^2 + (2\beta + A)x + 2\gamma + B$$

e, para que ambos os membros representem o mesmo polinómio deveremos igualar os respectivos coeficientes:[6]

$$\alpha = 3, \qquad \beta = 5, \qquad 2\alpha + \gamma = 0, \qquad 2\beta + A = -1, \qquad 2\gamma + B = 1$$

de onde calculamos, sucessivamente,

$$\alpha = 3, \qquad \beta = 5, \qquad \gamma = -6, \qquad A = -11, \qquad B = 13,$$

de modo que $Q(x) = 3x^2 + 5x - 6$, $R(x) = -11x + 13$.

Imediatamente se reconhece que de $Q(x)$ e $R(x)$, de acordo com estes cálculos, se podem obter executando o seguinte algoritmo:

1) Escrever o dividendo à esquerda do divisor, ordenando os termos, em ambos, por ordem decrescente de grau; e dividir o termo de ordem mais alta do primeiro pelo termo de ordem mais alta do segundo:

[6] À semelhança do que vimos atrás (no facto 9.9) dois polinómios de grau n representam a mesma função – isto é, são iguais para todo o $x \in \mathbb{R}$ – se, e só se, os respectivos coeficientes de termos do mesmo grau são iguais.

$$\begin{array}{r|l} 3x^4+5x^3-x+1 & x^2+2 \\ \cline{2-2} & 3x^2 \end{array}$$

O resultado é inscrito abaixo do divisor.

2) Multiplica-se o resultado anterior pelo divisor e este novo resultado é subtraído ao dividendo

$$\begin{array}{rrrr|l}
3x^4 & +5x^3 & & -x+1 & x^2+2 \\ \cline{5-5}
-3x^4 & & -6x^2 & & 3x^2 \\ \cline{1-4}
& 5x^3 & -6x^2 & -x+1 &
\end{array}$$

3) O polinómio obtido no passo anterior é agora encarado como novo dividendo e repetimos as operações a partir de 1)

$$\begin{array}{rrrrr|l}
3x^4 & +5x^3 & & -x & +1 & x^2+2 \\ \cline{6-6}
-3x^4 & & -6x^2 & & & 3x^2+5x-6 \\ \cline{1-5}
& 5x^3 & -6x^2 & -x & +1 & \\
& -5x^3 & & -10x & & \\ \cline{2-5}
& & -6x^2 & -11x & +1 & \\
& & 6x^2 & & +12 & \\ \cline{3-5}
& & & -11x & +13 &
\end{array}$$

O processo termina quando se chega a um “novo dividendo” de grau inferior ao divisor.

OBSERVAÇÃO Quando o divisor tem um só termo não é necessário recorrer ao algoritmo anterior, bastando aplicar a propriedade distributiva do produto relativamente à adição. Assim, por exemplo, na divisão

$$\frac{3x^4+5x^3-x+1}{2x^2} = \frac{3x^2}{2} + \frac{5x}{2} + \frac{-x+1}{2x^2}$$

temos que o cociente é $\frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}x$ e o resto é $-x+1$.

Posto em geral, o problema da divisão enuncia-se assim: dados polinómios $D(x)$ e $d(x)$, sendo

$$\text{grau de } D(x) \ \geq \ \text{grau de } d(x),$$

e não sendo $d(x)$ nulo, pretende-se determinar polinómios $Q(x)$, $R(x)$ tais que

$$D(x) = d(x)Q(x) + R(x) \qquad \text{e} \qquad \text{grau de } R(x) < \text{grau de } d(x) \tag{64}$$

ou, equivalentemente, sempre que $d(x) \neq 0$,

$$\frac{D(x)}{d(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{d(x)} \qquad \text{e} \qquad \text{grau de } R(x) < \text{grau de } d(x)$$

Se o grau de $D(x)$ for m e o grau de $d(x)$ for n, então (64) mostra que

$$\text{grau de } Q(x) = m - n$$
$$\text{grau de } R(x) \leq n - 1.$$

Os polinómios $Q(x)$ e $R(x)$ podem sempre obter-se pelos métodos que exemplificámos acima, sendo o resultado final bem determinado.

Vale a pena determo-nos num caso particular: aquele em que $d(x)$ é do 1º grau, podendo por isso escrever-se

$$d(x) = x - k$$

onde k é uma constante real. Seja

$$D(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

de grau $n \geq 1$ e procuremos

$$Q(x) = \alpha_{n-1} x^{n-1} + \alpha_{n-2} x^{n-2} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$$

e

$$R(x) = r \qquad \text{(constante)}$$

de modo que

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = (x - k)(\alpha_{n-1} x^{n-1} + \alpha_{n-2} x^{n-2} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0) + r.$$

Efectuando os cálculos e redução de termos semelhantes no 2º membro obtemos

$$a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 = \alpha_{n-1} x^n + (\alpha_{n-2} - k\alpha_{n-1}) x^{n-1} + \ldots + (\alpha_0 - k\alpha_1) x - k\alpha_0 + r$$

e portanto encontramos, sucessivamente:

$$\alpha_{n-1} = a_n$$
$$\alpha_{n-2} - k\alpha_{n-1} = a_{n-1}$$
$$\ldots$$
$$\alpha_0 - k\alpha_1 = a_1$$
$$r - k\alpha_0 = a_0$$

ou seja:

$$\alpha_{n-1} = a_n,\ \alpha_{n-2} = k a_n + a_{n-1},\ \alpha_{n-3} = k^2 a_n + k a_{n-1} + a_{n-2},\ \ldots,$$
$$r = k^n a_n + k^{n-1} a_{n-1} + \ldots + k a_1 + a_0.$$

Notemos que $r = D(k)$, isto é,

$$\boxed{\text{O resto da divisão do polinómio } D(x) \text{ por } x-k \text{ é igual a } D(k).}$$

À semelhança do que vimos no caso em que o dividendo é polinómio do 2º grau, utiliza-se a seguinte disposição de cálculo para obter sucessivamente os números $\alpha_{n-1},\ \ldots,\ \alpha_0,\ r$:

$$\begin{array}{c|cccccc} & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & a_1 & a_0 \\ k & & \alpha_{n-1}k & \ldots & \ldots & \ldots & a_nk^n+\ldots+a_1k \\ \hline & a_n(=\alpha_{n-1}) & \alpha_{n-1}k+a_{n-1}(=\alpha_{n-2}) & \ldots & \ldots & \alpha_0 & r \end{array}$$

Este algoritmo é conhecido como **regra de Ruffini**.

10.3 Factorização e aplicações

Dados dois polinómios $D(x)$ e $d(x)$, sendo grau de $D(x) \geq$ grau de $d(x)$, dizemos que $D(x)$ **é divisível por** $d(x)$ se o resto da divisão de $D(x)$ por $d(x)$ for 0. Por conseguinte, nesta situação podemos escrever

$$D(x) = d(x)Q(x)$$

onde $Q(x)$ é um polinómio (o cociente da divisão de $D(x)$ por $d(x)$). Dizemos também que $D(x)$ está decomposto no produto de dois factores, que são $d(x)$ e $Q(x)$.

EXEMPLO 10.2 Consideremos o polinómio do 4º grau $x^4 - 2x^2 + 1$. Não é necessário recorrer ao algoritmo da divisão para reconhecermos imediatamente que ele é um produto de dois factores, visto que é um quadrado de um polinómio:

$$x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2 - 1)^2$$

Na verdade, esta factorização pode prosseguir, visto que

$$x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$$

e portanto

$$x^4 - 2x^2 + 1 = (x + 1)^2(x - 1)^2$$

o que significa que decompusemos o polinómio dado no produto de 4 factores do 1º grau.

EXEMPLO 10.3 O polinómio do 3º grau $x^3 - 3x^2 + 2x - 6$ pode decompor-se utilizando a sequência de operações:

$$x^3 - 3x^2 + 2x - 6 = x^2(x - 3) + 2(x - 3) = (x - 3)(x^2 + 2).$$

Os factores são dois: um do 1º grau e outro do 2º grau. Este último não pode ser decomposto em factores do 1º grau porque não tem raízes reais.

É particularmente importante o seguinte problema, já parcialmente abordado na secção 9. Dado um polinómio de grau ≥ 1, quando é ele divisível pelo binómio do 1º grau

$$d(x) = x - k$$

onde k é uma constante real?

A resposta decorre imediatamente da nossa anterior definição e da regra de Ruffini estudada na subsecção 10.2.

Facto 10.1 *O polinómio $D(x)$ de grau $n \geq 1$ é divisível por $x - k$ no caso em que $D(k) = 0$ e só neste caso (isto é, no caso em que k é uma raiz de $D(x)$).*

Assim, para efectuar uma decomposição de um polinómio $D(x)$ em factores de grau inferior, é natural procurar as **raízes reais** de $D(x)$, caso elas existam. Conhecida uma raiz real k_1 de $D(x)$ ficamos a saber que se pode escrever

$$D(x) = (x - k_1)D_1(x)$$

onde $D_1(x)$ é outro polinómio. E é natural perguntar: a decomposição em factores pode prosseguir? O problema que agora se põe é o mesmo, mas transferido para $D_1(x)$. Suponhamos que $D_1(x)$ tem a raiz real k_2. Então, pelo mesmo facto

$$D_1(x) = (x - k_2)D_2(x)$$

onde $D_2(x)$ é um polinómio, e regressando a $D(x)$ podemos escrever

$$D(x) = (x - k_1)(x - k_2)D_2(x).$$

Este processo pode prosseguir desde que $D_2(x)$ e os polinómios que surgem no algoritmo em etapas seguintes tenham alguma raiz real. Por isso, a decomposição que podemos esperar obter é do tipo

$$D(x) = (x - k_1).(x - k_2). \ \ldots \ .(x - k_p)D_p(x) \tag{65}$$

onde $k_1, \ k_2, \ \ldots, \ k_p$ são números reais e $D_p(x)$ é um polinómio sem raízes reais. Observemos ainda que alguns dos números $k_1, \ k_2, \ldots$ podem surgir com repetição (ver o exemplo 10.2), de modo que, agrupando os eventuais factores repetidos, a decomposição acima fica com o aspecto

$$D(x) = (x - c_1)^{m_1} \ldots (x - c_q)^{m_q} \widehat{D}(x) \tag{66}$$

onde os números reais $c_1, \ \ldots, \ c_q$ são todos distintos, $m_1, \ \ldots, \ m_q \geq 1$ são inteiros e $\widehat{D}(x)$ é um polinómio sem raízes reais. (Por exemplo, no exemplo 10.2 teríamos $k_1 = k_2 = -1$, $k_3 = k_4 = 1$, e $c_1 = -1$, $c_2 = 1$).

EXEMPLO 10.4 Podemos factorizar o polinómio $x^4 + 4x^2 - 5$ fazendo a "mudança de variável" $x^2 = z$, atendendo a que $z^2 + 4z - 5$ tem raízes -5 e 1 e portanto se decompõe em

$$z^2 + 4z - 5 = (z + 5)(z - 1),$$

de onde finalmente

$$\begin{aligned} x^4 + 4x^2 - 5 &= (x^2 - 1)(x^2 + 5) \\ &= (x - 1)(x + 1)(x^2 + 5). \end{aligned}$$

EXEMPLO 10.5 Sabendo que o polinómio do 3º grau $x^3 + x - 2$ tem a raiz 1, podemos decompô-lo na forma $x^3+x-2 = (x-1)Q(x)$ onde $Q(x)$ [cociente da divisão de x^3+x-2 por $x - 1$] é um polinómio cujos coeficientes se obtêm pela regra de Ruffini e são sucessivamente

$$1, \qquad 1 + 0 = 1, \qquad 1 + 0 + 1 = 2.$$

Daqui resulta

$$x^3 + x - 2 = (x - 1)(x^2 + x + 2).$$

O trinómio $(x^2 + x + 2)$ não tem raízes reais e portanto a decomposição acima é já da forma (66).

É fácil descrever em que condições é que os factores $x - c_i$ surgem na decomposição (66) do polinómio $D(x)$:

Facto 10.2 *O polinómio $D(x)$ admite uma decomposição do tipo (66) se as suas raízes reais (distintas) são $c_1, \ \ldots, \ c_q$, e só neste caso.*

Demonstração Primeira parte. Se $D(x)$ admite as raízes reais $c_1, \ \ldots, \ c_q$ e só essas, então é decomponível na forma (66).

Efectivamente, isto foi verificado no texto anterior ao exemplo 10.4.

Segunda parte. Se $D(x)$ é decomponível na forma (66) então $c_1, \ \ldots, \ c_q$ são as únicas raízes de $D(x)$.

