



FACULDADE DE CIÊNCIAS
UNIVERSIDADE DO PORTO

DEPARTAMENTO DE FÍSICA |

Projecto Faraday Texto 12^o ano

Capítulos 9 a 13

Departamento de Física
Faculdade de Ciências, Universidade do Porto
Fundação Calouste Gulbenkian

Ficha Técnica

Projecto de intervenção no ensino da Física no secundário.

Financiamento

Fundação Calouste Gulbenkian.

Execução

Departamento de Física, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto.

Escolas Participantes

- ES Filipa de Vilhena
- ES Fontes Pereira de Melo
- ES Garcia de Orta
- ES da Maia
- ES de Santa Maria da Feira

Coordenação

- J. M. B. Lopes dos Santos
- Manuel Joaquim Marques

Portal

URL: <http://www.fc.up.pt/faraday>

Texto do 12º Ano

Redactor Principal

J. M. B. Lopes dos Santos

Colaboração e revisão

- Elisa Arieiro
- Carlos M. Carvalho
- Manuel Joaquim Marques
- Maria de Fátima Mota

Conteúdo

Ficha Técnica	ii
-------------------------	----

II Electricidade, Circuitos, Relatividade e Física Quântica 21

9 Cargas e campos eléctricos 23

9.1	Interacções	23
9.1.1	Interacções não gravíticas	23
9.2	Interacção de Coulomb	26
9.2.1	Estrutura atómica	26
9.2.2	Princípio de sobreposição	27
9.2.3	Carga eléctrica	28
9.2.4	Quantificação da carga eléctrica	31
9.2.5	Lei de Coulomb	32
	A constante da lei de Coulomb	32
9.3	Electrificação por contacto	36
9.3.1	Polarização	37
9.3.2	Metais e isoladores	38
9.3.3	Electrostática e humidade	40
9.4	Campo eléctrico	41
9.4.1	Campo de uma carga pontual	42
9.5	Potencial eléctrico	44
9.5.1	Energia potencial de um campo de forças	44
9.5.2	Energia potencial de duas cargas	45

9.5.3	Definição de potencial eléctrico	46
	O electrão-volt	47
9.5.4	Superfícies equipotenciais	48
	Metais e superfícies equipotenciais	49
	Poder das pontas	51
9.6	Condensadores	52
9.6.1	O campo num condensador plano	53
9.6.2	Capacidade de um condensador	55
	Capacidade de um condensador plano	55
	Constante dieléctrica	56
9.6.3	A energia de um condensador plano	58
9.6.4	O plano carregado	59
9.7	Conclusões	60
9.8	Resposta ao $\mathcal{ETV}'s$	63
9.9	Actividades, Questões e Problemas	66
9.9.1	Actividades	66
9.9.2	Questões	66
9.9.3	Problemas	68
10	Circuitos: conceitos fundamentais	71
10.1	Electricidade	71
10.2	Corrente eléctrica	72
10.2.1	Factos simples sobre “electricidade”	72
10.2.2	Conservação de carga e corrente eléctrica	73
10.2.3	Definição de corrente eléctrica	75
	O Ampere	77
10.2.4	Algumas perguntas	77
10.2.5	O Amperímetro	78
	O amperímetro em paralelo?	78
10.3	Diferença de potencial	80
	Sentido da corrente e sinal da diferença de potencial	82

10.3.1 O voltímetro	83
10.4 Corrente e velocidade de arrastamento	84
10.4.1 Dissipação	87
10.5 Potência eléctrica	89
10.6 Resumo	90
10.7 Resposta aos $\mathcal{ETV}'s$	90
10.8 Actividades, Problemas e Questões.	92
10.8.1 Questões	92
10.8.2 Problemas	93

11 Circuitos eléctricos 95

11.1 Características I - V	95
11.1.1 Acertar os sinais	96
11.2 Dispositivos de dois terminais	97
11.2.1 Resistência	97
Fios de ligação	98
11.2.2 Simbologia de circuitos	98
11.2.3 Associações de resistências	99
11.2.4 A pilha	102
Característica de uma pilha	102
11.3 Receita para análise de circuitos simples	104
11.3.1 Associação de baterias	106
11.3.2 Força contra-electromotriz	108
11.4 Física dos dispositivos	108
11.4.1 Condutância ómica: resistividade.	108
Resistividade e Condutividade	110
Unidades	111
A característica de uma lâmpada	112
11.4.2 O funcionamento de uma pilha	113
11.5 Correntes dependentes do tempo	119
11.5.1 Descarga do condensador	119

Decaimento exponencial	120
Tempo de semi-vida. $t_{1/2}$	121
A carga de um condensador	123
11.6 Conclusões	124
11.7 Resposta aos $\mathcal{ETV}'s$	125
11.8 Actividades, Problemas e Questões.	128
11.8.1 Actividades	128
11.8.2 Questões	128
11.8.3 Problemas	130
12 Relatividade	133
12.1 Duas revoluções, duas constantes	133
12.2 Princípio da Relatividade	135
12.2.1 O Princípio da Relatividade e a velocidade da luz	136
12.2.2 O tempo e espaço Newtonianos	139
12.2.3 Princípio da Relatividade e a Física Newtoniana.	142
Dicionário de cinemática	142
Massa como invariante	143
12.3 Os postulados da Relatividade Restrita	146
12.3.1 Três ideias incompatíveis	146
12.3.2 A experiência de Michelson-Morley	148
12.3.3 Os dois postulados	149
12.4 O Espaço e Tempo em Relatividade Restrita	151
12.4.1 Uma corrida, dois filmes	151
Referencial do Solo, \mathcal{S}	153
Referencial do <i>Coio</i> te, \mathcal{C}	154
12.4.2 Relatividade da Simultaneidade	156
Sincronização de relógios	157
12.4.3 Dilatação dos tempos	160
O filme completo	163

12.4.4	Contracção dos espaços	164
12.4.5	Transformação de tempo e espaço para v arbitrário	165
12.5	Energia e massa em Relatividade	167
12.5.1	Uma só grandeza conservada	167
12.5.2	O limite Newtoniano	170
12.6	Perguntas difíceis	170
12.6.1	Vivo mais se viajar numa nave?	170
	A experiência dos Muões	171
12.6.2	Velocidades maiores que c . É possível? . . .	172
12.6.3	Poderemos chegar às estrelas	175
12.7	Conclusões	176
12.8	Resposta aos $\mathcal{ETV}'s$	176
12.8.1	Actividades, questões e problemas	180
12.8.2	Questões	180
12.8.3	Problemas	181
12.8.4	Desafios	183
13	A revolução quântica	185
13.1	A quantificação de energia	186
13.1.1	Radiação electromagnética	187
	Frequência e comprimento de onda	187
	Distribuição espectral	188
	Equilíbrio térmico radiação-matéria	190
	A radiação cósmica de fundo	194
	Satélite COBE	195
	Leis de Wien e Stefan Boltzmann	196
13.1.2	O efeito fotoeléctrico	198
13.1.3	A constante de Planck no átomo: Niels Bohr	200
	O átomo planetário clássico	201
	Postulados de Bohr	202

13.1.4	Sumário	204
13.2	Dualidade onda-corpúsculo	205
13.2.1	O fóton	205
	O momento linear da radiação	205
	Raios-X	208
	A experiência de Compton	210
13.2.2	Partículas ou ondas?	211
13.2.3	A experiência de Young	212
	Interferência de partículas	214
	De Broglie e o átomo de Bohr	215
13.3	A Mecânica Quântica	216
13.3.1	O acaso	216
13.3.2	Ondas e probabilidades	218
	Princípio de incerteza	219
13.4	Conclusões	220
13.5	Respostas aos $\mathcal{ETV}'s$	220
13.6	Actividades questões e problemas	223
13.6.1	Questões	224
13.6.2	Problemas	224
A	Transformação do espaço e tempo para v qualquer	227
A.0.3	Dilatação do tempo e contracção de espaço	227
A.0.4	A transformação de Lorentz	229

Lista de Figuras

9.1	A força observada entre os dois tijolos é vários milhões de vezes superior à força de atracção gravítica entre eles.	23
9.2	Se partículas do mesmo tipo se repelirem e de tipos diferentes se atraírem, é possível haver um cancelamento das forças entre pares de partículas de modo a que a força entre os dois corpos seja muito pequena ou nula. Só estão representadas as forças sobre B	24
9.3	A força total na partícula C é a soma das forças que as partículas A e B exerceriam se apenas uma delas estivesse presente.	27
9.4	(a) a força entre dois protões é repulsiva; (b) Substituindo um protão por uma partícula α , que tem dois protões, a força sobre o segundo protão duplica, segundo o Princípio de Sobreposição; (c); Entre duas partículas α a força será quatro vezes superior a \vec{F}_1	29
9.5	Substituindo um protão, (a), por um electrão, (b), a força sobre o segundo protão muda de sentido mas tem o mesmo módulo. (c) Pelo princípio de sobreposição, a força total exercida por um protão e um electrão, no mesmo local, sobre o segundo protão é nula.	30
9.6	As forças entre cargas.	35
9.7	Efeito tribo-eléctrico: quando separamos dois corpos, as cargas, em geral, não se dividem igualmente entre eles.	36

9.8	(b) A carga externa exerce forças opostas no protão e no electrão do átomo de hidrogénio; (c) havendo uma deslocamento relativo destas cargas, por acção dessas forças, a resultante deixa de ser nula e passa a ser atractiva.	37
9.9	Um dipolo permanente, na presença de uma carga externa, roda de modo a aproximar da carga externa a sua extremidade com carga oposta.	38
9.11	Qual é o valor da força resultante no dipolo?	38
9.10	Num corpo não carregado as cargas positivas e negativas estão em equilíbrio. Uma carga externa atrai as cargas de sinal oposto ao seu e repele as do mesmo sinal. Como estas forças decaem com a distância à carga exterior, a resultante é uma força atractiva.	39
9.12	Se tocarmos com uma segunda esfera metálica na primeira, quando se separam ficam carregadas? . . .	40
9.13	Representações do campo eléctrico; (a) de uma carga positiva; (b) de uma carga negativa. O sentido do campo é o da força sobre uma carga de prova <i>positiva</i> . A representação só está feita num plano. O campo é não nulo em todo o espaço.	42
9.14	Imagem de um <i>applet</i> de visualização tri-dimensional do campo eléctrico de autoria de Paul Falstad [1].	43
9.15	Para deslocar um corpo sem o acelerar, a força externa tem de cancelar a força do campo.	44
9.16	Comparação das energias potencial gravítica, (a), e eléctrica, (b) e (c), de duas partículas, em função da distância entre elas. Escalas verticais arbitrárias.	46
9.17	As intersecções das superfícies equipotenciais com o plano de representação são círculos (a tracejado); (a) No caso da partícula de carga positiva o círculo exterior corresponde a um potencial menor que o interior; (b) No caso da carga negativa é ao contrário. Uma carga positiva acelera na direcção em que o potencial diminui.	49
9.18	Carga junto de um esfera metálica neutra.	50
9.19	A diferença de potencial entre <i>C</i> e <i>D</i> é a mesma que entre <i>A</i> e <i>B</i> , se estes eléctrodos forem metálicos. . .	51

9.20	O campo eléctrico é muito mais elevado no topo da antena, onde as equipotenciais estão mais juntas e o potencial varia mais rapidamente.	51
9.21	Linhas de campo num condensador plano; (a) perspectiva; (b) corte.	53
9.22	(a) Se o plano de carga for infinito, a força sobre uma carga só tem componente não nula na direcção perpendicular ao plano; (b) As linhas de força do campo eléctrico são perpendiculares ao plano de carga.	53
9.23	A soma dos campos de dois planos de cargas simétricas dá o campo do condensador plano.	54
9.24	(a) Se as cargas positivas(preto) e negativas (branco) estiverem igualmente distribuídas, o dieléctrico é neutro(cinzentos); (b) um deslocamento relativo de cargas opostas em sentidos opostos, por acção de um campo externo, implica o aparecimento de carga não compensada duas superfícies.	56
9.25	Para aumentar a carga do condensador de Δq , transportamos uma carga Δq da placa negativa para a positiva.	58
9.26	As cargas dos dois planos da figura contidas no mesmo ângulo sólido fixo (sombreado), criam campos iguais em P , se os planos forem idênticos (mesma carga por unidade de área). Embora a contribuição de cada carga do plano mais distante seja inferior de um factor de r_1^2/r_2^2 , por causa do aumento de distância, a carga no interior do ângulo sólido no plano mais afastado é maior de um factor r_2^2/r_1^2 , por causa do aumento da área sombreada ($d \propto r$). Estes dois factores compensam-se e o campo total de cada um dos planos em P é o mesmo.	60
9.27	O campo no interior do metal é nulo!	65
9.28	Que há de errado com este campo?	67
9.29	Linhas equipotenciais de uma carga pontual.	67
9.30	Condensadores em paralelo.	68
9.31	Geometria da molécula de água.	69
9.32	Qual é o desvio do feixe de electrões?	70

10.1	Para que o filamento da lâmpada brilhe tem que fazer parte de um circuito fechado (a); para as ligações (b), (c) e (d) isso não acontece.	73
10.2	Quais são os carros que passam em A no intervalo Δt ?	74
10.3	A corrente eléctrica na secção A , com o sentido do vector \vec{n} , é a carga por unidade de tempo que atravessa A de E para D	75
10.4	Um fio condutor parte de um circuito eléctrico: que relação existe entre a corrente em A , B e C ? . . .	77
10.5	A corrente indicada pelo amperímetro é a que passa na lâmpada?	78
10.6	Qual das lâmpadas brilha mais?	79
10.7	Uma maneira pouco ortodoxa de ligar o amperímetro	79
10.8	Se I , I_A e I_L forem as correntes eléctricas em cada ramo, com os sentidos definidos pelas setas, a conservação de carga implica $I = I_A + I_L$	79
10.9	Qual das lâmpadas brilha mais?	80
10.10	Qual é o sinal da diferença de potencial $V_B - V_A$? .	82
10.11	Qual é o sentido de movimento dos electrões e do campo eléctrico nos condutores deste circuito? . . .	83
10.12	No caso (a), série, a corrente que passa no aparelho é a mesma que passa no elemento do circuito; no caso (b) a diferença de potencial nos terminais do aparelho é a mesma que nos terminais do elemento do circuito.	83
10.13	Um voltímetro ligado em paralelo (a) e em série (b) com uma lâmpada. No primeiro caso o a diferença de potencial medida no voltímetro é praticamente a mesma que a dos terminais da lâmpada, pois o potencial quase não varia nos fios de ligação. Nada de “errado” ocorre na segunda montagem; só que a diferença de potencial medida pelo voltímetro já não é a dos terminais da lâmpada (em breve veremos que é muito superior).	84

10.14(a) A corrente através da secção sombreada será nula, se o movimento dos electrões for totalmente desordenado, com tantos electrões a atravessar a secção num sentido como no outro; um campo eléctrico adiciona à velocidade de cada electrão um velocidade de arrastamento, \vec{v}_a . Para determinar a corrente podemos considerar que a velocidade de cada electrão é apenas a velocidade de arrastamento, representada em (b). Contudo, a situação representada em (b) não é o que realmente ocorre no material.	85
10.15 Um elemento de circuito liberta energia se a corrente fluir no sentido de potencial decrescente; recebe energia do exterior se a corrente fluir no sentido de potencial crescente.	89
10.16 Sentidos da corrente, movimento dos electrões e campo eléctrico, num circuito.	91
10.17 Como se exprime a lei dos nodos para as correntes no sentido das setas?	92
10.18 Dois circuitos com duas lâmpadas	92
10.19 Qual é potência dissipada no voltímetro?	92
11.1 Um elemento de circuito liberta energia se a corrente fluir no sentido de potencial decrescente; recebe energia do exterior se a corrente fluir no sentido de potencial crescente.	95
11.2 Os valores de I e V indicados em (a) não determinam nem a corrente nem a diferença de potencial: em que sentido é que $I = 5\text{ A}$? $V = V_A - V_B$ ou $V = V_B - V_A$?	96
11.3 Característica $I - V$ de uma resistência. O declive é $1/R$	97
11.4 Símbolos comuns na representação de resistências e convenção de definição de I e V na característica $I - V$	97
11.5 Como escolher os fios para que não haja mais energia dissipada nestes do que na lâmpada?	98
11.6 Símbolos de alguns dos dispositivos eléctricos mais comuns.	99

11.7 Em cada uma destas situações, em qual das resistências é maior a potência dissipada?	100
11.8 Qual é o receptor e gerador?	102
11.9 Representação simbólica de uma bateria de força electromotriz ε e resistência interna R_i	103
11.10 Qual é a corrente?	104
11.11 Receita para calcular as correntes num circuito. Em (a) só há uma corrente independente; no circuito (b) há duas. Percorrendo mentalmente uma malha, ao passar numa resistência contra o sentido da corrente, a variação de potencial é RI , (c); a favor do sentido da corrente a variação é $-RI$, (d); ao passar uma força electromotriz o potencial aumenta de $-$ para $+$, (e); diminui de $+$ para $-$, (f).	105
11.12 Qual é o sentido da corrente?	106
11.13 Um fio pode ser visto como uma associação em série de dois fios de metade do comprimento (a); ou como uma associação em paralelo de dois fios de metade da área da secção recta (b).	110
11.14 Relação entre o campo e a diferença de potencial num condutor homogéneo.	111
11.16 No interior da pilha há movimento de cargas positivas no sentido oposto ao campo eléctrico; iões de Zn^{2+} são injectados na solução junto ao eléctrodo de Zinco e iões de Cu^{2+} são recolhidos da solução junto ao eléctrodo de Cobre. Este transporte é possível porque as reacções químicas que ocorrem junto dos eléctrodos geram energia suficiente para que ele possa ocorrer.	114
11.15 Qual é o receptor e gerador?	114

11.17	Ciclo energético de electrões numa pilha de cobre-zinco. Recorde-se que a energia potencial de um electrão é $E_P = -eV$. A energia libertada nas reacções químicas na solução permite transporte de electrões do Cobre para o Zinco, pela solução, aumentando a respectiva energia potencial. No circuito exterior a energia potencial eléctrica diminui e aparece como luz ou produção de calor na lâmpada. Note-se que, na realidade, não há electrões livres na solução; mas, por cada ião Zn^{2+} injectado na solução no eléctrodo de Zinco e Cu^{2+} capturado no eléctrodo de Cobre, há uma carga $2e$ transportada do zinco para o cobre, o que é equivalente a passar dois electrões do Cobre para o Zinco.	115
11.18	Duas pilhas em série duram o dobro?	118
11.19	Quanto demora a corrente a passar de 0 em (a) para ε/R em (b)?	119
11.20	A descarga de um condensador.	119
11.21	A solução da equação 11.16 não é uma recta, pois o declive tende para zero à medida que $q(t)$ diminui.	121
11.22	Como varia a corrente com o tempo, após fechar o interruptor?	123
11.23	(a) Carga de um condensador; (b) corrente no circuito.	124
11.24	Qual é a corrente?	125
11.25	Quanto vale I ?	126
11.26	Como se exprime a lei dos nodos para as correntes no sentido das setas?	128
11.27	Um fio com uma constrição. Como variam a corrente e o campo eléctrico ao longo do seu eixo?	129
11.28	Característica $I - V$ de um dispositivo.	129
11.29	Característica $I - V$ de um dispositivo.	130
11.30	Característica $I - V$ de uma pilha.	130
11.31	Como medir a fem de uma pilha.	131
12.1	Max Planck, 1858–1947 [5]	133
12.2	James Clerk Maxwell, 1831-1879.	135

12.3	Um disparo dentro da carruagem filmado numa câmara exterior.	137
12.4	Os barcos demoram o mesmo tempo na viagem de ida e volta?	139
12.5	Uma colisão inelástica analisada em dois referenciais mostra que dois corpos com massas iguais em \mathcal{R} têm massas iguais em \mathcal{R}' . No primeiro caso, como as massas são iguais e as velocidades são opostas, a velocidade final é nula. Se o referencial \mathcal{R}' tiver uma velocidade $\vec{u} = -\vec{v}$, igual ao do carro da direita, este está parado em \mathcal{R}' e o outro tem velocidade $\vec{V} = \vec{v} - \vec{u} = 2\vec{v}$. Após a colisão o conjunto, parado em \mathcal{R} , tem velocidade $\vec{V}' = -\vec{u} = \vec{v}$ em \mathcal{R}' . Logo a conservação de momento implica $M_1 \times 2\vec{v} = (M_1 + M_2) \vec{v}$, ou seja, $M_1 = M_2$. Este argumento pode ser generalizado para qualquer razão entre massas.	143
12.6	A experiência de Michelson-Morley consiste em medir a diferença de tempos de propagação da luz em dois trajectos perpendiculares de igual comprimento, $2L$. O dispositivo usa um espelho semitransparente, D , para dividir um feixe de luz em dois feixes perpendiculares que são reflectidos em dois espelhos, E e E' , colocados a igual distância, L , de D . Se a velocidade da luz for a mesma na duas direcções, c , os tempos de viagem são iguais e valem $2L/c$. A figura (b) ilustra o cálculo do tempo na direcção perpendicular se o dispositivo tiver uma velocidade \vec{u} em relação ao referencial onde a velocidade da luz é c . A determinação da diferença de tempos é conseguida observando a interferência entre os dois feixes.	148
12.7	Um animal habituado a corridas de alta velocidade.	151
12.8	Pode o Road Runner correr à velocidade da luz? .	151
12.9	Filme da corrida no referencial do solo. Nota: virar a página a 90°	152
12.10	Filme da corrida no referencial do <i>Coiote</i> . Nota: virar a página a 90°	155

12.11(a) Sincronização de relógios no referencial do solo; (b) no referencial do <i>Coiote</i> os relógios não ficam sincronizados, porque a velocidade da luz continua a ser a mesma nos dois sentidos.	158
12.12O tempo indicado pelos relógios de \mathcal{S} no mesmo instante do referencial \mathcal{C} , aumenta linearmente com a distância na direcção oposta ao do movimento dos postes em \mathcal{C}	163
12.13O Coiote acha que o seu carro é mais comprido. O pessoal de Terra não vai achar o mesmo?	165
12.14A distância em que um feixe de muões fica reduzido a metade, $L_{1/2}$ pode ser superior a $ct_{1/2}$, por causa da dilatação relativista dos tempos.	172
12.15Mais rápido que a luz cria muitos problemas... . .	172
12.16Viagem de um taquíão do poste I em $t = 1,0\text{ s}$ para o poste III em $t = 1,25\text{ s}$, vista do referencial do <i>Coiote</i> . Chega primeiro do que parte, desdobra-se em dois, um dos quais fica no poste III e o outro viaja para o poste I, onde desaparece para $t > 1,0\text{ s}$	174
12.17O "instante" da figura 12.13 da página 165 é este filme no referencial do solo.	179
12.18Como minimizar o tempo de travessia?	181
12.19Passará a tempo?	182
12.20Qual é velocidade máxima do barco, V , no referencial da Terra, quando \vec{V} faz um ângulo θ com a margem?	183
13.1 Uma carga oscilante emite radiação electromagnética em todas as direcções. O campo eléctrico oscila no tempo com a mesma frequência que a carga; o comprimento de onda é a distância percorrida pela radiação durante um período de oscilação.	187
13.2 Espectro electromagnético; embora a radiação electromagnética seja o mesmo fenómeno em todos os comprimentos de onda, a variedade de aplicações e de instrumentos apropriados à detecção nas diferentes gamas do espectro, conduziu a diferentes designações.	189

13.3	A distribuição de Planck para $T = 5780\text{ K}$ normalizada pelo valor do seu máximo (a cheio); se a relação da eq. 13.4 fosse válida, a distribuição espectral seria a da curva tracejada.	191
13.4	Os dados da medição da radiação cósmica de fundo pelo satélite COBE não se conseguem distinguir da curva teórica da lei de Planck (vermelho <i>online</i>).[4]	196
13.5	Intensidade espectral, $J_{\text{cn}}(\lambda)$ da radiação do corpo negro para várias temperaturas (lei de Planck). A banda colorida mostra, aproximadamente, a gama de radiação visível. As curvas de intensidade foram divididas pelo valor do máximo da curva de $T = 3000\text{ K}$	196
13.6	O estudo de Millikan do efeito fotoeléctrico, reproduzido da sua lição de prémio Nobel. Millikan confessa nessa palestra que tudo tentou para mostrar que Einstein estava errado ao propor a existência de quanta de radiação.	200
13.7	As quatro primeiras órbitas do átomo de Bohr $r_1 = a_0$, $r_2 = 4a_0$, $r_3 = 9a_0$ e $r_4 = 16a_0$. Nesta escala o núcleo é demasiado pequeno para ser representado. O átomo só emite radiação quando o electrão transita entre duas órbitas estacionárias.	202
13.8	Para que a posição do centro de massa do conjunto não varie, o carro tem de adquirir uma velocidade $v_x = -E/Mc$ em que E é a energia transferida de uma extremo ao outro.	206
13.9	Esquema de uma ampola de raios-X.	210
13.10A	difusão de raios-X pode ser vista como uma colisão entre duas partículas, um fóton e um electrão. Quando a velocidade inicial do electrão é pequena, verifica-se a relação de Compton, eq. 13.12, para a variação de comprimento de onda do fóton.	211
13.11	Partículas ou ondas?	211
13.12A	experiência de Young pode ser facilmente realizada com um laser.[7]	212
13.13	Franjas observadas na experiência de Young com laser de He-Ne.[7]	212

- 13.14A experiência de Young. Neste caso são usadas duas fendas para proporcionar dois caminhos de propagação da radiação da fonte F ao alvo; originalmente, Young usou uma tira de papel. Os dois caminhos de propagação das ondas da fonte F ao ponto P têm o mesmo comprimento, 10λ . Os campos eléctricos da radiação que se propaga por cada fenda estão em fase e somam-se: a intensidade luminosa é alta em P . Mas em Q a radiação que se propaga pela fenda I percorre uma distância de $10,5\lambda$ enquanto que a que se propaga pela fenda II percorre apenas 10λ . Os campos eléctricos respectivos cancelam-se pois têm sinais opostos: a intensidade luminosa é baixa em Q . P está num máximo de intensidade e Q num mínimo. 213
- 13.15Uma experiência de Young com electrões. À esquerda: um feixe de electrões, emitido por uma fina ponta de tungsténio, tem no seu caminho um fio metálico; quando o fio é carregado positivamente, cada electrão pode atingir um ponto do alvo por dois caminhos e estes interferem: à direita, franjas de interferência de electrões de energia cinética de 400 eV. [8] 214
- 13.16Duas órbitas possíveis, de acordo com a ideia de De Broglie: a onda associada ao electrão está esquematicamente representada a cheio, usando a direcção radial para representar a amplitude da onda, seja ela o que for. A órbita mais interior tem um perímetro 5λ e a exterior 6λ . Não existe nenhuma órbita entre estas duas e isso explicaria a hipótese de quantificação de Bohr. 215
- 13.17Formação de franjas de interferência por acumulação de eventos aleatórios. 218
- 13.18Se a amplitude da onda é constante, a probabilidade de detecção é igual em todos os pontos. 219
- 13.19Gráfico da função $f(x) = x/(\exp(x) - 1)$ 221
- 13.20Resultados das medições de Millikan da corrente fotoeléctrica em função da diferença de potencial entre colector e emissor para vários comprimentos de onda. 223

Lista de Tabelas

9.1	Primeiros resultados da experiência de Millikan . .	69
11.1	Resistividades de alguns metais a $T = 293\text{ K}$ [9]. . .	112
12.1	O que marca o relógio de cada poste quando passa por ele cada um dos personagens.	153
A.1	O que marca o relógio de cada poste quando passa por ele cada um dos personagens; a velocidade do <i>Coio</i> te é v e ele demora um segundo a percorrer a distância entre postes sucessivos no referencial \mathcal{S}	228

Parte II

Electricidade, Circuitos, Relatividade e Física Quântica

Capítulo 9

Cargas e campos eléctricos

9.1 Interacções

9.1.1 Interacções não gravíticas

Imaginemos dois tijolos, de massa 1 kg , um em cima do outro, pousados sobre uma mesa. O tijolo de baixo exerce sobre o de cima uma força \vec{N} de módulo igual ao peso dele, $N = 9,8\text{ N}$. Esta força não pode ter origem na interacção gravítica entre as partículas dos dois tijolos:

- em primeiro lugar, esta força é repulsiva; as forças gravíticas são sempre atractivas.
- Em segundo lugar, a interacção gravítica é demasiado fraca para dar origem a uma força tão elevada.

Este segundo aspecto é fácil de perceber. Duas massas de 1 kg à distância de, digamos, 1 cm , atraem-se com uma força

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} = 6,7 \times 10^{-11} \frac{1}{(10^{-2})^2} = 6,7 \times 10^{-7}\text{ N}.$$

É certo que não sabemos ao certo que distância devemos usar para calcular a distância entre os dois tijolos; se fossem esferas seria a distância entre os centros. Seja como for, mais centímetro, menos centímetro, não faz grande diferença para a conclusão: esta força

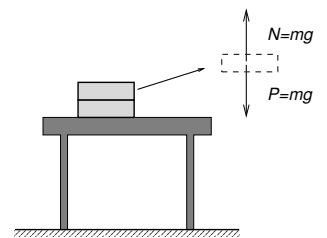


Figura 9.1: A força observada entre os dois tijolos é vários milhões de vezes superior à força de atracção gravítica entre eles.

é mais de *dez milhões de vezes inferior* à força de repulsão entre os tijolos!

Só este facto já nos permite concluir o seguinte:

As forças com que lidamos no dia-a-dia (atrito, forças de reacção, as forças de deformação nos sólidos, etc.) não têm origem gravítica. Devem ter origem em interacções muito mais intensas que as forças gravíticas.

Isto levanta a seguinte questão: se existem então essas interacções muito mais fortes que a gravítica, por que razão não se manifestam entre astros? Por que é que a força entre a Terra e o Sol, por exemplo, é predominantemente gravítica?

Há duas explicações possíveis para este facto:

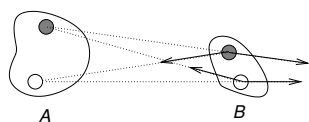


Figura 9.2: Se partículas do mesmo tipo se repelirem e de tipos diferentes se atraírem, é possível haver um cancelamento das forças entre pares de partículas de modo a que a força entre os dois corpos seja muito pequena ou nula. Só estão representadas as forças sobre B.

1. Estas novas interacções têm um alcance muito inferior à da Gravidade; isto é, podem ser muito mais fortes para distâncias pequenas, mas para distâncias maiores, como as distâncias entre astros, têm uma intensidade muito menor.
2. Estas forças podem ser atractivas entre certos pares de partículas e repulsivas entre outras. Apesar das forças serem muito mais intensas, se entre dois corpos houver tantos pares que se atraem como pares que se repelem, a resultante pode ser zero ou muito pequena. Este cancelamento nunca surge com a Gravidade porque esta *é sempre atractiva*.

A nossa experiência quotidiana mostra que estas interacções tanto podem ser atractivas como repulsivas. Quando estiramos um fio ou uma barra, têm que surgir entre as suas partículas forças atractivas, ou o fio ou a barra separar-se-iam logo em duas partes. Quando comprimimos um bloco de metal têm que surgir forças repulsivas entre os seus átomos, que se opõem ao esmagamento do bloco. É de facto a segunda hipótese que se verifica na natureza.

Todas as forças referidas acima, aliás todas as que observamos no nosso dia-a-dia, ou tem origem na interacção gravítica ou na interacção electromagnética¹. Ao contrário da primeira, a interacção electromagnética não é universal. Algumas partículas exercem e são actuadas por forças electromagnéticas e outras não. As

¹Além destas duas, existem mais dois tipos de interacção, designadas por **fraca** e **forte**. O seu papel é importante na física do núcleo e fundamental para uma compreensão completa da física de partículas a todas as energias; mas é relativamente secundário no comportamento da matéria nas condições em que a observamos no dia-a-dia.

partículas que “sentem” a interacção electromagnética têm **carga eléctrica**. Também poderíamos falar na **carga gravítica**, como sendo a propriedade que permite que uma partícula interaja graviticamente; contudo, toda a matéria tem carga gravítica porque a carga gravítica é a massa!

Enquanto que no caso da interacção gravítica só existe um tipo de carga, a massa, e as forças são sempre atractivas, o facto de as interacções electromagnéticas poderem ser atractivas ou repulsivas sugere a existência de pelo menos dois tipos de carga: partículas com cargas de tipo diferente repelem-se e partículas com cargas do mesmo tipo atraem-se. A interacção electromagnética é muito mais intensa que a eléctrica, mas a existência de forças atractivas e repulsivas permite cancelamentos que fazem com que a força electromagnética entre dois corpos possa ser praticamente nula.

\mathcal{ETV}_1 : Não poderia ser ao contrário? Cargas idênticas atraem-se e cargas opostas repelem-se? Se fosse assim, continuaríamos a observar os cancelamentos entre atracção e repulsão referidos acima?

▷ Actividade 9.1

A actividade 9.1 é uma boa ilustração de algumas destas ideias. Se retirarmos rapidamente duas tiras de um rolo de fita-cola verificamos que elas se repelem mesmo sem se tocar. Mas o rolo atrai qualquer das tiras. Embora no rolo de fita-cola haja tantas cargas de um tipo como de outro, ao retirar uma tira, fica um excesso de carga de um dado tipo na tira. Duas tiras terão mais pares de cargas que se repelem do que pares que se atraem: as tiras repelem-se. Mas no rolo terá ficado um excesso de carga de tipo oposto ao das tiras. Então o rolo deve atrair as tiras.

A pergunta que começaremos a responder neste capítulo é a seguinte:

Quais são as leis que regem a interacção electromagnética e de que modo podem explicar alguns fenómenos de observação corrente?