Com efeito, admitindo (66) por hipótese, temos

$$\begin{aligned} D(c_1) &= (c_1 - c_1)^{m_1}(c_1 - c_2)^{m_2} \ldots (c_1 - c_q)^{m_q}\widehat{D}(c_1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

e do mesmo se comprova

$$D(c_2) = 0, \ \ldots, \ D(c_q) = 0.$$

Além disso, se c é um número real e $c \neq c_1, \ \ldots, \ c \neq c_q$ tem-se $D(c) = (c - c_1)^{m_1}(c - c_2)^{m_2} \ldots (c - c_q)^{m_q}\widehat{D}(c) \neq 0$, já que $\widehat{D}(x)$ não tem raízes reais. ■

Facto 10.3 *Se $D(x)$ é um polinómio de grau n, então $D(x)$ tem, quando muito, n raízes reais distintas.*

Demonstração n tem de ser igual à soma dos graus dos polinómios que surgem com 0 factores no 2º membro de (66), isto é

$$n = m_1 + m_2 + \ldots + m_q + \text{grau de } \widehat{D}(x).$$

Como estes números são inteiros e $m_1 \geq 1, \ \ldots, \ m_q \geq 1$, tem-se $q \leq n$. ■

Quando, na decomposição (66), se tem $m_i = 1$, isto é, quando surge o binómio

$$x - c_i$$

sem repetições, dizemos que c_i é **raiz simples** de $D(x)$.

No caso em que $m_i \geq 2$ dizemos que c_i é **raiz múltipla** de $D(x)$, com **multiplicidade** m_i (falamos de raiz **dupla**, ou **tripla**, nos casos $m_i = 2$ ou 3, respectivamente).

EXEMPLO 10.6 $x^4 - 2x^2 + 1$ tem ± 1 como raízes duplas.

EXEMPLO 10.7 Resolver a inequação

$$x^3 + x - 2 > 0.$$

Utilizando a decomposição dada no exemplo 10.4 vemos que $x^3 + x - 2$ é produto de dois polinómios mais simples

$$x - 1 \qquad \text{e} \qquad x^2 + x + 2,$$

onde o segundo é um trinómio sem raízes reais, e que é por isso **positivo para todo o valor de** x (ver subsecção 9.3, facto 9.8). Por conseguinte, o sinal de $x^3 + x - 2$ é o mesmo que o do factor $x - 1$, ou seja

$$x^3 + x - 2 > 0 \ \Leftrightarrow \ x - 1 > 0$$

e, portanto, as soluções do problema são os números reais x tais que

$$x > 1.$$

EXEMPLO 10.8 Resolver a inequação $x^4 + 4x^2 - 5 \leq 0$.

Utilizando a decomposição dada no exemplo 10.6 e utilizando um raciocínio análogo concluímos

$$x^4 + 4x^2 - 5 \leq 0 \ \Leftrightarrow \ x^2 - 1 \leq 0$$

e, portanto, atendendo ao facto 9.1, concluimos que o conjunto das soluções é constituído pelos números x tais que

$$-1 \leq x \leq 1.$$

EXEMPLO 10.9 Sabendo que x^3-2x+1 tem a raiz 1, resolver a inequação $x^3-2x+1 \leq 0$.

Começamos por dividir por $x-1$: os coeficientes do cociente são, em virtude da regra de Ruffini,

$$1,\ 1,\ -1$$

e, por isso,

$$x^3-2x+1 = (x-1)(x^2+x-1).$$

O trinómio que surge no segundo membro tem raízes reais, $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$, e por isso obtemos a decomposição

$$(x-1)\left(x-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right).$$

Seguidamente podemos raciocinar assim: cada um dos três factores muda de sinal quando x atravessa a raiz respectiva, de modo que o esquema de sinais em função da localização de x

x		$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$		1	
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x+\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$

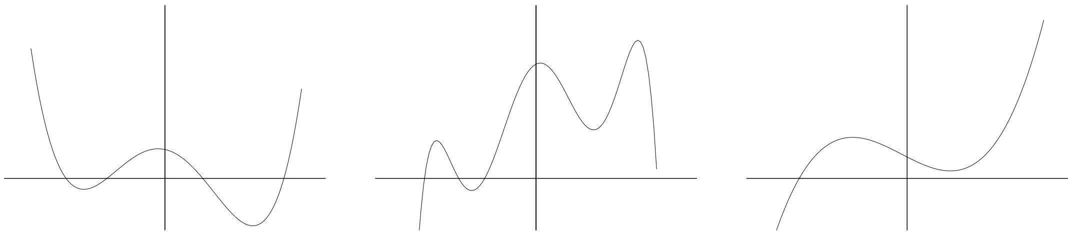
permite imediatamente concluir: $x^3-2x+1 \leq 0$ é equivalente a $x \leq \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ ou $\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \leq x \leq 1$.

EXEMPLO 10.10 Seja $D(x)$ um polinómio de grau $n > 0$. Quantos pontos pode o seu gráfico ter em comum com uma recta horizontal $y = y_0$?

As abcissas de tais pontos são as raízes da equação

$$D(x) = y_0 \tag{67}$$

ou seja, são as raízes do polinómio $D(x) - y_0$, o qual tem o mesmo grau que $D(x)$. Logo, há quando muito n valores de x a satisfazer (67) e portanto há quanto muito n pontos nas condições pedidas. Com base



neste resultado, é fácil dizer que valores pode assumir o grau dos polinómios representados graficamente na figura acima...

EXEMPLO 10.11 A decomposição (66) permite ainda tirar outras conclusões interessantes. Vamos ilustrar uma delas considerando o polinómio de grau 4

$$\begin{aligned} P(x) &= x^4 - 41x^3 + 440x^2 - 400x \\ &= x(x-1)(x-20)^2 \end{aligned}$$

que tem as raízes reais 0, 1 e 20 (sendo esta dupla). Observemos que:

x, $x-1$, $(x-20)^2$ são funções estritamente **crescentes** e **positivas** em $[20, +\infty[$;

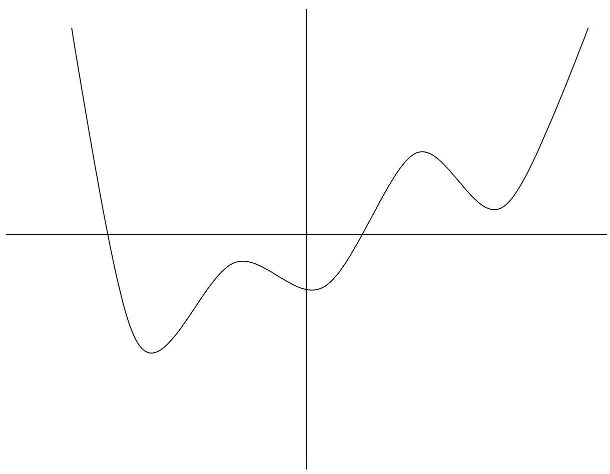
x e $x-1$ são **estritamente crescentes e negativas** e $(x-20)^2$ é **estritamente decrescente e positiva** em $]-\infty, 0[$.

Podemos então concluir que

$P(x)$ é estritamente crescente em $[20, +\infty[$ e, do mesmo modo,

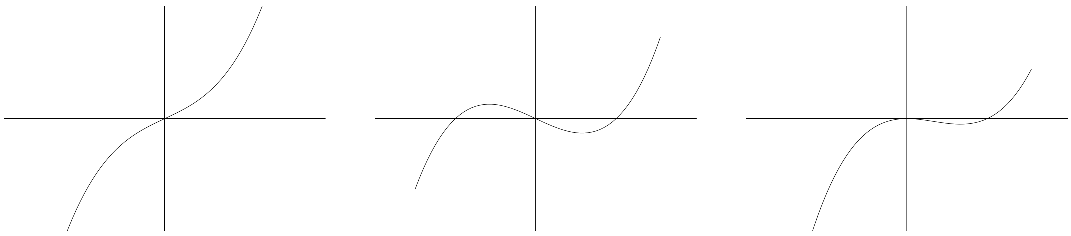
$P(x)$ é estritamente decrescente em $]-\infty, 0]$.

Este argumento pode ser usado para reconhecer que uma curva como a que se encontra na figura seguinte **não pode** ser gráfico de um polinómio de 4º grau!



10.4 Mais sobre polinómios. Gráficos. O papel do termo dominante.*

Exemplos simples mostram que o aspecto dos gráficos dos polinómios de graus superiores a 2 exibem uma grande variedade de comportamentos. Consideremos, por exemplo, os casos de $x^3 + x$, $x^3 - x$ e $x^3 - x^2$, a que correspondem os gráficos



Observemos que a primeira das funções consideradas parece exibir um comportamento mais simples que as duas outras, pelo menos pelo facto de parecer crescente em todo o seu domínio. É natural que nos interroguemos sobre se tais diferenças de comportamento são previsíveis a partir das expressões analíticas. Na verdade assim é, e o estudo de funções que este ano iniciamos e se prolongará pelos dois anos seguintes irá tornando claro porquê.

Vamos desde já avançar com alguma informação significativa, embora sem demonstração rigorosa.

Consideremos o caso geral de um polinómio do 3º grau

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \tag{68}$$

(onde $a_3 \neq 0$) e notemos que podemos reescrevê-lo com o aspecto

$$f(x) = a_3x^3\left(1 + \frac{a_2}{a_3x} + \frac{a_1}{a_3x^2} + \frac{a_0}{a_3x^3}\right) \tag{69}$$

sempre que $x \neq 0$. Esta restrição não é grave porque só nos vai interessar a fórmula (69) para avaliar o comportamento de $f(x)$ para valores de x **muito grandes em valor absoluto**. A principal observação a fazer é que, estando a_2, a_1 e a_0 fixados, para $|x|$ **suficientemente grande**[7], os termos

$$\frac{a_2}{x}, \qquad \frac{a_1}{x^2}, \qquad \frac{a_0}{x^3}$$

ficam (também em valor absoluto) pequenos, digamos, inferiores a $\frac{1}{6}$, pelo que a sua soma ficará em valor absoluto inferior a $\frac{1}{2}$:

$$-\frac{1}{2} < \frac{a_2}{a_3x} + \frac{a_1}{a_3x^2} + \frac{a_0}{a_3x^3} < \frac{1}{2}$$

[7]poderíamos calcular a ordem de grandeza necessária para garantir o que pretendemos.

Deste modo, para os tais valores de x (suficientemente grandes em valor absoluto), teremos

$$\frac{1}{2} < 1 + \frac{a_2}{a_3 x} + \frac{a_1}{a_3 x^2} + \frac{a_0}{a_3 x^3} < \frac{3}{2}$$

e daqui concluímos que é fácil comparar $f(x)$ com a_3x^3:

se $a_3 > 0$**,**

$$\begin{array}{ll} \frac{a_3}{2}x^3 < f(x) < \frac{3}{2}a_3x^3 & \text{para } x \text{ suficientemente grande positivo} \\ \frac{3}{2}a_3x^3 < f(x) < \frac{a_3}{2}x^3 & \text{para } |x| \text{ suficientemente grande e } x \text{ negativo} \end{array}$$

se $a_3 < 0$**,**

$$\begin{array}{ll} \frac{3}{2}a_3x^3 < f(x) < \frac{a_3}{2}x^3 & \text{para } x \text{ suficientemente grande positivo} \\ \frac{3}{2}a_3x^3 < f(x) < \frac{a_3}{2}x^3 & \text{para } |x| \text{ suficientemente grande e } x \text{ negativo} \end{array}$$

Por outras palavras, $f(x)$ fica enquadrado entre dois múltiplos da função mais simples a_3x^3 quando $|x|$ é "grande".[8]

Este facto explica, em particular, o aspecto dos gráficos observados no início deste parágrafo para valores das abcissas com módulo elevado. A ordem de grandeza das três funções dadas é a ordem de grandeza de x^3, e em particular elas tomam valores positivos (grandes) para x positivo grande, e valores negativos (grandes em módulo) para x negativo e grande em módulo.

Já agora, dediquemos ainda alguma atenção ao que se passa com um polinómio do 4º grau,

$$g(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

e, com objectivos análogos, escrevêmo-lo sob a forma

$$g(x) = a_4x^4 \left(1 + \frac{a_3}{a_4x} + \frac{a_2}{a_4x^2} + \frac{a_1}{a_4x^3} + \frac{a_0}{a_4x^4}\right).$$

Com argumentação semelhante à anterior podemos deduzir que, **se** $|x|$ é **suficientemente grande**,

$$\frac{1}{2}a_4x^4 < g(x) < \frac{3}{2}a_4x^4$$

no caso $a_4 > 0$, e

$$\frac{3}{2}a_4x^4 < g(x) < \frac{1}{2}a_4x^4$$

[8] Não é difícil observar que os números $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{2}$ não têm um papel essencial neste argumento: na verdade poderíamos repetir o raciocínio anterior com aqueles números substituídos por outros, A e B, tais que $0 < A < 1 < B$.

no caso $a_4 < 0$. (Agora não temos que nos preocupar em distinguir o caso $x > 0$ do caso $x < 0$ – porquê?)

Concluímos então que o comportamento de $g(x)$ para $|x|$ grande tem muito a ver com o da função a_4x^4. Novamente, $g(x)$ fica enquadrada entre dois múltiplos desta.

Em particular, se $a_4 > 0$, tais valores de $g(x)$ são evidentemente positivos (e grandes), e se $a_4 < 0$ esses valores são negativos (e grandes em valor absoluto).

O que dissemos pode traduzir-se, numa linguagem um pouco vaga, mas que será tornada mais precisa no próximo ano, dizendo que os polinómios $f(x)$ e $g(x)$ têm, **para valores grandes de** $|x|$, um **termo dominante**, o qual é o termo de maior grau, isto é a_3x^3, a_4x^4, respectivamente. **É este termo que determina o aspecto do gráfico para** $|x|$ **grande**; os restantes termos perdem importância comparados com aquele.

O leitor compreenderá que o que acabámos de dizer a respeito de polinómios de graus 3 e 4 pode repetir-se, sem modificações essenciais, a respeito de polinómios de grau arbitrário, tendo em atenção a diferença que é preciso estabelecer entre o comportamento para valores de x grandes e positivos e para valores de x grandes em módulo e negativos, no caso de o grau ser ímpar.

Em resumo, as ideias expostas sobre o papel do "termo dominante" explicam a **semelhança** dos 3 gráficos analisados no início quando nos afastamos muito da origem para a esquerda ou para a direita. Não explicam, por outro lado, as evidentes diferenças de comportamento quando nos fixamos no rectângulo de visualização em que as abcissas variam, digamos, entre -2 e 2. É precisamente aqui que os restantes termos dos polinómios revelam a sua influência. Vamos dar uma primeira ideia de como os comportamentos observados podem ser antecipados, estudanto aqueles 3 casos particulares.

Consideremos, para fixar ideias, os comportamentos das três funções polinomiais junto da origem (os três gráficos passam pela origem porque $x = 0$ é raiz dos três polinómios; mas as suas características em pontos vizinhos são bem distintas).

Façamos uma lista dos valores dos termos intervenientes para valores de x muito próximos de 0, e registemos os valores correspondentes das três funções:

x	-0.5	-0.2	-0.1	0	0.1	0.2	0.5
x^3	-0.125	-0.008	-0.001	0	0.001	0.008	0.125
x^2	0.25	0.04	0.01	0	0.01	0.04	0.25
$x^3 + x$	-0.75	-0.208	-0.101	0	0.101	0.208	0.75
$x^3 - x$	0.375	0.192	0.099	0	-0.099	-0.192	-0.375
$x^3 - x^2$	-0.375	-0.048	0.011	0	-0.009	-0.032	-0.095

A observação destes resultados fornece-nos uma pista para a interpretação dos três comportamentos em comparação. Para valores de x **suficientemente pequenos**[9] o termo x^2 perde importância relativamente a x, e do mesmo modo x^3 perde importância relativamente a x^2; tal perda acentua-se quando nos aproximamos de zero (repare o leitor que, quando x é da ordem de 0.01, x^2 e x^3 são respectivamente, da ordem de 0.0001 e 0.000001!). Assim, quando efectuamos as somas para calcular $x^3 + x$, $x^3 - x$, $x^3 - x^2$, que resultados obtemos na proximidade de $x = 0$?

No caso de $x^3 + x$, obtemos valores que pouco se afastam dos de x; no caso de $x^3 - x$ obtemos valores próximos dos de $-x$; e, finalmente, no caso de $x^3 - x^2$, obtemos resultados que pouco diferem dos de $-x^2$. Não admira, pois, que numa janela de visualização suficientemente pequena, os gráficos obtidos "pareçam", respectivamente, os das funções

$$x, \qquad -x, \qquad -x^2!$$

Continuando a usar uma linguagem de algum modo vaga, podemos dizer que, **na proximidade de** $x = 0$, os polinómios considerados têm, como **termos dominantes**, x, $-x$ e $-x^2$, respectivamente.

O comportamento de um polinómio em pontos vizinhos de um ponto que não é a origem pode reduzir-se a este caso por translação. Por exemplo, para $x^3 - x$ e para o ponto 1, considera-se $(x + 1)^3 - (x + 1) = x^3 + 3x^2 + 2x$ e faz-se o estudo deste para valores de x próximos de 0.

[9] poderíamos quantificar esta afirmação em termos mais precisos.

11 Actividades

Generalidades

$\boxed{1}$ As tabelas seguintes estabelecem correspondência entre dois conjuntos de números. Indicar se se trata de funções.

x	-1	0	1	2	2.5	3	4
y	3	1	0	1	2	3	5

x	0	1	1	2	3	3	5
y	1	0	2	2.5	-1	3	4

$\boxed{2}$ Para uma dada função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ foi determinada uma tabela parcial de valores:

x	-2	-1	0	1	2.5	3	3.5	10
$f(x)$	5	6	7	6	5	0	-1	-2

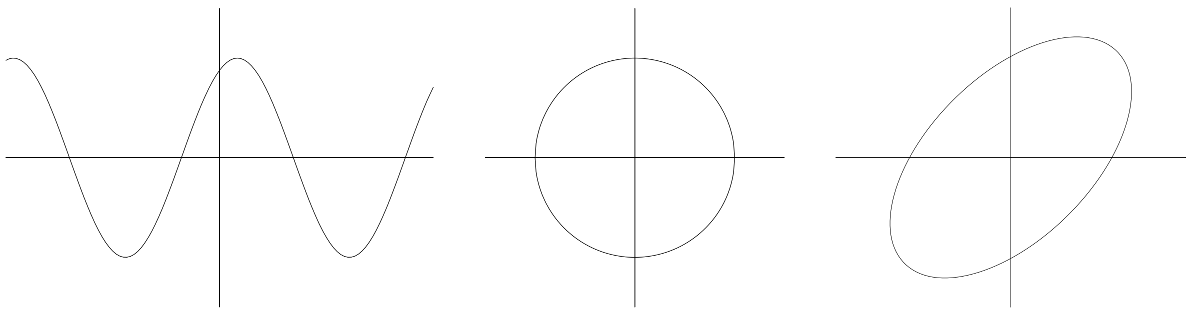
Iindicar quais das seguintes afirmações são verdadeiras:

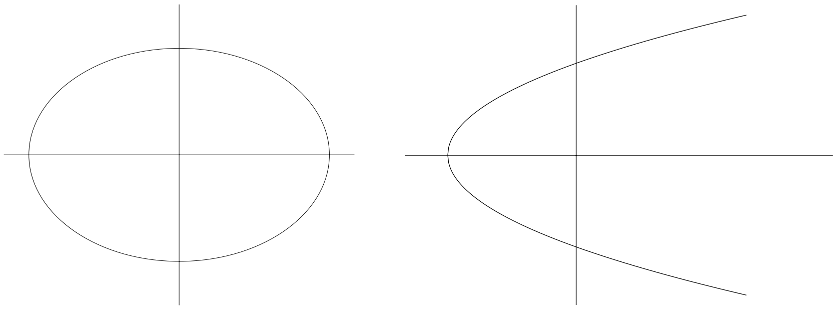
$$\begin{aligned}
&f(-1) = f(1),\\
&f(-1) + f(1) = 13,\\
&f(-1) + f(3.5) = 5,\\
&f(f(3.5)) = 6.
\end{aligned}$$

Se além disso soubermos que f é decrescente no intervalo $[0, +\infty[$, quais das seguintes afirmações são verdadeiras?

$$\begin{aligned}
&f(2) < 6,\\
&f(2) < 5,\\
&f(100) > -2.
\end{aligned}$$

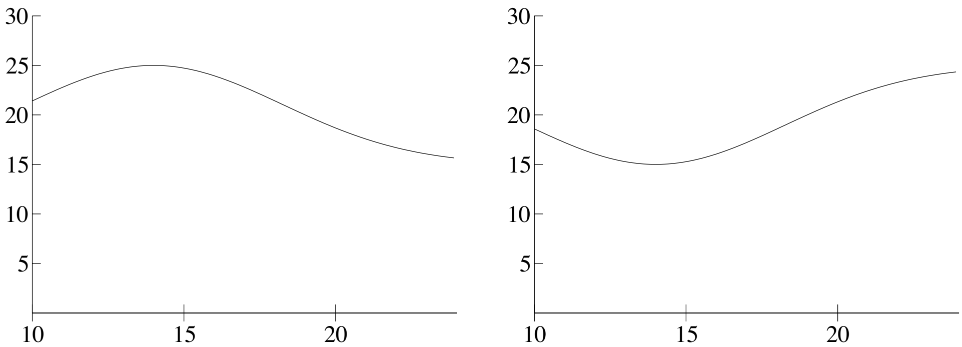
$\boxed{3}$ Quais das curvas a seguir representadas no plano cartesiano podem corresponder a gráficos de funções?





$\boxed{4}$ "Para cada número real x seja y o número que satisfaz $xy = 30$." Esta regra define y como função de x; representá-la por uma expressão designatória e indicar o seu domínio.

$\boxed{5}$ O intervalo $[10, 24]$ representa o tempo desde as 10 horas até às 24 horas de um determinado dia. Para cada $t \in [10, 24]$, seja $E(t)$ a temperatura, em graus centígrados, medida na varanda de um determinado prédio de Lisboa naquele dia. Qual dos seguintes gráficos representará a função $E(t)$?



$\boxed{6}$ O número que exprime a temperatura em graus centígrados (C) e o número que exprime a mesma temperatura na escala de Fahrenheit (F) relacionam-se por

$$F = \frac{9}{5}C + 32.$$

Representar graficamente a função que a cada C faz corresponder F de acordo com esta fórmula. Qual o significado da intersecção do gráfico com o eixo Oy?

A equação acima também define C como função de F. Descrever esta nova função por uma expressão designatória e representá-la graficamente.

$\boxed{7}$ Para a função $f(x) = x^2$, calcular:

$$f(1.5); \qquad f(a+b); \qquad f(a-b); \qquad f(5c); \qquad f(100);$$
$$f(101) = f(10^2+1); \qquad f(0.01); \qquad f(0.0001);$$
$$f\left(\frac{1}{101}\right).$$

Para a mesma função, é verdadeiro ou falso:

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \qquad xy = 1 \;\Rightarrow\; f(x)f(y) = 1.$$
$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad x < 4 \;\Rightarrow\; f(x) < 16.$$

$\boxed{8}$ Para a função $f(x) = 3x - 2$, calcular:

(a) $f(-10001)$; $f(1002)$; f(0.01).

(b) a expressão designatória das novas funções

$$g(x) = f(x-5), \qquad h(x) = f(x+5),$$
$$j(x) = f(6x), \qquad k(x) = f(-2x).$$

Esboçar os respectivos gráficos.

$\boxed{9}$ Um vendedor de automóveis promove os modelos da marca FLECHA com um desconto de 8% no preço de cada viatura nova.

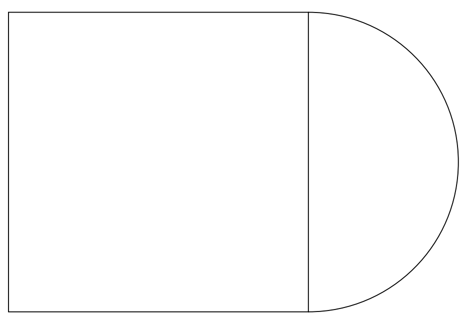
(a) Se p representar o preço de uma viatura nova, qual é o valor a pagar (v) se aproveitarmos esta promoção na compra da viatura?

(b) O mesmo vendedor oferece ainda 2000 € aos clientes que no acto da compra entreguem um veículo usado com 10 anos. Qual é, ainda em função de p, o valor a pagar (w) neste caso?

$\boxed{10}$ A distribuidora de publicações JORNAL fez um contrato com um determinado vendedor de acordo com o qual lhe paga, por cada exemplar vendido até 500, 5% do respectivo preço de venda; por cada exemplar que excede os 500 paga 10% do respectivo preço.

Sabendo que o preço de venda do jornal X é de 0.6 €, exprimir o montante que a JORNAL deve pagar a vendedor em função do número de exemplares vendidos.