A descrição completa da interacção electromagnética é muito complexa; o funcionamento de todos os nossos electrodomésticos, dos ímanes, a transmissão de informação no nosso sistema nervoso,

a radiação electromagnética, desde as ondas de rádio, até à radiação infra-vermelha, visível, ultravioleta, Raios-X, raio gama, a estabilidade da matéria, as trovoadas, tudo isto são fenómenos electromagnéticos. O nosso conhecimento sobre estas interacções foi sendo construído por muitos físicos como Volta, Coulomb, Oersted, Ampère, Faraday, Maxwell, Hertz, Rutherford, etc., ao longo de mais de dois séculos de investigação teórica e experimental. Trata-se de uma história fascinante, mas longa e complicada, que não tentaremos reconstruir. Em vez disso usaremos o nosso conhecimento actual sobre a estrutura atómica da matéria para simplificar a explicação de alguns dos fenómenos eléctricos mais comuns do nosso quotidiano.

\mathcal{ETV}_2 : No capítulo anterior aprendemos a calcular a energia de um órbita gravítica circular. Suponhamos que o átomo de hidrogénio tem um electrão a orbitar um protão a uma distância da ordem do tamanho do átomo $r \sim 0,5 \text{ \AA}$. Qual é a energia de ligação devida à interacção gravítica entre o protão e electrão? Como se compara com a energia de ionização, E_i , do átomo de hidrogénio, a energia necessária para colocar o electrão num órbita aberta? ($E_i = 2,2 \times 10^{-18} \text{ J}$.)

9.2 Interacção de Coulomb

9.2.1 Estrutura atómica

Aqueles que gostam de coisas simples apreciam certamente a lista de ingredientes de que é constituída praticamente toda a matéria nas formas que encontramos na nossa experiência corrente; são apenas três:

- protões;
- neutrões;
- electrões.

A história completa é um pouco mais complexa. Existem muitas outras partículas e, além disso, os neutrões e protões são agregados de três partículas mais fundamentais, os **quarks**. Contudo,

quando se estuda o comportamento da matéria nas condições de temperatura e pressão prevalecentes na Terra, só em circunstâncias muito particulares é necessário considerar a descrição completa; para os nossos propósitos, esta é suficiente.

Destas três partículas, o neutrão não tem carga eléctrica e por isso não sente as forças electromagnéticas². Claramente, o protão e electrão terão que ter cargas de tipo diferente, para que possa surgir o cancelamento acima referido. Os núcleos dos átomos são constituídos por neutrões e protões. Como os protões se repelem, a interacção responsável pela coesão do núcleo não é eléctrica: é designada por **interacção forte**.

Os neutrões e protões têm uma massa semelhante e quase 2000 vezes superior à dos electrões. Como os núcleos têm, em geral, pelo menos tantos neutrões como protões (a excepção é o átomo de hidrogénio) e a matéria neutra tantos protões como electrões, a quase totalidade da massa de um material é a massa dos núcleos: a massa dos electrões é apenas cerca de $1/4000 = 2,5 \times 10^{-4}$ da massa total.

9.2.2 Princípio de sobreposição

A lei mais importante das interacções eléctricas é o **Princípio de Sobreposição**, que podemos exprimir do seguinte modo:

A força total que duas partículas carregadas A e B exercem sobre uma terceira partícula, C , é a soma da força que A exerceria se B não existisse com a força que B exerceria se A não existisse; este resultado vale para qualquer número de partículas, não apenas para duas.

Isto parece ser apenas a lei de composição de forças; mas, de facto, tem outra ideia incluída. Podia acontecer que a presença de B *modificasse* a força exercida por A em C ; nesse caso a soma das forças exercidas por cada partícula na presença uma da outra seria diferente da soma das forças exercidas por cada uma em separado. O princípio de sobreposição afirma que a interacção eléctrica é uma

²De facto, não é bem assim. O neutrão é constituído por quarks com carga eléctrica, cujas cargas se cancelam. Por isso a sua carga é zero. Sente efectivamente interacções electromagnéticas, mas de uma forma muito mais atenuada que o electrão ou o protão. Por exemplo, um neutrão cria um pequeno campo magnético.

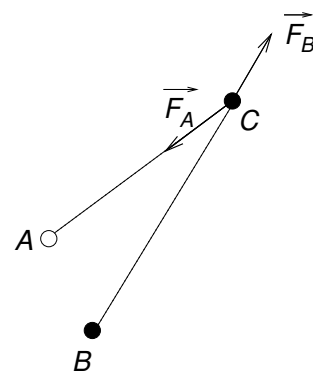


Figura 9.3: A força total na partícula C é a soma das forças que as partículas A e B exerceriam se apenas uma delas estivesse presente.

interacção de **pares**. Entre cada par de partículas há uma interacção que não depende da presença ou ausência dos outros pares. O princípio de sobreposição também é válido para a interacção gravítica.

9.2.3 Carga eléctrica

O princípio de sobreposição dá-nos uma maneira muito natural de definir quantidade de carga, ou simplesmente, carga de uma partícula, q , e permite-nos concluir que a força entre duas partículas carregadas é proporcional ao produto das respectivas cargas³,

$$\vec{F} \propto q_1 q_2.$$

Para isso vamos fazer um **experiência conceptual**: isto é, vamos **imaginar** uma situação, que eventualmente não conseguimos concretizar no laboratório, e tentar aplicar conceitos que já conhecemos para ver que conclusões podemos tirar dessa análise. A experiência que queremos fazer está ilustrada na figura 9.4.

Suponhamos que a força que um protão exerce noutra a uma distância r é \vec{F}_1 . Agora substituímos um protão por um núcleo de Hélio, uma partícula α , que tem dois neutrões, sem carga, e dois protões. Como varia a força no outro protão?

O princípio de sobreposição diz-nos que a força no segundo protão, \vec{F}_2 , é a soma das forças que cada protão da partícula α exerce e **que cada uma destas forças vale \vec{F}_1** . Assim,

$$\vec{F}_2 = 2\vec{F}_1.$$

Por outro lado, a força total exercida pelo protão sobre a partícula α é a soma das forças sobre cada um dos protões que a constituem e portanto vale $-2\vec{F}_1$. A terceira lei de Newton seria violada de outro modo.

Pelo mesmo raciocínio, se substituirmos o segundo protão por uma partícula α , a força sobre ela, \vec{F}_3 , é o dobro de \vec{F}_2 ; cada protão da nova partícula α sente uma força \vec{F}_2 . Ou seja,

$$\vec{F}_3 = 2 \times 2 \times \vec{F}_1.$$

³A literatura de física usa a palavra “carga” com dois significados ligeiramente diferentes. **Carga** como quantidade de carga eléctrica: “Um electrão tem uma **carga** de $1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$ ”. Uma **carga**, no sentido de partícula carregada: “Na matéria existem **cargas** positivas e negativas”. A distinção entre estes significados resulta do contexto em que são usados.

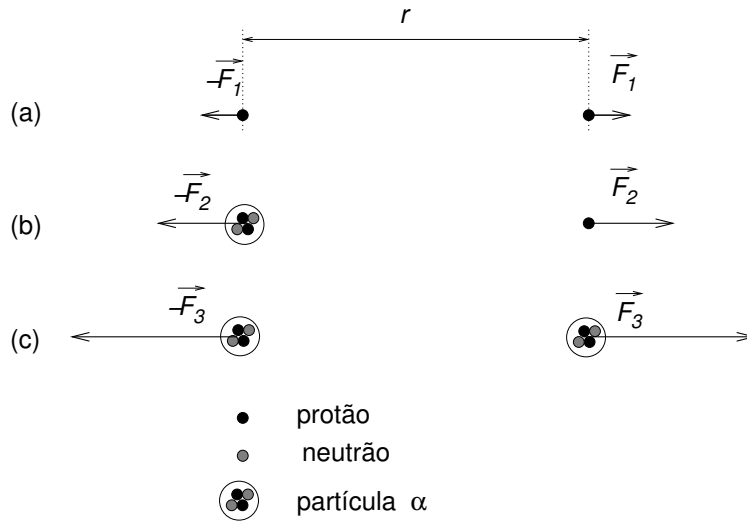


Figura 9.4: (a) a força entre dois protões é repulsiva; (b) Substituindo um protão por uma partícula α , que tem dois protões, a força sobre o segundo protão duplica, segundo o Princípio de Sobreposição; (c); Entre duas partículas α a força será quatro vezes superior a \vec{F}_1 .

Em resumo, se uma das partículas tiver n_1 protões e a outra n_2 protões, teremos em cada uma das partículas uma força total que resulta de somar $n_1 \times n_2$ vezes a força entre 2 protões. Ou seja,

$$\vec{F} = n_1 n_2 \vec{F}_1,$$

em que F_1 é a força entre dois protões.

Ora, designando por e a carga de um protão,

$$q_1 = n_1 \times e$$

e

$$q_2 = n_2 \times e$$

são as cargas de cada partícula, **se as definirmos como a soma das cargas dos protões que as constituem.**

Esta é uma boa definição, pois implica que a força eléctrica entre duas partículas seja simplesmente proporcional ao produto das cargas de cada uma:

$$\vec{F}_e \propto q_1 q_2.$$

E o que acontece com electrões?

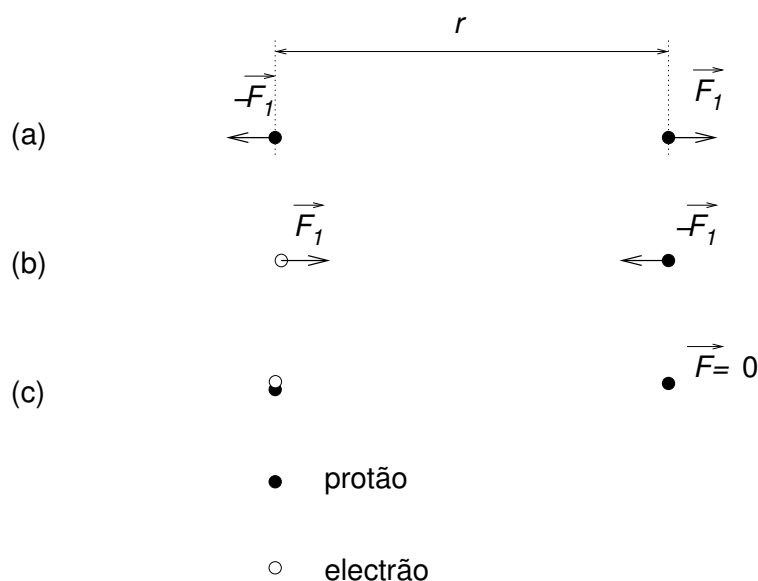


Figura 9.5: Substituindo um próton, (a), por um electrão, (b), a força sobre o segundo próton muda de sentido mas tem o mesmo módulo. (c) Pelo princípio de sobreposição, a força total exercida por um próton e um electrão, no mesmo local, sobre o segundo próton é nula.

O primeiro facto interessante é que se substituirmos um próton por um electrão, a força sobre o segundo próton muda de sentido mas tem o mesmo módulo. Se juntarmos um electrão e um próton no mesmo ponto, o princípio de sobreposição diz-nos, então, que a força total sobre o segundo próton é nula. Para mantermos a lei de que a força é proporcional ao produto das cargas, teremos apenas que definir a carga do electrão como o simétrico da carga do próton, $-e$. No cálculo da força entre dois prótons o produto das cargas é,

$$q_1 q_2 = e^2;$$

no cálculo da força entre um próton e um electrão será:

$$q_1 q_2 = e \times (-e) = -e^2$$

e a força resulta simétrica da anterior. Por outro lado, a carga total de um electrão e de um próton será

$$q_1 = e + (-e) = 0,$$

o que implica que a força que exercem numa carga q_2 será

$$\vec{F} \propto q_1 q_2 = 0.$$

Em conclusão:

- O princípio de sobreposição permite concluir que a força que uma carga q_1 exerce sobre q_2 , a uma distância r , é

$$\vec{F}_e = q_1 q_2 \vec{f}(r)$$

em que $\vec{f}(r)$ é a força para o caso de duas cargas unitárias.

- As cargas de um protão e de um electrão são simétricas, e e $-e$, pois estas partículas exercem forças simétricas sobre uma terceira partícula.
- A carga total de um corpo pode escrever-se na forma:

$$q = n_p e - n_e e$$

em que n_p e n_e são os números de electrões e protões no corpo.

9.2.4 Quantificação da carga eléctrica

As observações da secção anterior implicam a quantificação da carga em unidades da carga elementar, e . Ou seja a carga de qualquer corpo é um múltiplo inteiro de e :

$$\frac{q}{e} = \text{número inteiro.}$$

▷ Ver Actividade 9.2

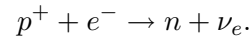
Em 1911, Robert Millikan, um físico americano, realizou uma experiência que pôs claramente em evidência esta quantificação. O método de Millikan, descrito na actividade 9.2, permitia-lhe medir a carga de gotas de óleo suspensas no ar. Mediu várias gotas e verificou que podia descrever os seus resultados na forma

$$q_i = n_i e$$

em que n_i é um inteiro, positivo ou negativo, e e toma o mesmo valor em todas as gotas.

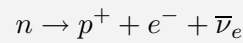
A física contemporânea tem uma representação muito completa e detalhada da estrutura da matéria e das respectivas interacções, não apenas nas condições de temperatura prevalecentes na Terra, mas para temperaturas e energias muito mais elevadas. A quantificação de carga é um dos aspectos fundamentais desta representação. Além disso a carga é conservada. A carga eléctrica não pode ser criada nem destruída. Protões e electrões podem; por

exemplo, na seguinte reacção um protão e um electrão acelerados colidem e transformam-se num neutrão e neutrino:



O neutrão, n , o neutrino, ν_e , são partículas sem carga: a carga final é nula. Como a carga do electrão e protão são simétricas, a carga inicial é nula também e esta reacção conserva a carga eléctrica.

\mathcal{ETV}_3 : Diz-se que a carga eléctrica não pode ser criada nem destruída. Mas o decaimento β do neutrão não é um exemplo de criação de carga?



O neutrão não tem carga e decai em duas partículas carregadas e um anti-neutrino!

9.2.5 Lei de Coulomb

A discussão anterior mostra que se conhecermos a força entre dois protões a uma distância r podemos calcular a força entre quaisquer duas cargas.

A primeira lei quantitativa de interacção entre duas cargas foi formulada pelo físico francês, Charles Augustin Louis Coulomb, e tem o seu nome, **Lei de Coulomb**. A lei de Coulomb tem muitas semelhanças com a lei da Gravitação Universal e por isso pusemo-las lado a lado na caixa 9.1. Tal como no caso da gravitação, Coulomb verificou que a força entre as duas esferas era inversamente proporcional ao quadrado da distância entre elas

$$F_e \propto \frac{q_1 q_2}{r^2}.$$

A constante da lei de Coulomb

No caso da Lei da Gravitação Universal, a constante de proporcionalidade é a constante de gravitação universal G ,

$$F_g = G \frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

■ Leis da Gravitação Universal e de Coulomb ■**Lei da Gravitação**

- A interacção gravítica existe entre todas as partículas;
- A força gravítica entre duas partículas de massas, m_1 e m_2 , é proporcional ao produto $m_1 m_2$;
- A força gravítica é sempre atractiva;
- A força gravítica é inversamente proporcional ao quadrado da distância entre as massas;

$$F_g \propto \frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

Lei de Coulomb

- A interacção eléctrica existe entre partículas com carga eléctrica;
- A força eléctrica entre duas cargas q_1 e q_2 é proporcional ao produto $q_1 q_2$;
- A força eléctrica é repulsiva entre cargas de mesmo sinal e atractiva entre cargas de sinal oposto.
- A força eléctrica é inversamente proporcional ao quadrado da distância entre as cargas,

$$F_e \propto \frac{q_1 q_2}{r^2}.$$

Caixa 9.1: Leis da Gravitação Universal e de Coulomb: semelhanças e diferenças.

No capítulo anterior vimos como Cavendish mediu esta constante: mediu o valor da força entre massas conhecidas a uma distância conhecida também. Sabendo F_g , m_1 , m_2 e r determinou o valor de G .

Poderemos fazer o mesmo no caso da lei de Coulomb? Medir o valor da constante de proporcionalidade k_C ,

$$F_e = k_C \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad ?$$

Coulomb usou, precisamente, uma balança de torção semelhante à de Cavendish para medir o valor de forças entre esferas carregadas. Mas, para medir k_C , Coulomb precisava de saber qual era o valor das cargas das esferas.

Para um físico parece natural usar a lei de Coulomb para **definir** a unidade de carga. Por exemplo, se disséssemos que a repulsão entre duas cargas unitárias a um metro de distância é, *por definição de unidade de carga*, 1 N, teríamos,

$$F_e = k_C \frac{1 \times 1}{1^2} = 1 \text{ N},$$

o que implica

$$k_C = 1,$$

▷ Atenção: esta fórmula não é correcta no SI!

e a lei de Coulomb perdia um símbolo:

$$F_e = \frac{q_1 q_2}{r^2}.$$

A unidade de carga seria $\text{N}^{1/2} \text{m}$ no SI, pois o produto de duas cargas seria igual ao produto de uma força por uma distância ao quadrado, $\text{N} \times \text{m}^2$:

$$q_1 q_2 = F_e \times r^2.$$

Contudo, os nossos sistemas de unidades resultam mais de acidentes históricos que da lógica. O caso dos sistemas de unidades eléctricas é especialmente complicado, devido à importância tecnológica dos fenómenos eléctricos.

Em traços gerais os factos são os seguintes. Ao contrário do que é habitual não vale a pena tentar saber porque foram escolhidas estas definições. A história é longa e sinuosa!

- O Coulomb (C), unidade SI de carga eléctrica, **não é definido pela lei de Coulomb**; existe um processo de medir a carga de um corpo que não usa esta lei⁴.

⁴No sistema SI o Coulomb é definido a partir da unidade de corrente, o Ampère, a qual por sua vez é definida a partir da lei que determina as forças entre duas correntes paralelas.

- Isso pareceria implicar que o valor de k_C teria que ser determinado experimentalmente, já que o Coulomb é definido de um modo independente da lei de Coulomb. Contudo, não é assim: a definição SI do Coulomb é equivalente a postular que a força entre duas cargas de 1 C a uma distância 1 m tem um valor exacto definido por

$$10^{-7} \times c^2 \approx 9,0 \times 10^9 \text{ N},$$

em que c é o valor SI da velocidade da luz⁵. Ou seja,

$$k_C \frac{1 \times 1}{1^2} = 10^{-7} \times c^2 \Rightarrow k_C \approx 9,0 \times 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2}.$$

- Para complicar ainda mais, é usual escrever k_C na forma algo misteriosa,

$$k_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}.$$

A constante $\epsilon_0 = 1/(4\pi k_C)$ é designada por **permitividade eléctrica do vazio**.

Em resumo:

- A forças que duas cargas q_1 e q_2 exercem uma na outra a uma distância r valem em módulo

$$F_e = k_C \frac{q_1 q_2}{r^2},$$

em que

$$k_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 9,0 \times 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2}.$$

- Se \hat{e}_{21} for o versor do vector $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$, que une a carga q_1 a q_2 , a força que q_1 exerce em q_2 é:

$$\vec{F}_e = k_C \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{e}_{21}.$$

Como dissemos acima, se $q_1 q_2 > 0$, cargas do mesmo sinal, a força é repulsiva, dirigida de q_1 para q_2 , tal como \hat{e}_{21} ; se $q_1 q_2 < 0$, cargas de sinal oposto, a força é atractiva, de sentido oposto a \hat{e}_{21} .

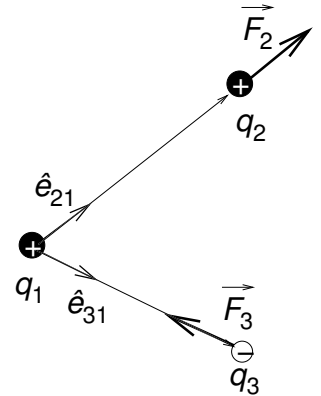


Figura 9.6: As forças entre cargas.

⁵O valor da velocidade da luz no SI é *exactamente* $c = 299\,792\,458 \text{ m s}^{-1}$. Este valor é convencionado porque o metro é definido de modo a que a velocidade da luz tenha este valor: um metro é a distância que a luz, no vazio, percorre em $1/299\,792\,458$ segundos.

\mathcal{ETV}_4 : Uma das maneiras comuns de comparar quantitativamente as intensidades da interacção gravítica e eléctrica, consiste em calcular a razão entre a força gravítica e a força eléctrica de duas partículas, por exemplo, dois protões.

- a) Para este efeito, é necessário especificar a distância entre os protões?
- b) Quanto vale esta razão?

9.3 Electrificação por contacto

▷ Actividade 9.1

Na actividade 9.1 descrevem-se algumas experiências, que se podem fazer em casa, que evidenciam a possibilidade de certas substâncias ficarem facilmente electrificadas. As observações feitas nessa actividade podem ser explicadas, qualitativamente, com base nas leis acima referidas.

De um modo geral, a matéria é neutra e tem boas razões para o ser. Cargas de sinal oposto atraem-se e cargas do mesmo sinal repelem-se. Isso significa que cargas positivas querem rodear-se de carga negativas e vice-versa. À escala macroscópica qualquer pequena região terá igual número de protões e electrões: carga total nula.

Contudo, basta puxar uma tira de fita-cola de um rolo para criar um desequilíbrio de carga. Este efeito, **efeito tribo-eléctrico**, é muito comum, embora seja extremamente complexo e mal compreendido.

Na superfície de contacto entre dois corpos formam-se ligações químicas que envolvem a partilha de electrões. Ao separar as superfícies essas ligações quebram-se mas os electrões não ficam partilhados igualmente; certos átomos terão maior tendência a ficar com os electrões do que outros. Por exemplo, uma vara de vidro friccionada em lã ficará em geral com excesso de electrões; a lã ficará com menos electrões que cargas positivas. A fricção não é estritamente necessária; mas repete o contacto-separação das superfícies aumentando o desequilíbrio de cargas.

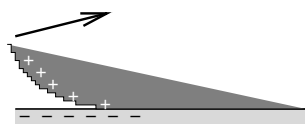


Figura 9.7: Efeito tribo-eléctrico: quando separamos dois corpos, as cargas, em geral, não se dividem igualmente entre eles.

Repare-se que nenhuma carga é criada. Quer as cargas positivas quer as negativas já existem. A electrificação é a sua separação. Por isso, os corpos que estiveram em contacto, a menos que já estivessem carregados, adquirem cargas de sinal oposto e atraem-se⁶.

Contudo, também vimos que um material como o papel pode ser atraído por corpos com carga positiva e por corpos com carga negativa. Que tipo de carga tem o papel, então?

Para responder a esta pergunta vamos considerar o sistema neutro mais simples. O átomo de hidrogénio, um protão e um electrão, tem uma carga total nula. Apesar de neutro, é atraído quer por cargas positivas quer por cargas negativas. Como?

9.3.1 Polarização

A carga total de um átomo de hidrogénio é a soma da carga do protão que constitui o seu núcleo e do electrão cuja carga pode ser imaginada na forma de uma nuvem electrónica. Na presença de uma carga, por exemplo positiva, o protão e o electrão ficam sujeitos a forças simétricas e a força total no átomo será:

$$\vec{F}_p = -\vec{F}_e \Rightarrow \vec{F} = \vec{F}_p + \vec{F}_e = 0$$

Nada de novo. O átomo é neutro, a força total é nula.

Contudo, é de esperar que haja um pequeno deslocamento relativo do electrão e do protão em sentidos opostos até que estas forças exteriores sejam equilibradas pela respectiva atracção, conforme ilustrado na figura 9.8. Nesse caso as forças \vec{F}_e e \vec{F}_p não são rigorosamente iguais pois a lei de Coulomb implica que a força decai com a distância. O electrão, que é atraído para a carga positiva, aproximou-se desta e é actuado por uma força ligeiramente maior em módulo, do que a do protão, que é repelido. A resultante das duas forças será uma força atractiva em direcção à carga positiva.

Duas cargas simétricas, próximas uma da outra formam um **dipolo eléctrico**. No caso que discutimos, do átomo de hidrogénio, o dipolo forma-se por efeito das forças eléctricas externas. Diz-se que o átomo é **polarizável**.

Certas moléculas, como as da água, são dipolos mesmo na ausência de forças eléctricas externas. Na molécula de água, H_2O ,

⁶É o caso do rolo de fita e das tiras de fita-cola que tiramos do rolo: ver Actividade 9.1.

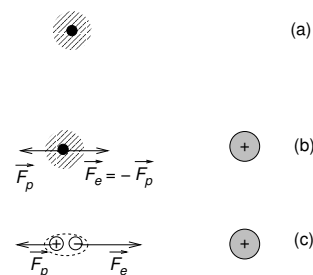


Figura 9.8: (b) A carga externa exerce forças opostas no protão e no electrão do átomo de hidrogénio; (c) havendo uma deslocamento relativo destas cargas, por acção dessas forças, a resultante deixa de ser nula e passa a ser atractiva.

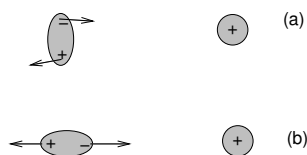


Figura 9.9: Um dipolo permanente, na presença de uma carga externa, roda de modo a aproximar da carga externa a sua extremidade com carga oposta.

os electrões partilhados nas ligações O – H são deslocados em direcção ao núcleo do oxigénio, pelo que o oxigénio fica com carga negativa e os dois hidrogénios com carga positiva. Uma carga positiva externa atrai o oxigénio e repele os hidrogénios e a molécula roda, ficando com o oxigénio do lado da carga externa e os hidrogénios do lado oposto. O efeito final é o mesmo que no átomo de hidrogénio: aproximar cargas opostas e afastar cargas do mesmo sinal que a carga externa. Como a interacção de Coulomb diminui com a distância, a resultante das forças sobre uma molécula de água também tem o sentido da carga externa. Os efeitos de polarização são, contudo, mais intensos quando já existem dipolos permanentes, como no caso da água. Se aproximarmos uma tira de fita-cola de um fio de água de uma torneira, veremos sem dificuldade o efeito da polarização da água: o fio de água é atraído para a fita-cola!

Em resumo, um corpo não carregado tem, não obstante, cargas positivas e negativas. Se aproximarmos uma carga externa, esta atrai as cargas de sinal oposto e repele as do mesmo sinal, criando um ligeiro deslocamento relativo das cargas negativas e positivas do material em sentidos opostos. A carga externa, cria, ou orienta, dipolos eléctricos, cujas extremidades de carga de sinal oposta ao da carga externa ficam mais próximas da mesma (ver fig. 9.10); como a interacção de Coulomb diminui com a distância, a resultante da força sobre todos os dipolos é atractiva.

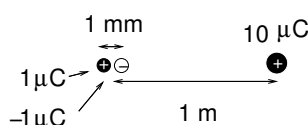


Figura 9.11: Qual é o valor da força resultante no dipolo?

ETV₅: Um dipolo é constituído por duas cargas q e $-q$ em que $q = 1 \mu\text{C}$, separadas de uma distância de 1 mm (fig. 9.11). Qual é a resultante das forças que uma carga de $Q = 10 \mu\text{C}$ a uma distância de 1 m exerce no dipolo, se este estiver alinhado na direcção da carga, com a carga negativa mais próxima de Q ?

9.3.2 Metais e isoladores

Num átomo ou numa molécula os electrões estão “ligados” aos respectivos núcleos: isto é, sob a acção de uma força eléctrica exterior eles deslocam-se ligeiramente em relação aos núcleos positivos, mas esse deslocamento da configuração de equilíbrio origina forças internas, forças restauradoras, que limitam esse afastamento. Em certos materiais só existem electrões ligados. Estes materiais

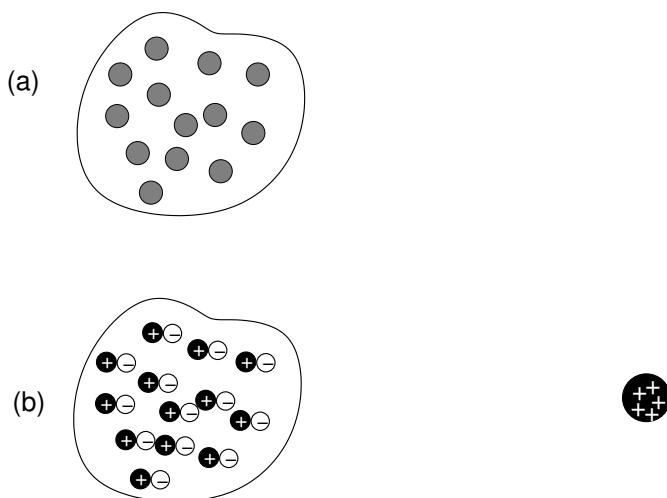


Figura 9.10: Num corpo não carregado as cargas positivas e negativas estão em equilíbrio. Uma carga externa atrai as cargas de sinal oposto ao seu e repele as do mesmo sinal. Como estas forças decaem com a distância à carga exterior, a resultante é uma força atractiva.

podem ser polarizados mas os deslocamentos dos electrões são limitados a distâncias da ordem de grandeza do tamanho do átomos: são materiais **isoladores**. A sua polarização resulta da formação ou reorientação de dipolos eléctricos.

Notavelmente, numa classe importante de materiais, os **metais**, alguns electrões, designados por electrões de condução, não estão ligados. Não estão sujeitos a forças restauradoras e podem deslocar-se no sólido distâncias macroscópicas, estando limitados apenas pela superfície do sólido.

Num sólido referimo-nos, normalmente, apenas aos movimentos dos electrões, pois quase toda a massa do sólido é a massa dos núcleos. De um modo geral, ao fixar a posição do sólido, estamos a fixar a posição dos núcleos que o constituem. Os deslocamentos de carga podem ser vistos como movimentos de electrões relativamente a esta rede de núcleos de carga positiva⁷.

O efeito tribo-eléctrico também ocorre com metais. Enquanto que num isolador a carga em excesso fica localizada na região onde se produziu por contacto-separação, num metal os electrões livres

⁷Numa classe importante de materiais existem protões em estruturas chamadas “pontes de hidrogénio” que podem mover-se entre duas posições de equilíbrio na rede de núcleos. Estes movimentos podem dar uma contribuição muito importante para a polarização destes materiais.

podem deslocar-se de modo a compensar essa carga. Se foi criado um excesso de electrões numa zona do metal, a repulsão entre eles fá-los afastar uns dos outros. Se, ao contrário, uma região do metal ficou com excesso de carga positiva, os electrões de outros pontos são atraídos para aí, compensando esse excesso e deixando outras regiões positivas; é como se a carga positiva em excesso também se espalhasse. A carga de um metal é móvel quer seja positiva, quer seja negativa. Como cargas do mesmo sinal se repelem, afastam-se o mais possível e acabam por se acumular na superfície do metal.

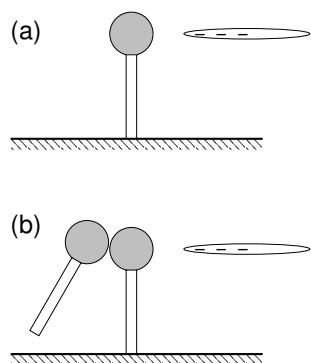


Figura 9.12: Se tocarmos com uma segunda esfera metálica na primeira, quando se separam ficam carregadas?

\mathcal{ETV}_6 : Uma vara de vidro, carregada negativamente, é aproximada de uma esfera metálica, sem carga, apoiada num suporte isolador.

- a) Qual passa a ser a carga total da esfera metálica? Continua descarregada?
- b) Se tocarmos na primeira esfera, no lado mais afastado da vara de vidro, com uma outra esfera metálica, também com suporte isolador, depois de separadas, que sinais tem as cargas das duas esferas?
- c) Qual delas atrai mais fortemente um pedaço de papel (não carregado)?

9.3.3 Electrostatica e humidade

Nos tempos em que ainda havia chuva, os professores de zonas húmidas, como a região do Porto, tinham muita dificuldade em realizar demonstrações de electrostática. A presença da humidade aumenta o conteúdo de água dos materiais. Embora a água destilada seja um dielétrico, os materiais dissolvidos na água estão na forma de iões móveis. Um objecto não se mantém carregado se as suas cargas se puderem movimentar através de um fluido como a água. As cargas do mesmo sinal repelem-se e de sinais opostos atraem-se. Uma carga “gosta” de estar rodeada de cargas de sinal oposto. Por isso, em condições de elevada humidade, a neutralidade restabelece-se rapidamente.

9.4 Campo eléctrico

Se uma partícula de massa m , colocada numa posição \vec{r} , é actuada por uma força gravítica, \vec{F}_g , dizemos que nesse ponto existe um campo gravítico. Como vimos no capítulo anterior, o valor da força é proporcional à massa da partícula,

$$\vec{F}_g = m\vec{G}(\vec{r}),$$

pelo que $\vec{G}(\vec{r}) = \vec{F}_g/m$ é o mesmo para qualquer partícula que esteja em \vec{r} ; por outras palavras, $\vec{G}(\vec{r})$ é o campo gravítico em \vec{r} . Devido à segunda lei de Newton, a força por unidade de massa, $\vec{G}(\vec{r})$, é também a aceleração da partícula quando está em \vec{r} , se estiver sujeita apenas a forças gravíticas: o campo gravítico é um campo de acelerações.

Suponhamos agora que na vizinhança de \vec{r} existem partículas carregadas, com cargas, $q_1, q_2 \dots$. Se a partícula colocada em \vec{r} tiver carga eléctrica, q_0 , fica também sujeita a uma força de origem eléctrica, devida à presença das outras cargas:

$$\vec{F}_e = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \dots$$

Como

$$\begin{aligned} \vec{F}_1 &\propto q_0 q_1 \\ \vec{F}_2 &\propto q_0 q_2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

a força eléctrica sobre a partícula será proporcional à respectiva carga:

$$\vec{F}_e = q_0 \vec{E}(\vec{r})$$

A força por unidade de carga, $\vec{E}(\vec{r})$, depende das posições e valores das outras cargas, que criam o campo em \vec{r} , mas não da carga que colocámos em \vec{r} : $\vec{E}(\vec{r})$ é o **campo eléctrico** em \vec{r} .