$\boxed{11}$ Uma figura plana é constituída por um quadrado de lado a e um semicírculo cujo diâmetro coincide com um dos lados do quadrado, conforme a figura junta.



Exprimir, como funções de a, a área da figura e o comprimento da linha que a limita.

$\boxed{12}$ Verificar se, em cada caso, as seguintes expressões designatórias definem a mesma função real de variável real.

(a) $x^2 + 2x + 1$ e $(x + 1)^2$

(b) $2x + \frac{1}{x}$ e $\dfrac{2x^2 + 1}{x}$

(c) $\dfrac{x^2 - 16}{x^2 + 8x + 16}$ e $\dfrac{x - 4}{x + 4}$

(d) $x^3 + x^2 + x + 1$ e $(x + 1)(x^2 + 1)$

(e) $\dfrac{x + \frac{1}{x}}{x - \frac{1}{x}}$ e $\dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

(f) $\sqrt{x^2}$ e x

(g) x^2 e $|x|^2$

$\boxed{13}$ Escrever as expressões designatórias $\frac{x+1}{x-1}$, $\frac{2x+3}{x-1}$ na forma: $a + \frac{b}{x-1}$ em que a, b são números reais.

$\boxed{14}$ Indicar intervalos onde são crescentes ou decrescentes as funções seguintes.

$$-5x + 100; \qquad 1 + x^2; \qquad \frac{1}{x - 1}; \qquad \frac{x + 1}{x - 1}.$$

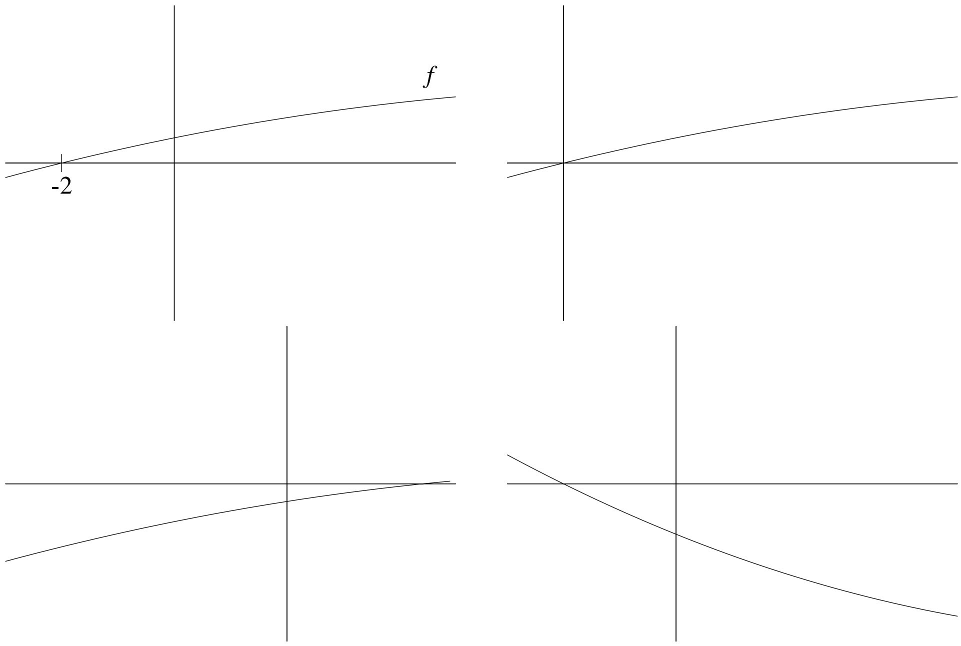
$\boxed{15}$ Verificar se 3 pertence ao contradomínio das funções seguintes:

$$-5x + 100; \qquad \frac{1}{x}; \qquad x^2 + x; \qquad x^2 + 2x + 10; \qquad \frac{1}{1 + x^2}; \qquad \frac{1}{1 - x^2}.$$

$\boxed{16}$ Indicar o domínio das funções definidas pelas expressões:

$$\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}; \qquad \sqrt{x - 3}; \qquad \frac{1}{\sqrt{x - 3}}.$$

$\boxed{17}$ Na figura seguinte, o primeiro desenho representa o gráfico de uma função f. Os três restantes representam os gráficos de $f(x - 2)$, $f(x + 2) - 1$ e $-2f(x)$. Identificá-los.



$\boxed{18}$ Quais das seguintes funções são pares ou ímpares?

$$-5x+100; \qquad \frac{1}{x}; \qquad \frac{x^2}{1+x^2}; \qquad x^2+x; \qquad 5; \qquad |x+1|-|x-1|.$$

$\boxed{19}$ Determinar as raízes das seguintes funções, caso existam,

$$x^2+2x+10; \qquad \sqrt{x}-\frac{1}{x}; \qquad \sqrt{x}+\frac{1}{x}; \qquad \frac{2x+3}{x-1}\cdot$$

$\boxed{20}$ A cada número real x façamos corresponder a sua distância $f(x)$ ao inteiro mais próximo. Escrever a expressão de $f(x)$ no intervalo $[0,1]$ e também no intervalo $[1,2]$ e efectuar a representação gráfica desta função.

$\boxed{21}$ Sabe-se que determinada função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é par e $f(-1) = f(3) = 0$. Que ficamos a saber sobre as possíveis raízes de f?

Funções afins

$\boxed{1}$ Indicar se as seguintes tabelas podem corresponder a alguma função afim. Em caso afirmativo, qual?

x	-2	-1	0	3	4
y	-11	-8	-5	4	7

x	-2	-1	0	3	4
y	-3	-1	1	11	14

$\boxed{2}$ Completar a seguinte tabela de valores de uma função, sabendo que se trata de uma função afim.

x	-5	-3	0	1	2	4	$\cdot$
y	$\cdot$	$\cdot$	1	5	$\cdot$	$\cdot$	20

$\boxed{3}$ Num rectângulo de lados 2 e 5 dá-se um acréscimo de h unidades ao lado maior. Seja $A(h)$ a área do novo rectângulo resultante dessa modificação. Verificar que a área $A(h)$ é função afim de h.

$\boxed{4}$ Quando uma vara metálica é aquecida, o seu comprimentos aumenta por dilatação. Sendo l_0 o comprimentos da vara a 0 °C e $l(t)$ o seu comprimento a t °C, verifica-se que a função é afim[10] e tem uma expressão do tipo:

$$l(t) = l_0(1 + \alpha t)$$

ond α é um coeficiente que depende do material.

Supondo que a medição do comprimento às temperaturas de 38 °C e 95 °C forneceu os valores 405.2 mm e 407.8mm, respectivamente, determinar l_0 e α.

$\boxed{5}$ A recta de equação $y = \frac{3}{5}x + \frac{1}{5}$ passa pelos pontos $(3, 2)$ e $(-7, -4)$. Passa por outros pontos com coordenadas inteiras?

$\boxed{6}$ Escrever a equação de uma recta: (a) que contenha um único ponto de coordenadas inteiras; (b) que não passe por nenhum ponto de coordenadas inteiras.

$\boxed{7}$ Uma editora discográfica tem uma despesa fixa de 10 000 euros por mês e produz CDs com o custo de 0.5 euros por cópia. Exprimir o custo mensal total em função do número de cópias produzidas. Interpretar a despesa fixa no gráfico da função obtida.

$\boxed{8}$ Pedro tem um filho, o Nuno, que nasceu no dia do seu 29º aniversário. Descrever a idade do Nuno (y) em função da idade do Pedro (x).

$\boxed{9}$ A Livraria Tejo instituiu a semana da banda desenhada, durante a qual vende qualquer volume dessa categoria com 20% de desconto. Exprimir o preço a pagar (y) como função do preço normal (x) de cada volume.

$\boxed{10}$ O valor do IVA sobre a venda de perfumes é 17%. Se observarmos, na factura correspondente a uma compra de produtos de perfumaria, os campos:

Valor	x	Euros
IVA	y	Euros
Total a pagar	z	Euros

[10] dentro de certos limites de temperatura! A uma temperatura suficientemente elevada a vara funde e deixa de ter sentido falar do seu comprimentos...

sabemos que $x + y = z$; exprimir x e y como funções de z.

$\boxed{11}$ O montante (y) a pagar mensalmente pelo volume de gás (x) fornecido pela Gás Sempre é calculado do seguinte modo: adicionam-se as parcelas

Cota de serviço	2 €
Consumo	$0.5x$ €

e ao termo obtido é adicionado 5% de IVA. Exprimir y como função de x.

Funções quadráticas

$\boxed{1}$ Construir o gráfico das funções

$$y = x^2 + 3x + 5; \qquad y = x^2 + 3x + 2.$$

Obter os mesmos gráficos a partir do de $y = x^2$ por translações horizontais e verticais.

$\boxed{2}$ Qual é o valor mínimo das funções do exercício 1?

$\boxed{3}$ Obter os gráficos das funções

$$y = 2x^2 - 3x + 6; \qquad y = -\frac{1}{2}x^2 - x + 1$$

a partir dos de $y = 2x^2$ e $y = -\frac{1}{2}x^2$, respectivamente.

$\boxed{4}$ Para a parábola correspondente a cada uma das seguintes equações, determinar o vértice e os pontos de intersecção com os eixos coordenados:

$$y = x^2 + x - 1; \qquad y = -2x^2 + 2x + 1;$$
$$y = 6x^2 + 10x + 1; \qquad y = x^2 - 9.$$

$\boxed{5}$ Que valores deve assumir a constante K para que a função $y = x^2 + x + K$

(a) tenha uma única raiz?

(b) não tenha raízes reais?

$\boxed{6}$ Sabendo que a função $y = ax^2 + bx + c$ tem raízes reais 1 e 2 e que assume o valor -2 para $x = 0$, determiná-la.

$\boxed{7}$ Sabendo que a função $y = ax^2 + bx + c$ tem raízes 1 e 2 e assume o valor mínimo -2, determiná-la.

$\boxed{8}$ Sabendo que o trinómio $-x^2 + px + q$ tem uma única raiz real, quais das seguintes afirmações são verdadeiras?

$q > 0$.

$-x^2 + px + q + 10^6$ tem duas raízes reais.

$-x^2 + px + q - 10^6$ tem duas raízes reais.

$\boxed{9}$ Sabendo que a função $2x^2 + px + 5$ atinge o seu mínimo no ponto $x = 1$, determiná-la.

$\boxed{10}$ Resolver as inequações

$$\begin{aligned} &2x^2 - 5x + 3 < 0; \qquad -x^2 + x - 10 < 0; \\ &x^2 + 1 < x + 3. \end{aligned}$$

$\boxed{11}$ Determinar o número α de modo que a parábola $y = x^2$ e a recta $y = \alpha x - 1$ tenham um único ponto comum. Para tal valor de α, qual das seguintes afirmações é verdadeira?

$$\begin{aligned} x^2 &\geq \alpha x - 1 \qquad \forall x \in \mathbb{R} \\ x^2 &\leq \alpha x - 1 \qquad \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$\boxed{12}$ Qual é a recta que é paralela à recta $y = 2x$ e é tangente à parábola $y = x^2 - x$ e qual é o ponto de tangência?

$\boxed{13}$ Decompor em factores afins os trinómios

$$x^2 - x - 2; \qquad 2x^2 - 5x + 3; \qquad -x^2 + x - 10.$$

$\boxed{14}$ Escrever a fracção $\frac{2x^2-5x+10}{x-4}$ como soma de um polinómio do 1º grau com uma função do tipo $\frac{c}{x-4}$ ($c =$ constante).

$\boxed{15}$ Na comercialização de um determinado produto estima-se que o lucro $L(x)$ resultante da venda de x exemplares é dado por uma função do tipo

$$L(x) = ax^2 + bx + c.$$

Suponhamos x expresso em milhares e L em milhares de €. Sabendo que quando a venda atinge os níveis $x = 2,\ 3,\ 4$, o lucro obtido é 7 (milhares de €), 8, 8.5, respectivamente, determinar o número de vendas necessário para obter um lucro máximo. Indicar se há aumento de lucros quando as vendas aumentam de 5 para 6.

$\boxed{16}$ Um projéctil é lançado verticalmente de forma que a sua altura h (acima do solo) em metros é dada, em função do tempo t, dado em segundos, a partir do instante de lançamento ($t = 0$) e até ao instante de queda no solo, pela expressão

$$h = -4.9t^2 + 80t + 5.$$

Qual é a altura máxima atingida pelo projéctil? Quanto tempo demora o projéctil a tocar o solo?

$\boxed{17}$ Um projéctil é lançado num plano vertical munido de um referencial ortonormado. O eixo Ox representa o nível do solo. O lançamento é feito a partir do ponto $(0, \frac{1}{2})$ e a trajectória do projéctil é dada pelo gráfico da função $y = -x^2 - 5.2x + 0.5$ no 2º quadrante. Qual é a altura máxima atingida pelo projéctil? A que distância na horizontal, a partir do ponto de lançamento, se dá a sua queda no solo?

$\boxed{18}$ Dados a e b, números reais positivos, define-se a média geométrica de a e b como sendo o número

$$g = \sqrt{ab}.$$

Mostrar que $g \leq c$, sendo c a média aritmética de a e b.

Sugestão. Elevar ao quadrado ambos os membros da desigualdade $2\sqrt{ab} \leq a + b$.

$\boxed{19}$ A Sandra recebeu do pai 30 euros para comprar capas de arquivo mas, tendo gasto dinheiro numa revista, esgotou a quantia, acabando por comprar menos uma capa do que teria sido possível. Declarou depois ao pai que cada capa tinha custado 1 euro mais do que o previsto. Quantas capas comprou a Sandra e qual o preço real de cada uma?

Valor absoluto

$\boxed{1}$ Dados $a, b \in \mathbb{R}$, com $a \leq b$, verificar que o número $c = \frac{a+b}{2}$ (chamado **média aritmética** de a e b) verifica

$$|c - a| = |c - b|$$

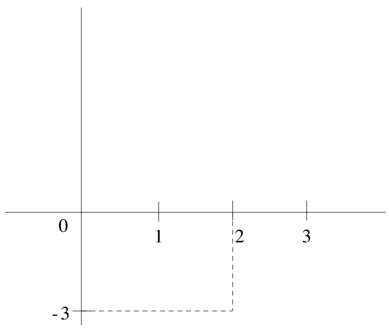
e é o único número nestas condições.

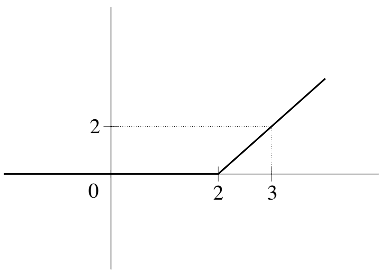
$\boxed{2}$ Resolver a equação $|2x^2 - x - 1| - x = 0$. (OBSERVAR que a equação só pode ter soluções **positivas**!) Representar graficamente as funções $|2x^2 - x - 1|$ e x no mesmo sistema de eixos para confirmar e interpretar o resultado.

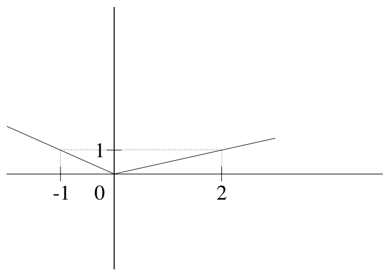
$\boxed{3}$ Resolver a inequação $|x| \geq |x - 2|$ e confirmar o resultado observando a representação simultânea dos gráficos $|x|$ e $|x - 2|$.

$\boxed{4}$ Resolver $|x| = |x - 1| + |x - 2|$. OBSERVAR que, em virtude de ser $|x| \geq |x - 2|$ para toda a solução desta equação, pode utilizar-se o resultado do exercício anterior.

$\boxed{5}$ Determinar a expressão analítica das funções cujos gráficos estão a seguir esquematizados (todos constituídos por semirectas).

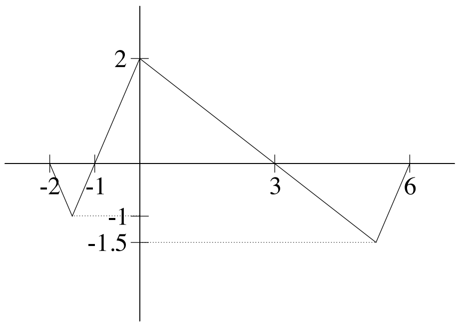






Apresentar a expressão em termos do módulo de uma função afim, eventualmente adicionado a outra função afim.

$\boxed{6}$ O gráfico da função f, definida no intervalo $[-2, 6]$, é constituído por segmentos de recta, de acordo com o esquema junto.



Indicar os extremos locais e absolutos da função $|f(x)|$ em $[-2, 6]$, e os pontos onde são atingidos.

Outras funções polinomiais

$\boxed{1}$ Esquematizar, no intervalo $[0, 1]$, os gráficos das funções x^4 e x^5. Depois desenhar os gráficos das mesmas funções no intervalo $[-1, 1]$.

$\boxed{2}$ A tabela seguinte faz corresponder a cada valor x um valor y através de uma função do tipo $y = Cx^n$ onde C é uma constante e n um número natural. Determinar C e n e completar a tabela.

x	2	5	10	20
y	48	1875	·	·

$\boxed{3}$ Esquematizar os gráficos das funções

$$(x+2)^3, \qquad \frac{1}{2}(x+2)^3 - 1.$$

$\boxed{4}$ Para que valores de x se tem

$$x^3 > 1000x^2? \qquad x^4 > 1000x^2? \qquad x^3 < 0.001x^2?$$

$\boxed{5}$ Determinar as raízes reais de

$$x^3 - 5x^2 + 6x; \qquad 2x^3 + 4x^2 - 2x - 4; \qquad x^4 + 25x^2 - 150$$

e escrever as factorizações destes polinómios.

$\boxed{6}$ Factorizar

$$x^4 + 10x^2 + 25; \qquad x^7 - 8x^5; \qquad x^3 + x^2 + x + 1; \qquad 2x^3 - 7x^2 + 5x + 2$$

(se necessário, utilizar um gráfico obtido numa máquina para obter uma ideia do valor de uma raiz);

$$x^3 - 1; \qquad x^4 - 1; \qquad x^5 - 1.$$

$\boxed{7}$ Desenhar o gráfico do polinómio $(x+10)(x-5)^2$ nos intervalos $[-11, -9]$ e $[4, 6]$.

$\boxed{8}$ O mesmo para $x^6 - 1$ no intervalo $[0, 2]$.

$\boxed{9}$ Factorizar e indicar para que valores de x são **positivos** os polinómios:

$$x^5 - 10x^2; \qquad x^5 - 10x^3; \qquad x^4 - 4x^2 - 5; \qquad x^3 - x^2 + x - 1.$$

$\boxed{10}$ Decompor $x^4 + 1$ em factores do 2º grau começando por escrever

$$x^4 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 \ldots$$

$\boxed{11}$ Verificar que $x^6 + 1$ é divisível por $x^2 + 1$.

$\boxed{12}$ Utilizando o resultado do problema 11, factorizar $x^6 + 1$ em polinómios do 2º grau.

$\boxed{13}$ Completar a factorização do polinómio

$$(x+2)(x^3 - 2x^2 - 9)$$

sabendo que tem a raiz 3.

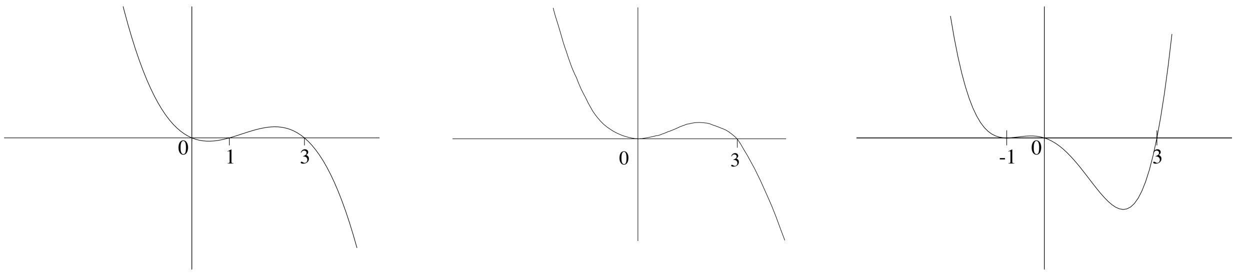
$\boxed{14}$ Resolver a inequação

$$(x+2)(x^3 - 2x^2 - 9) > 0.$$

$\boxed{15}$ Quais dos seguintes polinómios têm gráficos simétricos (a) relativamente à origem? (b) relativamente ao eixo $0y$?

$$x^3 - 2x^2 + x - 1; \qquad x^7 - 4x^5 + x^3; \qquad x^7 - 4x^5 + 3x^3 + 1; \qquad x^6 + 1.$$

$\boxed{16}$ Escrever a expressão de polinómios de graus 3 ou 4 cujos gráficos possam ter o aspecto aproximado seguinte.



$\boxed{17}$ Pretendemos construir um paralelipípedo de base quadrada de forma que a soma do perímetro da base com a altura seja 108 cm. Como devemos escolher a aresta da base de modo que o volume do paralelipípedo seja o maior possível? (Exprimir o volume em função da aresta da base e esboçar o gráfico da função obtida.)

$\boxed{18}$ Com o auxílio de uma máquina verificar que existem números $b_1 < b_2$ tais que a equação $x^3 - 3x = b$ (1°) tem duas raízes reais se $b = b_1$ ou $b = b_2$; (2°) tem três raízes reais se $b_1 < b < b_2$; (3°) tem uma única raiz real se $b < b_1$ ou $b > b_2$. Indicar os valores de b_1 e b_2 com aproximação às décimas. Repetir este problema com a equação $x^3 - 2\,x = b$.

APÊNDICES

A Sobre regras básicas do cálculo numérico e algébrico e a resolução de equações simples

1) Adição e subtracção

O significado de uma expressão numérica ou algébrica onde surge o sinal $-$ (menos) pode sempre exprimir-se a partir do conceito de adição. Por exemplo, quando afirmamos

$$3 - 5 = -2$$

queremos dizer que $3 = 5 + (-2)$, ou simplesmente

$$3 = 5 - 2,$$

e ainda, pela mesma razão, $3+2 = 5$. O próprio símbolo -2 representa o objecto que somado com 2 dá 0:

$$2 + (-2) = 0.$$

De um modo geral, a **diferença** de expressões susceptíveis de representar números

$$a - b = c \tag{70}$$

significa o número que adicionado a b dá a:

$$a = b + c. \tag{71}$$

Assim, (70) e (71) **são afirmações equivalentes**.

Um modo cómodo de descrever a passagem de (70) para (71) ou de (71) para (70) consiste em dizer que **adicionámos a ambos os membros o mesmo número (ou expressão)**. (Adiciona-se b para passar de (70) para (71) e $-b$ para passar de (71) para (70).)

Este príncipio explica porque é que, na resolução da equação

$$\frac{1}{2} - 2x = x$$

a transformamos na equação

$$\frac{1}{2} = 2x + x,$$

isto é,

$$\frac{1}{2} = 3x.$$

2) Multiplicação e divisão

A divisão de um número real, a, por outro, b, representada frequentemente na forma de fracção $\frac{a}{b}$, tem um significado que se explica em termos da multiplicação:

$$\frac{a}{b} = c \tag{72}$$

é o número que multiplicado por b dá a:

$$a = bc. \tag{73}$$

Assim, (72) e (73) **são equivalentes** por definição. É importante ter em conta que **ao escrever (72) se pressupõe que** $b \neq 0$ (porque, se $b = 0$, (73) mostra que forçosamente $a = 0$ e c pode ser **qualquer** número, não ficando o símbolo a/b com um significado claro.) Repare-se também que (73) se pode escrever $a = b.\frac{a}{b}$. E em particular $a = \frac{a}{1}$.

Assim, o que queremos dizer quando escrevemos

$$\frac{6}{2} = 3$$

é o mesmo que $6 = 2 \times 3$. E, do mesmo modo, a igualdade

$$\frac{x+1}{x^2+1} = x \tag{74}$$

é equivalente a

$$x + 1 = x(x^2 + 1) \tag{75}$$

ou seja

$$x + 1 = x^3 + x. \tag{76}$$

Dizemos frequentemente, em passagens como a de (74) para (75), que "desembaraçámos de denominador" ou que **multiplicámos pela mesma expressão diferente de zero**, tendo-se obtido uma igualdade equivalente. (Note-se que a expressão $x^2 + 1$, pela qual se multiplicaram ambos os membros de (74), é efectivamente $\neq 0$ para qualquer valor de x; na verdade $x^2 + 1 \geq 1 > 0$.)

Resulta, em particular, deste princípio, que a igualdade de fracções

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \tag{77}$$

é equivalente a

$$ad = bc \tag{78}$$

(basta multiplicar ambos os membros de (77) por bd.)

Uma importante regra de cálculo com fracções consiste no seguinte: **um factor não nulo comum ao numerador e ao denominador pode ser ignorado sem que o valor da fracção se altere**:

$$\frac{af}{bf} = \frac{a}{b}. \tag{79}$$

A razão de ser deste facto é que $afb = bfa$. Dizemos então que "cortámos o factor comum f".