Note-se a distinção que fizemos entre as partículas que criam o campo, $q_1, q_2 \dots$, e a chamada carga de prova, q_0 , que usámos mentalmente para definir o valor do campo num ponto. Esta distinção é apenas para nosso benefício, para tornar mais claro o conceito de campo. Entre cargas existe completa democracia: todas criam campos eléctricos e todas são actuadas pelo campo eléctrico. Apesar disso, esta ideia de separar, mentalmente, as cargas que criam o campo da carga de prova é muito útil e recorreremos a ela mais vezes.

Um vez $q \times \vec{E}$ é uma força, a unidade de campo eléctrico é o NC^{-1} .

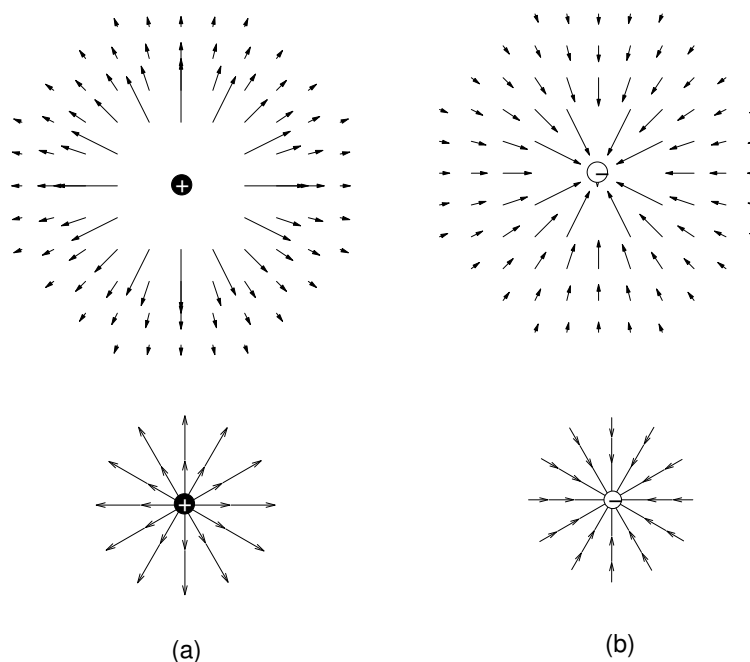


Figura 9.13: Representações do campo eléctrico; (a) de uma carga positiva; (b) de uma carga negativa. O sentido do campo é o da força sobre uma carga de prova *positiva*. A representação só está feita num plano. O campo é não nulo em todo o espaço.

9.4.1 Campo de uma carga pontual

Uma carga pontual q exerce numa carga q_0 colocada numa posição \vec{r} relativamente à primeira uma força

$$\vec{F}(\vec{r}) = k_C \frac{qq_0}{r^2} \hat{e}_r,$$

em que \hat{e}_r é o versor da direcção \vec{r} (origem na posição da carga q). O campo eléctrico criado pela carga q em \vec{r} é

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}}{q_0} = k_C \frac{q}{r^2} \hat{e}_r.$$

O sentido do campo depende do sinal da carga que o cria. Se $q > 0$, tem o mesmo sentido que \hat{e}_r : aponta da carga q para fora; se $q < 0$ tem o sentido oposto ao de \hat{e}_r : aponta para a carga que cria o campo.

O campo eléctrico é um campo vectorial, tal como o campo gravítico ou o campo de velocidades de um fluido. A cada ponto do

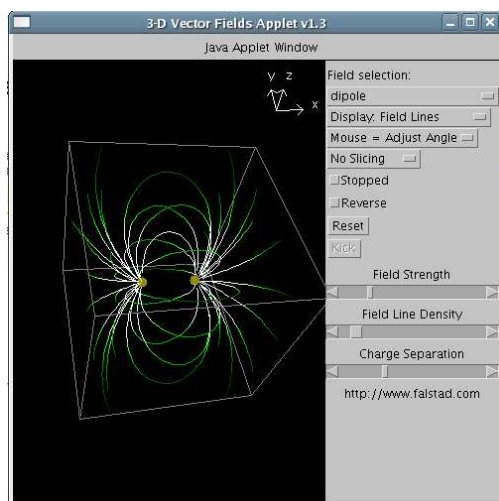


Figura 9.14: Imagem de um *applet* de visualização tri-dimensional do campo eléctrico de autoria de Paul Falstad [1].

espaço está associado um vector $\vec{E}(\vec{r})$. Podemos usar as mesmas representações gráficas que usámos para o campo de velocidades ou o campo gravítico. As linhas tangentes ao campo eléctrico em cada ponto são designadas por linhas de campo. O conceito de linhas de campo é uma das muitas contribuições científicas de Michael Faraday, um nome bem conhecido dos alunos deste projecto.

Uma carga de prova, q_0 , colocada numa região onde exista um campo eléctrico, ficará sujeita a uma força com o sentido do campo se for positiva, $q_0 > 0$ e de sentido oposto, se for negativa, $q_0 < 0$. O módulo da força, F , será

$$F = |q_0|E(\vec{r})$$

em que $E(\vec{r}) = \left| \vec{E}(\vec{r}) \right|$.

A lei de Coulomb e o princípio de sobreposição permitem-se calcular o campo de qualquer configuração de cargas. Basta somarmos os campos de cada carga, já que a força sobre uma carga de prova é também a soma das forças exercidas por cada carga. Contudo, isso é mais fácil de dizer do que fazer. Um centímetro cúbico de um metal pode ter mais de 10^{22} electrões e outros tantos protões. No portal do projecto, em webfisica/fis_applets reuniram-se duas animações em Java, que permitem visualizar o campo de diferentes distribuições de carga em duas e três dimensões usando várias representações (fig. 9.14). Valem bem uma visita!

\mathcal{ETV}_7 : Nos *applets* de visualização de campos eléctricos verifica-se que as linhas de campo se iniciam nas cargas positivas e terminam nas negativas, ou no infinito. Porquê? Como é de esperar que sejam as linhas de força junto de uma carga pontual?

9.5 Potencial eléctrico

9.5.1 Energia potencial de um campo de forças

Quando um corpo está sujeito a um campo de forças, seja ele gravítico ou eléctrico, se o quisermos deslocar, temos que aplicar uma força externa oposta à do campo de forças. Ao deslocá-lo realizamos trabalho e trabalho é transferência de energia. Se não acelerarmos o corpo, não variamos a sua energia cinética; se não houver dissipação, atrito, ou viscosidade, o trabalho que realizamos é a variação de energia potencial do corpo no campo de forças.

Assim, para deslocarmos o corpo de $\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}_f$, o trabalho externo é

$$w_{\text{ext}} = E_p(\vec{r}_f) - E_p(\vec{r}_i) = \Delta E_p. \quad (9.1)$$

Nada de misterioso neste conceito: para deslocar um corpo num campo de forças, sem o acelerar, temos que realizar trabalho externo; a energia cinética mantém-se (aceleração nula), logo é a energia potencial do corpo varia; se $w_{\text{ext}} > 0$ passamos energia para o sistema e $\Delta E_p > 0$; se $w_{\text{ext}} < 0$ recebemos energia e $\Delta E_p < 0$.

Uma vez que a força externa, \vec{F}_{ext} , tem que ser simétrica da força eléctrica (ou gravítica) do campo de forças para não haver aceleração, o trabalho da força do campo é o simétrico do trabalho externo, $-w_{\text{ext}}$. Ou seja, ao deslocar o corpo de $\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}_f$ o trabalho das forças do campo é

$$w_{\text{campo}} = -(E_p(\vec{r}_f) - E_p(\vec{r}_i)) = -\Delta E_p. \quad (9.2)$$

Existe uma outra maneira de ver a equação 9.2. Quando o corpo se desloca sujeito ao campo de forças apenas, sem força externa, como, por exemplo, numa queda livre no campo gravítico, o trabalho do campo é a variação de energia cinética do corpo:

$$w_{\text{campo}} = \Delta E_c.$$

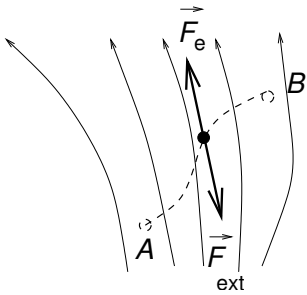


Figura 9.15: Para deslocar um corpo sem o acelerar, a força externa tem de cancelar a força do campo.

Se a energia se conserva,

$$\Delta E_c + \Delta E_p = 0,$$

logo

$$w_{\text{campo}} = -\Delta E_p.$$

Um campo de forças que satisfaça esta relação,

o trabalho realizado pelas forças do campo entre dois pontos \vec{r}_i e \vec{r}_f é a diferença de energias potenciais, $E_p(\vec{r}_i) - E_p(\vec{r}_f)$,

$$w_{i \rightarrow f} = E_p(\vec{r}_i) - E_p(\vec{r}_f) = -\Delta E_p,$$

diz-se um **campo conservativo**.

9.5.2 Energia potencial de duas cargas

Se quisermos calcular a energia potencial de duas cargas q_1 e q_2 usamos uma das “receitas” acima indicadas: movemos uma carga no campo da outra e calculamos o trabalho que temos de realizar externamente; ou largamos uma das cargas e vemos qual é trabalho do campo eléctrico no seu deslocamento. Mas nem isto precisamos de fazer porque já o fizemos no capítulo 8.

Quando estudámos o campo gravítico, concluímos que a energia potencial gravítica de duas partículas de massa, m_1 e m_2 , a uma distância r , era dada por

$$E_p = -G \frac{m_1 m_2}{r}.$$

Comparemos a lei da gravitação,

$$\vec{F}_g = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{e}_{21},$$

e a de Coulomb,

$$\vec{F}_e = k_C \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{e}_{21}.$$

Passamos de uma para a outra se fizermos as seguintes substituições na lei de força gravítica:

$$\begin{aligned} m_1 &\rightarrow q_1 \\ m_2 &\rightarrow q_2 \\ G &\rightarrow -k_C. \end{aligned} \tag{9.3}$$

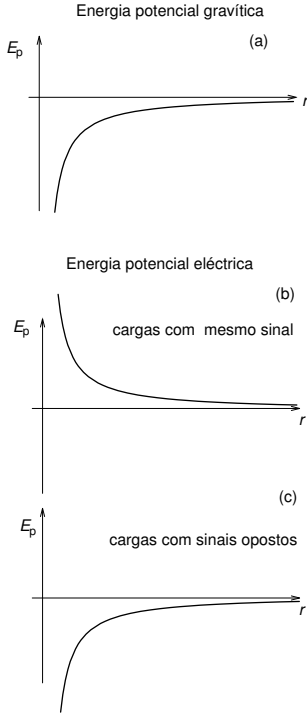


Figura 9.16: Comparação das energias potencial gravítica, (a), e eléctrica, (b) e (c), de duas partículas, em função da distância entre elas. Escalas verticais arbitrárias.

A matemática não quer saber do nome dos parâmetros. Se o trabalho da primeira força entre \vec{r}_i e \vec{r}_f é

$$w_g = E_p(\vec{r}_i) - E_p(\vec{r}_f) = -G \frac{m_1 m_2}{r_i} + G \frac{m_1 m_2}{r_f}.$$

o trabalho da força eléctrica tem que ser o que se obtém desta expressão com as substituições da equação 9.3:

$$w_e = E_p(\vec{r}_i) - E_p(\vec{r}_f) = k_C \frac{q_1 q_2}{r_i} - k_C \frac{q_1 q_2}{r_f}.$$

A **energia potencial eléctrica** de interacção de duas cargas à distância r será

$$E_p = k_C \frac{q_1 q_2}{r}. \quad (9.4)$$

Este resultado bate certo com as nossas expectativas (fig. 9.16):

- Se $q_1 q_2 > 0$, cargas do mesmo sinal, $E_p(r)$ é positivo: quando aumentamos r a energia potencial diminui. Se as partículas estiverem apenas sujeitas à força eléctrica, aceleram à medida que se afastam, já que a força é repulsiva. A energia potencial converte-se em cinética e diminui.
- Se $q_1 q_2 < 0$, cargas de sinal oposto, $E_p(r)$ é negativo e aumenta com o aumento de r ; certo de novo! Se largarmos as partículas, elas aceleram *aproximando-se*. A energia cinética aumenta e a potencial diminui (mais negativa) quando as partículas se aproximam.

Para separar cargas que se atraem, temos que exercer forças externas no sentido do deslocamento, $w_{\text{ext}} > 0$, e a energia do sistema aumenta: $\Delta E_P > 0$. Para *aproximar* cargas que se repelem temos igualmente $w_{\text{ext}} > 0$ e $\Delta E_P > 0$.

9.5.3 Definição de potencial eléctrico

A força eléctrica sobre uma carga de prova q_0 que se move num campo $\vec{E}(\vec{r})$ é proporcional a q_0 ; $\vec{F}_{\text{ext}} = q_0 \vec{E}$. O mesmo acontece com o respectivo trabalho, $w_e \propto q_0$, e, consequentemente, com a energia potencial da carga de prova, $E_p \propto q_0$. A **energia potencial por unidade de carga**,

$$V = \frac{E_p}{q_0},$$

é independente da carga de prova, só depende do campo eléctrico em que ela se move: Designa-se por **potencial eléctrico**, ou simplesmente, potencial. Já tínhamos definido de um modo equivalente o conceito de potencial gravítico.

No caso do campo criado por uma carga pontual q (coincidente com a origem do sistema de eixos) a energia potencial de uma carga de prova à distância r é⁸,

$$E_p = k_C \frac{q_0 q}{r},$$

ou seja,

$$V(\vec{r}) = k_C \frac{q}{r}.$$

A unidade SI de potencial, JC^{-1} , recebeu o nome **Volt (V)** em homenagem ao físico/químico italiano Alessandro Volta.

O electrão-volt

O conhecimento do potencial eléctrico é muito útil quando se estuda o movimento de cargas sob acção de um campo eléctrico.

Quando um electrão se desloca entre dois pontos de potenciais $V_1 = V(\vec{r}_1)$ e $V_2 = V(\vec{r}_2)$, a sua energia potencial varia de

$$\Delta E_p = (-e)(V_2 - V_1).$$

Se $\Delta V > 0$, a variação de energia potencial do electrão é negativa, o que significa que a sua energia cinética aumenta de:

$$\Delta E_c = e(V_2 - V_1). \quad (9.5)$$

O electrão é acelerado em direcção a regiões de potencial mais elevado. O resultado da equação 9.5 está na base de uma unidade de energia muito usada em física de partículas, o **electrão-volt (eV)**:

O electrão-volt, **eV**, é a variação de energia cinética de um electrão acelerado por um campo eléctrico entre dois pontos com uma diferença de potencial de 1 V.

⁸ Afinal esta é a energia potencial da carga de prova, ou a energia de interacção das duas cargas? Quando consideramos apenas o movimento da carga de prova, mantendo as outras fixas, a energia potencial de interacção varia apenas com a posição da carga de prova. Nesse caso podemos chamar-lhe “energia potencial da carga de prova”.

Se a diferença de potencial é 1 V a variação de energia cinética de um electrão é 1 eV; se $\Delta V = 1000 \text{ V}$, a variação de energia do electrão é de $1000 \text{ eV} = 1 \text{ keV}$. Visto que a diferença de potencial é muito fácil de medir, esta unidade resulta muito prática.

A energia em Joule de 1 eV, é dada por $e\Delta V = e \times 1$. Dado que $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$, temos

$$1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}.$$

\mathcal{ETV}_8 : Rutherford descobriu a existência do núcleo atómico dirigindo um feixe de partículas α de energia cinética $E_c = 5 \text{ MeV} = 5 \times 10^6 \text{ eV}$, contra uma fina folha de ouro. Verificou que algumas partículas α eram reflectidas. Interpretou estes eventos como colisões frontais entre uma partícula α e um núcleo de ouro ($Z = 79$).

- a) O núcleo de ouro tem uma posição fixa pela rede cristalina da folha. Para que distância do núcleo de ouro é que se verifica a paragem e subsequente inversão de velocidade de uma partícula α de energia 5 MeV?
- b) Como se compara essa distância com o tamanho típico de um átomo, $\sim 1 \text{ \AA}$?

9.5.4 Superfícies equipotenciais

No caso do campo de uma carga pontual, os pontos a igual distância da carga correspondem ao mesmo valor do potencial: definem uma superfície **equipotencial**. No caso do campo de uma carga pontual estas superfícies são esferas centradas na posição da carga (fig. 9.17).

Não é por acaso que as linhas de campo da figura 9.17 são perpendiculares às superfícies equipotenciais. Se deslocarmos uma carga de prova sobre uma superfície equipotencial, a sua energia potencial não varia, $q_0\Delta V = q_0 \times 0$. Isso significa que a força eléctrica não realiza trabalho, pelo que tem de ser perpendicular ao deslocamento. Por isso as linhas de campo são sempre normais às superfícies equipotenciais.



Figura 9.17: As intersecções das superfícies equipotenciais com o plano de representação são círculos (a tracejado); (a) No caso da partícula de carga positiva o círculo exterior corresponde a um potencial menor que o interior; (b) No caso da carga negativa é ao contrário. Uma carga positiva acelera na direcção em que o potencial diminui.

O *applet* de simulação de campos a três dimensões, disponível no Portal do projecto, tem excelentes ferramentas para visualizar superfícies equipotenciais⁹.

Metais e superfícies equipotenciais

Vimos acima que um metal é um material em que uma parte dos electrões são livres de se deslocarem sem que surjam forças restauradoras. Se existir um campo eléctrico no interior de um metal, os electrões deslocar-se-ão; uma situação estática, de equilíbrio, só é possível se o campo no interior do metal for nulo. O que acontece então se um metal for colocado num campo eléctrico, por exemplo, se estiver perto de uma carga positiva, conforme se mostra na figura 9.18?

É bom de ver que os electrões do metal serão atraídos em direcção à carga exterior. Quando isso acontece o campo eléctrico deixa de ser apenas o da carga exterior. O metal deixará de estar neutro em todos os pontos; passará a haver regiões carregadas negativamente, do lado da carga exterior, e regiões carregadas positivamente por terem perdido electrões. Este campo somar-se-á vectorialmente ao campo exterior. O que é curioso é que este processo de deslocamento electrónico só pode parar se o campo no interior do metal for nulo. Mas, por outro lado, se o campo no interior do metal for nulo, os electrões do interior do metal não estão sujeitos a qualquer força exterior; a situação será a mesma que existia na

⁹O endereço é http://faraday.fc.up.pt/Faraday/Recursos/webfisica/fis_applets/campo3D.html e o *applet* de autoria de Paul Falstad [1].

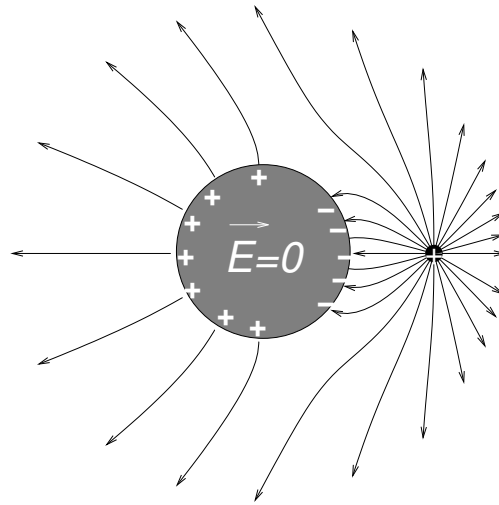


Figura 9.18: Carga junto de um esfera metálica neutra.

ausência de campo: neutralidade. Na superfície, ao contrário, podemos ter acumulação de carga. Os electrões não podem sair do metal, embora se possam deslocar livremente dentro dele.

Em resumo, uma situação de equilíbrio torna-se possível porque uma acumulação de carga na superfície do metal (negativa do lado da carga e positiva do lado oposto) **cancela completamente** o campo no interior do mesmo. A este efeito chama-se **blindagem electrostática**.

Uma consequência deste facto é que as superfícies metálicas são sempre **equipotenciais**. Aliás todo o volume do metal está ao mesmo potencial. Dois pontos do metal, à superfície ou no interior, podem ser ligados por um caminho no interior do metal, onde $\vec{E} = 0$: o trabalho das forças eléctricas é nulo nesse deslocamento, ou seja, o potencial eléctrico não varia. Pode-se ver na figura 9.18, que as linhas de campo são, efectivamente, normais à superfície da esfera em cada ponto.

\mathcal{ETV}_9 : O que acontece ao campo da figura 9.18, se retiramos a parte interior do metal, deixando uma esfera oca?

Poder das pontas

Suponhamos que temos dois eléctrodos metálicos com a curiosa configuração da figura 9.19. Uma vez que as superfícies metálicas são equipotenciais, o potencial em C é o mesmo que em A e em D o mesmo que em B . Ou seja, a diferença de potencial é a mesma entre C e D que entre A e B : 1000 V . O trabalho das forças eléctricas sobre uma carga de prova é o mesmo para o deslocamento entre C e D que entre A e B . Como a distância é muito menor, só nos resta uma conclusão: o campo eléctrico junto das duas pontas, C e D , é muito superior ao campo no espaço entre as placas!

Este é um exemplo do chamado “poder das pontas”. Se a distância entre C e D for suficientemente pequena e um ião do ar vaguear pela região entre as pontas, pode ocorrer uma “catástrofe”.

Esse ião será acelerado pelo campo eléctrico. Normalmente, dispersaria a energia cinética extra em meigas colisões com moléculas do ar. Contudo, se o campo for suficientemente elevado, a energia cinética adicional que adquiriu até à primeira colisão pode ser suficiente para extrair um electrão da molécula com que colide, criando um par electrão-ião positivo. Estes, por sua vez, são também acelerados pelo campo, em direcções opostas, podendo criar mais pares carregados. Cada par cria mais iões e rapidamente temos um grande número de iões positivos acelerados em direcção ao eléctrodo negativo e electrões em direcção ao eléctrodo positivo: dá-se uma descarga¹⁰. Esta passagem de carga é acompanhada da emissão de luz (moléculas em estados electrónicos excitados emitem luz ao voltar ao estado de energia mais baixa) e de um forte aumento de temperatura (energia cinética das moléculas aumenta na colisões com as cargas aceleradas): temos uma faísca¹¹!

Na figura 9.20 mostra-se por que razão uma antena metálica pode concentrar as descargas de uma trovoadas. A Terra e a antena formam um objecto condutor, com propriedades metálicas, e, por isso, o topo da antena está ao mesmo potencial que a Terra. Para uma dada diferença de potencial em relação à nuvem, o campo eléctrico será muito mais elevado no topo da antena: é muito mais provável que a descarga ocorra aí. Uma casa pode pois ser protegida de descargas eléctricas em trovoadas por uma ponta metálica ligada à Terra. Este dispositivo, o pára-raios, é atribuído a Benjamin Franklin, que o descobriu voando papagaios durante

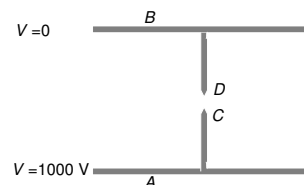


Figura 9.19: A diferença de potencial entre C e D é a mesma que entre A e B , se estes eléctrodos forem metálicos.

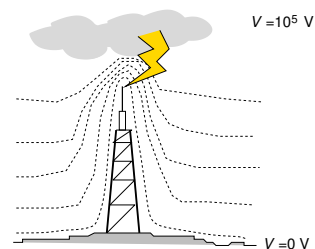


Figura 9.20: O campo eléctrico é muito mais elevado no topo da antena, onde as equipotenciais estão mais juntas e o potencial varia mais rapidamente.

¹⁰Chama-se **descarga**, precisamente, porque a carga dos eléctrodos diminui.

¹¹O ruído emitido numa faísca, o trovão, é devido ao aumento de temperatura. A expansão muito rápida do gás aquecido origina uma onda de pressão.

trovoadas, com considerável risco para a sua vida.

$\mathcal{E}\mathcal{T}\mathcal{V}_{10}$: Na descarga da figura 9.20 em que sentido se movem os electrões e os iões positivos?

9.6 Condensadores

Sempre que separamos cargas positivas de negativas temos que realizar trabalho contra as forças eléctricas; ou seja aumentar a energia electrostática.

Um condensador é um dispositivo onde podemos armazenar, estaticamente, essa energia. Infelizmente, como veremos, não são muito práticos para armazenar as quantidades de energia que usamos na nossa tecnologia. Por isso, ainda hoje, a parte mais pesada dos telemóveis é a bateria; a energia necessária para o funcionamento dos telemóveis, por exemplo, resulta de reacções químicas, não de condensadores.

Contudo, bancos de condensadores são usados nas redes de distribuição eléctrica para evitar picos de potência. Se por alguma razão há uma quebra brusca de consumo e as centrais injectam mais energia na rede do que esta está a consumir, os bancos de condensadores podem armazenar essa energia, contribuindo para eliminar picos de potência. Os chamados super-condensadores, condensadores de elevada capacidade, são já usados também em veículos eléctricos.

Os condensadores desempenham ainda um papel fundamental em todos os circuitos electrónicos. Para que uma massa oscile, temos que ter um dispositivo, como uma mola, capaz de armazenar a energia sob a forma de energia potencial, quando a massa está a reduzir a velocidade, e de a ceder de novo para acelerar a massa no sentido oposto. De igual modo, num circuito eléctrico podemos ter oscilações se pudermos armazenar a energia sob a forma de energia potencial eléctrica¹². O condensador desempenha esse papel.

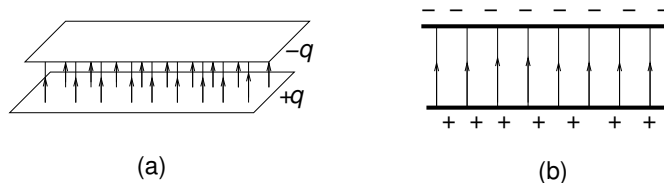


Figura 9.21: Linhas de campo num condensador plano; (a) perspectiva; (b) corte.

9.6.1 O campo num condensador plano

O condensador mais simples é constituído por duas placas metálicas paralelas, separadas por um material isolador. Diz-se que o condensador está carregado com carga q quando as duas placas têm cargas idênticas de sinal oposto, q e $-q$.

A configuração do campo eléctrico é muito simples e está representada na figura 9.21:

- entre as placas o campo tem um valor constante, direcção perpendicular às placas e sentido da placa positiva para a negativa;
- fora das placas o campo é nulo;

Na verdade, esta descrição só é exacta se as placas forem planos infinitos, uma situação muito pouco prática. Contudo, é uma boa aproximação quando a separação entre as placas é muito menor que as suas dimensões.

Comecemos por imaginar um plano (infinito) carregado positivamente. Não é difícil perceber que as linhas de força do campo são linhas perpendiculares ao plano (figura 9.22). Há várias maneiras de chegar a esta conclusão.

- Por cada carga do plano que cria num ponto um campo com uma componente paralela ao plano, existe outra carga que cria um campo cuja componente paralela ao plano cancela a anterior; só não há cancelamento na direcção perpendicular.

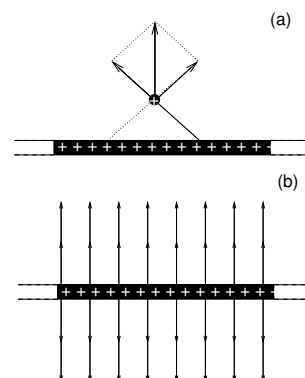


Figura 9.22: (a) Se o plano de carga for infinito, a força sobre uma carga só tem componente não nula na direcção perpendicular ao plano; (b) As linhas de força do campo eléctrico são perpendiculares ao plano de carga.

¹²Os circuitos oscilantes estão no coração do funcionamento dos computadores, por exemplo. O relógio interno, que marca o compasso e garante o sincronismo de todas as operações de um computador, é um oscilador!

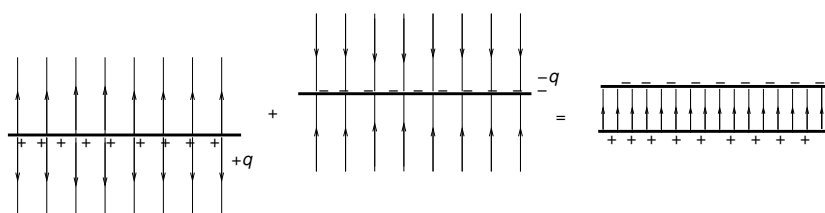


Figura 9.23: A soma dos campos de dois planos de cargas simétricas dá o campo do condensador plano.

- Não pode haver variação de energia potencial de uma carga de prova quando o deslocamento é paralelo ao plano; todos os pontos à mesma distância do plano são equivalentes. Logo, as superfícies equipotenciais são planos paralelos ao plano carregado. As linhas de força são perpendiculares a essas superfícies.

Já não é tão evidente, mas é verdade, que a intensidade do campo **não depende da distância ao plano**. Este resultado é consequência da Lei de Coulomb, conforme se explica na secção 9.6.4.

Usando este resultado, o princípio de sobreposição permite-nos calcular o campo de um condensador plano somando os campos de duas placas paralelas com cargas simétricas. Conforme se mostra na figura 9.23, os sentidos dos campos das duas placas são opostos na região exterior a ambas as placas e idênticos na região entre elas. Ao somar os campos das duas placas obtemos um campo uniforme entre as placas e nulo fora delas.

Uma vez que o campo é uniforme no interior do condensador, o trabalho das forças eléctricas no deslocamento de uma carga de prova q_0 entre a placa positiva e a negativa é

$$w_e = F_e \times d = q_0 E d,$$

em que $E = |\vec{E}|$ e d a distância entre as placas. A variação de energia potencial é $\Delta E_p = -w_e = -q_0 E d$; como $\Delta E_p = q_0 (V_- - V_+)$, o potencial é mais elevado na placa positiva:

$$V_+ - V_- = E d.$$

$\mathcal{E}\mathcal{T}\mathcal{V}_{11}$: A unidade SI de campo eléctrico pode ser a de uma força por unidade de carga, NC^{-1} , ou de uma diferença de potencial por unidade de comprimento, Vm^{-1} .

- a) Para um condensador plano com $d = 1 \text{ mm}$ e $\Delta V = 100 \text{ V}$ quanto vale o campo em Vm^{-1} ?
- b) E em NC^{-1} ?

9.6.2 Capacidade de um condensador

O campo eléctrico de um condensador plano, aliás de qualquer condensador, é proporcional à carga do mesmo. Este resultado decorre do princípio de sobreposição. Se substituíssemos cada carga de um condensador por uma carga dupla, o campo eléctrico duplicaria também: seria a soma de dois campos idênticos ao primeiro.

A diferença de potencial, ΔV , entre as placas de um condensador também é proporcional à respectiva carga. A diferença de potencial é determinada pelo trabalho das forças eléctricas no deslocamento de uma carga de prova entre dois pontos, que por sua vez é proporcional ao valor do campo eléctrico.

Assim, podemos concluir que

$$\Delta V \propto q$$

o que permite definir a **capacidade** C de um condensador como

$$\Delta V = \frac{q}{C} \quad \text{ou} \quad q = C\Delta V. \quad (9.6)$$

Quanto maior for a capacidade, maior será a carga para a mesma diferença de potencial: daí o nome. A unidade SI de capacidade, CV^{-1} , tem o nome FARAD (em homenagem a Michael Faraday) e abreviatura F.

Capacidade de um condensador plano

Na actividade 9.3 faz-se o estudo do condensador plano e verifica-se que a capacidade é proporcional à área das placas e inversamente

▷ Actividade 9.3

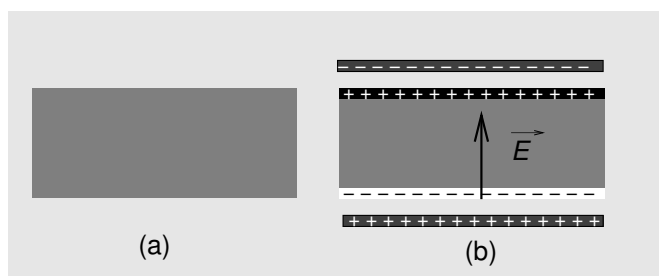


Figura 9.24: (a) Se as cargas positivas (preto) e negativas (branco) estiverem igualmente distribuídas, o dielétrico é neutro (cinzento); (b) um deslocamento relativo de cargas opostas em sentidos opostos, por acção de um campo externo, implica o aparecimento de carga não compensada duas superfícies.

proporcional à distância entre elas:

$$C \propto \frac{A}{d}.$$

Se o espaço entre as placas estiver vazio a constante de proporcionalidade é simplesmente a permitividade eléctrica do vazio:

$$C = \varepsilon_0 \frac{A}{d}.$$

O módulo do campo eléctrico é

$$E = \frac{\Delta V}{d} = \frac{q}{dC} = \frac{q}{\varepsilon_0 A}$$

em que $\Delta V = V_+ - V_-$ é a diferença de potencial entre as placas positiva e negativa.

Se compararmos esta expressão com a do campo de uma carga pontual, vemos algumas semelhanças: o campo é proporcional à carga das placas e inversamente proporcional a ε_0 , tal como na lei de Coulomb; em vez do factor r^2 da lei de Coulomb aparece a área das placas (que tem, naturalmente, as mesmas unidades que r^2).

Constante dieléctrica

Quando introduzimos um isolador entre as placas do condensador, mantendo a carga nas placas constante, a capacidade aumenta e o campo eléctrico diminui. Porquê?

A seguinte imagem pode ajudar a compreender este processo. Imaginemos uma sala cheia de pares dançantes em que as senhoras

vestem de branco e os cavalheiros de preto. Os pares, perfeitamente misturados, ocupam uma sala rectangular. Vista de longe a pista de dança parece uma mancha cinzenta. Se, agora, todas as senhoras derem um passo em direcção a um dos lados da sala, as cores continuam bem misturadas no meio da sala, mas ficará uma fila branca no lado para onde as senhoras se deslocaram e uma fila preta do lado oposto.

Sem o campo do condensador as cargas positivas e negativas do dieléctrico estão distribuídas, como os pares dançantes, de tal maneira que a carga total em qualquer ponto é nula; toda a região do dieléctrico é “cinzenta”: nem “preta” (positiva) nem “branca” (negativa). Contudo, se colocarmos o dieléctrico no campo do condensador, os núcleos são atraídos em direcção à placa negativa e os electrões em direcção à positiva. Num isolador os electrões estão ligados e os deslocamentos relativamente aos núcleos são pequenos, da ordem das distâncias atómicas. Como o campo do condensador é uniforme, estes deslocamentos são idênticos em todo o dieléctrico; como se fosse um passo igual para todas as senhoras, na analogia dos pares dançantes. No meio do dieléctrico as cargas continuam compensadas; mas nas superfícies, junto às placas do condensador, aparecem cargas não compensadas, de sinal oposto à carga da respectiva placa (fig. 9.24)

Este processo chama-se a **polarização** do dieléctrico. As cargas induzidas no dieléctrico como que formam um condensador plano com campo *de sentido oposto* ao original. O módulo do campo total, E , e a diferença de potencial, $\Delta V = Ed$, diminuem; passamos a ter

$$\begin{aligned} E &= \frac{q}{\varepsilon A} \\ \Delta V &= \frac{qd}{\varepsilon A} \end{aligned}$$

em que $\varepsilon > \varepsilon_0$ é a **permitividade eléctrica**, ou **constante dieléctrica** do dieléctrico. Por esta razão, a constante ε_0 é designada por permitividade eléctrica do vazio.

Quanto maior for a carga induzida, menor será o campo total e maior será a permitividade eléctrica. Como,

$$C = \frac{q}{\Delta V} = \varepsilon \frac{A}{d}.$$

uma maior permitividade implica uma maior capacidade do condensador: para a mesma carga a diferença de potencial é menor.

9.6.3 A energia de um condensador plano

Depois de várias páginas sobre condensadores ainda não vimos como determinar a energia armazenada num condensador.

Suponhamos que queremos aumentar a carga q de um condensador de uma quantidade pequena, $\Delta q \ll q$. Para isso temos que transportar a carga Δq da placa negativa para a positiva. No fim do processo temos em cada placa,

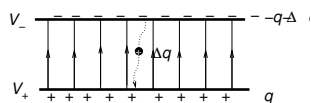


Figura 9.25: Para aumentar a carga do condensador de Δq , transportamos uma carga Δq da placa negativa para a positiva.

negativa	$-q - \Delta q = -(q + \Delta q)$
positiva	$q + \Delta q$

e a carga do condensador é $q + \Delta q$.

A carga Δq aumentou de energia potencial, uma vez que a deslocamos de um potencial V_- para V_+ :

$$\Delta E_p = \Delta q (V_+ - V_-)$$

Para uma variação muito pequena de carga podemos tomar a diferença de potencial $\Delta V = (V_+ - V_-) = q/C$ como constante no processo e

$$\Delta E_p = \frac{q}{C} \Delta q \quad (\Delta q \ll q).$$

Esta expressão dá então a variação de energia potencial eléctrica de um condensador quando a sua carga varia de uma pequena quantidade, $q \rightarrow q + \Delta q$. É análoga à da variação de energia elástica de uma mola quando o seu comprimento varia $x \rightarrow x + \Delta x$ ($\Delta x \ll x$). Para variar o comprimento da mola, temos de aplicar uma força externa com componente x $F = kx$, oposta à força elástica, e o trabalho desta força é $kx\Delta x$. A variação de energia potencial da mola é:

$$\Delta E_p = kx\Delta x$$

As correspondências são:

$$\text{massa e mola} \leftrightarrow \text{condensador}$$

$$x \leftrightarrow q$$

$$k \leftrightarrow \frac{1}{C}$$

$$F = kx \leftrightarrow \Delta V = \frac{q}{C}$$

Como a energia elástica tem a forma

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2,$$

a energia do condensador deve ser:

$$E_p = \frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2}\Delta V q.$$

\mathcal{ETV}_{12} : Um condensador plano tem placas de área $A = 100 \text{ cm}^2$, distância entre placas de $0,1 \text{ mm}$ e um dieléctrico de permitividade 10 vezes a do vazio, $\varepsilon = 10\varepsilon_0$.

- a) Que energia é necessária para o carregar a $\Delta V = 100 \text{ V}$?
- b) Qual é a carga do condensador, na situação da alínea a)?
- c) Se a permitividade eléctrica aumentar com a diminuição de temperatura e a diferença de potencial for mantida constante, a carga do condensador aumenta ou diminui, quando a temperatura baixa?

9.6.4 O plano carregado

Para terminar esta digressão pelo condensador plano, falta apenas compreender o ponto de partida para discussão do campo de um condensador: o módulo do campo de um plano carregado não depende da distância ao plano.

Este facto parece ser contrário à lei de Coulomb: à medida que nos afastamos do plano, o campo criado por cada carga diminui; seria de esperar que o campo total também diminuísse. Esta secção foi escrita para quem fica perturbado por esta ideia.

O que acontece é que quanto maior for a distância ao plano, menor é o ângulo que o campo criado por cada carga do plano faz com a direcção perpendicular, a direcção do campo total; embora a intensidade diminua, a direcção do campo de cada carga aproxima-se da normal ao plano. Estes dois efeitos, somados a todas as cargas do plano, compensam-se.

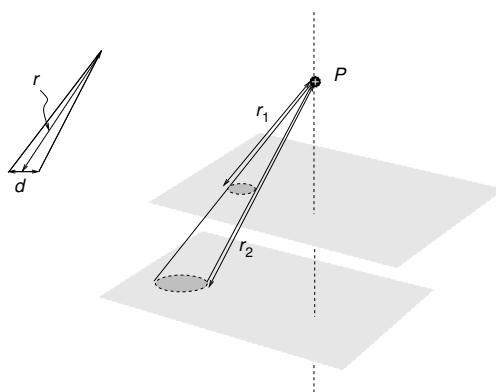


Figura 9.26: As cargas dos dois planos da figura contidas no mesmo ângulo sólido fixo (sombreado), criam campos iguais em P , se os planos forem idênticos (mesma carga por unidade de área). Embora a contribuição de cada carga do plano mais distante seja inferior de um factor de r_1^2/r_2^2 , por causa do aumento de distância, a carga no interior do ângulo sólido no plano mais afastado é maior de um factor r_2^2/r_1^2 , por causa do aumento da área sombreada ($d \propto r$). Estes dois factores compensam-se e o campo total de cada um dos planos em P é o mesmo.

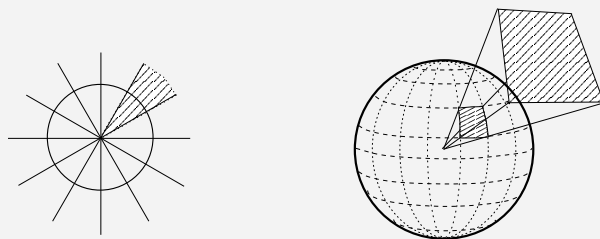
Esta compensação ocorre precisamente por causa da dependência em $1/r^2$ da lei de Coulomb. A figura 9.26 mostra o que acontece para dois planos com a mesma carga por unidade de área a diferentes distâncias de P . Podemos dividir o espaço em ângulos sólidos, centrados no ponto P , onde medimos o campo eléctrico. Cada ângulo sólido que intersecta o plano contém uma quantidade de carga proporcional à área do plano contida no seu interior. O campo criado por cada carga que está no interior desse ângulo sólido varia proporcionalmente a $1/r^2$, em que r é a distância a P ; mas a área contida no ângulo sólido, e, portanto, a carga total no ângulo sólido, *umenta* proporcionalmente a r^2 (o diâmetro, $d \propto r$). O factor $1/r^2$ da lei de Coulomb cancela com o factor r^2 da geometria do espaço a três dimensões: a contribuição de cada pequeno ângulo sólido é independente da distância. Como o campo total pode ser expresso como a soma da contribuição de cada ângulo sólido, o campo total não depende da distância ao plano.

9.7 Conclusões

Neste já longo capítulo iniciamos o estudo da interacção electro-magnética, começando por considerar situações com cargas em

■ Ângulo sólido ■

As duas rectas que unem o centro de um círculo às extremidades de um arco desse círculo, definem uma região angular do plano. O ângulo plano em radianos é definido pela razão entre o comprimento do arco de círculo, s raio do círculo, r , $\theta = s/r$; como o perímetro é proporcional a r o ângulo não depende de r . O círculo completo corresponde a um ângulo total de 2π . Por isso o plano pode ser dividido em sectores circulares, cujo ângulos somam 2π . A mesma construção pode ser feita no espaço. Em vez de um círculo temos uma esfera; em vez de um segmento de arco temos a área limitada por uma curva fechada na superfície da esfera. As rectas que unem o centro da esfera aos pontos dessa curva fechada, limitam uma região angular do espaço, um cone de vértice no centro da esfera. O valor de cada ângulo sólido, em **esteradianos**, é definido como a razão entre a área da figura correspondente na esfera e o quadrado do raio desta; tal como no caso do ângulo plano, o ângulo sólido não depende de r . Como a área da esfera é $4\pi r^2$, o ângulo sólido total é 4π . O espaço pode ser dividido em ângulos sólidos que somam 4π .



O ângulo plano e o ângulo sólido.

Caixa 9.2: O conceito de ângulo sólido.

repouso. Algumas das ideias fundamentais podem resumir-se assim:

- 9.1. A interacção electromagnética não é universal como a gravítica; só as partículas carregadas electricamente é que exercem e são actuadas por forças eléctricas.
- 9.2. Existem dois tipos de cargas e as interacções são atractivas entre cargas de tipo diferente e repulsivas entre cargas do mesmo tipo. Cargas do mesmo tipo que a do electrão dizem-se negativas e do mesmo tipo que a do protão dizem-se positivas.
- 9.3. A matéria é em geral neutra, tendo igual número de cargas de cada tipo. A razão é simples. Como cargas de tipo diferente se atraem, e do mesmo tipo se repelem, uma carga “prefere” estar rodeada de cargas de tipo oposto ao seu. Por isso as cargas, em geral, estão compensadas mesmo à escala atómica. Separar cargas positivas de negativas exige energia porque elas se atraem.
- 9.4. Um corpo pode ficar carregado, não porque seja criada carga eléctrica, mas porque existem processos que induzem a separação das cargas positivas e negativas de um material.
- 9.5. A força entre duas cargas é inversamente proporcional ao quadrado da distância entre elas tal como no caso da interacção gravítica.
- 9.6. A força eléctrica que se exerce sobre uma partícula num dado ponto é proporcional à sua carga eléctrica. A força por unidade de carga é o **campo eléctrico** nesse ponto. O módulo do campo eléctrico de uma carga pontual varia como $1/r^2$ em que r é a distância à carga.
- 9.7. A energia potencial de um partícula na presença de um campo eléctrico é proporcional à respectiva carga. A energia potencial por unidade de carga é o **potencial eléctrico**. O potencial do campo de uma carga pontual varia como $1/r$ em que r é a distância à carga.
- 9.8. As propriedades electrónicas dos materiais permitem identificar dois tipos de comportamento: materiais **isoladores** em que todos os electrões estão ligados aos respectivos núcleos; materiais **metálicos** em que existem electrões livres que se podem mover dentro do material sem sentirem forças

restauradoras internas que os liguem a posições de equilíbrio fixas.

- 9.9. Em equilíbrio todo o volume de um metal está ao mesmo potencial eléctrico. O campo no seu interior é nulo.
- 9.10. Podemos armazenar energia electrostática num condensador, que é um par de corpos metálicos separados por um dieléctrico e carregados com cargas simétricas, q e $-q$. A carga de um condensador é proporcional à diferença de potencial entre os seus eléctrodos, $q = CV$. A constante de proporcionalidade é a capacidade do condensador.
- 9.11. Um condensador plano é formado por duas placas planas separadas por um dieléctrico (pode ser o ar ou o vazio) com espessura muito inferior às dimensões das placas. A sua capacidade é

$$C = \varepsilon \frac{A}{d}.$$

- 9.12. A energia armazenada num condensador é $q^2/2C$.

Um lição importante deste capítulo, é que, apesar da sua novidade, todos estes conceitos se integraram numa estrutura que já era conhecida. Os conceitos de partícula, interacção, força, campo, energia potencial, são os da Física Newtoniana. Ao fim e ao cabo estamos apenas a concretizar o programa Newtoniano de descobrir as leis de força de todas as interacções.

9.8 Resposta ao $\mathcal{ETV}'s$

- 9.1. \mathcal{ETV}_1 : Se cargas idênticas se atraíssem e opostas se repelissem seria de esperar observar uma separação, cargas de um tipo para um lado e do tipo oposto para o outro. Todos os corpos estariam carregados e a interacção eléctrica dominaria sobre a gravítica em todas as situações!

- 9.2. \mathcal{ETV}_2 : Para uma órbita circular

$$m_e \frac{v^2}{r} = G \frac{m_e m_p}{r^2} \Rightarrow v^2 = G \frac{m_p}{r},$$

e

$$E = \frac{1}{2} m_e v^2 - G \frac{m_e m_p}{r} = -G \frac{m_e m_p}{2r} = -1,04 \times 10^{-57} \text{ J}.$$

Em eV

$$E = \frac{1,04 \times 10^{-57} \text{ J}}{e} = 6,5 \times 10^{-39} \text{ eV}.$$

A energia de ionização do átomo de hidrogénio é de 13,6 eV!

9.3. \mathcal{ETV}_3 : a carga total dos produtos da reacção é $(+e) + (-e) + 0 = 0$, tal como antes. A carga total é conservada!

9.4. \mathcal{ETV}_4 : não pois as duas interacções têm a mesma dependência na distância:

$$\begin{aligned} \frac{F_g}{F_e} &= \frac{Gm_p^2/r^2}{k_C e^2/r^2} = \frac{Gm_p^2}{k_C e^2} \\ &= \frac{6,7 \times 10^{-11} (1,7 \times 10^{-27})^2}{9,0 \times 10^9 \times (1,6 \times 10^{-19})^2} = 0,84 \times 10^{-36} \end{aligned}$$

A interacção gravítica é muitíssimo menor!

9.5. \mathcal{ETV}_5 : A resultante tem módulo

$$\begin{aligned} F &= k_C \times 10 \times 10^{-6} \times 10^{-6} \left(\frac{1}{(1 - 0,0005)^2} - \frac{1}{(1 + 0,0005)^2} \right) = \\ &= k_C \times 10 \times 10^{-6} \times 10^{-6} \times 2 \times 10^{-3} = 1,8 \times 10^{-4} \text{ N}. \end{aligned}$$

9.6. \mathcal{ETV}_6 :

- (a) Continua a ser zero. Como está isolada, a sua carga total não varia.
- (b) A primeira esfera, a mais próxima da vara de vidro, fica com carga positiva, atraída pela vara. A segunda esfera fica com carga negativa, que é repelida pela vara de vidro.
- (c) Atraem com a mesma intensidade. A carga total das duas esferas é nula, tal como era antes das esferas se tocarem. Se a primeira tem carga $+q$, a segunda tem carga $-q$.

9.7. \mathcal{ETV}_7 : O campo de uma carga pontual tem um módulo que tende para infinito quando a distância à carga tende para zero; $1/r^2 \rightarrow \infty$, se $r \rightarrow 0$. Logo, suficientemente próximo de uma carga pontual, o campo total é **sempre** praticamente igual ao dessa carga pontual, pois o campo dessa carga tem um módulo que está a tender para infinito. Junto a cada carga as linhas de força são radiais, dirigidas para fora para uma carga positiva e dirigidas para a carga no caso de uma carga negativa, tal como se o campo fosse apenas o campo criado por essa carga.

9.8. \mathcal{ETV}_8 : quando a partícula α pára, a sua energia é exclusivamente potencial:

$$E = E_p = k_C \frac{(2e)(Ze)}{r} = k_C \frac{2Ze^2}{r}.$$

A uma distância muito grande do átomo de ouro ($r \rightarrow \infty$) a energia da partícula α é cinética apenas:

$$E = E_c = 5 \text{ MeV} = 5 \times 10^{-6} \times 1,6 \times 10^{-19} = 8,0 \times 10^{-13} \text{ J.}$$

Como há conservação de energia, quando a partícula α pára,

$$E_p = 8,0 \times 10^{-13}.$$

e

$$r = k_C \frac{2Ze^2}{E_p} = 4,5 \times 10^{-14} \text{ m} = 4,5 \times 10^{-4} \text{ \AA}.$$

Esta distância é muito menor que a distância média do electrão ao núcleo.

9.9. \mathcal{ETV}_9 : Nada! Se retirarmos uma parte do metal no interior estamos a retirar matéria neutra que cria um campo nulo. Pelo princípio de sobreposição não alteramos o campo em nenhuma parte do espaço. Em particular podemos concluir que o campo no buraco interior do metal é nulo, tal como era no volume de metal que retirámos.

9.10. \mathcal{ETV}_{10} : Os electrões dirigem-se em direcção à nuvem e os iões positivos em direcção à antena. O electrão, como qualquer partícula, acelera para onde a sua energia potencial é menor (a sua energia cinética cresce). A energia potencial de um electrão é $(-e)V$, o que significa que a sua energia potencial é tanto menor quanto maior for o potencial eléctrico. Como a nuvem está a um potencial maior que a Terra, os electrões aceleram para a nuvem. Com iões positivos temos a situação inversa: a sua energia potencial é tanto menor quanto *menor* for o potencial eléctrico: portanto, aceleram em direcção à antena.

9.11. \mathcal{ETV}_{11} :

$$E = \frac{V}{d} = \frac{100}{10^{-3}} = 10^5 \text{ V m}^{-1};$$

As unidades V m^{-1} e N C^{-1} são ambas unidades SI do campo: são a mesma unidade. Logo

$$E = 10^5 \text{ N C}^{-1}.$$

9.12. \mathcal{ETV}_{12} :

(a) Como $q = CV$

$$E = \frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2}CV^2$$

sendo $C = \epsilon A/d = 10 \times \epsilon_0 A/d$. Assim

$$\begin{aligned} C &= 10 \times \frac{4\pi\epsilon_0}{4\pi} \times \frac{10^{-2}}{10^{-4}} = 10 \times \frac{10^{-2}}{4\pi \times k_C \times 10^{-4}} \\ &= 8,8 \times 10^{-9} \text{ F} = 8,8 \text{ nF.} \end{aligned}$$

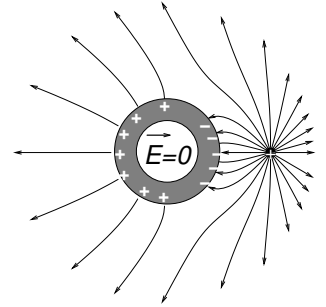


Figura 9.27: O campo no interior do metal é nulo!

A energia é

$$\frac{1}{2}C \times V^2 = 4,4 \times 10^{-5} \text{ J.}$$

- (b) $q = CV = 8,8 \times 10^{-9} \times 10^2 = 0,88 \mu\text{C}$.
- (c) A carga aumenta, pois a capacidade aumenta se a permissividade aumentar: como V é constante, $q = CV$ tem que aumentar. Isto significa que o condensador não pode estar isolado. Tem que estar ligado a uma bateria que mantenha V constante e que lhe fornece a carga adicional. Se o condensador estiver isolado q mantém-se; como C aumenta, V diminui.

9.9 Actividades, Questões e Problemas

9.9.1 Actividades

9.1. Electrostática em casa.

Ver ficha de actividade A45

9.2. Simulação da experiência de Millikan

Ver ficha de Actividade A46.

9.3. Estudo do condensador plano

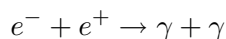
Ver ficha de actividade A47.

9.9.2 Questões

- 9.1. A interacção gravítica também satisfaz o princípio de sobreposição, como a eléctrica?
- 9.2. Imaginemos que existiam três tipos de carga, r , g e b . A regra desta interacção continua a ser que cargas do mesmo tipo de repelem e cargas de tipo diferente se atraem.
- a) Duas partículas são ambas atraídas por uma terceira. Qual é a interacção entre elas, atractiva ou repulsiva?
- b) uma partícula composta por duas partícula de carga diferentes, por exemplo, r e g , seria neutra, com carga nula? Que tipo de força (atractiva ou repulsiva) exerceria sobre cada tipo de carga r , g ou b ?

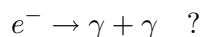
9.3. Para cada partícula existe uma anti-partícula de carga oposta e com a mesma massa. A anti-partícula do electrão é o positrão, e^+ .

- (a) A seguinte reacção em que um electrão e um positrão se aniquilam dando origem a dois fótons,



conserva a carga eléctrica?

- (b) O electrão pode decair em dois fótons γ ,



9.4. Que há de errado com a representação do campo eléctrico na figura 9.28?

Nota: intensidade do campo é representada pelo tamanho de cada seta.

9.5. Na figura 9.29 representam-se algumas linhas equipotenciais do campo de uma esfera carregada. Os números são valores do potencial em Volt.

- (a) Qual é o sinal desta carga?
 (b) Um electrão largado do repouso do círculo do meio, que velocidade tem ao atravessar o próximo círculo?

9.6. A quais das seguintes unidades SI é equivalente o FARAD? (Sugestão: ver as expressões em que surge a capacidade.)

- (a) C V⁻¹;
 (b) J C⁻²;
 (c) J⁻¹ C²;
 (d) J C⁻¹;
 (e) N⁻¹ m⁻¹ C²;

9.7. O plano que contém os pontos equidistantes de duas cargas simétricas $+q$ e $-q$, é uma superfície equipotencial de potencial nulo (igual ao do infinito) do campo das duas cargas.

- (a) Explicar porquê.
 (b) Mostrar que em cada lado do plano o potencial tem sinais diferentes.

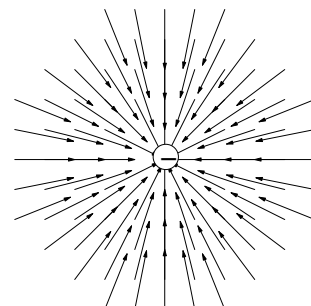


Figura 9.28: Que há de errado com este campo?

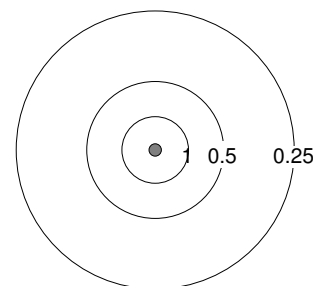


Figura 9.29: Linhas equipotenciais de uma carga pontual.

- 9.8. Um condensador plano tem um campo $E = 100 \text{ V m}^{-1}$ entre as suas placas. Numa das placas a carga é reduzida a metade.

- Quanto passa a valer o campo entre as placas?
- E fora delas?

Nota: fazer a aproximação do condensador plano infinito.

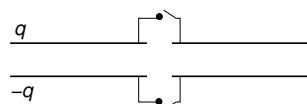


Figura 9.30:
Condensadores em paralelo.

- 9.9. Se um condensador tem uma diferença de potencial ΔV ao colocar-lhe uma carga q a variação da energia potencial da carga é $q\Delta V$. Contudo a energia potencial de um condensador é $q\Delta V/2$. Qual é a origem deste factor $1/2$?

- 9.10. Dois condensadores planos, idênticos, de capacidade C , estão colocados lado a lado: um está carregado e o outro descarregado. Agora ligamos cada uma das placas do condensador descarregado a uma placa do outro com um fio metálico.

- Com que carga fica cada placa dos dois condensadores?
- Qual é a diferença de potencial entre duas placas ligadas por um fio metálico?
- Este conjunto é um condensador. A sua carga é carga total de cada par de placas ligadas e o seu potencial a diferença de potencial entre os dois pares de placas ligadas. Qual é a capacidade deste condensador (em termos de C)?
- Se os dois condensadores não forem idênticos e tiverem capacidades C_1 e C_2 , qual é a capacidade do conjunto? Como se distribui a carga pelos dois condensadores?

9.9.3 Problemas

- 9.1. Para ter uma força entre duas cargas iguais separadas de 5 cm, de 10^{-3} N , quanto deve valer cada carga em unidades de carga elementar, e , ou seja a quantos electrões ou prótons deve corresponder cada carga?

- 9.2. Dois electrões são largados do repouso a uma distância 1 Å , e afastam-se sob a acção da respectiva repulsão até uma distância muito grande, ($r \rightarrow \infty$).

- Quando estão a uma distância muito grande qual é a energia cinética de cada electrão em eV?

- (b) Qual é a velocidade de cada electrão para distâncias muito grandes?

9.3. Uma partícula α e um electrão distam de 2 \AA .

- (a) A que distância do electrão está o ponto onde o campo eléctrico criado por estas duas partículas é nulo? Represente em esquema as duas cargas e marque esse ponto.
- (b) Na linha que passa pelas duas partículas existe um ponto de potencial eléctrico nulo. A que distância do electrão está esse ponto?
- (c) Qual é o trabalho que é necessário realizar para trazer uma carga do infinito até ao ponto onde o potencial é nulo?

9.4. Na molécula da água o ângulo das duas ligações O – H é de 104° (fig. 9.31). O comprimento das ligações é $d = 0,96 \text{ \AA}$. Qual é a força de repulsão que cada núcleo de hidrogénio (protão) exerce no outro?

9.5. Considerar três cargas dispostas segundo uma linha, com igual distância entre cargas consecutivas, $d = 10 \text{ cm}$ e com valores $q_1 = 2 \mu\text{C}$, $q_2 = -1 \mu\text{C}$, $q_3 = 1 \mu\text{C}$.

- (a) A força sobre a terceira carga que sentido tem: dirigida para as outras ou o sentido oposto?
- (b) Determinar em que posição deve ser colocada a carga do meio, q_2 , para que a força sobre ela seja nula (as outras cargas fixas).
- (c) Verificar se essa posição é de equilíbrio estável, considerando o sentido da força para posições próximas da posição de força nula.

9.6. Calcular, em eV, a energia potencial electrostática de três electrões situados num vértice de um triângulo equilátero de lado 2 .

9.7. Os primeiros resultados que aparecem no artigo de Millikan de 1911 estão reproduzidos na tabela 9.1 (Millikan apresenta várias páginas de observações só com esta gota) e dizem respeito a uma gota que ele seguiu, a descer sob acção da gravidade e subir entre as placas de um condensador plano quando ligava o campo, durante quatro horas e meia. Millikan cronometrava o tempo t_g que a gota demorava a descer entre as

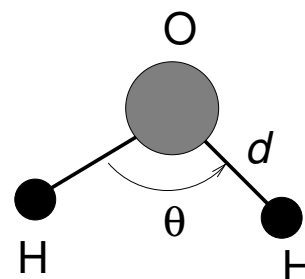


Figura 9.31: Geometria da molécula de água.

V/V	t_g/s	t_f/s
7950	22,8	29,0
	22,0	21,8
	22,3	17,2
	22,4	17,3
	22,0	17,3

Tabela 9.1: Primeiros resultados da experiência de Millikan

marcas da luneta ($d = 1,010 \text{ cm}$) sob a acção da gravidade e o tempo t_f que demorava a subir a mesma distância quando aplicava uma diferença de potencial, V , entre as placas do condensador plano. Cita os seguintes valores:

- distância entre placas: $1,600 \text{ cm}$;
- densidade do óleo (subtraída da densidade do ar): $0,8960 \text{ g cm}^{-3}$;
- viscosidade do ar: $1,836 \times 10^{-5} \text{ N s m}^{-2}$.

- Qual era o valor do raio desta gota?
- Os três valores, bastante diferentes, de t_f correspondem a três estados de carga da gota. Calcular o valor dessas cargas e determinar quanto electrões a mais tinha a gota em cada situação.

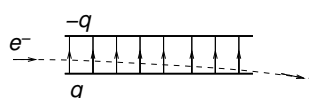


Figura 9.32: Qual é o desvio do feixe de electrões?

- Um feixe de electrões entra no interior de um condensador plano, com placas quadradas de lado 2 cm e distância entre placas de 1 mm . A direcção inicial do feixe é paralela às placas, no plano médio entre elas. O potencial do condensador é de 50 V .

- Qual é força sobre cada electrão do feixe?
- Calcular a energia cinética que os electrões do feixe devem ter para que não colidam com as placas, antes de emergir do condensador.

Capítulo 10

Circuitos: conceitos fundamentais

10.1 Electricidade

No capítulo anterior falámos de cargas, campos eléctricos, potencial, forças electrostáticas. Mas a nossa experiência mais comum com “electricidade” parece, à primeira vista, muito afastada destes conceitos.

Ligamos uma chaleira eléctrica à tomada e aquecemos água; pressionamos um interruptor e uma luz acende-se; colocamos pilhas num carro de brinquedo e ele move-se. Damos a volta à chave de ignição de um automóvel e, se a bateria não estiver “morta”, o motor de arranque põe em movimento o motor a gasolina. Onde estão as cargas, o campo eléctrico, o potencial?

Todos estes processos envolvem correntes eléctricas, ou seja movimentos de cargas eléctricas. No capítulo anterior considerámos apenas cargas em situações estáticas. Neste capítulo e no seguinte vamos explorar as consequências dos movimentos de cargas eléctricas, e os processos de transferência de energia que estão normalmente associados a movimentos de cargas. Eis pois algumas das questões que iremos considerar agora:

- O que é a corrente eléctrica?
- Que leis regem o movimento de cargas eléctricas no vazio e no interior da matéria?
- Quais são os principais processos de transferência de energia envolvendo movimentos de cargas eléctricas?

Juntamente com o conceito de corrente, o conceito de diferença de potencial desempenha um papel fundamental na compreensão da tecnologia eléctrica. Não se trata de um conceito novo: é exactamente a mesma grandeza que discutimos no capítulo anterior. Onde existe campo eléctrico existe energia potencial eléctrica; o potencial é apenas a energia potencial eléctrica por unidade de carga. Contudo, no contexto de circuitos eléctricos, a linguagem que por vezes se usa quase parece sugerir que se trata uma grandeza diferente.

Neste capítulo, vamos então abordar estes conceitos, tendo em vista a discussão de circuitos eléctricos que abordaremos em mais detalhe no capítulo seguinte.

10.2 Corrente eléctrica

10.2.1 Factos simples sobre “electricidade”

Dispositivos eléctricos tem sempre (pelo menos) dois terminais: é o caso das tomadas que temos em casa e das fichas que usamos para ligar os aparelhos; as pilhas têm dois pontos de contacto metálico, uma em cada extremidade para pilhas cilíndricas e na mesma face para as pilhas prismáticas de 9V; as baterias dos automóveis tem dois bornes de ligação; uma lâmpada tem dois contactos metálicos, ligados internamente pelo filamento da lâmpada; *etc.*, *etc.*.

Uma pilha, uma lâmpada¹ e dois fios metálicos são tudo o que é necessário para observar um “efeito” eléctrico: se ligarmos cada terminal da lâmpada a um terminal diferente da pilha a lâmpada acende (fig. 10.1a); isso não acontece se ligarmos apenas um terminal a um ou aos dois polos da pilha, (fig. 10.1b, c), ou mesmo se ligarmos os dois terminais da lâmpada ao mesmo polo da pilha (fig. 10.1d). Porquê?

A razão tem a ver com o facto de a luz emitida pela lâmpada é originada pela existência de **corrente eléctrica** no filamento; corrente eléctrica são cargas em movimento; no caso do circuito considerado, essas cargas são os electrões livres dos elementos metálicos, que têm um deslocamento médio do pólo negativo da pilha para o positivo, no exterior desta, e que no seu interior são deslocados, em processos químicos, do pólo positivo para o negativo.

¹Estamos a falar de lâmpadas para baixas diferenças de potencial. As lâmpadas usados como luzes indicadoras em automóveis, 12V, 3W são convenientes.

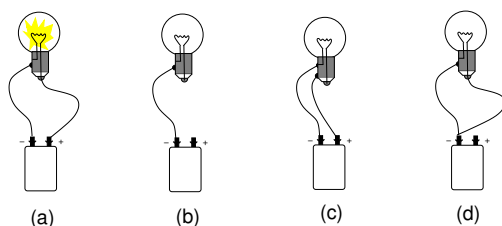


Figura 10.1: Para que o filamento da lâmpada brilhe tem que fazer parte de um circuito fechado (a); para as ligações (b), (c) e (d) isso não acontece.

No caso da figura 10.1b o movimento de circulação dos electrões está interrompido no segundo terminal da lâmpada; os electrões não podem continuar o seu movimento no ar pois este é isolador. Movimento de electrões do terminal negativo para a lâmpada dará origem a uma acumulação de carga negativa na lâmpada, que repele outros electrões a rapidamente cessa o movimento de cargas. No caso da figura 10.1c, existe de facto um circuito: os electrões podem viajar no exterior da bateria entre os seus dois pólos, mas este movimento não é através do filamento. A lâmpada não brilha mas a pilha aquece devido à passagem de corrente; rapidamente ficará descarregada. No último caso, figura 10.1d, também não há passagem de corrente. Vejamos, com mais pormenor, como definir corrente eléctrica e como a podemos medir.

10.2.2 Conservação de carga e corrente eléctrica

Consideremos o seguinte problema:

O planeamento de tráfego de uma cidade precisa de estimar que número de carros que podem entrar na cidade por um acesso de auto-estrada de três pistas. A velocidade típica de um automóvel é de 90 km h^{-1} e, se os automóveis respeitarem a distância de segurança, não poderão aproximar-se mais do que 71 m.

A resposta deve ser dada em termos do número de carros por unidade de tempo (por exemplo, uma hora) que podem entrar na cidade. Ora, num intervalo de tempo entre t e $t + \Delta t$, entram na cidade os automóveis que estiverem a uma distância inferior a

$$d = v \times \Delta t = 90 \Delta t.$$

Os que estiverem a uma distância maior que esta só chegam à cidade depois do instante $t + \Delta t$. Quantos automóveis estão a menos desta distância da entrada da cidade?

Uma vez que a distância média entre automóveis é de $l = 71 \text{ m}$ (na situação de maior tráfego a esta velocidade) o número de carros por quilómetro, n , é

$$n = 3 \times \frac{1}{l} = \frac{1}{0,071} = 42,2 \text{ carros km}^{-1},$$

em que o factor 3 resulta do número de pistas. O número de carros a uma distância da entrada inferior a d será

$$\Delta N = n \times d = nv\Delta t$$

O gabinete de planeamento pode então concluir que o número de carros por unidade de tempo que podem entrar na cidade é

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = nv = 42,2 \times 90 = 3802 \text{ carros h}^{-1}.$$

Este exemplo mostra um exemplo de cálculo de uma corrente, neste caso, de carros.