Lendo a igualdade (79) da direita para a esquerda, podemos também dizer que **multiplicando os dois termos de uma fracção pelo mesmo factor não nulo o valor da fracção não se altera**.

3) As regras de sinal para o produto implicam imediatamente que, por exemplo

$$-\frac{6}{2} = \frac{-6}{2} = \frac{6}{-2}$$

ou

$$-\frac{x+1}{x^1+1} = \frac{-x-1}{x^2+1} = \frac{x+1}{-x^2-1}.$$

4) Quando o numerador de uma fracção é 1 (por exemplo $\frac{1}{5}$) dizemos que o número representado pela fracção é o **inverso** do denominador; o seu significado explica-se de acordo com o que foi dito em 2):

$$\frac{1}{5} = a$$

quer dizer o mesmo que $1 = 5a$. (Sabemos que $a = 0.2$ porque

$$\frac{1}{5} = \frac{2}{10}.)$$

5) O valor de uma fracção é afinal o produto do numerador pelo inverso do denominador:

$$\frac{6}{2} = 6 \times \frac{1}{2}, \qquad \frac{1+x}{1+x^2} = (1+x).\frac{1}{1+x^2},$$

etc. Com efeito,

$$6 = \frac{6}{1}, \qquad 1+x = \frac{1+x}{1}$$

e tudo se reduz à regra para multiplicar fracções:

$$\frac{3}{5} \times \frac{7}{9} = \frac{3 \times 7}{5 \times 9} \left(= \frac{7}{15} \right)$$

ou, em geral,

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

(multiplicam-se separadamente numeradores e denominadores). A explicação desta regra consiste no seguinte: se representarmos por x e y, respectivamente, as fracções $x = \frac{a}{b}$ e $y = \frac{c}{d}$, então, por definição

$$a = bx, \qquad c = dy$$

e portanto

$$ac = (bd)(xy)$$

de modo que, novamente por definição de fracção

$$xy = \frac{ac}{bd}.$$

6) **Factorizar** um número ou uma expressão algébrica é dar uma sua expressão equivalente que seja um **produto** de dois ou mais factores. A propriedade distributiva

$$a(b + c) = ab + ac,$$

válida para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{R}$, é utilizada muitas vezes com este objectivo. Assim, temos

$$2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 2 \cdot (1 + 2 + 2^2 + 2^3),$$
$$x - 2x^2 + x^3 = x \cdot (1 - 2x + x^2).$$

Dizemos que na 1ª igualdade o factor "2" foi **posto em evidência**. Na 2ª o factor "x" foi **posto em evidência.**

Esta técnica é útil, em particular, para **simplificar** fracções, eliminando os factores comuns ao numerador e ao denominador. Por exemplo:

$$\frac{6}{10} = \frac{2 \times 3}{2 \times 5} = \frac{3}{5}; \qquad \frac{x + x^2}{x^3} = \frac{x(1 + x)}{x^3} = \frac{1 + x}{x^2}.$$

EXERCÍCIO A.1 a) Efectuar as operações em

$$x(1 + x), \qquad (1 + x^2)(1 + x), \qquad (x + 1)^3, \qquad (2x - 1)^3.$$

b) Simplificar: $\dfrac{x}{x - x^5}, \qquad \dfrac{(2x)^3 - x}{x^3}, \qquad \dfrac{x^2 - 4x + 4}{3x - 6}.$

c) Factorizar:

$$4a^2 - b^2, \qquad xy^2z - 2yz, \qquad 5x^2 - 10x, \qquad x^3 - x^2 - 2 + 2x, \qquad ax^3 + a^2x^2 - ax.$$

7) A combinação da definição de fracção com a propriedade distributiva dá como resultado que possamos fazer cálculos como

$$\frac{7}{2} = \frac{6+1}{2} = \frac{6}{2} + \frac{1}{2} = 3 + \frac{1}{2}$$

(porque, na 2ª igualdade, $\frac{6+1}{2}$ quer dizer o mesmo que $(6+1)\cdot\frac{1}{2} = 6\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{1}{2}$). Analogamente,

$$\frac{x+x^2}{x^3} = \frac{x(1+x)}{x^3} = \frac{1+x}{x^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}$$

onde aplicámos vários dos princípios anteriores.

Deve ter-se presente que a escrita de uma fracção pressupõe sempre que o denominador não é 0. Neste caso, os cálculos são válidos para $x \neq 0$.

8) A adição de fracções faz-se de acordo com a regra precedente, devendo haver o cuidado de as "reduzir ao mesmo denominador". Por exemplo,

$$\frac{3}{5} + \frac{3}{10} = \frac{6}{10} + \frac{3}{10} = \frac{9}{10};$$

$$\frac{x}{1+x^2} + \frac{3}{x} = \frac{x^2}{x(1+x^2)} + \frac{3(1+x^2)}{x(1+x^2)} = \frac{x^2+3+3x^2}{x(1+x^2)} = \frac{4x^2+3}{x(1+x^2)},$$

$$2 - \frac{1}{x} = \frac{2x}{x} - \frac{1}{x} = \frac{2x-1}{x}, \qquad \text{etc.}$$

9) O inverso da fracção $\frac{a}{b}$ é a fracção $\frac{b}{a}$ (supondo $a \neq 0$ e $b \neq 0$). Por outras palavras

$$\frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}.$$

Porque, se representarmos por x o 1º membro,

$$x = \frac{1}{\frac{a}{b}}$$

então isto significa, por definição,

$$x \cdot \frac{a}{b} = 1$$

ou, $\frac{xa}{b} = 1$, ou $xa = b$, ou $x = \frac{b}{a}$.

10) Esta observação e 5) permitem-nos facilmente dividir fracções, ou seja, operar com fracções cujos numerador e denominador podem eles próprios ser fracções. Assim,

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{6}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{5} = \frac{2\cdot 6}{3\cdot 5} = \frac{4}{5}.$$

$$\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{\frac{3+x}{x^3}}=\frac{\frac{x}{x^2}-\frac{1}{x^2}}{\frac{3+x}{x^3}}=\frac{x-1}{x^2}\cdot\frac{x^3}{3+x}=\frac{(x-1)x}{3+x}.$$

11) O manejo de fracções de que acabamos de nos ocupar é suficiente para resolver algumas equações simples que se reconduzem a equações do 1º ou do 2º grau.

EXEMPLO A.1 Resolver $\frac{1}{x+2}=3$. Esta equação é equivalente a $3(x+2)=1$ e $x\neq-2$. Logo, tem a solução $x=-5/6$.

EXEMPLO A.2 $\frac{1}{x+2}=x$. Esta equação é equivalente a $1=(x+2)x$ e $x\neq-2$, ou

$$x^2+2x-1=0 \qquad \text{e} \qquad x\neq-2.$$

Logo, tem as raízes $-1\pm\sqrt{2}$.

EXEMPLO A.3 A equação $\frac{1}{x}=-\frac{1}{x}$ é equivalente a

$$x=-x \qquad \text{e} \qquad x\neq 0,$$

ou ainda

$$2x=0 \qquad \text{e} \qquad x\neq 0.$$

Como a última condição obtida é falsa para todo o x, não existe solução.

12) Referimo-nos, nos números anteriores, a duas importantes transformações de uma e-quação que levam a uma equação equivalente (adicionar a mesma expressão a ambos os membros ou multiplicar pela mesma expressão $\neq 0$ ambos os membros). Vamos agora referir uma outra transformação muito útil mas que requer mais cuidado.

Consideremos a equação

$$\sqrt{x}=6-x \tag{80}$$

Para a resolver, e com o objectivo de nos desembaraçarmos da raiz quadrada, vamos elevar ao quadrado ambos os membros, obtendo

$$x=(6-x)^2 \tag{81}$$

ou, efectuando os cálculos e reduzindo termos semelhantes,

$$x^2-13x+36=0.$$

Esta equação do 2º grau resolve-se facilmente e encontramos as raízes $x_1=4$ e $x_2=9$.

Voltando à equação dada, verificamos que 4 é efectivamente uma solução, porque

$$\sqrt{4} = 6 - 4$$

mas 9 não o é, visto que

$$\sqrt{9} = 3 \neq 6 - 9.$$

Para compreendermos o que está certo e o que não está reparemos que a nossa equação de partida pode ser escrita na forma

$$f(x) = g(x) \tag{82}$$

(com $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = 6 - x$). É claro que todo o número x que satisfaz (82) também satisfaz

$$f(x)^2 = g(x)^2 \tag{83}$$

mas, como acabámos de constatar, (83) pode ter soluções que não são solução de (82)! Isto porque (83) pode ser escrita nas formas equivalentes:

$$f(x)^2 - g(x)^2 = 0$$

ou

$$(f(x) + g(x))\,(f(x) - g(x)) = 0 \tag{84}$$

e por isso os valores de x que a satisfazem são os mesmos que satisfazem

$$f(x) + g(x) = 0 \qquad \text{ou} \qquad f(x) - g(x) = 0. \tag{85}$$

Concluímos que a equação (83) possui, além das soluções da equação (82) [equivalente à 2ª condição de (85)] as eventuais soluções de $f(x) + g(x) = 0$. Ao elevar ambos os membros de (82) ao quadrado podemos, pois, introduzir raízes estranhas à equação original e é por isso necessário verificar se as soluções finalmente obtidas são efectivamente soluções da equação dada.

Em certos casos a equação $f(x) + g(x) = 0$ não tem raízes. Nessa altura não há raízes estranhas introduzidas pelo processo. É o que sucede com um exemplo tão simples como

$$\sqrt{x} = 2$$

que conduz à equação, efectivamente equivalente,

$$x = 4.$$

13) Potências de expoente inteiro

Se $a \in \mathbb{R}$ e $p \in \mathbb{N}$, representamos por a^p (**potência** de **base** a e **expoente** p) o produto $\underbrace{a.\ldots.a}_{p \text{ factores}}$. Recordemos que estes símbolos obedecem às seguintes regras de multiplicação

$$\begin{aligned} &a^p a^q = a^{p+q}, \qquad &(ab)^p = a^p b^p,\\ &\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}, \qquad &\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p},\\ &(a^p)^q = a^{pq} \end{aligned} \tag{86}$$

Estas igualdades são válidas para **quaisquer** $a, b \in \mathbb{R}$ e quaisquer $p, q \in \mathbb{N}$, devendo ter-se

$$\begin{aligned} &a \neq 0 \text{ e } p > q \quad \text{na terceira,}\\ &b \neq 0 \quad \text{na quarta.} \end{aligned}$$

As fracções servem para representar a **razão** ou **cociente** de dois números, sendo o 2º diferente de zero. Uma notação cómoda para a razão de 1 por a é a potência de expoente -1:

$$a^{-1} = \frac{1}{a}.$$

De um modo geral, se $p \in \mathbb{N}$ escrevemos (por definição)

$$a^{-p} = \frac{1}{a^p}$$

e, convencionando também que $a^0 = 1$ para cada $a \neq 0$, facilmente se conclui que as regras (86) mantêm a sua validade para expoentes inteiros arbitrários.

EXERCÍCIO A.2 Eliminar os parênteses nas expressões

$$\begin{aligned} &(2a^3b)^2, \qquad a^{-2}(a^4 - 3a^2 + a),\\ &(2a^4)^{-2}, \qquad (2a^4)^{-2}, \qquad \left(\tfrac{a^3}{3b}\right)^{-2}, \qquad (3x^2 - x^{-1})^2 \end{aligned}$$

Eliminar depois os expoentes negativos utilizando o sinal de fracção.

14) Radicais

Recordemos que utilizamos a notação

$$\sqrt[n]{a} \qquad \text{(ou simplesmente } \sqrt{a} \text{ se } n = 2)$$

para representar:

(1) o **único** número **positivo** x tal que

$$x^n = a$$

quando $a \geq 0$ e n é um número natural par.

(2) o **único** número real x tal que

$$x^n = a$$

quando $a \in \mathbb{R}$ e n é um número ímpar.

Assim, $\sqrt{25} = 5, \qquad \sqrt[3]{-8} = -2.$

Quando trabalhamos com expressões algébricas sob radicais de índice par requere-se, pois, cuidados para que a expressão represente efectivamente o que está convencionado. Por exemplo:

$$\sqrt{a^2} = \begin{cases} a & \text{se soubermos que } a > 0 \\ -a & \text{se soubermos que } a < 0 \end{cases}$$

ou seja (ver secção 6) $\sqrt{a^2} = |a|$.

Será verdade que $\sqrt{1 + 2a + a^2} = a + 1$ para **todos** os valores de a?

A definição dos números que se representam por radicais conduz a regras de cálculo importantes:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \tag{87}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \tag{88}$$

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[np]{a^p}. \tag{89}$$

Aqui, n e p são números inteiros positivos e a e b são números reais positivos. A título de exemplo, justifiquemos (87): ponhamos

$$x = \sqrt[n]{a} \qquad \text{e} \qquad y = \sqrt[n]{b}.$$

Então xy é o número positivo que tem a propriedade

$$(xy)^n = x^n y^n = ab.$$

Ora, xy é o 1º membro de (87), e acabamos de ver que é também, por definição, $\sqrt[n]{ab}$. A demonstração de (88) e (89) é semelhante.

Em particular, aplicando (87) sucessivamente a vários factores iguais, temos, para p natural,

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^p = \sqrt[n]{a^p} \tag{90}$$

visto que o 1º membro é

$$\underbrace{\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{a} \times \ldots \times \sqrt[n]{a}}_{p \text{ factores}}$$

e portanto igual a

$$\sqrt[n]{\underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{p \text{ factores}}}.$$

Aplicando estas regras é possível manejar expressões em que ocorrem **produtos** ou **fracções** sob o sinal de radical. Por exemplo:

$$\sqrt{18} = \sqrt{2 \times 3^2} = \sqrt{2} \times \sqrt{3^2} = 3\sqrt{2},$$

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt[3]{4a^2b^3}\right)^4 &= \left(\sqrt[3]{4a^2}\sqrt[3]{b^3}\right)^4 = \left(b\sqrt[3]{4a^2}\right)^4 = \\
&= b^4\sqrt[3]{4^4a^8} = b^4\sqrt[3]{4^3 \times 4 \times a^6 \times a^2} = \\
&= b^4\sqrt[3]{4^3} \times \sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{a^6} \times \sqrt[3]{a^2} = \\
&= 4b^4a^2 \times \sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{a^2} = 4a^2b^4\sqrt[3]{4a^2}.
\end{aligned}$$

EXERCÍCIO A.3 a) Eliminar os parênteses em

$$\left(2\sqrt{x}\right)^3.$$

b) Simplificar, eliminando factores comuns aos termos das fracções

$$\frac{x}{\sqrt{x}}, \qquad \frac{\sqrt[3]{x}}{x}, \qquad \frac{\sqrt[3]{x}}{x+x^2}$$

c) Simplificar:

$$\sqrt[3]{27a^3b^6}, \qquad \sqrt{32x^3}.\sqrt{2x^5}, \qquad \frac{\sqrt{32x^3}}{\sqrt{2x^4}}, \qquad \frac{\sqrt{32x^3y}}{\sqrt{x}}.$$

d) Efectuar os cálculos:

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{1}{x-1}$$

.

B Observações sobre a obtenção de gráficos numa máquina

Quando se pretende visualizar o gráfico de uma função real de variável real f numa máquina com capacidade gráfica é necessário ter em conta qual o conjunto de valores tanto da variável independente (chamemos-lhe x, como é usual) como da variável dependente (digamos, y) que se deseja ver abrangido. Se queremos considerar um intervalo $[a, b]$ de valores de x e um intervalo $[c, d]$ de valores de y, ou, por outras palavras, se pretendemos visualizar os pontos (x, y) do gráfico com abcissas entre a e b e ordenadas entre c e d dizemos que escolhemos a **janela de visualização** $[a, b] \times [c, d]$. Se não efectuarmos escolha, a máquina utiliza uma janela previamente programada que, no caso em questão, pode não ser a mais conveniente.

Dependendo da janela de visualização escolhida a máquina utiliza uma escala em cada um dos eixos coordenados que permita produzir a porção desejada do gráfico tendo em conta as dimensões do ecran. Deste modo, as escalas são em geral diferentes nos dois eixos. Por exemplo, para uma mesma função afim poderemos obter como gráficos rectas com inclinações diferentes, dependentes das escalas em utilização; para a mesma função quadrática obteremos parábolas mais ou menos "abertas", etc..

Imaginemos um referencial monométrico sobreposto ao que surge no ecran da máquina, sendo a unidade de comprimento em ambos os eixos a unidade escolhida pela máquina no eixo $0x$: diremos que este é o referencial monométrico sobreposto ao da máquina. No caso concreto de uma função afim em que o decline é a, isto é

$$f(x) = ax + b$$

suponhamos que utilizamos uma janela de visualização em que a unidade de comprimento no eixo $0y$ da máquina é c vezes menor que a unidade de comprimento no eixo $0x$, onde c é um certo número positivo e inferior a 1. Portanto, no ecran da máquina, as distâncias horizontais surgem ampliadas (por um factor de $\frac{1}{c}$) relativamente às verticais; devido a esta distorção a inclinação do gráfico parecerá menor do que quando o representamos num referencial monométrico. No referencial da máquina as ordenadas y são $\frac{1}{c}$ vezes maiores do que as ordenadas $\bar{y}$ no referencial sobreposto, de modo que o ponto referenciado no ecran como (x, y) é o mesmo que o ponto que seria referenciado como $(x, \bar{y})$ no referencial monométrico sobreposto, sendo

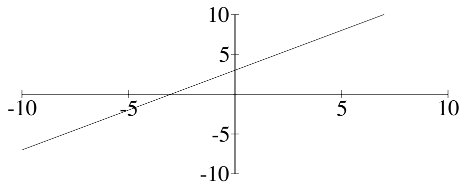
$$y = \frac{1}{c}\bar{y}.$$

Portanto $\bar{y} = cy$ e deduzimos que a recta que *vemos* no ecran (para a máquina, a recta $y = ax + b$) tem, no referencial monométrico sobreposto, a equação

$$\bar{y} = cax + cb.$$

Por outras palavras, é como se no referencial monométrico sobreposto ao da máquina estivéssemos a observar o gráfico que resulta de $\bar{y} = ax + b$ pelo factor de *contracção* c na direcção do eixo de ordenadas.

EXEMPLO B.1 Se dermos a instrução para obter o gráfico de $y = x + 3$ sem outras especificações e a máquina utiliza a janela pré-definida $[-10, 10] \times [-10, 10]$ sendo o ecran disponível 84×36 (em milímetros) obtemos o gráfico



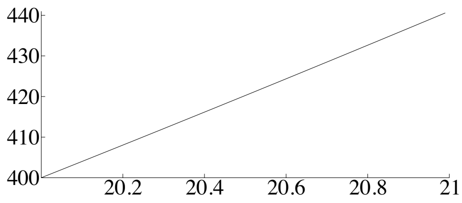
onde a recta que aparece é menos inclinada do que o seria num referencial monométrico. A área disponível no ecran obriga a encurtar a unidade de medida no eixo de ordenadas. É fácil dizer qual seria a equação da *mesma* recta caso essa unidade de medida fosse a mesma que a que é tomada no eixo de abcissas. A nova unidade seria $84/36 = 21/9$ vezes maior que a actual e por isso um ponto que actualmente tem a ordenada y passaria a ter ordenada $\bar{y} = \frac{9}{21}y$. Então, em termos do referencial monométrico sobreposto a equação $y = x + 3$ converte-se em $\bar{y} = \frac{9}{21}(x + 3)$, ou seja

$$\bar{y} = \frac{9}{21}x + \frac{9}{7}.$$

O que vemos no ecran é, pois, uma recta com inclinação que corresponde ao declive $\frac{9}{21}$.

Para efeitos de obter o gráfico *que realmente vemos* tudo se passa, pois, como se, num referencial monométrico (com a unidade de comprimento que é a do eixo de abcissas na máquina) à função dada fosse aplicada a contracção segundo o eixo de ordenadas com factor $\frac{9}{21}$.

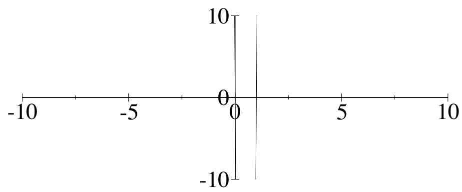
EXEMPLO B.2 Para obter na mesma máquina um gráfico da função x^2 restringida ao intervalo $[20, 21]$ deveremos escolher uma janela que inclua pelo menos $[20, 21] \times [400, 441]$. O gráfico que surge no ecran parece um segmento de recta, porque a função experimenta uma variação enorme comparada com a variação registada no eixo de abcissas, e porque a máquina é obrigada a uma contracção grande ao longo do eixo de ordenadas.



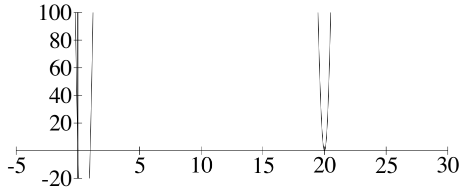
Neste caso a unidade utilizada no eixo de ordenadas é $\frac{9}{21\times 41}$, ou seja aproximadamente 0.01 vezes menor que a do eixo de abcissas e por isso, se o referencial fosse monométrico a ordenada $\bar{y}$ correspondente ao ponto que a máquina apresenta como (x, y) seria aproximadamente $\bar{y} = 0.01y$. Portanto, se os eixos efectivamente mostrados no ecran definissem um referencial monométrico com a unidade de medida do eixo de abcissas estaríamos na realidade a observar o gráfico de uma parábola muito próxima de $\bar{y} = 0.01x^2$.

O afastamento relativamente ao comportamento não linear fica bem visível, mesmo assim, quando se restringe a função a intervalos de maior comprimento.

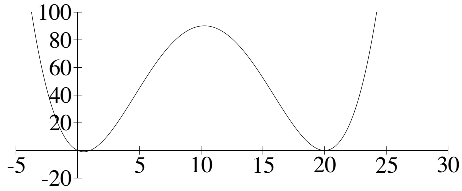
EXEMPLO B.3 Para obter um gráfico onde se evidenciem os pontos que caracterizam mudanças importantes no comportamento de uma dada função (digamos, os pontos que separam intervalos onde a função passa de crescente a decrescente ou vice-versa) é obviamente necessário ter alguma informação prévia sobre a localização desses pontos. Assim, se dermos instrução para produzir o gráfico do polinómio $x^4 - 41x^3 + 440x^2 - 400x$ na janela $[-10, 10] \times [-10, 10]$ surge-nos a curva



que está longe de fornecer elementos suficientes para a compreensão global do comportamento da função. Tratando-se de um polinómio do 4^o grau, sabemos que tomará valores positivos para $|x|$ grande. Sabendo que o mesmo polinómio admite a factorização $(x - 20)^2 x(x - 1)$ e escolhendo a janela de visualização $[-5, 30] \times [-20, 100]$ (para incluir as abcissas das raizes) o novo gráfico não melhora muito relativamente ao anterior:



Visivelmente, a razão do nosso insucesso está em que o domínio escolhido (um pouco ao acaso) para a variação de y é insuficiente para mostrar porções importantes do gráfico, pelo facto de o polinómio tomar valores muito elevados. Para obstar a este facto vamos, sem mudar de janela, obter o gráfico do novo polinómio $0.01(x^4 - 41x^3 + 440x^2 - 400x)$, que mantém a forma e características essenciais do primeiro, pois resulta dele por uma contracção de factor 0.01. O resultado é agora mais satisfatório:



e portanto ficamos a saber que uma escolha mais acertada para o polinómio original seria a da janela $[-5, 30] \times [-20, 10000]$ (visto que foi preciso aplicar o factor 0.01 anteriormente). São agora visíveis as alterações no carácter de monotonia do polinómio, bem como a existência de um máximo relativo. Para a determinação aproximada do seu valor, bem como do ponto onde é atingido, é aconselhável utilizar um ou mais zooms e utilizar então o dispositivo de leitura de coordenadas ao longo do gráfico ("trace").

C Nota histórica

Conceito de função

Este é de facto um conceito de importância central na Matemática de hoje. A sua importância acentuou-se progressivamente a partir do século XVII. Foi utilizado sob formas diversas, sofrendo uma evolução que culminou na definição de grande generalidade que é, essencialmente, a que apresentamos no início deste capítulo.

O termo "função" parece ter sido introduzido por Leibniz (1646-1716) em 1694. Designava então quantidades relacionadas com o movimento de um ponto material ao longo da sua trajectória – por exemplo, as coordenadas do ponto, variando com o tempo. Ao longo do século XVIII, com Bernoulli e Euler, a palavra "função" começou a ser usada para designar uma expressão envolvendo "variáveis", isto é, símbolos susceptíveis de tomar valores numéricos num domínio determinado. A notação $f(x)$ foi largamente utilizada por A. C. Clairaut e Euler.