O número de carros que passa num dado ponto de uma estrada por unidade de tempo é a **corrente** de carros nesse ponto.

Suponhamos agora uma situação ligeiramente diferente. Estamos a assistir a uma corrida em circuito fechado e contamos os carros que passam à entrada de uma curva durante 10 minutos. Um amigo conta-os durante o mesmo intervalo de tempo à saída da mesma curva. Supondo que não houve despistes, as contagens coincidem, obviamente. Ou seja, a corrente é a mesma. Porquê? Porque os carros se conservam. Não se evaporam, nem se materializam de outra dimensão entre a entrada e a saída da curva. Se entrarem mais do que saem, terá que haver uma acumulação de carros na curva, o que pode realmente acontecer, mas apenas durante um curto intervalo de tempo, se houver um acidente. Se não houver saídas nem entradas no circuito, a corrente deve ser a mesma em todos os pontos do mesmo.

Os nossos dois viciados em contagens decidem agora deslocar-se para uma auto-estrada a um quilómetro um do outro. Se o primeiro medir uma corrente de 100 carros por hora e o segundo, um

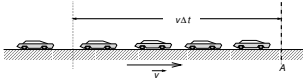


Figura 10.2: Quais são os carros que passam em A no intervalo Δt ?

quilómetro à frente, 70 carros por hora, que poderemos concluir? Naturalmente que existe (pelo menos) uma saída da auto estrada entre os dois; e que saíram em média 30 carros por hora. Pelo contrário se o segundo medisse uma corrente maior, teria de concluir que havia (pelo menos) uma **entrada** na auto estrada.

Poderíamos mencionar outros factos tão triviais como os anteriores. Como, por exemplo, o facto de a corrente média de carros num beco sem saída, ser nula: tantos carros a entrar como a sair. Será diferente de zero apenas até encherem os lugares de estacionamento do beco; mas em regime estacionário, sem dependência no tempo, a corrente será nula.

Todas estas observações resultam de um princípio fundamental: a conservação do número carros.

Bem, não é propriamente fundamental, nem sequer é verdade, em geral: os carros podem ser desmantelados e fabricados. Foi apenas por não haver intervenção destes processos nas situações acima consideradas que pudemos tirar as respectivas conclusões.

Mas no caso da carga eléctrica a **conservação é um princípio fundamental**. Não existem “fábricas” nem “cemitérios” de carga!

O que é semelhante e o que é diferente quando estamos a considerar corrente eléctrica?

$\mathcal{E}\mathcal{T}\mathcal{V}_1$: Um aluno notou que o inverso da corrente de carros

$$\left(\frac{\Delta N}{\Delta t}\right)^{-1} = 2,63 \times 10^{-4} \text{ h carro}^{-1}$$

tem como unidade horas por carro. Reflectindo um pouco, concluiu que este número é um tempo com um significado muito preciso. Que significado é esse?

10.2.3 Definição de corrente eléctrica

As cargas de um material não se movem ordenadamente em fila, no mesmo sentido, como os carros com condutores respeitadores da lei. Contudo, considerando, por exemplo, um fio condutor como o da figura 10.3, continua a fazer sentido perguntar que quantidade de carga atravessa uma secção de área A por unidade de tempo, num dado sentido, especificado por um vector normal à secção.

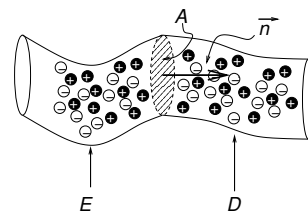


Figura 10.3: A corrente eléctrica na secção A , com o sentido do vector \vec{n} , é a carga por unidade de tempo que atravessa A de E para D .

Se designarmos por Q_E e Q_D as cargas totais à esquerda e à direita de A , a corrente I através de A na direcção de \vec{n} , é definida por:

$$I = \frac{\Delta Q_D}{\Delta t} = -\frac{\Delta Q_E}{\Delta t}. \quad (10.1)$$

Em situações em que a corrente varia no tempo, esta definição tem que ser modificada tomando o limite em que o intervalo de tempo considerado se torna muito pequeno (como no caso de definição de velocidade instantânea)

$$I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q_D}{\Delta t} = \frac{dQ_D}{dt} = -\frac{dQ_E}{dt}.$$

A corrente I assim definida, associada a um sentido determinado definido por um vector normal à secção A , pode ser positiva ou negativa:

- $I > 0 \Rightarrow$ a carga Q_D aumenta e Q_E diminui;
- $I < 0 \Rightarrow$ a carga Q_D diminui e Q_E aumenta;

As cargas, ao contrário dos carros, existem em duas variedades, positivas e negativas. Se um electrão atravessar a secção A de D para E a carga em D **aumenta**:

$$\Delta Q_D = [Q_D - (-e)] - Q_D = e.$$

Se um protão atravessar de E para D (sentido oposto do electrão) a carga em D **também aumenta**:

$$\Delta Q_D = [Q_D + (+e)] - Q_D = e.$$

Estes processos contribuem para uma corrente I positiva no sentido de \vec{n} . Ou seja,

- O movimento de cargas positivas é no sentido em que a corrente é positiva. O movimento de cargas negativas é no sentido oposto ao da corrente positiva.

Se as cargas positivas e negativas de um material neutro se movem com a mesma velocidade, em média, a corrente eléctrica **é nula**! Por exemplo, a água contém iões positivos e negativos. Quando a água se escoia numa torneira, passa a mesma quantidade de carga negativa e positiva pela abertura da torneira; se por cada electrão que sair da torneira sair também um protão, a carga no exterior não varia, $\Delta Q = 0$. Logo a corrente é nula. De modo semelhante, se lançarmos uma esfera de metal ao ar temos movimento de cargas positivas e negativas, mas não existe qualquer corrente eléctrica!

O Ampere

A unidade SI de corrente eléctrica é o Coulomb s^{-1} , conforme decorre da definição dada acima na equação 10.1. Esta unidade tem o nome **Ampere**, abreviatura **A**, em homenagem ao físico francês, André Marie Ampère.

\mathcal{ETV}_2 : uma televisão convencional, com tubo de raios catódicos, tem filamentos aquecidos que emitem electrões que são depois focados e acelerados por campos eléctricos e magnéticos, e que originam a emissão de luz ao embater no écran da televisão. Valores típicos da energia dos electrões ao embater no écran são de 30 keV . A potência dissipada num televisor é da ordem de 100 W . Parte desta potência é consumida na aceleração dos electrões do feixe.

- Se a corrente total no feixe for de 1 mA , quantos electrões embatem no ecrán por segundo?
- Que fracção da energia dissipada na televisão é usada na aceleração do feixe de electrões?

10.2.4 Algumas perguntas

A figura 10.4, representa um porção de fio condutor que é parte de um circuito eléctrico não especificado. Que podemos dizer sobre a corrente eléctrica no pontos A , B e C ?

Como não há entradas nem saídas entre os pontos A e B , estamos na situação dos dois amigos que mediram correntes de carros nas extremidades de uma curva: se não houver acumulação de carga, ou seja num regime estacionário, sem dependência do tempo, a corrente nos três pontos deve ser a mesma. Se houvesse mais corrente em A (no sentido de A para B) do que em B , o fio iria gradualmente acumular carga positiva: exactamente como no início de um jogo de futebol em que entra mais gente no estádio do que sai e este enche.

Conclusão:

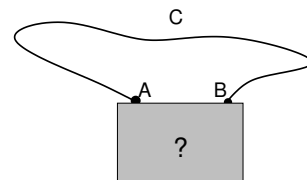


Figura 10.4: Um fio condutor parte de um circuito eléctrico: que relação existe entre a corrente em A , B e C ?

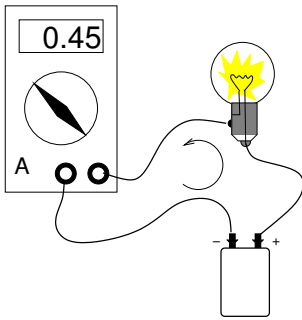


Figura 10.5: A corrente indicada pelo amperímetro é a que passa na lâmpada?

A corrente numa secção de um circuito sem ramificações, em condições estacionárias, é a mesma em todos os pontos. Por isso podemos-nos referir à “corrente que atravessa um fio” como sendo a corrente existente em qualquer dos seus pontos.

10.2.5 O Amperímetro

Um amperímetro é um instrumento de medida eléctrica, com dois terminais, que mede a corrente que passa entre eles².

Liguemos um amperímetro no circuito da lâmpada e pilha que representámos na figura 10.1a, conforme indicado na figura 10.5. A corrente que passa na lâmpada é maior, menor ou igual à que é medida no amperímetro?

Naturalmente, é igual. O cabo entre o amperímetro e lâmpada é como uma secção de auto estrada sem entradas nem saídas. De novo, em regime estacionário, sem acumulação de cargas, a carga que passa por unidade de tempo em **qualquer ponto deste circuito** é a mesma. Ou seja, podemos associar a este circuito, uma corrente I , que é a corrente que passa em qualquer ponto do mesmo, sempre no mesmo sentido de circulação. Como dissemos acima que os electrões se deslocam, no exterior da pilha do pólo negativo para o positivo, o sentido de corrente positiva é o indicado na figura.

Na linguagem de circuitos eléctricos, o amperímetro e a lâmpada dizem-se **ligados em série**: a mesma corrente passa nestes dois elementos. O amperímetro mede a corrente que passa na lâmpada.

\mathcal{ETV}_3 : As lâmpadas do circuito da figura 10.6 são todas idênticas. Qual delas será mais brilhante?

O amperímetro em paralelo?

E se..., ligássemos o amperímetro **em paralelo**, conforme se mostra na figura 10.7? É possível? O amperímetro funcionaria?

²Como se liga apenas com dois terminais, não pode haver ramificações internas; para onde iriam as cargas? Por isso, a corrente que entra num terminal é a que sai no outro.

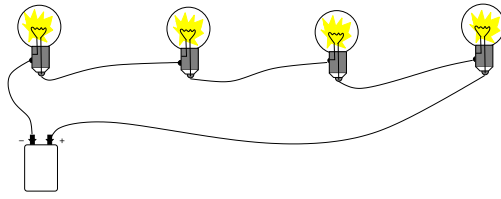


Figura 10.6: Qual das lâmpadas brilha mais?

É certamente possível tanto mais já foi feito por gerações de estudantes (e alguns professores distraídos!). Funciona? Em princípio sim, o amperímetro continua a medir a corrente que passa entre os seus terminais, embora, como veremos mais tarde, a corrente possa ser tão grande que descarregue muito rapidamente a pilha. **O que amperímetro já não mede é a corrente que passa na lâmpada!**

Os pontos P e Q deste circuito são como as entradas e saídas de uma auto estrada. Os fios metálicos de ligação bifurcam-se nestes pontos. A corrente que circula entre o pólo positivo da bateria e o ponto P não é a mesma que circula na lâmpada, pois parte das cargas podem agora deslocar-se pela malha do amperímetro. O que a conservação de carga nos permite dizer é ³

$$I = I_L + I_A, \quad (10.2)$$

em que

- I é a corrente total que passa entre os pólos positivo e negativo da bateria;
- I_L , é a corrente que passa na lâmpada (em qualquer ponto da malha que liga P a Q pela lâmpada);
- I_A , a corrente que passa no amperímetro.

A equação 10.2 é conhecida como lei dos nodos, e exprime simplesmente a conservação de carga.

Contudo, a lei dos nodos não nos diz que fracção da corrente total passa em cada um dos ramos. Mesmo que saibamos o valor de I o que determina os valores de I_A e I_L ?

³Esta relação é exactamente a que os dois amigos intuíram ao contar carros em pontos diferentes da auto estrada.

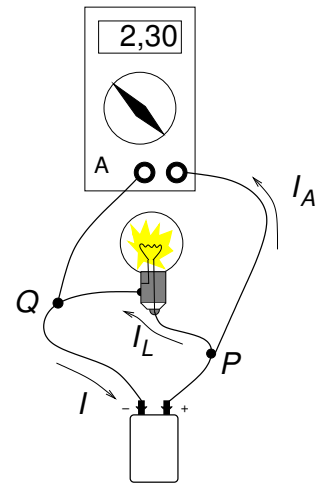
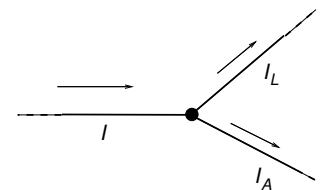


Figura 10.7: Uma maneira pouco ortodoxa de ligar o amperímetro

Figura 10.8: Se I , I_A e I_L forem as correntes eléctricas em cada ramo, com os sentidos definidos pelas setas, a conservação de carga implica $I = I_A + I_L$.

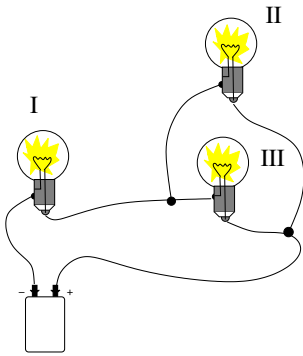


Figura 10.9: Qual das lâmpadas brilha mais?

Para responder a esta pergunta temos que perceber como é que conseguimos criar correntes eléctricas nos materiais.

\mathcal{ETV}_4 : As lâmpadas do circuito da figura 10.9 são todas idênticas. Qual delas será mais brilhante?

10.3 Diferença de potencial

Num sólido metálico, como um fio de cobre, usado em quase todas as ligações eléctricas, ou o filamento de tungsténio de uma lâmpada de incandescência, existem electrões livres que se podem deslocar relativamente aos iões positivos que constituem quase toda a massa do sólido.

Se pusermos um disco metálico a rodar não há corrente eléctrica, pois o movimento das cargas positivas e negativas é idêntico (ver secção 10.2.2). Contudo, se o metal for sujeito a um campo eléctrico, as forças sobre os electrões e sobre os iões positivos terão sentidos opostos e os electrões mover-se-ão relativamente à rede de iões positivos: teremos corrente eléctrica.

De igual modo, num líquido como a água salgada, em que existem iões positivos (Na^+) e negativos (Cl^-), um campo eléctrico acelera-os em sentidos opostos, o que significa que contribuem com o mesmo sinal para a corrente eléctrica.

Assim, de um modo geral, a corrente eléctrica é uma consequência da existência de um campo eléctrico num material: as cargas positivas deslocam-se no sentido do campo e as negativas no sentido oposto.

Esta não é, no entanto, uma regra sem excepções.

Certos materiais, se arrefecidos a uma temperatura suficientemente baixa, abaixo de uma temperatura designada **temperatura crítica**, T_c , entram num estado designado **supercondutor**, em que podem existir correntes eléctricas sem qualquer campo eléctrico. Estes materiais não são ainda utilizados em massa, por causa da necessidade de arrefecimento a baixas temperaturas, embora se apliquem em certas instalações especiais.

A existência de um campo eléctrico no interior de um condutor implica, em geral, a existência de uma **variação do potencial**

■ Supercondutores de T_c elevado ■

J. Georg Bednorz



K. Alexander Müller

Durante muito tempo pensou-se que não existiam supercondutores acima de cerca de 23 K, ou seja -250°C ! Em 1986, dois cientistas da IBM em Zurique, na Suíça, Georg Bednorz e K. Alex Müller, descobriram que um material cerâmico (não metálico) constituído por Lântano, Cobre e Oxigénio era supercondutor abaixo de 30 K. Müller e Bednorz receberam o prémio Nobel da Física no ano seguinte, 1987.

Esta descoberta desencadeou uma corrida desenfreada por materiais do mesmo tipo com temperaturas críticas mais altas. Actualmente o recorde é $T_c = 138\text{ K}$ para um composto com Mercúrio, Tálho, Bário, Cálcio, Cobre e Oxigénio.

Todos os supercondutores de T_c elevado contêm planos de Cobre e Oxigénio em que os átomos de Cobre ocupam os vértices uma rede quadrada e os átomos de Oxigénio o meio das arestas. Sabe-se que este é o elemento estrutural comum a todos os supercondutores de T_c elevado. Todavia, a teoria completa dos supercondutores de alta temperatura, passados 20 anos, dezenas de milhares de artigos, dúzias de teorias alternativas e muitas amizades entre físicos rivais, continua por descobrir.

Caixa 10.1: Supercondutores de temperatura crítica elevada.

eléctrico no mesmo. Se o trabalho da força eléctrica, $\vec{F}_e = q\vec{E}$, no deslocamento de uma carga q entre dois pontos, A e B for $W_e \neq 0$, a energia potencial da carga varia de⁴

$$\Delta E_p = -W_e,$$

e, por definição de potencial eléctrico,

$$\Delta V = V_B - V_A = \frac{\Delta E_p}{q}.$$

É importante notar que isto não contradiz a afirmação do capítulo anterior de que o campo eléctrico num metal condutor em **equilíbrio** (cargas estáticas) é nulo. Neste capítulo estamos a considerar situações em que há cargas em movimento.

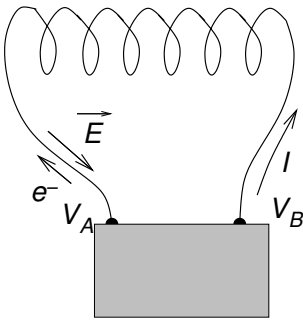


Figura 10.10: Qual é o sinal da diferença de potencial $V_B - V_A$?

Sentido da corrente e sinal da diferença de potencial

A relação entre o sentido da corrente e o sinal da diferença de potencial pode tornar-se um pouco confusa na medida em que os portadores de carga nos sólidos metálicos são electrões, com carga negativa. Um exame cuidadoso da figura 10.10 pode ajudar a ultrapassar esta confusão.

Suponhamos que os electrões têm um movimento médio de A para B . A força eléctrica sobre cada electrão tem o sentido do respectivo movimento. Como $\vec{F}_e = -e\vec{E}$,

o campo eléctrico no interior de um condutor tem o sentido oposto ao do movimento dos electrões.

Como vimos acima, a corrente de A para B é negativa, pois a carga em B diminui (B está a receber carga negativa) devido a este movimento dos electrões. Por isso o sentido positivo da corrente é de B para A conforme se indica na figura:

O sentido positivo da corrente num condutor é o do campo eléctrico.

Se uma carga positiva, $q > 0$, se desloca com o mesmo sentido que o campo eléctrico, o trabalho realizado por este é positivo e a sua energia potencial eléctrica diminui: ou seja o potencial eléctrico inicial é superior ao final.

⁴O trabalho é a variação de energia cinética, que é simétrica da variação de energia potencial.

O campo eléctrico aponta de potenciais mais elevados para potenciais mais baixos.

No caso da figura ??, o valor do potencial em B é, então, superior ao de A .

Num condutor metálico, a sentido positivo da corrente é o sentido em que diminui o valor do potencial eléctrico.

$\mathcal{E}TV_5$: Os amperímetros digitais, além da intensidade da corrente entre o terminal positivo e de referência indicam também o respectivo sinal.

- Representar, no circuito da figura 10.11 os sentidos de movimento dos electrões e do campo eléctrico nos condutores.
- Qual é sinal da diferença de potencial $V_A - V_B$?

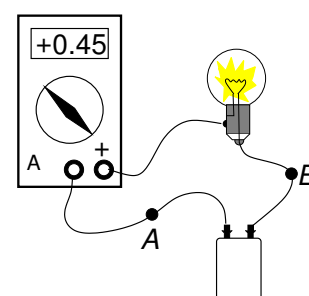


Figura 10.11: Qual é o sentido de movimento dos electrões e do campo eléctrico nos condutores deste circuito?

10.3.1 O voltímetro

O mesmo aparelho de medida pode funcionar como amperímetro ou como voltímetro. No modo “amperímetro” o seu mostrador indica a corrente que passa entre os seus terminais. No modo “voltímetro” indica a diferença de potencial entre os seus terminais. Vimos atrás que se quisermos usar um amperímetro para medir a corrente que passa num elemento de um circuito temos que o ligar “em série”; ou seja, temos que garantir que a corrente que passa no amperímetro é a mesma que passa nesse elemento do circuito.

Se pretendemos medir a diferença de potencial entre dois pontos de um circuito temos que os ligar a cada um dos terminais do voltímetro.

A figura 10.12 resume a nossa discussão sobre a ligação em série e paralelo. Se quisermos que a corrente no aparelho de medida seja a mesma que no elemento do circuito, devemos ligar em série,

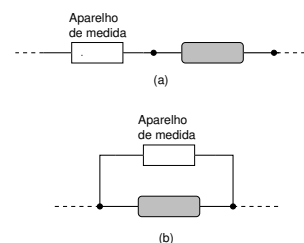


Figura 10.12: No caso (a), série, a corrente que passa no aparelho é a mesma que passa no elemento do circuito; no caso (b) a diferença de potencial nos terminais do aparelho é a mesma que nos terminais do elemento do circuito.

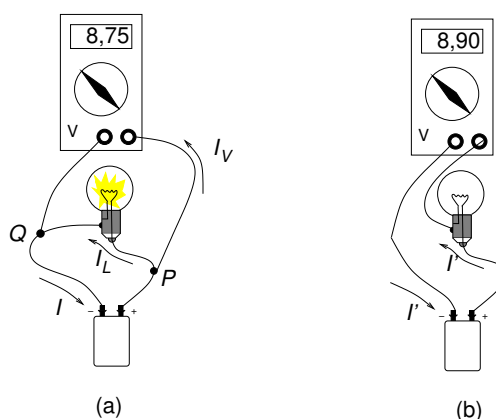


Figura 10.13: Um voltímetro ligado em paralelo (a) e em série (b) com uma lâmpada. No primeiro caso o a diferença de potencial medida no voltímetro é praticamente a mesma que a dos terminais da lâmpada, pois o potencial quase não varia nos fios de ligação. Nada de “errado” ocorre na segunda montagem; só que a diferença de potencial medida pelo voltímetro já não é a dos terminais da lâmpada (em breve veremos que é muito superior).

caso (a); se quisermos que a diferença de potencial seja a mesma devemos ligar em paralelo, caso b).

Por exemplo, na ligação representada na figura 10.13a o voltímetro foi ligado entre os pontos Q e P . Como veremos mais tarde, se os cabos de ligação estiverem bem dimensionados, o potencial quase não varia ao longo deles, pelo que a diferença de potencial nos terminais do voltímetro (o que o mostrador indica) é também a diferença de potencial entre os dois terminais da lâmpada. A ligação em série também é possível (10.13b); contudo, o voltímetro já não mede a diferença de potencial entre os terminais da lâmpada!

No capítulo seguinte discutiremos o efeito que a introdução do aparelho de medida tem no comportamento do circuito. Nessa altura veremos que as diferenças de potencial nos terminais da lâmpada são muito diferentes no caso do circuitos (a) e (b) da figura 10.13, mesmo que a pilha seja idêntica.

10.4 Corrente e velocidade de arrastamento

No exemplo dado acima da corrente de carros através da entrada de uma cidade pudemos relacionar a velocidade dos carros com a corrente (número de carros que entram na cidade por unidade

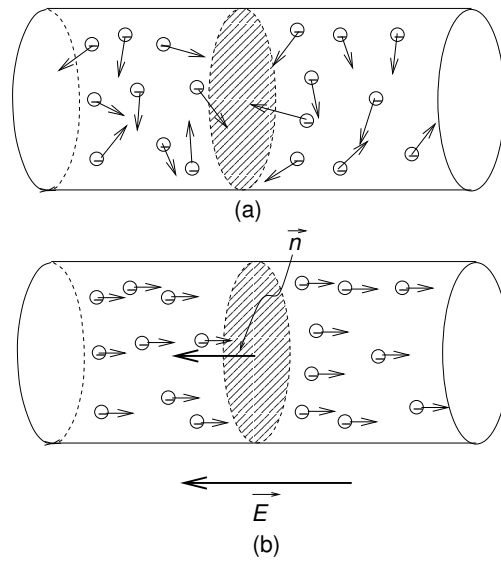


Figura 10.14: (a) A corrente através da secção sombreada será nula, se o movimento dos electrões for totalmente desordenado, com tantos electrões a atravessar a secção num sentido como no outro; um campo eléctrico adiciona à velocidade de cada electrão um velocidade de arrastamento, \vec{v}_a . Para determinar a corrente podemos considerar que a velocidade de cada electrão é **apenas** a velocidade de arrastamento, representada em (b). Contudo, a situação representada em (b) não é o que realmente ocorre no material.

de tempo). Poderemos fazer o mesmo com a corrente eléctrica? Determinar, por exemplo, a velocidade dos electrões num fio de cobre onde passa uma dada corrente?

A resposta é **não**. A razão é que o movimento dos electrões num sólido é mais parecido com o movimento de uma multidão na noite de S. João, do que com o movimento de carros numa auto estrada. Os electrões, como as pessoas, movem-se desordenadamente, em todas as direcções, exactamente como as moléculas de um gás. Na ausência de um campo eléctrico, tantos electrões atravessam uma superfície num sentido como no sentido oposto e a corrente é nula. Esta situação está representada na figura 10.14a, que pretende ilustrar o movimento desordenado de electrões num metal na ausência de um campo eléctrico.

Mas suponhamos que existe no material um campo eléctrico dirigido ao longo do eixo do fio. A força sobre os electrões acelera-os no sentido oposto ao do campo, e a cada electrão teremos que somar uma velocidade \vec{v}_a com sentido oposto ao do campo e designada

por **velocidade de arrastamento**.

Acontece que a corrente pode ser calculada supondo que a velocidade dos electrões é apenas a velocidade de arrastamento. Sendo assim é possível relacionar a corrente eléctrica com a velocidade de arrastamento, usando um raciocínio muito semelhante ao usado a propósito do tráfego automóvel:

- No caso da figura 10.14b, por cada electrão que atravessa a secção sombreada, a carga do lado para onde aponta o vector \vec{n} **aumenta**,

$$\Delta Q = Q - (-e) - Q = e.$$

Por isso a corrente eléctrica no sentido definido por \vec{n} é positiva, conforme vimos atrás. Num intervalo Δt , o aumento de carga devido à passagem de electrões no sentido oposto ao campo é

$$\Delta Q = e\Delta N_e$$

em que ΔN_e é o número de electrões que atravessa a secção sombreada, em sentido oposto ao campo no intervalo de tempo Δt .

- Se pudermos considerar que cada electrão se move com a velocidade de arrastamento, podemos calcular ΔN_e tal como fizemos com os carros: os electrões que atravessam a secção sombreada entre t e $t + \Delta t$ são os que estão a uma distância desta inferior a $v_a\Delta t$:

$$\Delta N_e = n_e \times (A \times v_a\Delta t);$$

- n_e é o número de electrões por unidade de volume;
- $A \times v_a \times \Delta t$ é o volume onde estão os electrões que efectivamente cruzam a secção sombreada.

A corrente é, então,

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = A \times en_e v_a$$

e a corrente por unidade de área da secção transversal

$$\frac{I}{A} = en_e v_a.$$

\mathcal{ETV}_6 : no cobre metálico existem dois electrões livres por cada átomo de cobre.

- a) Recorrendo a uma tabela periódica, obter a massa molar do cobre e a sua massa volúmica. Destes dois valores calcular o número de electrões livres por unidade de volume numa amostra de cobre.
- b) Se um fio de cobre de secção recta de 1 mm^2 for percorrido por uma corrente de 1 A , qual é a velocidade de arrastamento dos electrões? (Surpresa!)

10.4.1 Dissipação

Se existe um campo eléctrico num fio condutor, existe uma força eléctrica sobre os electrões, $\vec{F}_e = -e\vec{E}$. A segunda lei de Newton implica então a existência de uma aceleração:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_e}{m_e}$$

e a velocidade de cada electrão será

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \frac{\vec{F}_e}{m_e}t$$

Se identificarmos o segundo termo como sendo a velocidade de arrastamento, teremos que concluir que a corrente eléctrica deveria aumentar no tempo, sob o efeito de um campo eléctrico.

Raciocinando em termos energéticos, podemos chegar à mesma conclusão. Se um electrão passa entre dois pontos de potenciais diferentes, V_A e V_B , sua energia potencial eléctrica varia de

$$\Delta E_P = -e(V_B - V_A)$$

e a sua energia cinética aumentará se $V_B > V_A$

$$\Delta E_c = -\Delta E_p = e(V_B - V_A).$$

Contudo, a experiência mostra que é necessário uma diferença de potencial para manter uma corrente constante num condutor; nem

a corrente, nem a energia cinética média dos electrões aumenta no tempo! Porquê?

A razão é que os electrões não se movem no vazio: como vimos, movem-se relativamente às cargas positivas dos iões do material. Por isso, quando começam a deslocar-se sob efeito do campo eléctrico, deixam de estar em equilíbrio com os iões positivos; a resultante das forças exercidas por estes deixa de ser nula.

Se estivermos parados no meio de uma multidão, numa praça, receberemos empurrões de todos os lados e, em média, a força que a multidão exerce sobre nós é nula. Contudo, se correremos numa dada direcção empurraremos mais pessoas no sentido em que nos movemos que no sentido oposto; pelo princípio de acção-reacção, recebemos mais empurrões no sentido oposto ao do nosso movimento que no mesmo sentido: a multidão oferece resistência ao nosso movimento no seu seio.

De modo semelhante, num condutor, o trabalho realizado pelas forças do campo eléctrico nas cargas móveis, acaba por ser transferido para os átomos do material, através das interacções destes com as cargas móveis. Quando ligamos uma lâmpada ou um aquecedor eléctrico é isso mesmo que queremos que aconteça. Desejamos aumentar a temperatura do sistema, e para isso temos que fornecer energia. Essa energia é fornecida na forma de trabalho das forças eléctricas sobre as cargas livres do material, que, por sua vez, transferem a sua energia adicional para os átomos do meio.

Em condutores homogéneos, a força de resistência do meio ao movimento das cargas livres tem, frequentemente, a forma de uma força de viscosidade, semelhante à da lei de Stokes:

$$\vec{F}_{\text{meio}} = -\gamma \vec{v}_a$$

No regime estacionário, sem aceleração, o valor desta força deve ser igual em módulo ao da força do campo eléctrico

$$\gamma v_a = eE$$

e o módulo da velocidade de arrastamento é proporcional ao campo,

$$v_a = \frac{e}{\gamma} E = \mu E,$$

em que μ é a **mobilidade** dos portadores de carga. Neste caso obtemos uma relação linear entre o valor do campo e da corrente por unidade de área que passa no condutor:

$$\frac{I}{A} = n_e e \mu \times E$$

Note-se que o coeficiente de proporcionalidade, $n_e e \mu$ é uma propriedade do meio, não depende das dimensões do corpo condutor: e é a carga electrónica, n_e o número de electrões livres por unidade de volume e μ a mobilidade dos electrões. Este parâmetro $\sigma = n_e e \mu$ designa-se por condutividade do material.

10.5 Potência eléctrica

O trabalho realizado pelas forças eléctricas entre dois pontos de um circuito exprime-se muito facilmente em termos da corrente e da diferença de potencial. Cada carga q transportada no sentido positivo da corrente de A para B tem uma variação de energia potencial eléctrica,

$$\Delta E_p = q(V_B - V_A).$$

e, na ausência de dissipação, teria um aumento de energia cinética

$$\Delta E_c = -\Delta E_p = q(V_A - V_B).$$

Esta é a energia transferida **para** o meio. Durante um intervalo de tempo Δt a carga total que passa de A para B é, precisamente,

$$\Delta Q = I \Delta t$$

por definição de corrente eléctrica. Logo a energia fornecida a esta secção do circuito é

$$\Delta E = I(V_A - V_B) \Delta t$$

A potência, energia por unidade de tempo, é

$$w = \frac{\Delta E}{\Delta t} = I(V_A - V_B).$$

Em conclusão (ver figura 11.1):

Se num dispositivo de um circuito o sentido positivo da corrente eléctrica é aquele em que o potencial diminui, o trabalho das forças eléctricas sobre as cargas em movimento é positivo: há uma diminuição de energia potencial eléctrica, que é convertida noutras formas. Estes dispositivos são **receptores**.

Se o sentido positivo da corrente for o do aumento do potencial eléctrico, existe uma conversão de outras formas de energia em energia potencial eléctrica. O dispositivo é um **gerador**.

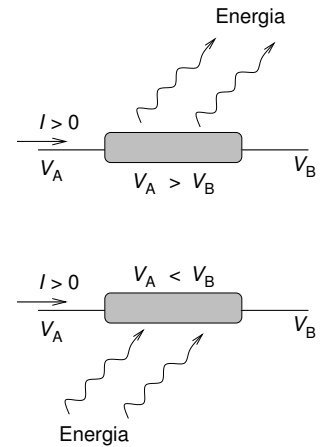


Figura 10.15: Um elemento de circuito liberta energia se a corrente flui no sentido de potencial decrescente; recebe energia do exterior se a corrente flui no sentido de potencial crescente.

10.6 Resumo

Na realidade muitos dos conceitos discutidos neste capítulo, já foram abordados na disciplina de Ciências Físico-Químicas em outros anos. No entanto, é importante verificar que estes conceitos se ligam muito directamente com os que foram discutidos no capítulo anterior. Apenas mudou o contexto, pois quando falamos de circuitos estamos a falar de cargas em movimento e não de situações estáticas. Uma boa compreensão das noções de corrente e da sua relação com conservação de carga, de potencial e da sua relação com o campo eléctrico, e de potência eléctrica e da respectiva relação com os conceitos anteriores, simplifica imenso a análise de circuitos que vamos considerar no próximo capítulo.

10.7 Resposta aos $\mathcal{ETV}'s$

- 10.1. \mathcal{ETV}_1 : se dividirmos um intervalo de tempo pelo número de carros que passam nesse tempo, obtemos o intervalo de tempo médio que decorre entre a passagem de dois carros sucessivos. Assim o número calculado pelo aluno,

$$\frac{\Delta t}{\Delta N} = 2,63 \times 10^{-4} \text{ h carro}^{-1},$$

significa que passa um carro em média em cada $2,63 \times 10^{-4} \text{ h}$ ou seja, um em cada $0,94 \text{ s}$.