Os notáveis trabalhos do matemático francês J. L. Fourier (1768-1830) sobre a propagação do calor vieram evidenciar a insuficiência do conceito de função até então utilizado. Na verdade, passou a ser necessário considerar uma enorme variedade de funções reais de variável real, as quais não podiam, em geral, ser definidas com recurso a uma fórmula envolvendo explicitamente a variável independente apenas através de operações aritméticas simples e determinados símbolos (como radicais e expoentes). Já Euler se referira à necessidade de considerar "funções" arbitrárias entendendo como tais as funções definidas por um gráfico obtido pelo "traçado livre da mão".

A reformulação do conceito foi dada por L. Dirichlet (1805-1859) em termos que respondiam às necessidades do desenvolvimento da Matemática na sua época. Dirichlet chamou "função" a qualquer correspondência que associa a cada valor de uma "variável" x um valor determinado de uma "variável" y. Por "variável" entendia um símbolo susceptível de tomar valores numéricos pertencentes a um conjunto dado de números. Este conceito é, na sua essência, o que usamos hoje e, na realidade, tem sido abundantemente utilizado tanto no ensino pré-universitário como a nível mais avançado.

Com a emergência e a influência da Teoria de Conjuntos, a partir do século XX, o conceito de função torna-se mais abstracto e abrangente: M. Fréchet (1904) e E. H. Moore (1905) utilizam o termo "função" para designar uma correspondência entre dois "conjuntos" de natureza arbitrária (e não necessariamente conjuntos de números). Com esta forma, o conceito é utilizado em praticamente todos os domínios da Matemática. Na Geometria, por exemplo, tem um papel preponderante.

Equações algébricas

A resolução de equações é um dos grandes objectivos da Matemática desde a Antiguidade. Problemas motivados por situações da vida real conduzem frequentemente à necessidade de resolver uma equação ou um sistema de equações.

As **equações algébricas** são as que se podem escrever na forma

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

onde no primeiro membro figura um polinómio $P(x)$ de certo grau $n \geq 1$ na variável x. **Resolver** esta equação é **determinar as raízes** de $P(x)$.

Quando o grau n de $P(x)$ é 1, a equação diz-se **linear** e a sua resolução não oferece grandes dificuldades. Encontram-se exemplos de resolução de equações lineares em documentos do antigo Egipto (cerca de 1700 a.C.) e sistemas de equações lineares são resolvidos em manuscritos antigos chineses e árabes.

A **equação do** 2^{o} **grau** ($n = 2$) é resolvida, em determinados casos, pelos babilónios (cerca de 1800 a.C.) e pelos gregos, principalmente com os trabalhos de Diofanto de Alexandria (séc. III a.C.).

As **equações do** 3^{o} **grau** foram abordadas com sucesso pela primeira vez por matemáticos italianos so século XVI: Scipione del Ferro, Tartaglia, Cardano.

Para a equação sem termo do 2^{o} grau

$$x^3 + px + q = 0$$

(à qual qualquer outra se pode reduzir com uma translação conveniente) a escola italiana encontrou a fórmula para o cálculo de uma raiz:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

As dificuldades postas pelo uso desta fórmula (nomeadamente, o significado a atribuir-lhe quando a expressão sob o radical quadrático é negativa) levaram a desenvolvimentos do conceito de número a que nos referiremos mais tarde.

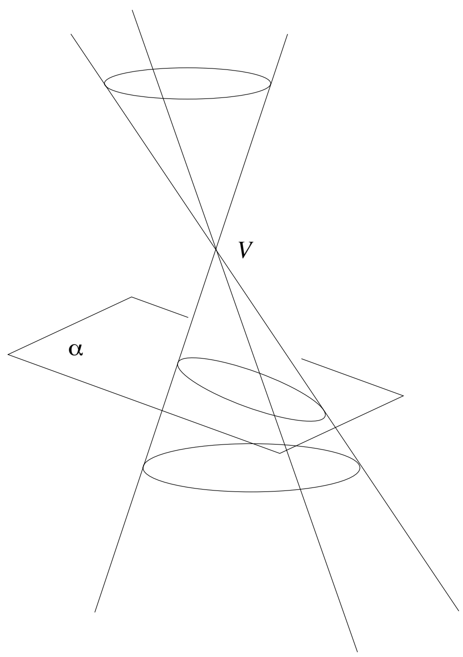
A resolução da **equação do** 4^{o} **grau** começou pelo caso da **equação biquadrada** (isto é, sem termos de graus 1 e 3, por exemplo, $x^4 + 2x^2 + 5 = 0$), com uma ideia de Ferrari, discípulo de Cardano. O método, que reduzia a equação biquadrada a uma outra de grau 3, foi estendida por Bombelli à equação mais geral do 4º grau (1572).

Existe hoje uma grande variedade de métodos (ditos **métodos numéricos**) para obter pelo menos valores aproximados – com um grau de precisão pré-determinado – das raízes de polinómios. As máquinas de cálculo de que dispomos actualmente resolvem-nos este problema com rapidez e de modo satisfatório em muitos casos. Mas o problema que, no campo da resolução de equações algébricas, se constituiu num desafio apaixonante, a partir do século XVI, foi o da **resolução por radicais**, isto é, a determinação de uma "fórmula resolvente" para uma equação de grau arbitrário, onde o valor ("exacto") da solução é dado em termos dos coeficientes através de radicais quadráticos, cúbicos, e naturalmente, de índices mais elevados, de acordo com o grau da equação a resolver. Assim, muitos matemáticos se lançaram à tarefa de descobrir, para equações de grau ≥ 5, fórmulas resolventes com radicais, à semelhança do que tinha sido conseguido para os graus ≤ 4.

À grandeza do desafio correspondeu a qualidade da resposta, iniciada por grandes matemáticos no final do século XVIII (Euler, Bézout, Lagrange, Vendermonde, Ruffini). Ruffini conjecturou a **impossibilidade** de resolver com radicais a equação geral do 5º grau; Abel (1802-1829) acabou por dar uma demonstração do facto. O trabalho que conduziu a este resultado marca o nascimento da Álgebra moderna. Em 1830-31, E. Galois, utilizando ideias radicalmente novas, amplia as conclusões de Abel e dá uma condição necessária e suficiente para a resolubilidade por radicais de uma equação com grau primo. No seu conjunto, o avanço do conhecimento proporcionado por estes matemáticos constitui uma produção da mente humana notável pela sua profundidade e pelo significado e alcance dos resultados obtidos. É um episódio luminoso da aventura intelectual do Homem.

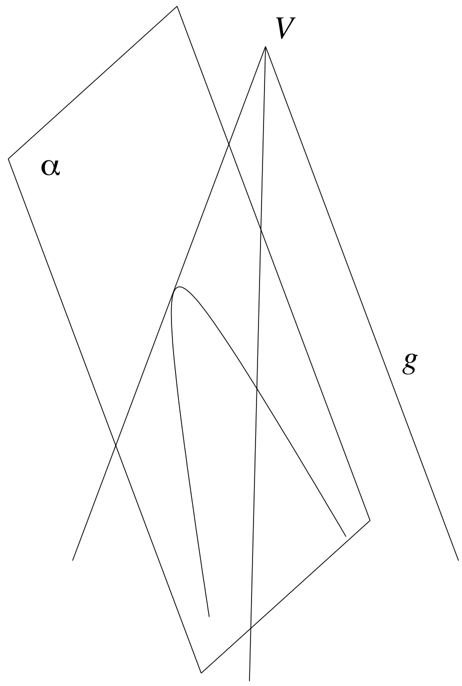
Parábolas (e outras cónicas)

Imaginemos a superfície de um cone circular recto, com vértice V, em que as geratrizes são indefinidamente prolongadas.

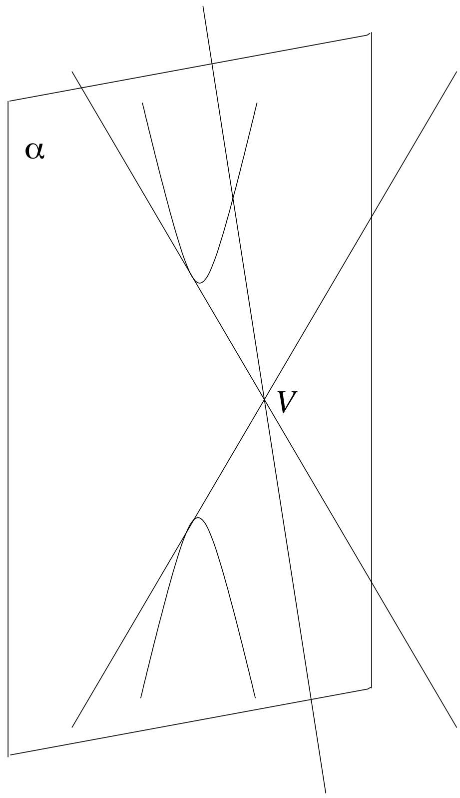


Um plano α que não passa por V intersecta a superfície segundo uma linha a que se dá o nome genérico de **cónica**. Estas curvas têm características comuns específicas, embora possamos dividi-las em três grandes classes:

- as **elipses**, que surgem quando α intersecta todas as geractrizes. As **circunferências** são um caso particular e surgem quando α é perpendicular ao eixo da superfície cónica.
- as **parábolas**, que ocorrem quando α é paralelo a uma geratriz g; estas curvas têm, pois, um ponto comum com cada geratriz do cone, excepto g.
- as **hipérboles**, que surgem quando α é paralelo ao eixo da superfície cónica e têm dois "ramos" separados.



Um modo muito simples de materializar cónicas consiste em projectar numa parede plana a luz produzida por um candeeiro em que o anteparo tem a forma de um cone circular e com uma pequena lâmpada a ocupar a posição do vértice. Variando a inclinação do eixo do candeeiro relativamente à parede, obtêm-se os três tipos de curvas descritos.



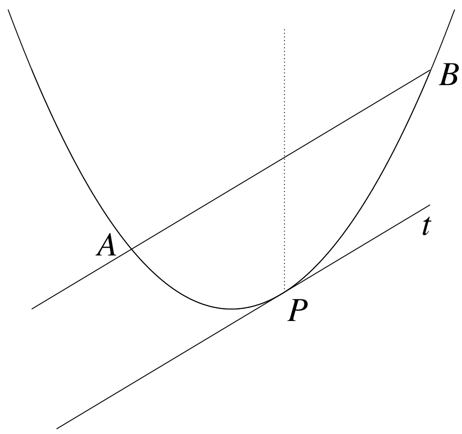
Pode demonstrar-se que as curvas do plano α aqui chamadas **elipses** ou **parábolas** são, efectivamente, elipses ou parábolas no sentido em que estes termos já ocorreram no nosso estudo. Alguns casos particulares de curvas que aqui chamamos **hipérboles** também já foram encontradas, embora não lhe tivéssemos dado esse nome: é o caso do gráfico da função associada à proporcionalidade inversa (secção 4).

As cónicas foram descobertas e extensivamente estudadas pelos geómetras gregos, a partir do século III a.C. Há uma enorme riqueza de teoremas sobre as cónicas nos trabalhos legados por Euclides, Arquimedes (séc. III a.C.), Papo (séc. III da nossa era) e em particular no tratado de Apolónio de Perga (séc. III/ II a.C.), do qual chegaram até nós sete livros sobre cónicas.

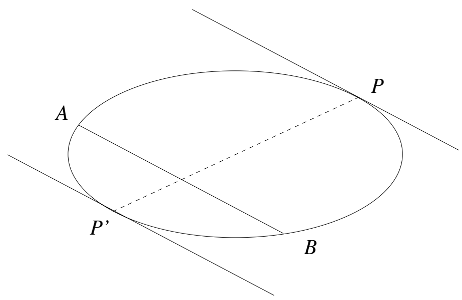
Curiosamente, a propriedade que caracteriza a parábola em termos de foco e directrizes não surge no tratado de Apolónio. Aparece, no entanto, num trabalho de Papo citando Euclides; Papo usa os conceitos de foco e directriz para caracterizar os três tipos de cónica.

A título ilustrativo do carácter não trivial dos resultados incluídos na obra de Apolónio, mencionemos o seguinte (que está longe de ser o mais difícil):

Consideremos a tangente t no ponto P de uma parábola, e uma recta l paralela a t que intersecta a parábola nos pontos A e B; então demonstra-se que a "corda" AB é bissectada pela paralela ao eixo (chamada "diâmetro") que passa por P.



A elipse possui uma propriedade semelhante, desde que se chame "diâmetro" a uma recta PP' tal que as tangentes à curva em P e P' são paralelas.



O estudo das cónicas prosseguiu em direcções novas a partir do século XVII, graças aos trabalhos de matemáticos franceses, e constitui ainda hoje um tema fascinante em Geometria.