- 10.2. \mathcal{ETV}_2 : por cada electrão que bate no écran é depositada neste uma carga $-e$. A corrente, que tem o sentido oposto ao da velocidade dos electrões será

$$I = e \frac{\Delta N_e}{\Delta t}$$

Sendo:

- $I = 10^{-3} \text{ A}$;
- $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$,

vem

$$\frac{\Delta N_e}{\Delta t} = \frac{10^{-3}}{1,6 \times 10^{-19}} = 0,63 \times 10^{16} \text{ s}^{-1}.$$

- (a) Se cada electrão requer uma energia de 30 keV ou seja

$$1,6 \times 10^{-19} \times 3 \times 10^4 = 4,8 \times 10^{-15} \text{ J}$$

e são transportados $0,63 \times 10^{16}$ electrões por segundo, a energia dispendida para os acelerar é

$$4,8 \times 10^{-15} \times 0,63 \times 10^{16} = 30 \text{ J s}^{-1} = 30 \text{ W}.$$

10.3. \mathcal{ETV}_3 : as quatro lâmpadas estão ligadas em série, o que implica que a corrente que passa em cada uma é a mesma. Por isso as lâmpadas têm todas o mesmo brilho.

10.4. \mathcal{ETV}_4 : A corrente I que passa na lâmpada I é superior às correntes que passam em II ou III. Com efeito,

$$I = I_{II} + I_{III}.$$

Por isso, é natural concluir que a lâmpada I tem um brilho superior às outras duas. Como as lâmpadas II e III são idênticas é razoável supor que $I_{II} = I_{III}$. Então

$$I_{II} = I_{III} = \frac{I}{2}.$$

Isto não quer dizer que a energia luminosa emitida em I seja o dobro da libertada em cada uma das outras lâmpadas. Veremos mais tarde que é mais próximo de quatro vezes mais brilhante.

10.5. \mathcal{ETV}_5 O sentido positivo da corrente e do campo eléctrico são opostos ao do movimento dos electrões (fig 10.16). A diferença de potencial $V_A - V_B$ é negativa, $V_B > V_A$; para deslocar uma carga positiva de A para B, **contra** o campo eléctrico, temos que realizar trabalho e a sua energia potencial eléctrica aumenta.

10.6. \mathcal{ETV}_6 :

(a) a massa de um átomo de cobre é a massa molar do Cu dividida pelo número de Avogadro (número de átomos num mole):

$$m_{Cu} = \frac{63,6 \times 10^{-3}}{6,0 \times 10^{23}} = 10,6 \times 10^{-26} \text{ kg}$$

Como a massa volúmica é $\rho = 8,93 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$, o número de átomos por metro cúbico é

$$\frac{\rho}{m_{cu}} = 0,84 \times 10^{29} \text{ átomos m}^{-3};$$

Se existem dois electrões de condução por átomo

$$n_e = 1,7 \times 10^{29} \text{ el m}^{-3}.$$

(b) Como

$$\frac{I}{A} = en_e v_a$$

vem

$$\begin{aligned} v_a &= \frac{I}{Aen_e} = \frac{1}{10^{-6} \times 1,6 \times 10^{-19} \times 1,7 \times 10^{29}} \\ &= 0,37 \times 10^{-4} \text{ m s}^{-1} = 0,037 \text{ mm s}^{-1}! \end{aligned}$$

A esta velocidade um electrão demora mais de 7 horas a percorrer um metro. Como é o o candeeiro acende tão depressa quando ligamos o interruptor?

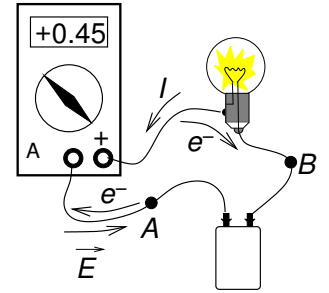


Figura 10.16: Sentidos da corrente, movimento dos electrões e campo eléctrico, num circuito.

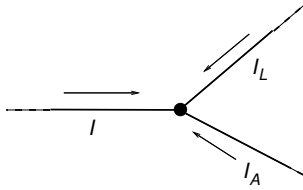


Figura 10.17: Como se exprime a lei dos nodos para as correntes no sentido das setas?

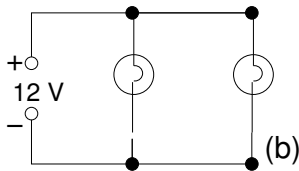
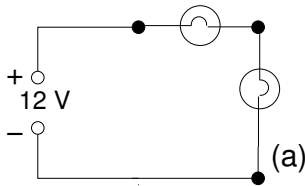


Figura 10.18: Dois circuitos com duas lâmpadas

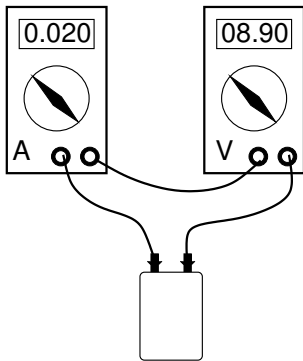


Figura 10.19: Qual é potência dissipada no voltímetro?

10.8 Atividades, Problemas e Questões.

10.8.1 Questões

10.1. Os valores das correntes nos três condutores da figura 11.26, e no sentido indicado pelas setas, são I , I_A e I_L . Como se exprime a condição de conservação de carga neste caso?

10.2. A figura 10.18 é a representação simbólica de dois circuitos com duas lâmpadas. São ambos alimentados por uma fonte que garante uma diferença de potencial de 12 V entre os seus dois terminais. Em cada lâmpada, quanto maior for a diferença de potencial entre os seus terminais, V , maior é a corrente, I , que nela passa. As lâmpadas são todas iguais, isto é, têm a mesma relação $I - V$.

- Qual é a diferença de potencial entre os terminais de cada lâmpada no caso (a)?
- Em qual dos circuitos é maior a potência dissipada?
- Se ligarmos apenas uma lâmpada aos terminais desta fonte o circuito dissipa 6 W. Quanto dissipa o circuito (b) ?
- Ordene por ordem crescente de brilho **por lâmpada** os circuitos (a), (b) e um circuito só com uma lâmpada.

10.3. Uma das lâmpadas de cada um dos circuitos (a) e (b) da figura 10.18, funde, isto é o filamento parte e deixa de passar corrente.

- O que acontece ao brilho da outra lâmpada nos casos (a) e (b)?
- Como se altera a corrente total que passa na fonte, no caso do circuito (b), quando uma lâmpada funde?

10.4. O circuito da figura 10.19 só tem uma pilha, um amperímetro e um voltímetro. A escala do amperímetro é mA e a do voltímetro V.

- Qual é a potência dissipada no voltímetro?
- Como se deve ligar um segundo voltímetro para determinar a potência dissipada no amperímetro?

10.8.2 Problemas

- 10.1. Um amperímetro mede uma corrente de 10 mA. Em número de electrões, qual é a carga que passa entre os seus terminais em um minuto?
- 10.2. Um fio de cobre à temperatura ambiente tem uma corrente $I = 0,1 \text{ A}$. Sabendo que a sua secção é de 1 mm^2 e a condutividade $\sigma = 5,8 \times 10^7 \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$ (unidade SI):
- (a) calcular o campo eléctrico existente no interior do condutor.
- 10.3. Um feixe de um laser escolar, tem uma potência de de 1 mW e um comprimento de onda $\lambda = 670 \text{ nm} = 670 \times 10^{-9} \text{ m}$. A energia do feixe é constituída por fotões, cada um dos quais tem uma energia hc/λ e viaja à velocidade da luz, c . h é a constante de Planck. Quantos fotões incidem por unidade de tempo numa superfície normal ao feixe?

Capítulo 11

Circuitos eléctricos

11.1 Características I - V .

Os circuitos que considerámos até agora continham lâmpadas, fios de ligação, amperímetros, voltímetros e pilhas.

Do ponto de vista de comportamento de circuitos, a mais importante característica de qualquer elemento é a relação entre a corrente que passa entre os seus terminais e a diferença de potencial nos mesmos: a característica $I - V$.

Em particular, esta característica determina, como vimos, as trocas de energia que ocorrem entre os elementos de um circuito. Num regime estacionário de correntes, a energia cinética média das cargas móveis de um circuito mantém-se constante no tempo. Nos elementos em que o sentido positivo da corrente é de potenciais mais altos para mais baixos, a energia potencial eléctrica das cargas diminui e é transferida para outros sistemas. Pelo contrário, se o sentido positivo da corrente é o de potencial crescente, a energia potencial das cargas aumenta e estão a receber energia de outros sistemas (fig. 11.1).

Vamos começar este capítulo com alguns exemplos de análise de circuitos, com base em características $I - V$ **postuladas**; isto é, numa primeira fase não nos preocuparemos em conhecer a origem física da relação entre a corrente e a diferença de potencial de um dado dispositivo. Deixaremos essa questão para um pouco mais tarde. Deste modo conseguimos dividir as dificuldades e abordá-las à vez.

▷ Actividade 11.1

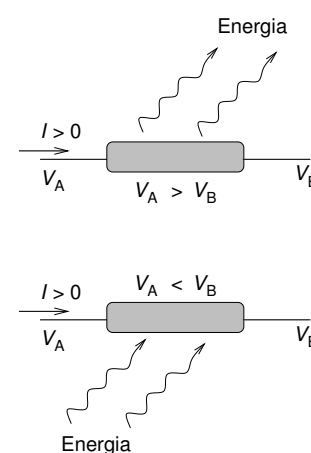


Figura 11.1: Um elemento de circuito liberta energia se a corrente flui no sentido de potencial decrescente; recebe energia do exterior se a corrente flui no sentido de potencial crescente.

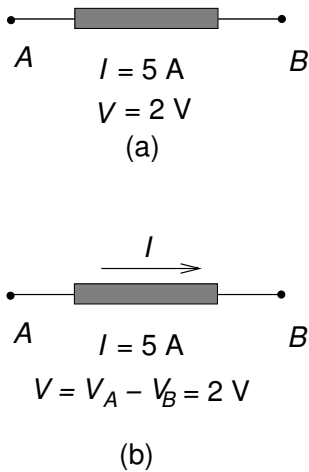


Figura 11.2: Os valores de I e V indicados em (a) não determinam nem a corrente nem a diferença de potencial: em que sentido é que $I = 5\text{ A}$? $V = V_A - V_B$ ou $V = V_B - V_A$?

11.1.1 Acertar os sinais

O erro mais comum na análise de circuitos é a troca de sinais. Há dois princípios cardinais a ter em conta, neste contexto. Devem ficar gravados a ouro nas nossas mentes:

- O “Potencial” V de um dispositivo de terminais A e B é uma **diferença de potencial**. Nada adiante saber o valor de V (positivo ou negativo) se não especificarmos se $V = V_A - V_B$ ou se $V = V_B - V_A$.
- De igual modo, uma corrente I num dispositivo não fica determinada pelo seu valor, seja positivo ou negativo, se não indicarmos em que sentido tem esse valor (de $A \rightarrow B$ ou de $B \rightarrow A$).

Não especificar estes sentidos coloca-nos numa situação semelhante à que nos encontraríamos perante a pergunta:

João e Pedro trocaram entre si 100 euros. Qual deles ficou mais rico?

Sendo assim, ao especificar uma relação entre a corrente I e a diferença de potencial V num dispositivo de dois terminais A e B , temos que tornar muito claro:

- Em que sentido é que a corrente é I , de $A \rightarrow B$ ou de $B \rightarrow A$;
- Que diferença de potencial é V , $V_A - V_B$ ou $V_B - V_A$?

Note-se que o significado físico da potência, $P = VI$, depende da convenção que usarmos. Se I for a corrente de $A \rightarrow B$ a variação de energia potencial das cargas livres por unidade de tempo é $(V_B - V_A)I$; a energia **cedida** pelas cargas, por unidade de tempo, ao elemento do circuito é $(V_A - V_B)I$. Assim se $V = V_A - V_B$, $P = VI$ é a potência **cedida** pelas cargas; se $V = V_B - V_A$, $P = VI$ é a potência **recebida** pelas cargas.

11.2 Dispositivos de dois terminais

11.2.1 Resistência

Uma resistência, ou condutor ômico, é um dispositivo caracterizado por uma relação $I - V$ linear (fig. 11.3),

$$V = RI. \quad (11.1)$$

em que R , o valor de resistência, é positivo. Tem unidade SI Volt Ampere⁻¹, que recebe o nome **Ohm** (abreviatura Ω).

É importante notar que a expressão da equação 11.1 pressupõe as definições da figura 11.4:

Se I é a corrente de A para B , $V = V_A - V_B$.

Isto não implica que $I > 0$. Esta relação é válida quer para correntes positivas quer para correntes negativas (fig. 11.3). Isto é, se estiver a passar uma corrente de -2 A de A para B , continuamos a ter

$$V = V_A - V_B = RI = (-2)R.$$

O sentido positivo de corrente, $B \rightarrow A$, continua a ser o de potencial decrescente, pois $V_A - V_B < 0$, ou seja, $V_B > V_A$.

Com esta convenção de definição de V e I , a potência dissipada na resistência (diminuição de energia potencial da cargas por unidade de tempo) é

$$P = VI = RI^2 = \frac{V^2}{R}. \quad (11.2)$$

Como $R > 0$, $P > 0$, ou seja, um condutor ômico é um receptor. A passagem de corrente por uma resistência origina sempre um aumento de temperatura. Este fenómeno de dissipação de energia é designado por **Efeito de Joule**.

A potência dissipada aumenta ou diminui com o valor da resistência, R ?

Naturalmente, como mostra a equação 11.2, depende de fixarmos o valor da corrente ou da diferença de potencial. Para o mesmo valor de V a potência dissipada é tanto maior quanto menor for R ; para o mesmo valor de I , P é tanto maior quanto maior for R .

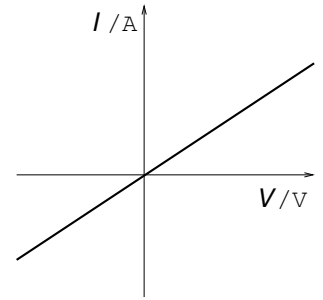


Figura 11.3: Característica $I - V$ de uma resistência. O declive é $1/R$.

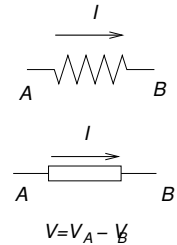


Figura 11.4: Símbolos comuns na representação de resistências e convenção de definição de I e V na característica $I - V$.

Fios de ligação

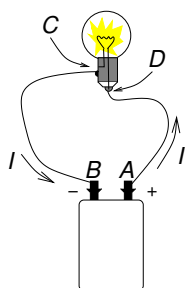


Figura 11.5: Como escolher os fios para que não haja mais energia dissipada nestes do que na lâmpada?

Os fios de ligação com que construímos circuitos, são exemplos de condutores ómicos. Para que neles passe corrente tem que haver uma diferença de potencial entre os seus extremos. Contudo, se forem correctamente escolhidos essa diferença de potencial será muito menor que outras diferenças de potencial no circuito. Um exemplo torna isso mais claro.

Na figura 11.5, a corrente I que passa no fio entre A e D e C e B é a mesma que passa na lâmpada. Por isso as potências dissipadas no fio e na lâmpada são

$$\begin{aligned} P_{\text{fio}} &= R_{\text{fio}} I^2 \\ P_L &= R_L I^2 \end{aligned}$$

Se quisermos que a energia disponível seja maioritariamente dissipada na lâmpada, teremos que ter um fio com resistência muito inferior à da lâmpada, $R_{\text{fio}} \ll R_L$. A respectiva diferença de potencial, $R_{\text{fio}} I$, será, também, muito inferior à da lâmpada, $R_L I$.

Na análise de circuitos é normal assumir que o potencial é constante nos fios de ligação: dois pontos ligados por um fio estão ao mesmo potencial e a potência dissipada no fio é nula. Convém recordar, contudo, que esta aproximação só faz sentido se existirem resistências de valor muito superior à dos fios em série com os mesmos.

11.2.2 Simbologia de circuitos

Até ao momento temos vindo a usar, sobretudo, representações semi-realistas de circuitos. A suposição de que as variações de potencial nos fios de ligação são desprezáveis, faz com que a disposição física dos diferentes elementos de um circuito seja irrelevante para o seu comportamento. Dois pontos ligados por um fio estão ao mesmo potencial tenha o fio 10 cm ou 1 m¹: o que importa é conhecer quais as características dos elementos dos circuitos e quais os pares de terminais que estão ligados entre si.

Esta circunstância permitiu o desenvolvimento de uma representação simbólica de circuitos. Cada tipo de elemento é representado por um símbolo específico, e, para especificar um circuito, só temos que indicar quais os elementos que o compõem e o modo como os respectivos terminais estão ligados entre si.

¹Atenção: se um fio de ligação for demasiado comprido a sua resistência pode deixar de ser desprezável!

Bateria		Lâmpada	
Fonte tensão variável		Lâmpada avisadora	
Resistência		Resistência de aquecimento	
Amperímetro		Condensador	
Voltímetro		Motor	
Interruptor		Fios ligados	
Fios ligados		Fios não ligados	

Figura 11.6: Símbolos de alguns dos dispositivos eléctricos mais comuns.

A figura 11.6 da página 99 representa uma selecção destes símbolos, que vamos passar a usar com mais frequência.

11.2.3 Associações de resistências

\mathcal{ETV}_1 : Duas resistências de $10\ \Omega$ e $1000\ \Omega$ são ligadas num dado circuito em duas situações distintas: série e paralelo (fig. 11.7 a e b).

- Em cada situação, em qual das resistências é maior a potência dissipada?
- Se, no caso da figura 11.7a, a potência dissipada na resistência de $10\ \Omega$ for $1\ \text{mW}$, qual é a potência total dissipada nas duas resistências?
- Se, no caso da figura 11.7b, a potência dissipada na resistência de $10\ \Omega$, for ainda de $1\ \text{mW}$, qual é a potência total dissipada no conjunto das duas resistências?

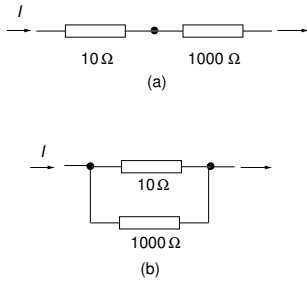


Figura 11.7: Em cada uma destas situações, em qual das resistências é maior a potência dissipada?

A resolução do \mathcal{ETV}_1 revela um facto curioso. Se a estudarmos com cuidado, verificamos o seguinte:

- Se duas resistências estão ligadas em série (mesma corrente, I), a potência total nelas dissipada é

$$P = (R_1 + R_2) I^2;$$

- se estiverem ligadas em paralelo (mesma diferença de potencial entre os seus terminais, V),

$$P = V^2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

No primeiro caso é a mesma potência que teríamos para uma única resistência R igual à soma das duas,

$$R = R_1 + R_2. \quad (11.3)$$

No segundo caso, se quisermos ter a mesma potência com uma única resistência, teremos que escolher

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}. \quad (11.4)$$

A equação 11.3 é **lei de associação de resistências em série** e a equação 11.4 a **lei de associação de resistências em paralelo**.

Quando juntamos duas resistências, em série ou em paralelo como nestes dois exemplos, continuamos a ter um dispositivo de dois terminais. A pergunta que podemos então fazer é:

Qual é a característica $I - V$ de uma série (paralelo) de duas resistências?

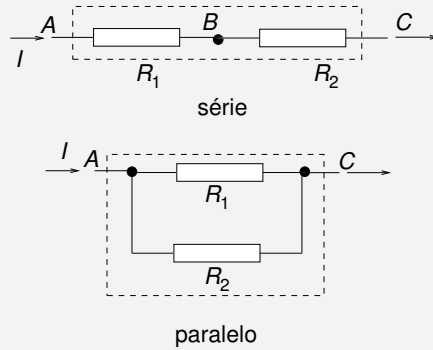
É exactamente a de uma resistência (chamada resistência equivalente),

$$I = \frac{V}{R}$$

em que R é dada pelas equações 11.3 para uma associação em série e 11.4 para um paralelo (ver caixa 11.1) .

\mathcal{ETV}_2 : Duas lâmpadas estão ligadas em paralelo a uma fonte de alimentação que dá uma diferença de potencial fixa de 12V. Se uma das lâmpadas fundir, a segunda passará a brilhar, mais, menos ou fica inalterada?

■ Séries e paralelos de resistências ■



Quando associamos resistências em série ou paralelo, continuamos a ter um dispositivo com dois terminais que pode ser caracterizado pela relação $I - V$ entre a corrente que passa nos seus terminais e a diferença de potencial nos mesmos.

Para a associação em série é claro que a diferença de potencial total, $V = V_A - V_C$ é a soma das diferenças de cada resistência:

$$V = V_A - V_C = (V_A - V_B) + (V_B - V_C).$$

Como a corrente nas duas resistências é a mesma,

$$V = R_1 I + R_2 I = (R_1 + R_2) I.$$

Esta é a característica de uma resistência $R = R_1 + R_2$.

No caso de um paralelo, a diferença de potencial total é igual à de cada resistência,

$$V = I_1 R_1 = I_2 R_2,$$

e a corrente total é a soma das correntes em cada resistência $I = I_1 + I_2$. Logo,

$$I = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} = V \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right).$$

Esta é a característica de uma resistência R dada por:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

Caixa 11.1: Associações de resistências.

11.2.4 A pilha

Se ligarmos duas pontas de um fio metálico a um amperímetro, temos uma resistência, temos um circuito e, até, um aparelho de medida; mas não temos corrente. Para isso precisamos de uma pilha ou bateria!

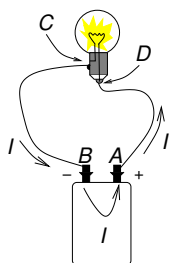


Figura 11.8: Qual é o receptor e gerador?

Uma pilha é também um dispositivo com dois terminais, um dos quais é identificado como o terminal positivo (+) e o outro negativo (-).

Numa lâmpada como a da figura 11.8 o sentido positivo da corrente é o do potencial eléctrico decrescente. A lâmpada é um receptor: as cargas eléctricas deixam energia na lâmpada; por unidade de tempo, uma energia

$$P = VI$$

em que $V = V_D - V_C = V_A - V_B$.

Contudo, **no interior da pilha**, a corrente tem o sentido do polo B (negativo) para A (positivo): as cargas movimentam-se em sentido oposto ao das forças devidas ao campo eléctrico e a sua energia potencial eléctrica aumenta! A pilha é um **gerador** e transfere energia para o sistema de cargas eléctricas em movimento (aumenta a respectiva energia potencial).

Característica de uma pilha

A **força electromotriz** (f.e.m., ε) de uma pilha é definida como a energia transferida para as cargas do circuito **por unidade de carga** que passa na pilha, no sentido do terminal negativo para positivo. A respectiva unidade é a de potencial (Volt) pois o potencial eléctrico também é uma energia por unidade de carga.

A característica de uma pilha pode ser obtida de um argumento de balanço de energia.

- A corrente I é a carga por unidade de tempo que passa na pilha: a energia fornecida às cargas por **unidade de tempo** é:

$$\varepsilon I.$$

- A potência dissipada externamente, na lâmpada, é

$$P_{\text{ext}} = VI,$$

em que V é a diferença de potencial entre o terminal + e - da pilha, $V = V_A - V_B$.

- Uma pilha em funcionamento aquece; a passagem de corrente no seu interior também é acompanhada de efeito de Joule:

$$P_{\text{int}} = R_i I^2$$

Naturalmente, a energia é conservada, o que implica, que a potência recebida pelas cargas, εI tem que ser igual à **cedida** pelas mesmas nas duas resistências:

$$\varepsilon I = VI + R_i I^2.$$

ou

$$V = \varepsilon - R_i I. \quad (11.5)$$

Esta é a equação da característica de uma pilha.

A respectiva representação simbólica (fig. 11.9) permite ler facilmente esta equação. Percorrendo mentalmente o circuito de B para A como varia o potencial?

- Na resistência interna temos uma variação $-R_i I$ (se $I > 0$ o potencial é mais alto em B que no outro extremo de R_i).
- Ao passar do terminal negativo para positivo, temos uma variação $+\varepsilon$; a energia potencial de uma carga positiva aumenta.

Assim,

$$V_A = V_B - R_i I + \varepsilon$$

ou

$$V = V_A - V_B = \varepsilon - R_i I$$

que é o resultado da equação 11.5.

Como I é a corrente de $A \rightarrow B$ e $V = V_B - V_A$, $P = VI$ é a variação de energia potencial das cargas por unidade de tempo, ou seja a potência **recebida** pelas cargas; como

$$P = VI = \varepsilon I - R_i I^2,$$

este valor é positivo se $\varepsilon > R_i I$. A pilha pode funcionar como **gerador**.

A representação simbólica de uma pilha real sugere uma associação em série de um elemento com força electromotriz ε (os dois traços verticais) e de uma resistência R_i ; convém, contudo, não esquecer

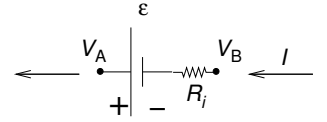


Figura 11.9:
Representação simbólica de uma bateria de força electromotriz ε e resistência interna R_i .

que não temos acesso físico ao ponto que está entre estes dois elementos.

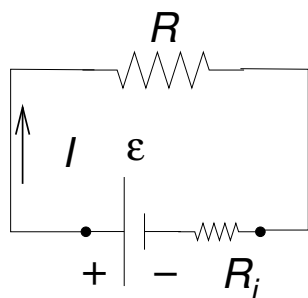


Figura 11.10: Qual é a corrente?

\mathcal{ETV}_3 : Uma resistência R é ligada aos terminais de uma bateria de força electromotriz ε e resistência interna R_i (fig. 11.10).

- Obter a expressão geral da corrente neste circuito em função de ε , R_i e R .
- Obter a expressão geral das potências dissipadas em R e R_i : que condição deve ser verificada para que a potência dissipada no interior da pilha não ultrapasse a décima parte da potência dissipada em R ?
- Na expressão da potência dissipada externamente, analisar os limites em que $R \ll R_i$ (bateria em curto-circuito) e $R \gg R_i$. Verificar que a potência dissipada externamente $P_{\text{ext}} \rightarrow 0$, quer no limite $R \rightarrow 0$, quer no limite $R \rightarrow \infty$.
- Determinar o valor máximo P_{ext} e o valor de R para a qual ela é obtida, em função das características da pilha.

11.3 Receita para análise de circuitos simples

Uma vez compreendidos os conceitos fundamentais de circuitos eléctricos, corrente e diferença de potencial, os circuitos mais simples podem ser analisados quase a dormir. As seguintes regras consideram apenas os elementos estudados até ao momento.

11.1. Definir sentidos e marcar as correntes (I_1, I_2, \dots) nas diferentes malhas, garantindo desde logo a conservação de carga (ver fig. 11.11):

- num circuito de malha simples só há uma corrente I , (fig. 11.11a);

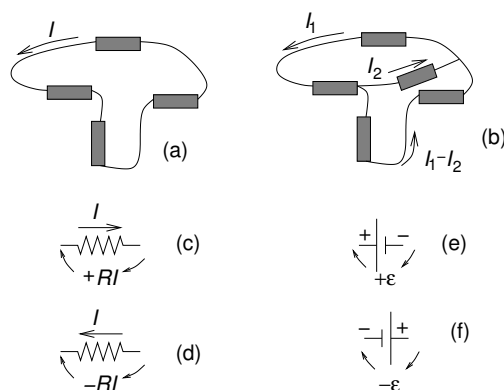


Figura 11.11: Receita para calcular as correntes num circuito. Em (a) só há uma corrente independente; no circuito (b) há duas. Percorrendo mentalmente uma malha, ao passar numa resistência contra o sentido da corrente, a variação de potencial é RI , (c); a favor do sentido da corrente a variação é $-RI$, (d); ao passar uma força electromotriz o potencial aumenta de $-$ para $+$, (e); diminui de $+$ para $-$, (f).

- (b) com duas malhas independentes temos duas correntes para determinar I_1 e I_2 , (fig. 11.11b).

11.2. Percorrer cada malha começando de um ponto à sorte e escrevendo as variações de potencial:

- se passamos uma resistência contra o sentido da corrente escrevemos $+RI$, (fig. 11.11c); se a favor do sentido da corrente, $-RI$, (fig. 11.11d);
- se passamos uma pilha de um terminal $-$ para $+$, escrevemos $+\varepsilon$, (fig. 11.11e); se de $+$ para $-$, $-\varepsilon$, (fig. 11.11f);
- a soma dos termos que escrevemos, percorrida a malha até voltar ao ponto inicial, deve ser nula. Isso dá uma equação para as correntes;
- repetimos o procedimento anterior para as várias malhas independentes.

O resultado é um conjunto de equações para as várias correntes, que podemos resolver usando os métodos habituais para equações lineares.

\mathcal{ETV}_4 : No \mathcal{ETV}_3 foi analisado o circuito da figura 11.10. Usando a “receita” agora apresentada, refazer a análise desse circuito.

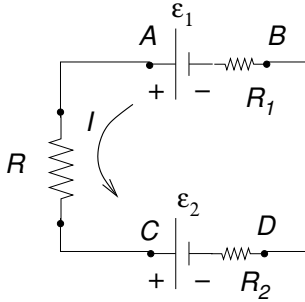


Figura 11.12: Qual é o sentido da corrente?

11.3.1 Associação de baterias

O circuito da figura 11.12 fornece uma boa oportunidade para aplicar este método. Como só tem uma malha, só existe uma corrente a determinar; supomos conhecidas as f.e.m. e resistências internas das duas pilhas e o valor de R , mas não as vamos especificar. Deste modo resolvemos **todos** os circuitos com esta forma!

Para começar, qual será o sentido da corrente? A bateria 1, entre A e B , por si só, passaria corrente de A para C ; a bateria 2 de C para A . Será que precisamos de saber primeiro qual é o sentido positivo da corrente?

As características $I - V$ que escrevemos até agora são válidas quer para $I > 0$ quer para $I < 0$. Por isso, podemos arbitrar o sentido que quisermos; mas temos que escolher um, pois, de outro modo, não sabemos relacionar as diferenças de potencial com as correntes. Seja então I a corrente no sentido de A para C .

Percorramos mentalmente o circuito no sentido da corrente e registemos as variações de potencial: quando chegarmos ao ponto inicial a variação total deve ser zero:

- De B para A , passamos R_1 no sentido da corrente, o que significa que o potencial varia de $-RI$; passamos do terminal $-$ para $+$ da primeira pilha e o potencial aumenta de ε_1 . Assim,

$$V_A - V_B = -R_1 I + \varepsilon_1, \quad (11.6)$$

que não é mais que a característica da pilha 1.

- Passando em R no sentido da corrente, o potencial varia de $-RI$, isto é

$$V_C - V_A = -RI; \quad (11.7)$$

portanto, $V_A - V_C = RI$, que é a característica da resistência R .

- Na bateria 2, passamos de $+$ \rightarrow $-$, com uma variação de potencial $-\varepsilon_2$, e passamos a resistência interna R_2 no sentido de I ; logo

$$V_D - V_C = -\varepsilon_2 - RI; \quad (11.8)$$

a corrente no sentido de $- \rightarrow +$ é $-I$, pelo que a característica desta pilha é $V_C - V_D = \varepsilon_2 - R(-I)$, que é exactamente equivalente à equação 11.8.

Somando todas as variações de potencial ao longo do circuito fechado, equações 11.6, 11.7 e 11.8, obtemos, obtemos, naturalmente, zero ($V_D = V_B$):

$$V_A - V_B + V_C - V_A + V_D - V_C = V_D - V_B = 0.$$

Portanto

$$-R_1 I + \varepsilon_1 - RI - \varepsilon_2 - R_2 I = 0,$$

e, resolvendo para I :

$$I = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{R_1 + R_2 + R}. \quad (11.9)$$

Se $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$, a corrente I é positiva no sentido que indicámos. Se $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$, a corrente I é negativa: em qualquer caso esta equação está correcta, pois as expressões das diferenças de potencial que escrevemos valem quer para $I > 0$ quer para $I < 0$.

Lição:

Não vale a pena tentar “adivinhar” em que sentido a corrente é positiva, antes de resolver um circuito. Podemos até deitar moeda ao ar antes de arbitrar um sentido desde que o façamos de modo consistente em todos os elementos; se não acertarmos no sentido da corrente positiva, ela virá negativa como resultado dos cálculos.

ETV₅: A equação 11.9 pode ser obtida através de um balanço de energia. Calcular as potências cedidas ou recebidas em cada elemento do circuito e mostrar que a energia total das cargas se conserva se a corrente I for dada pela equação 11.9.

11.3.2 Força contra-electromotriz

Suponhamos que $\varepsilon_1 = 9\text{ V}$ e $\varepsilon_2 = 1,5\text{ V}$ no exemplo da secção anterior. Neste caso $I > 0$ e a corrente no interior da pilha 2 passa do terminal $+$ para $-$: a energia potencial eléctrica das cargas diminui na pilha. A potência total **cedida** à pilha é

$$P = (V_C - V_D) I = \varepsilon_2 I + R_2 I^2$$

(I é a corrente de $C \rightarrow D$). Ambos os termos são positivos. Neste caso podemos falar de uma **força contra-electromotriz**: além da potência dissipada por efeito de Joule, o circuito **transfere para a pilha** uma energia $\varepsilon_2 I$ por unidade de tempo, ou seja uma energia ε_2 por unidade de carga que passa de $+$ para $-$.

Vamos ver à frente que certo tipo de pilhas podem funcionar, de facto, em corrente inversa, como receptores, e armazenar a energia cedida pelo circuito. Estas pilhas são recarregáveis e o exemplo mais comum são as baterias de automóvel.

O conceito de força contra-electromotriz aplica-se também a outros dispositivos, como por exemplo motores, que retiram energia do circuito proporcionalmente à carga que os atravessa. Podemos então definir a força contra-electromotriz de um dispositivo, como sendo a energia que remove do circuito por unidade de carga transferida entre os seus terminais. Com vemos, não é um conceito diferente do de força electromotriz: é uma força electromotriz negativa! Para um físico, ser credor ou devedor é a mesma coisa: um credor é um devedor com uma dívida negativa!

11.4 Física dos dispositivos

Tendo introduzido alguns conceitos e linguagem de dispositivos eléctricos, passemos agora à questão da compreensão física do respectivo funcionamento. Vamos começar pelas resistências.

11.4.1 Condutância ómica: resistividade.

Mencionámos atrás que um fio metálico é uma resistência: passa uma corrente I proporcional à diferença de potencial nos seus extremos. Qual é, então, a resistência de um fio? Como varia, se varia, com as suas dimensões?

Consideremos um fio metálico, homogéneo, de comprimento L e secção recta constante, percorrido por uma corrente. Podemos

imaginá-lo com sendo constituído por dois fios de comprimentos $L/2$, um a seguir ao outro. A diferença de potencial na primeira metade do fio, $V_A - V_C$, deve ser idêntica à da segunda, $V_C - V_B$, pois passa a mesma corrente nas duas metades e estas são idênticas (fig. 11.10a). Então

$$V_A - V_C = V_C - V_B = \frac{V_A - V_B}{2};$$

metade do fio tem a mesma corrente e metade da diferença de potencial: logo tem metade da resistência. Ou seja, estamos perante uma associação em série de duas resistências; se a resistência do fio de comprimento L for R , a de um fio de características idênticas e metade do comprimento, $L/2$, será $R/2$. Facilmente concluímos, então, que

a resistência de um fio homogéneo é proporcional ao seu comprimento.

Um raciocínio semelhante permite-nos prever que

a resistência de um fio deve ser inversamente proporcional à área da sua secção recta.

Sendo o campo eléctrico dirigido segundo o eixo do condutor, direcção da corrente, as secções rectas são superfícies **equipotenciais** (perpendiculares à direcção do campo eléctrico). Se imaginarmos o condutor cortado longitudinalmente em duas partes iguais, cada metade tem a mesma diferença de potencial e a corrente total é a soma das correntes em cada uma das metades. Ou seja, temos uma associação de resistências em paralelo (fig. 11.13b). Assim, se R for a resistência do condutor de secção recta de área A , e R' a de um condutor do mesmo tipo com secção de área $A/2$ temos:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R'} + \frac{1}{R'} = \frac{2}{R'}$$

ou,

$$R' = 2R;$$

se a área passa a metade, a resistência duplica.

Em conclusão, para um condutor de secção A e comprimento L

$$R \propto \frac{L}{A}.$$

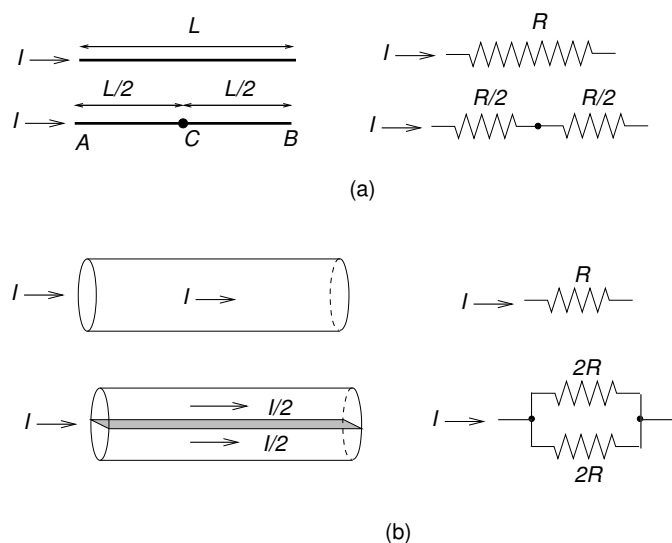


Figura 11.13: Um fio pode ser visto como uma associação em série de dois fios de metade do comprimento (a); ou como uma associação em paralelo de dois fios de metade da área da secção recta (b).

A constante de proporcionalidade é designada por **resistividade** (não confundir com massa volúmica, para a qual se usa, frequentemente o mesmo símbolo),

$$R = \rho \frac{L}{A}, \quad (11.10)$$

e caracteriza o material de que é composto o fio: não depende das dimensões do mesmo. Para a maior parte dos materiais ρ varia com a temperatura e depende ainda do grau de pureza e modo de preparação do material.

Se substituirmos a expressão da resistência de um fio na expressão da lei de Ohm,

$$V = RI$$

obtemos

$$V = \rho \frac{L}{A} I \quad (11.11)$$

Resistividade e Condutividade

Recordemos a relação entre a corrente por unidade de área de um condutor e o campo eléctrico:

$$\frac{I}{A} = \sigma E.$$

A conservação de carga implica que a corrente não varia ao longo do comprimento do condutor. Se a área da secção recta também não variar e o material for homogéneo (mesma condutividade em todos os pontos), esta relação permite-nos concluir que o campo eléctrico também não varia. Para um campo eléctrico uniforme, o trabalho por unidade de carga das forças eléctricas num deslocamento L de $A \rightarrow B$ na direcção e sentido do campo é

$$\Delta V = \frac{F_e \times L}{q} = E \times L = -(V_B - V_A) = V_A - V_B$$

Assim, num condutor homogéneo a diferença de potencial entre os terminais $V = V_A - V_B$ (sentido de I de $A \rightarrow B$) é

$$V = E \times L$$

e

$$\frac{I}{A} = \sigma \frac{V}{L}$$

ou

$$V = \frac{1}{\sigma} \frac{L}{A} I.$$

Esta é exactamente a expressão que encontramos na eq. 11.11 para a lei de Ohm expressa em termos da resistividade de um fio homogéneo. Por isso podemos concluir que

$$\rho = \frac{1}{\sigma}.$$

Unidades

Resolvendo a equação 11.10 em ordem à resistividade, vem:

$$\rho = R \frac{A}{L}.$$

Uma vez que a resistência tem como unidade o **Ohm** (Ω), a unidade SI de resistividade é o $\Omega \text{ m}$. Um fio de material de resistividade $1 \Omega \text{ m}$, com comprimento de 1 m e secção de 1 m^2 terá uma resistência² de 1Ω . A tabela 11.1 mostra que os metais mais comuns têm resistividades muito menores que um em unidades SI.

O valor de ρ para o Cobre explica por que razão temos ignorado a resistência dos fios de cobre. Para uma secção de 1 mm^2 e um comprimento de 1 m a resistência é

$$R = 1,7 \times 10^{-8} \times \frac{1}{10^{-6}} = 1,7 \times 10^{-2} \Omega.$$

²Para medir esta resistência teríamos que garantir que duas faces opostas de um cubo de 1 m de lado seriam superfícies equipotenciais!

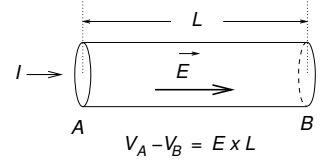


Figura 11.14: Relação entre o campo e a diferença de potencial num condutor homogéneo.

Metal	$\rho/10^{-8} \Omega \text{ m}$
Alumínio	2,65
Bismuto	115
Cobre	1,7
Ouro	2,4
Ferro	10
Prata	1,6
Níquel	59
Aço Inox (Cr/Ni)	96

Tabela 11.1: Resistividades de alguns metais a $T = 293 \text{ K}$ [9].

Para uma corrente de 1 A , a diferença de potencial é apenas de $0,017 \text{ V}$.

\mathcal{ETV}_6 : Uma bateria de automóvel, pode fornecer cerca de 4000 W de potência a 7 V , durante cerca de 30 s , no arranque do automóvel.

a) Qual é a corrente correspondente?

Imaginemos que estamos a tentar fazer arrancar um automóvel usando a bateria de um segundo automóvel colocado a 10 m de distância, com cabos de cobre de secção 5 mm^2 .

b) Para a corrente calculada em a), qual é a diferença de potencial em cada cabo e qual é o valor da potência dissipada nos dois cabos? Será possível por a funcionar o automóvel deste modo?

A característica de uma lâmpada

Uma lâmpada de incandescência é constituída por um filamento metálico de tungsténio. Como tal seria de esperar uma característica ómica.

Na verdade, em condições normais de funcionamento, a temperatura de uma lâmpada atinge perto de 2500°C . Como a resistividade do metal aumenta, em geral, com o aumento de temperatura, a lâmpada, quando brilha, tem uma resistência mais elevada que à temperatura ambiente.

Em geral, a resistividade de um metal tem uma variação linear com a temperatura, com a seguinte forma aproximada,

$$\rho(T) = \rho_0 [1 + \alpha (T - T_0)],$$

em que ρ_0 é a resistividade à temperatura T_0 . No caso do tungsténio o coeficiente $\alpha = 0,0046\text{ K}^{-1}$. Um filamento com uma resistência de $5\,\Omega$ a $T = 20^{\circ}\text{C}$ terá uma resistência mais de três vezes superior a 2500°C .

ETV₇: Os faróis de máximos de um automóvel, têm um filamento de tungsténio no interior de um estreito tubo de quartzo que contém Xénon. Nestas lâmpadas, lâmpadas de halogéneo, o filamento pode atingir temperaturas de quase 4500 K . Por isso o tubo não pode ser de vidro, pois fundiria. Sabendo que uma destas lâmpadas dissipa 100 W quando alimentada por uma bateria de 12 V ,

- a) calcular a resistência do filamento quando o farol está aceso;
- b) calcular a resistência do filamento à temperatura ambiente, 20°C ($\alpha = 0,0046\text{ K}^{-1}$);
- c) por que é que as lâmpadas fundem normalmente ao acender? Quando é que a corrente no filamento é máxima?

11.4.2 O funcionamento de uma pilha

Ao contrário de uma resistência, uma pilha pode funcionar como gerador. Sendo I a corrente de sentido $- \rightarrow +$ no interior da pilha e $V = V_+ - V_-$, a potência **transferida** para as cargas do circuito pela pilha é

$$P = VI.$$

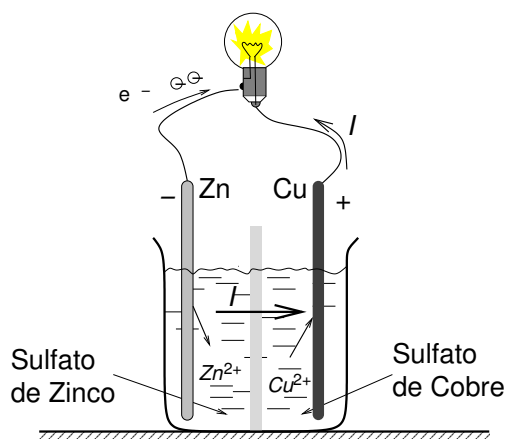


Figura 11.16: No interior da pilha há movimento de cargas positivas no sentido oposto ao campo eléctrico; íons de Zn^{2+} são injectados na solução junto ao eléctrodo de Zinco e íons de Cu^{2+} são recolhidos da solução junto ao eléctrodo de Cobre. Este transporte é possível porque as reacções químicas que ocorrem junto dos eléctrodos geram energia suficiente para que ele possa ocorrer.

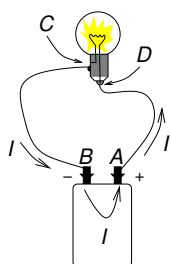


Figura 11.15: Qual é o receptor e gerador?

Como

$$V = \varepsilon - R_i I,$$

e

$$P = \varepsilon I - R_i I^2.$$

Este valor é positivo, se $\varepsilon > R_i I$: o circuito recebe energia da pilha. De onde vem esta energia?

Ela resulta da existência de reacções químicas no interior da pilha. A passagem de corrente implica uma alteração das ligações químicas dos constituintes da pilha; a respectiva energia diminui, sendo transferida para o sistema de cargas livres do circuito.

Tomemos como exemplo uma pilha galvânica de Cobre e Zinco (fig. 11.16). O eléctrodo negativo é uma barra de Zinco metálico, mergulhada num solução aquosa de sulfato de Zinco, onde existem íons Zn^{2+} e SO_4^{2-} . O eléctrodo positivo é uma barra de cobre mergulhada numa solução de sulfato de cobre (íons Cu^{2+} , SO_4^{2-}). Estas duas soluções podem trocar íons através, por exemplo, de uma barreira porosa.

A figura 11.17 representa, em esquema, a energia potencial de um electrão ao longo de um circuito alimentado por uma destas pilhas.

Quando o electrão passa no circuito exterior entre o Zinco e o Cobre a sua energia potencial diminui. Essa energia passa para

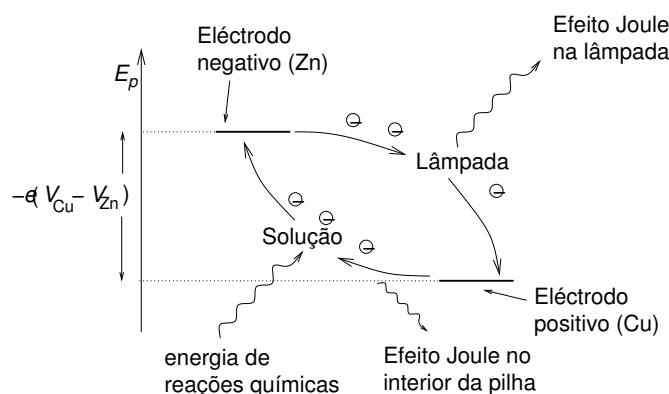
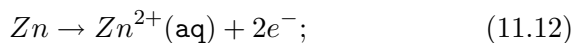
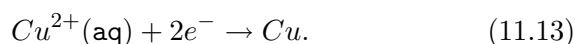


Figura 11.17: Ciclo energético de electrões numa pilha de cobre-zinco. Recorde-se que a energia potencial de um electrão é $E_P = -eV$. A energia libertada nas reacções químicas na solução permite transporte de electrões do Cobre para o Zinco, pela solução, aumentando a respectiva energia potencial. No circuito exterior a energia potencial eléctrica diminui e aparece como luz ou produção de calor na lâmpada. Note-se que, na realidade, não há electrões livres na solução; mas, por cada ião Zn^{2+} injectado na solução no eléctrodo de Zinco e Cu^{2+} capturado no eléctrodo de Cobre, há uma carga $2e$ transportada do zinco para o cobre, o que é equivalente a passar dois electrões do Cobre para o Zinco.

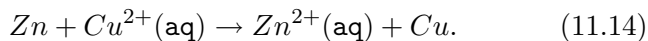
o material do filamento da lâmpada. Contudo, se não houvesse transferência de carga negativa do Cobre para o Zinco no interior da pilha, o eléctrodo de Cobre ficaria carregado negativamente, a repelir electrões, e a corrente pararia rapidamente. Na solução é necessário transportar carga negativa do Cobre para o Zinco (ou carga positiva no sentido inverso). Este movimento de carga é no sentido de energia potencial eléctrica **crescente**: a energia potencial das cargas **aumenta**. Isto só é possível porque um outro sistema cede a energia necessária. Há pois uma alteração das ligações químicas no sistema que liberta a energia necessária para este transporte. O eléctrodo de Zinco dissolve-se na solução



contudo, esta reacção deixa o eléctrodo carregado negativamente (dois electrões a mais) e, em resultado da atracção entre o eléctrodo e os iões positivos de Zinco na solução, pararia rapidamente se esta carga em excesso não fosse transferida para o outro eléctrodo pelo circuito externo. No eléctrodo de Cobre, iões de Cu^{2+} depositam-se no metal:



Por cada dois electrões transferidos do Zinco para o Cobre, temos uma reacção total:



Iões de Zn^{2+} são injectados na solução junto do eléctrodo de Zinco e iões de Cu^{2+} são retirados da mesma junto do de Cobre: temos pois uma corrente de cargas positivas do Zinco para o Cobre no interior da solução, ao mesmo tempo que o eléctrodo de Zinco se dissolve e o Cobre aumenta de massa.

Para uma pilha de Cobre-Zinco em condições padrão³ de funcionamento a energia libertada nesta reacção é de $\Delta E_0 = 2,2 \text{ eV}$ por átomo de Zinco dissolvido, ou seja, por cada dois electrões transferidos.

Suponhamos que temos uma corrente I no circuito, com o sentido de $+$ para $-$ no **exterior** da pilha. Como I é a carga por unidade de tempo e $-e$ a carga por electrão, passam I/e electrões no circuito, por unidade de tempo. A energia fornecida pelas reacções químicas por unidade de tempo é:

$$\frac{\Delta E_0}{2} \times \frac{I}{e}$$

Uma parte desta energia é dissipada no circuito externo:

$$P_{\text{ext}} = VI$$

em que V é a diferença de potencial entre os terminais $+$ e $-$, $V_+ - V_-$.

O movimento de cargas no electrólito da pilha é acompanhado por dissipação de energia por efeito de Joule, bem patente no aquecimento das pilhas quando debitam corrente:

$$P_{\text{int}} = R_{\text{int}} I^2$$

em que R_{int} é a **resistência interna** da pilha. O balanço de energia dá

$$\begin{aligned} \frac{\Delta E_0}{2} \times \frac{I}{e} &= P_{\text{ext}} + P_{\text{int}} = VI + R_{\text{int}} I^2 \\ &= VI + R_{\text{int}} I^2, \end{aligned}$$

³Soluções com concentrações de 1 M, pressão de uma atmosfera e temperatura de 25 °C.

■ Capacidade de Baterias ■

A capacidade de uma bateria não deve ser confundida com a sua força electromotriz.

Vimos acima que numa bateria a debitar corrente ocorrem reacções químicas. Por exemplo, no caso da pilha de Cobre e Zinco há um átomo de Zinco dissolvido e um de Cobre depositado, por cada dois electrões transferidos entre os eléctrodos. Ou porque os reagentes se esgotam ou porque o sistema acaba por ficar em equilíbrio químico, a carga total que pode ser transferida é limitada. Fabricantes de baterias costumam indicar a carga total que uma bateria pode transferir em **Ampere-hora**; um **Ampere-hora** é a carga transferida numa hora com uma corrente de um ampere, ou seja, 3600 C. Uma bateria de automóvel pode fornecer cerca de 70 **Ampere – hora**. Para uma corrente de 3,5 A duraria cerca de 20 horas. Contudo, é necessário dizer que a carga total que a bateria pode transferir depende, em geral, da corrente de funcionamento: se esta for demasiado alta, a bateria aquece (dissipação na resistência interna) e a variação de temperatura pode alterar as taxas das reacções química no seu interior; se for demasiado baixa, a bateria pode deteriorar-se em virtude de outras reacções não farádicas (sem transferência de carga) que podem também ocorrer: uma pilha descarrega lentamente, mesmo sem ser usada. Por isso a indicação de capacidade é acompanhada do valor da corrente de funcionamento.

Tipo	Capacidade	Corrente funcionamento
Automóvel	70 A h	3,5 A
D (C-Zn)	4,5 A h	100 mA
9-Volt (C-Zn)	0,4 A h	8 mA

Capacidades de baterias comuns [3]

Caixa 11.2: Capacidade de uma bateria.

ou seja,

$$\frac{\Delta E_0}{2e} = V + R_{\text{int}} I.$$

$\Delta E_0/2$ é a energia libertada pelas reacções químicas da pilha por cada electrão que passa no circuito; $\varepsilon = \Delta E_0/2e$ é a respectiva **energia por unidade de carga**, ou seja um potencial eléctrico. É a **força electromotriz** da bateria.

Em resumo, para uma pilha,

$$V = \varepsilon - R_{\text{int}} I \quad (11.15)$$

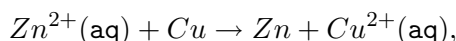
é a relação entre corrente e diferença de potencial.

Dizer que ΔE_0 vale 2,2 electrões-Volt no caso da pilha de Cobre-Zinco, é o mesmo que afirmar que $\varepsilon = 1,1\text{ V}$. Por definição, a variação de energia de dois electrões numa diferença de potencial de $1,1\text{ V}$ é $2,2\text{ eV}$.

As reacções químicas que ocorrem durante o funcionamento da pilha alteram, naturalmente, as concentrações de iões de Zinco e Cobre nas soluções; no fundo, uma pilha é um sistema químico no qual decorre, enquanto houver corrente, uma reacção que o aproxima do equilíbrio. Se não houver passagem de carga entre os dois eléctrodos as reacções 11.12, 11.13 param devido à acumulação de carga nos mesmos. Estas reacções com libertação de carga dizem-se **farádicas**.

Quando o equilíbrio químico é atingido, ou os reagentes se esgotam, as reacções cessam e a força electromotriz anula-se: a pilha está “descarregada”. À medida que nos aproximamos do equilíbrio a energia disponibilizada pela reacção, diminui: a força electromotriz diminui também. Só a podemos considerar como constante se a carga total que tiver sido transferida for uma fracção pequena da carga total que é necessária para atingir o equilíbrio químico ou esgotar os reagentes.

Se invertermos o sentido da corrente que passa na pilha, invertemos também o sentido dos processos químicos associados ao transporte de carga: passamos dissolver o eléctrodo de Cobre e a depositar o de Zinco. Por cada dois electrões que passam na pilha, teremos uma reacção inversa da da equação 11.14,



que **requer** uma energia $\Delta E_0 = 2,2\text{ eV}$. Nesta situação a pilha funciona como receptor, com uma força contra-electromotriz $\varepsilon = 1,1\text{ V}$. O ciclo da figura 11.17 está ser percorrido no sentido inverso e a pilha está a armazenar energia cedida pelo circuito nas ligações químicas dos seus elementos.

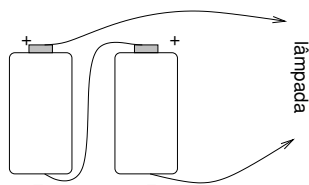


Figura 11.18: Duas pilhas em série duram o dobro?

$\mathcal{E}TV_8$: O Sr. Joaquim, funcionário de uma conhecida Escola Secundária do Porto tinha o encargo de mudar as pilhas de uma luz de emergência; fazia-o de quatro em quatro dias até que lembrou de modificar a alimentação da luz colocando duas pilhas idênticas em série. Raciocinou que tendo duas pilhas deveriam demorar o dobro a gastar-se. Contudo, teve uma grande surpresa. Qual foi?

11.5 Correntes dependentes do tempo

Se perguntarmos qual é o valor da corrente na resistência R na situação da figura 11.19a) a resposta só pode ser $I = 0$: o interruptor está aberto e não pode passar corrente. Com o interruptor fechado (figura 11.19b) já sabemos que $I = \varepsilon/R = 1 \text{ A}$.

Mas nada do que dissémos até agora nos preparou para a questão:

Quanto tempo demora a corrente a passar de 0 a 1 A ?

Certamente que este processo não é instantâneo. A diferença de potencial na resistência tem que passar de 0 a 9 V e isso implica re-distribuição de cargas, o que toma um certo tempo. Até agora concentramo-nos em situações estacionárias, em que as cargas que havia a distribuir já foram distribuídas, e as correntes são independentes do tempo: ignorámos completamente os processos **transitórios**, ou seja, os que ocorrem entre duas situações estacionárias e envolvem variação no tempo das correntes.

Para não ficarmos com a ideia que no reino dos circuitos está tudo “parado” vamos considerar em pormenor um exemplo de fenómeno transitório mais simples do que o figura 11.19.

11.5.1 Descarga do condensador

Se tomarmos um condensador carregado e o ligarmos as duas placas por um fio metálico, este descarrega. As cargas positivas de uma placa atraem as negativas da outra. Como não se podem mover pelo dieléctrico que as separa, nada acontece se mantivermos as placas separadas. Mas o fio metálico permite esse movimento e os electrões deslocam-se da placa negativa para a positiva e as placas deixam de estar carregadas. Quanto tempo demora este processo?

Podemos analisá-lo usando os conceitos de circuitos. O fio é uma resistência. No condensador carregado temos uma diferença de potencial entre a placa positiva e negativa

$$V = \frac{q}{C}$$

que é também a diferença de potencial nos terminais da resistência. Logo

$$V = RI$$

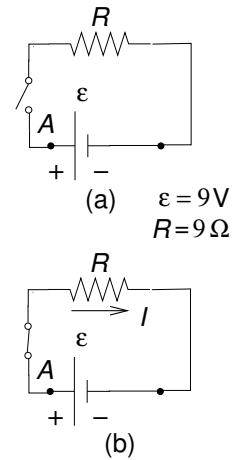


Figura 11.19: Quanto demora a corrente a passar de 0 em (a) para ε/R em (b)?

▷ Actividade A48

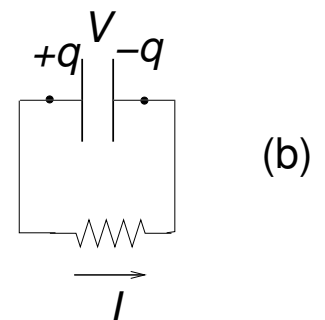
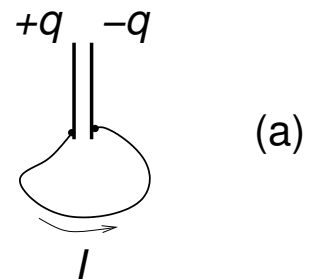


Figura 11.20: A descarga de um condensador.

ou seja

$$I = \frac{1}{RC}q$$

Problema resolvido: já determinamos a corrente!

De facto não! Ao contrário do que acontece com uma bateria, que internamente transporta carga da placa negativa para a positiva e substitui a que de lá sai, isso não acontece num condensador. Se passa uma carga por unidade de tempo I da placa positiva para a negativa a carga q diminui no tempo. Mais precisamente, a **definição de corrente** implica

$$I = -\frac{dq(t)}{dt},$$

em que $q(t)$ é a carga da placa positiva, ou seja, o que normalmente se designa por carga do condensador. Note-se o sinal menos; para $I > 0$ a carga do condensador diminui, ou seja tem derivada negativa.

Assim

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{1}{RC}q(t) \quad (11.16)$$

Esta é a equação da descarga do condensador.

Decaimento exponencial

Se soubermos o potencial inicial do condensador, V_0 , sabemos a respectiva carga inicial ($t = 0$)

$$q_0 = q(0) = CV_0$$

A equação de descarga diz-nos a velocidade inicial de variação de $q(t)$ é

$$\left. \frac{dq}{dt} \right|_{t=0} = -\frac{q_0}{RC}.$$

Se o gráfico de $q(t)$ tivesse um declive constante, fosse uma recta (fig. 11.21a), teríamos simplesmente

$$q(t) = q_0 - \left(\frac{q_0}{RC} \right) t = q_0 \left(1 - \frac{t}{RC} \right);$$

a carga anular-se-ia ao fim de um tempo $t = RC$. Mas, precisamente, o que a equação 11.16 diz é que o declive **não** é constante: diminui em valor absoluto à medida que $q(t)$ diminui. Por isso

devemos esperar uma variação mais parecida com a do gráfico da figura 11.21b em que a tangente à curva se vai aproximando da horizontal (declive nulo) à medida que $q(t) \rightarrow 0$. Não obstante, a tangente a esta curva em $t = 0$ é a recta referida acima e intercepta o eixo dos tempos em $t = RC$, a **constante de tempo da descarga**.

Na disciplina de Matemática foi introduzida a função exponencial que tem a propriedade de ser igual à sua derivada:

$$\frac{d}{dt}e^t = e^t$$

A carga do condensador é **proporcional** à sua derivada, de acordo com a equação 11.16; não surpreende por isso que se possa exprimir usando a função exponencial:

$$q(t) = q_0 e^{-t/RC}.$$

Derivando esta função, verificamos que

$$\frac{dq(t)}{dt} = q_0 e^{-t/RC} \times \frac{d}{dt} \left(-\frac{t}{RC} \right) = q_0 \left(-\frac{1}{RC} \right) e^{-t/RC}$$

que é exactamente a equação de descarga. O valor inicial é $q(0) = q_0 e^0 = q_0$.

Tempo de semi-vida. $t_{1/2}$

Uma das propriedades mais importantes deste decaimento é que o tempo que a carga demora a reduzir-se a uma determinada **fracção** do valor presente é fixo. Isto é, se $q_0 = 1 \mu\text{C}$, o tempo a reduzir-se a metade, $0,5 \mu\text{C}$, é igual ao que demora a passar de $0,5 \mu\text{C}$, para metade desse valor, $0,25 \mu\text{C}$, e assim sucessivamente. Esta propriedade é uma consequência da igualdade $e^{at} = (e^t)^a$. Designando por $t_{1/2}$ o tempo que demora a carga a reduzir-se a metade (semi-vida),

$$\begin{aligned} q(t_{1/2}) &= \frac{q_0}{2} = q_0 e^{-t_{1/2}/RC} \Rightarrow e^{-t_{1/2}/RC} = \frac{1}{2}; \\ q(2t_{1/2}) &= q_0 e^{-2t_{1/2}/RC} = q_0 \left(e^{-t_{1/2}/RC} \right)^2 = \frac{q_0}{4} \end{aligned}$$

e assim sucessivamente. Calculando logaritmos,

$$\ln \left(e^{-t_{1/2}/RC} \right) = \ln \left(\frac{1}{2} \right) \Rightarrow -\frac{t_{1/2}}{RC} = -\ln 2,$$

e

$$t_{1/2} = 0,693 \times RC.$$

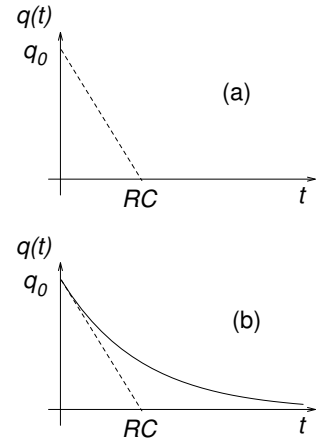


Figura 11.21: A solução da equação 11.16 não é uma recta, pois o declive tende para zero à medida que $q(t)$ diminui.

■ Um exercício com a exponencial ■

A equação de descarga de um condensador envolve uma derivada e pode ser escrita na forma:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{q(t + \Delta t) - q(t)}{\Delta t} = -\frac{1}{RC}q(t).$$

Tal como fizémos na discussão das leis de Newton (ver, por exemplo, Actividade A43), se Δt for muito pequeno, podemos aproximar esta equação por

$$\frac{q(t + \Delta t) - q(t)}{\Delta t} \approx -\frac{1}{RC}q(t),$$

que podemos resolver em ordem a $q(t + \Delta t)$:

$$q(t + \Delta t) \approx q(t) - \frac{1}{RC}q(t)\Delta t = q(t) \left(1 - \frac{\Delta t}{RC}\right).$$

Conhecendo $q(t)$, podemos calcular $q(t + \Delta t)$ para Δt pequeno. Se $q(0) = q_0$,

$$\begin{aligned} q(\Delta t) &\approx \left(1 - \frac{\Delta t}{RC}\right) q_0 \\ q(2\Delta t) &\approx \left(1 - \frac{\Delta t}{RC}\right) q(\Delta t) = \left(1 - \frac{\Delta t}{RC}\right)^2 q_0 \\ &\vdots \\ q(n\Delta t) &\approx \left(1 - \frac{\Delta t}{RC}\right)^n q_0. \end{aligned}$$

O resultado exacto é

$$q(n\Delta t) = q_0 e^{-n\Delta t/RC}$$

Usando uma calculadora e escolhendo, por exemplo, $q_0 = 1$ e $RC = 10$, facilmente podemos comparar as duas expressões e verificar que, se $\Delta t \ll RC$, elas se tornam muito próximas.

Com efeito, se definirmos $t = n\Delta t$, $\Delta t = t/n$, temos

$$q(t) = q(n\Delta t) \approx \left(1 - \frac{t}{nRC}\right)^n q_0 = \left(1 - \frac{a}{n}\right)^n q_0,$$

com $a = t/RC$. Tomar o limite $n \rightarrow \infty$ com t fixo é considerar $\Delta t \rightarrow 0$, e, de facto, prova-se na disciplina de Matemática que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{a}{n}\right)^n = e^{-a}.$$

Caixa 11.3: A exponencial e a equação de descarga.

A carga de um condensador

Como é que um condensador carrega? Por outras palavras, se no circuito da figura 11.22 fecharmos o interruptor, como varia a corrente, $I(t)$, com o tempo, t ?

Felizmente a carga e descarga do condensador são essencialmente o mesmo fenómeno. Se a fonte tiver uma diferença de potencial fixa entre os seus terminais, ε (estamos a ignorar a sua resistência interna, assumindo que ela é muito menor que R), temos

$$\varepsilon = V_R + V_C = RI + \frac{q}{C} \quad (11.17)$$

Com o sentido da corrente indicado,

$$I = \frac{dq}{dt} \quad (11.18)$$

e a equação de carga do condensador é

$$\frac{dq(t)}{dt} = -\frac{q(t)}{RC} + \frac{\varepsilon}{R} \quad (11.19)$$

À parte o segundo termo, esta equação tem exactamente o aspecto da equação da carga; No regime estacionário é evidente que não passa qualquer corrente neste circuito. A diferença de potencial do condensador será $V_C = \varepsilon$ e a respectiva carga $q_f = C\varepsilon$. Ou seja,

$$\frac{dq(t)}{dt} = -\frac{q(t)}{RC} + \frac{q_f}{RC} = \frac{1}{RC} (q_f - q) \quad (11.20)$$

A diferença entre a carga $q(t)$ e a carga no regime estacionário, $Q(t) = q_f - q(t)$ satisfaz **a mesma equação que na carga do condensador**,

$$\frac{dQ(t)}{dt} = -\frac{Q(t)}{RC}, \quad (11.21)$$

pois

$$\frac{d}{dt} (q_f - q) = -\frac{dq}{dt}$$

A solução desta equação é, obviamente,

$$Q(t) = Q_0 e^{-t/RC} \quad (11.22)$$

O valor inicial $Q_0 = Q(0)$ é q_f , pois a carga inicial $q(0) = 0$. Portanto,

$$q_f - q(t) = q_f e^{-t/RC},$$

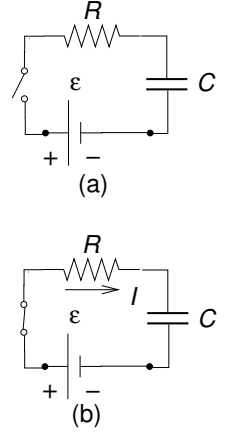


Figura 11.22: Como varia a corrente com o tempo, após fechar o interruptor?

ou

$$q(t) = q_f \left(1 - e^{-t/RC}\right). \quad (11.23)$$

Um gráfico desta função tem o aspecto da figura 11.23a. Para obter a corrente podemos derivar esta função, ou se formos preguiçosos, reparar nas equações 11.20 e 11.18:

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{1}{RC} (q_f - q) = \frac{q_f}{RC} e^{-t/RC} = \frac{\varepsilon}{R} e^{-t/RC}.$$

Note-se que o valor máximo da corrente, ε/R , é atingido logo após o fecho do interruptor (fig. 11.23b): depois, a corrente diminui à medida que a carga e a diferença no potencial do condensador aumentam. Por que será que nunca se deve ligar directamente um condensador aos terminais de uma fonte, sem uma resistência de protecção?

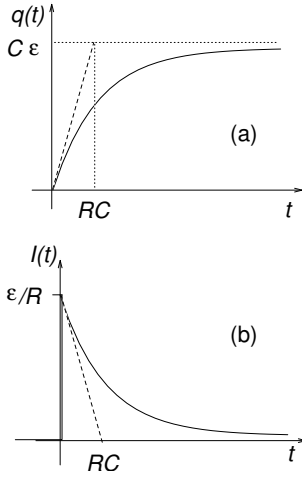


Figura 11.23: (a) Carga de um condensador; (b) corrente no circuito.

11.6 Conclusões

Os circuitos eléctricos são objectos físicos. Têm cargas, correntes, campos eléctricos e diferenças de potencial. Para situações estacionárias, e conhecidas as características dos elementos físicos de um circuito, foi possível formular “regras” que nos permitem saber quase tudo o que interessa sobre esse circuito: quais as correntes, as diferenças de potencial, as potências fornecidas ou dissipadas, etc. etc. Essas regras quase nos permitem esquecer a origem física das leis que lhes deram origem. Esta é uma situação extremamente vulgar em Ciência e Tecnologia. Um electricista que só lida com certo tipo de circuitos pode conhecer muito bem as regras de comportamento do seu sistema, ser extremamente competente, e nada saber de Electromagnetismo, a teoria das interacções eléctricas e magnéticas que regem o comportamento das cargas em qualquer situação, não apenas naquelas com que ele lida.

Por exemplo, a resposta à pergunta que fizemos no início da Secção 5, embora referente apenas a um circuito muito simples, exige um conhecimento muito mais detalhado do Electromagnetismo e sai fora do que se pode analisar com conceitos de circuitos. Em suma, para o mundo funcionar precisamos de ambos: do electricista e do físico que conhece as leis fundamentais.

11.7 Resposta aos $\mathcal{ETV}'s$

- 11.1. \mathcal{ETV}_1 : No caso da figura 11.7a a corrente é a mesma nas duas resistências; como $P = RI^2$, é a resistência maior que dissipa mais. Se

$$10 \times I^2 = 10^{-3} \text{ W} = 1 \text{ mW},$$

a potência dissipada na segunda resistência é

$$1000 \times I^2 = 0,1 \text{ W} = 100 \text{ mW}.$$

A potência total é 101 mW.

No caso figura 11.7b a diferença de potencial é a mesma nas duas resistências: como $P = V^2/R$, é a resistência menor que dissipa mais. Se

$$\frac{V^2}{10} = 10^{-3} \text{ W},$$

vem

$$\frac{V^2}{1000} = 10^{-5} \text{ W}.$$

A potência total é 1,01 mW.

- 11.2. \mathcal{ETV}_2 : A diferença de potencial na segunda lâmpada continuará a ser 12 V. A corrente que passa nela não se alterará. A potência dissipada também não: o seu brilho não se altera. A corrente total da fonte diminui, pois deixa de passar corrente numa das resistências.

- 11.3. \mathcal{ETV}_3 :

- (a) Pela característica da resistência,

$$V_R = V_A - V_B = RI;$$

pela da pilha:

$$V_A - V_B = \varepsilon - R_i I.$$

Logo:

$$\begin{aligned} RI &= \varepsilon - R_i I \\ I &= \frac{\varepsilon}{R + R_i}. \end{aligned} \quad (11.24)$$

- (b)

$$\begin{aligned} P_i &= R_i I^2 = \frac{R_i}{(R + R_i)^2} \varepsilon^2 \\ P_{\text{ext}} &= R I^2 = \frac{R}{(R + R_i)^2} \varepsilon^2 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{P_i}{P_{\text{ext}}} = \frac{R_i}{R}$$

Se $R_i \ll R$, $P_i \ll P_{\text{ext}}$. Para que $P_i < P_{\text{ext}}/10$, $R_i < R/10$.

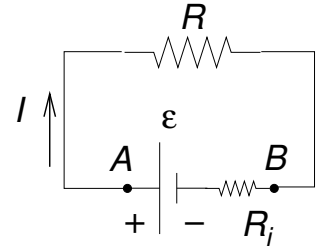


Figura 11.24: Qual é a corrente?

(c) Se $R \ll R_i$, $R + R_i \approx R_i$ e

$$P_{\text{ext}} \approx \frac{R}{R_i^2} \varepsilon^2;$$

A corrente $I \approx \varepsilon/R_i$ é limitada pela resistência interna. Se $R \gg R_i$, $R + R_i \approx R$ e

$$P_{\text{ext}} \approx \frac{\varepsilon^2}{R};$$

Neste caso $I \approx \varepsilon/R$. No primeiro caso $P_{\text{ext}} \rightarrow 0$ se $R \rightarrow 0$, pois toda a potência é dissipada internamente. No segundo caso $P_{\text{ext}} \rightarrow 0$ pois a corrente tende para zero se $R \rightarrow \infty$.

(d) Derivando em ordem a R a potência externa

$$\begin{aligned} \frac{dP_{\text{ext}}}{dR} &= \frac{\varepsilon^2}{(R + R_i)^2} - R \times \frac{2\varepsilon^2}{(R + R_i)^3} \\ &= \frac{\varepsilon^2}{(R + R_i)^2} \left(1 - \frac{2R}{R + R_i} \right) = \\ &= \frac{1}{(R + R_i)^2} \left(\frac{R_i - R}{R + R_i} \right) \end{aligned}$$

O máximo (derivada nula) corresponde ao valor $R = R_i$.

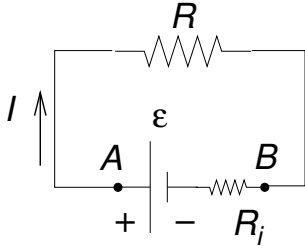


Figura 11.25: Quanto vale I ?

11.4. \mathcal{ETV}_4 : Usando o sentido da figura 11.25 e começando a percorrer a malha a partir do terminal + da pilha, a soma das variações de potencial é:

$$-RI - R_i I + \varepsilon_2 = 0.$$

Resolvendo para I , obtemos a solução apresentada na equação 11.24 da página 125.

11.5. \mathcal{ETV}_5 : A potência total dissipada por efeito de Joule nas três resistências é

$$P = R_1 I^2 + R_2 I^2 + R I^2 = (R_1 + R_2 + R) I^2;$$

Na bateria 1, a corrente I tem o sentido de $+$ \rightarrow $-$; a variação de energia potencial das cargas por unidade de tempo é $\varepsilon_1 I$. Mas na bateria 2 o sentido da corrente é $+$ \rightarrow $-$; a variação de energia potencial por unidade de carga que passa de $+$ \rightarrow $-$ é $-\varepsilon_2$; por isso, a variação de energia potencial das cargas, por unidade de tempo é $-\varepsilon_2 I$. Sendo assim,

$$\varepsilon_1 I - \varepsilon_2 I = (R_1 + R_2 + R) I^2$$

e

$$I = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{R_1 + R_2 + R}.$$

11.6. \mathcal{ETV}_6 :

- (a) A corrente é

$$I = \frac{P}{V} = 571 \text{ A.}$$

- (b) os fios de ligação têm um comprimento total de pelo menos 20 m. A respectiva resistência é:

$$\begin{aligned} R &= \rho_{Cu} \frac{L}{A} = 1,7 \times 10^{-8} \times \frac{20}{5 \times 10^{-6}} \\ &= \frac{1,7 \times 2}{5} \times 10^{-8+1+6} = 0,068 \Omega. \end{aligned}$$

Para a corrente calculada na alínea anterior,

$$V_{\text{fios}} = 0,068 \times 571 = 38,9 \text{ V.}$$

Com uma diferença de potencial de 7 V não é possível ter uma corrente tão grande nestes fios; a potência dissipada neles seria

$$P_{\text{fios}} = 0,068 \times (571)^2 = 22 \times 10^3 \text{ W,}$$

cinco vezes mais do que a potência que a bateria pode fornecer! Com estes fios, a corrente seria muito menor do que o necessário para ligar o motor de arranque do carro. Teríamos que usar cabos com muito maior secção e menor comprimento!

11.7. \mathcal{ETV}_7 :

- (a) Como
- $P = VI$
- e
- $V = RI$
- ,

$$\begin{aligned} I &= \frac{100}{12} = 8,3 \text{ A} \\ R &= \frac{12}{8,3} = 1,44 \Omega. \end{aligned}$$

Este é o valor de R a 4500 K: lâmpada em funcionamento.

- (b) Usando a expressão

$$\rho(T) = \rho_0 [1 + \alpha (T - T_0)],$$

com $\alpha = 0,0046 \text{ K}^{-1}$ vem,

$$\begin{aligned} \rho(4500) &= \rho(293) [1 + 0,0046(4500 - 293)] \\ &= \rho(293) \times 20. \end{aligned}$$

Se ignorarmos a variação das dimensões do filamento, as resistências a $T = 4500 \text{ K}$ e $T = 293 \text{ K}$ estão na mesma razão que as resistividades. Assim

$$R(293) = R(4500)/20 = 0,072 \Omega.$$

- (c) Ao acender, o filamento está frio e tem uma resistência total menor; logo a corrente é maior do que durante o funcionamento normal. Zonas onde o filamento já esteja enfraquecido, mais estreitas, têm maior resistência e aquecem em excesso, fundindo o metal.

- 11.8. $\mathcal{E}\mathcal{T}\mathcal{V}_8$: A surpresa foi que as pilhas duraram **metade** do tempo do que anteriormente! Com as pilhas em série, a corrente total no circuito passa a ser

$$I = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{R + R_1 + R_2} \approx \frac{2\varepsilon}{R},$$

se desprezarmos as resistências internas face à resistência exterior. Para uma única pilha a corrente seria ε/R . Portanto, com duas pilhas em série passa na lâmpada o dobro da corrente e por isso é dissipado o quádruplo da potência:

$$RI^2 = 4\frac{\varepsilon^2}{R}.$$

Assim, com duas pilhas em série cada uma fornece o dobro da energia, por unidade de tempo, do que uma só pilha; as pilhas duram metade do tempo. O que o Sr. Joaquim devia ter feito é ligar as pilhas em paralelo. Nesse caso a corrente na lâmpada seria a mesma que para uma pilha, $I = \varepsilon/R$, mas cada pilha forneceria **metade** da corrente total. Por isso cada pilha forneceria uma potência $\varepsilon I/2$, que é metade do que fornece uma única pilha.

11.8 Actividades, Problemas e Questões.

11.8.1 Actividades

- 11.1. Características $I - V$

Ver ficha de Actividade A49.

- 11.2. Descarga de um condensador

Ver ficha de Actividade A48.

11.8.2 Questões

- 11.1. Os valores das correntes nos três condutores da figura 11.26, e no sentido indicado pelas setas, são I , I_A e I_L . Como se exprime a condição de conservação de carga neste caso?

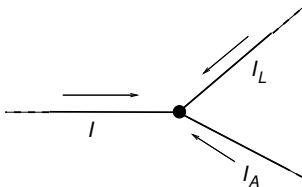


Figura 11.26: Como se exprime a lei dos nodos para as correntes no sentido das setas?

- 11.2. Se a potência dissipada num dispositivo é $P = VI$, porque razão ao inverter a corrente numa resistência, $I \rightarrow -I$, não passamos a ter uma potência dissipada negativa, ou seja, a receber energia no circuito?
- 11.3. Um fio condutor de metal é constituído por três segmentos de igual comprimento. O segmento do meio tem metade da área de secção recta dos outros dois. Entre as extremidades do fio existe uma diferença de potencial não nula.

(a) Representar esquematicamente a corrente e o módulo do campo eléctrico em função da posição ao longo do eixo do fio.

- 11.4. A figura 11.29 representa a característica $I - V$ de um dispositivo de dois terminais, com a definição de V e I indicadas na figura. A qual (quais) das seguintes situações pode corresponder? Justificar.

- (a) Resistência;
 (b) pilha em descarga;
 (c) motor;
 (d) pilha a carregar.

- 11.5. Dispomos de uma bobine de fio de cobre, da qual podemos tirar o comprimento que desejarmos. Discutir uma maneira de medir a resistividade do cobre usando o seguinte equipamento:

- fita métrica;
- amperímetro e voltímetro;
- fonte de alimentação de tensão variável;
- balança de precisão.

- 11.6. A figura 11.17 da página 115 representa o ciclo de energia potencial electrónica, quando a corrente na pilha tem sentido $- \rightarrow +$. O que teria que ser mudado para representar uma situação em que a corrente tem o sentido oposto?

- 11.7. Uma solução de sulfato de cobre é condutora. Mergulhando nela dois eléctrodos de cobre e aplicando entre eles uma diferença de potencial (com uma fonte de tensão por exemplo) é possível passar corrente na solução.



Figura 11.27: Um fio com uma constricção. Como variam a corrente e o campo eléctrico ao longo do seu eixo?

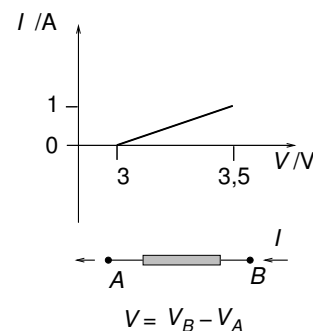


Figura 11.28: Característica $I - V$ de um dispositivo.

- (a) Quais são as reacções que ocorrem junto de cada eléctrodo?
- (b) A passagem de corrente é acompanhada de variação de massa dos eléctrodos?
- (c) Este dispositivo tem certamente uma resistência interna, devido à dissipação que ocorre por efeito de Joule na solução. Terá uma força electromotriz? Ou contra-electromotriz?

11.8.3 Problemas

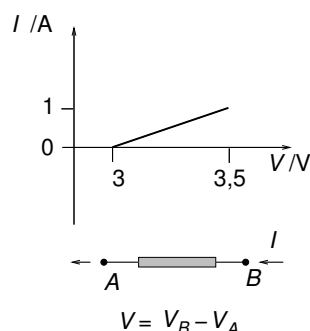


Figura 11.29:
Característica $I - V$ de um dispositivo.

11.1. A bateria de uma automóvel tem uma tensão nominal de 12 V (sem corrente). Contudo, no arranque do motor, a bateria fornece uma potência de 4000 W com uma diferença de potencial de apenas 7 V nos seus terminais.

- (a) Qual é a resistência interna da bateria?
- (b) No arranque, que potência é dissipada na resistência interna da bateria?

11.2. A figura 11.29 representa a característica $I - V$ de um dispositivo de dois terminais, com as definições de I e V indicadas na figura.

- (a) Está a funcionar como gerador ou receptor?
- (b) Qual é a respectiva resistência interna?
- (c) A funcionar a uma corrente de $I = 1$ A, qual é a potência dissipada internamente por efeito de Joule?
- (d) Qual é a potência total transferida pelo circuito ao dispositivo, para o mesmo valor de corrente. É positiva ou negativa?

Seja receptor ou gerador, podemos definir um rendimento do dispositivo do mesmo modo: energia trocada com o circuito com exclusão da dissipada por efeito de Joule, dividida pela energia total (útil mais dissipada).

- (e) Qual é o rendimento deste dispositivo?

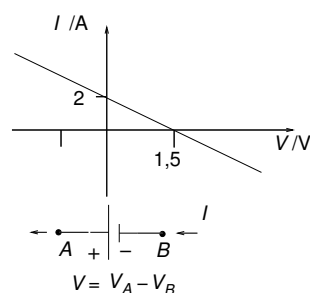


Figura 11.30:
Característica $I - V$ de uma pilha.

11.3. A figura 11.30 mostra a característica de uma pilha.

- (a) Qual é a sua força electromotriz?
- (b) Qual é a sua resistência interna?

- (c) Que corrente debita se os seus terminais forem curto circuitados (com uma resistência nula, ou extremamente baixa)?
- (d) Uma gama de valores de V desta curva pode ser medida usando apenas uma resistência variável, além de um amperímetro e um voltímetro. Qual?
- (e) Outras partes da curva só podem ser medidas com recurso a outra fonte de tensão. Indique que circuito poderia usar para medir a secção da curva com $V < 0$.
- 11.4. O circuito da figura 11.31 é indicado como podendo medir directamente a força electromotriz de uma pilha. A ideia é usar um fonte de alimentação variável em oposição à pilha. Quando a corrente I no amperímetro for nula a diferença de potencial nos terminais da pilha seria

$$V = \varepsilon - R_i I = \varepsilon$$

e o valor de ε pode ser medido directamente no voltímetro. Contudo isto só é verdade se ignorarmos a resistência interna do voltímetro.

- (a) Analisar o circuito e determinar a correcção que é necessário introduzir se considerarmos as resistências internas da pilha e do voltímetro finitas.
- 11.5. Um pilha de Zinco-Cobre descarrega sobre uma resistência uma corrente de 100mA , durante uma hora. Qual é variação de massa de cada um dos eléctrodos?

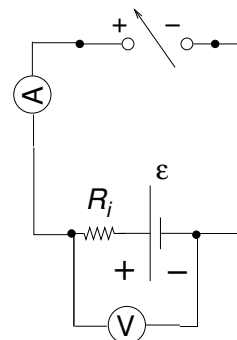


Figura 11.31: Como medir a fem de uma pilha.

Capítulo 12

Relatividade

*Quando se eliminou o impossível, o que quer que reste,
por mais improvável que seja, tem de ser a verdade.*

Sherlock Holmes

12.1 Duas revoluções, duas constantes

No último ano do século XIX, um respeitado académico e Professor de Física, já nos seus quarenta anos, iniciou, sem querer, uma das maiores revoluções do conhecimento humano.

Max Planck não podia prever que a sua proposta de que a transferência de energia entre a radiação e a matéria se processava em pacotes discretos de energia, os *quanta*, culminasse, um quarto de século mais tarde, na descoberta da Mecânica Quântica. Tanto mais que considerava a hipótese dos quanta como um mero expediente de cálculo, cujo objectivo era obter uma fórmula para descrever a distribuição experimental da energia da radiação térmica pelos vários comprimentos de onda. O nome de Planck ficou para sempre ligado a uma nova constante universal, h , a constante de Planck, que aparece pela primeira vez no seu artigo de 1900, e relaciona a frequência da radiação electromagnética, ν , com a energia dos pacotes transferidos de, e para, a matéria:

$$E = h\nu.$$

A outra revolução da Física do século XX começou um pouco mais tarde, em 1905, pela pena de um obscuro funcionário de um escritório de patentes, que nunca tinha tido um posto universitário, e



Figura 12.1: Max Planck, 1858–1947 [5]

■ Albert Einstein, 1879–1955 ■



Albert Einstein, por volta de 1905

Albert Einstein nasceu em Ulm na Alemanha em 1879. Passou a sua infância em Munique, onde começou a frequentar a escola. O mito de que Einstein era um fraco aluno não corresponde à verdade: as suas classificações eram boas e em matemática eram mesmo excepcionais. Mas desde muito cedo Einstein revelou uma profunda aversão ao autoritarismo e falta de liberdade de pensamento do sistema escolar alemão. Em 1896, ainda menor, conseguiu mesmo renunciar à cidadania alemã, tornando-se cidadão Suíço em 1901, um ano depois de obter o seu diploma na Escola Politécnica de Zurique. A sua independência não o tornava popular entre os seus professores e só em 1909 conseguiu o seu primeiro posto académico.

Foi em 1905, como funcionário de um escritório de patentes, que Einstein publicou cinco trabalhos sobre três temas distintos (efeito fotoelétrico, relatividade restrita e movimento browniano), qualquer deles merecedor de Prémio Nobel.

Contudo, o seu trabalho mais excepcional estava ainda para vir. Em 1916, após 11 anos de labor intenso, Einstein publicou as equações da Relatividade Geral, que identificam a Gravitação com a geometria do espaço-tempo.

Einstein teve ainda uma influência notável no desenvolvimento da Mecânica Quântica, embora nunca a tivesse aceiteado como teoria satisfatória.

Faleceu em Princeton em 1955. A sua contribuição para a Física só encontra paralelo em Isaac Newton.

Caixa 12.1: Albert Einstein, um ícone do século XX.

que se chamava Albert Einstein. Também estava relacionada com uma constante universal, mas desta vez não tinha sido descoberta por Einstein.

Em 1864, um físico escocês, James Clerk Maxwell, tinha conseguido reunir num conjunto de equações, que receberam o seu nome, todas as leis que regem as interacções eléctricas e magnéticas e a cuja investigação estavam ligados os nomes de Volta, Coulomb, Ampère, Lenz, Oersted, Biot, Savart e Faraday.

Uma constante que aparecia nas suas equações, e cujo valor se podia obter a partir de medições de forças eléctricas e magnéticas, tinha as unidades de uma velocidade. Quando Maxwell a calculou e verificou que o seu valor era praticamente o da velocidade da luz, concluiu, e bem, que a luz era de facto um fenómeno electromagnético e a constante em causa, c , a sua velocidade.

As raízes da revolução iniciada e terminada por Einstein, estão precisamente neste facto: a existência de uma constante universal que é uma velocidade. Este simples facto deu origem a uma revisão profunda das nossas concepções mais básicas sobre natureza do espaço e do tempo.

A nossa tarefa neste capítulo é compreender esta relação entre a existência de uma velocidade que é uma constante universal e a natureza do espaço e tempo. Mas primeiro temos que entender o que é o Princípio da Relatividade, uma ideia tão antiga como a Física e já conhecida de Galileu e de Newton.



James Clerk Maxwell.

Figura 12.2: James Clerk Maxwell, 1831-1879.

12.2 Princípio da Relatividade

Suponhamos que nos é proposto o seguinte desafio:

Vamos ser colocados numa carruagem de comboio, sem janelas. O comboio vai percorrer uma trajectória plana, rectilínea, a velocidade uniforme. Podemos dispor de todos os instrumentos que quisermos, réguas, cronómetros, balanças, sensores de pressão, de som, de luz, fontes de alimentação, pilhas, amperímetros, voltímetros, osciloscópios, etc. O desafio é simples: determinarmos a velocidade do comboio, sem olhar para fora nem receber nenhuma informação do exterior, apenas através de experiências feitas na carruagem.

O Princípio de Relatividade afirma que esta tarefa é impossível!

Quaisquer experiências ou observações têm sempre implícito um **sistema de referência**. Quando fizemos experiências de colisões entre carros em calhas de alumínio, colocámos as calhas em cima de uma mesa de laboratório com sensores de movimento nas pontas. Todos estes objectos tinham posições fixas entre si e relativamente às paredes e soalho da sala. As distâncias e velocidades dos carros eram medidas relativamente a estes objectos. Se quisermos repetir uma tal experiência no comboio, a mesa, as calhas e os sensores terão posições fixas relativamente à carruagem e em conjunto com ela, constituem um novo **sistema de referência**, que pode estar em movimento relativamente ao anterior.

Grandezas físicas, como coordenadas de posição, ou componentes de velocidades, acelerações, forças, ou energias são sempre relativas a um dado sistema de referência. Um corpo, pousado numa mesa na carruagem do comboio, tem uma velocidade e energia cinética **nulas** no referencial do comboio; se este estiver em movimento, tem velocidade e energia cinética não nulas no referencial da sala da escola onde são feitas as experiências deste projecto.

Dito isto, o **Princípio de Relatividade** tem a seguinte expressão:

Princípio de Relatividade

As leis da Física são as mesmas em dois referenciais em movimento relativo uniforme e rectilíneo (velocidade constante).

Assim, a realização de experiências num dado sistema de referência, nada nos pode dizer sobre a sua velocidade (constante) em relação a outro referencial, pois os resultados dessas experiências são os mesmos qualquer que seja essa velocidade relativa.

12.2.1 O Princípio da Relatividade e a velocidade da luz

Suponhamos que viajamos numa carruagem do Metro do Porto e somos testemunha de um disparo feito do fundo da carruagem. As câmaras de vigilância do comboio registam o evento e a análise das respectivas imagens permite-nos determinar que a bala demorou

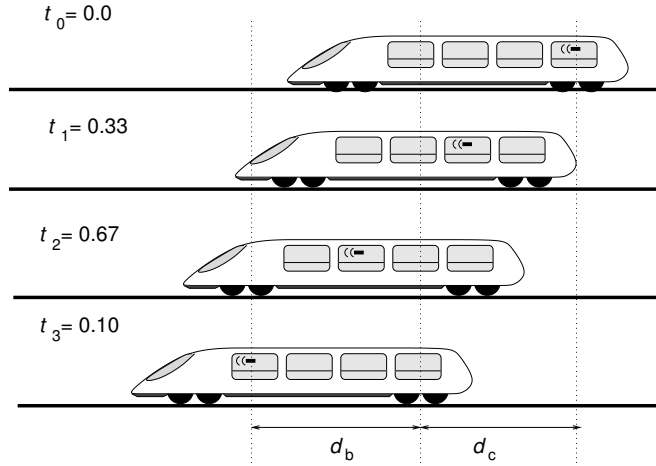


Figura 12.3: Um disparo dentro da carruagem filmado numa câmara exterior.

$\Delta T = 0,1 \text{ s}$ a viajar o comprimento da carruagem. Medindo essa distância, $\Delta X = 20 \text{ m}$, calculamos a velocidade da bala:

$$V = \frac{\Delta X}{\Delta T} = \frac{20}{0,1} = 200 \text{ m s}^{-1}. \quad (12.1)$$

Todas estas medições foram (ou podem ser feitas) no referencial da carruagem: as câmaras, com o seu relógio interno, e as fitas métricas são instrumentos relativos a este referencial.

Imaginemos agora que o mesmo acontecimento foi registado por uma câmara fixa no solo. Os tempos e as distâncias são agora medidos por outro conjunto de instrumentos ligados a este referencial. Neste capítulo vamos muitas vezes ter necessidade de escrever grandezas em dois referenciais; passaremos a distinguir as grandezas nos dois referenciais usando maiúsculas num deles e minúsculas no outro. Por isso usámos na equação 12.1 X , T e V em vez dos símbolos mais usuais, x , t e v ; estes ficam reservados para o referencial do solo.

Até Einstein, todo o mundo achou óbvio que o filme registado no exterior tinha exactamente o aspecto da figura 12.3:

- O intervalo de tempo Δt que a bala demora a atingir a frente da carruagem é o mesmo que o intervalo correspondente, ΔT , medido no referencial da carruagem:

$$\Delta t = \Delta T. \quad (12.2)$$

Isto é, as câmaras dos dois referenciais registam exactamente o mesmo número de imagens entre o início e o fim do processo.

- A distância que a bala avançou relativamente à carruagem, na perspectiva da câmara exterior, d_b , tem o mesmo valor que a distância que foi medida no referencial da carruagem:

$$d_b = \Delta X = V \Delta T. \quad (12.3)$$

Sendo assim, a velocidade da bala medida no referencial do solo é:

$$\begin{aligned} v = \frac{\Delta x}{\Delta t} &= \frac{d_b + d_c}{\Delta t} = \\ &= \frac{V \Delta T}{\Delta t} + u = V + u \end{aligned}$$

em que u é a velocidade do comboio no referencial do solo.

Em resumo:

Dados dois referenciais \mathcal{R} e \mathcal{R}' , e u a velocidade de \mathcal{R}' em \mathcal{R} , numa dada direcção; um corpo com velocidade v em \mathcal{R} na mesma direcção que u , tem uma velocidade V em \mathcal{R}' dada por:

$$V = v - u. \quad (12.4)$$

No caso referido acima $V = 200 \text{ m s}^{-1}$; se a velocidade u da carruagem for 20 m s^{-1} na direcção de movimento da bala,

$$v = 220 \text{ m s}^{-1}.$$

A bala viajou 22 m no referencial do solo no mesmo tempo que viajou 20 m no do comboio, pois este avançou 2 m no mesmo intervalo de tempo, **no referencial do solo**.

Se a bala fosse disparada no sentido oposto ao do deslocamento do comboio teríamos $V = -200 \text{ m s}^{-1}$ e

$$v = -200 + 20 = -180 \text{ m s}^{-1}.$$

A equação 12.4 generaliza-se facilmente a referenciais em movimento relativo de translação arbitrário, (ver Caixa 12.2 na página 140):

$$\vec{V} = \vec{v} - \vec{u} \quad (12.5)$$

Ao lidar com aplicações desta equação é muito fácil, e frequente, confundirmos as definições e trocarmos os sinais. Talvez seja útil notar o seguinte:

- Duas das velocidades são **medidas no mesmo referencial**: a velocidade de um corpo, \vec{v} , e a velocidade de um outro referencial, \vec{u} . Ou, alternativamente, \vec{V} e \vec{U} ; como é óbvio $\vec{U} = -\vec{u}$;

Com esta convenção de capitalização, a seguinte regra dá sempre a fórmula correcta:

- As velocidades do corpo estão em membros opostos da equação com o sinal positivo;
- A velocidade do referencial é escrita no mesmo membro que a outra velocidade medida no mesmo referencial (\vec{u} no mesmo membro que \vec{v} , ou \vec{U} no mesmo membro de \vec{V}) com o sinal negativo. Ou seja,

$$\vec{V} = \vec{v} - \vec{u}$$

ou

$$\vec{v} = \vec{V} - \vec{U}.$$

Se o corpo se move com a mesma velocidade que o referencial, $\vec{v} = \vec{u}$ ou $\vec{V} = \vec{U}$, a sua velocidade no outro referencial deve ser nula.

ETV₁: A velocidade máxima de dois barcos de transporte de passageiros relativamente às águas de um rio é de 25 km h^{-1} . Um dos barcos faz serviço entre duas plataformas a dois quilómetros de distância na mesma margem. O outro entre plataformas em margens opostas, uma em frente à outra, também a dois quilómetros de distância. Quando a velocidade das águas do rio é de 5 km h^{-1} , qual é a diferença de tempos das viagens de ida e volta dos dois barcos?

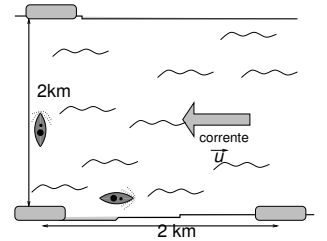


Figura 12.4: Os barcos demoram o mesmo tempo na viagem de ida e volta?

12.2.2 O tempo e espaço Newtonianos

A equação de transformação de velocidades, eq. 12.5, era bem conhecida de Galileu. Newton, nos *Principia*, explicitou as noções de tempo e espaço que suportam esta relação:

■ **Transformação de Galileu entre referenciais com movimento relativo de translação** ■

Medir coordenadas num referencial \mathcal{R} requer a definição de um sistema de eixos. Além disso existe sempre implícita a suposição que podemos determinar o instante de tempo t , nesse referencial, para qualquer acontecimento, em qualquer ponto do espaço. Imaginemos um outro referencial, com eixos paralelos e cuja origem, O' , tem vector de posição $\vec{r}_{O'}$ em \mathcal{R} . O vector de posição de qualquer partícula em \mathcal{R} pode escrever-se **com grandezas relativas apenas ao referencial \mathcal{R}** como

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_{O'}(t) + \vec{r}_1(t),$$

em que $\vec{r}_1(t) = \vec{r}(t) - \vec{r}_{O'}(t)$ é o vector que une a origem O' à partícula.

Se supusermos que no referencial \mathcal{R}' ,

- O tempo T é o mesmo que em \mathcal{R} , $T = t$,
- o vector de posição da partícula é $\vec{R}(T) = \vec{r}_1(t)$,

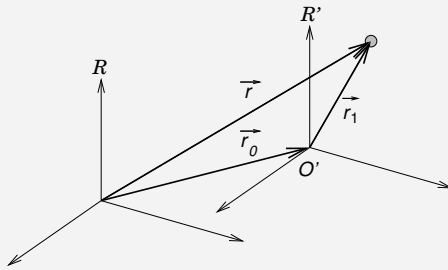
podemos concluir a seguinte transformação:

$$\vec{R}(T) = \vec{r}(t) - \vec{r}_{O'}(t).$$

Derivando e usando $\Delta T = \Delta t$, obtemos a lei de transformação de velocidades entre os dois referenciais,

$$\vec{V}(T) = \vec{v}(t) - \vec{v}_{O'}(t),$$

em $\vec{v}_{O'}(t)$ é a velocidade de \mathcal{R}' em \mathcal{R} . A equação 12.4 na página 138 é um caso particular de uma componente desta equação.



Caixa 12.2: Transformação de Galileu.

*O **espaço absoluto**, na sua natureza, sem qualquer relação com alguma coisa externa, permanece sempre idêntico e imutável.*

*O **tempo absoluto**, na sua natureza, flui uniformemente sem qualquer relação com alguma coisa externa.*

Estas grandiosas palavras exprimem conceitos que estão na base das equações 12.2 e 12.3 na página 137:

A distância entre dois pontos é um **invariante**; dois referenciais diferentes medem entre os mesmos pontos a mesma distância;

O intervalo de tempo entre dois acontecimentos é um **invariante**: dois referenciais diferentes medem entre os mesmos acontecimentos o mesmo intervalo de tempo.

▷ **invariante**: uma grandeza cujo valor não varia ao mudar de referencial.

Estas duas leis implicam a lei de transformação da velocidade, $\vec{v} \rightarrow \vec{V}$, que não é um **invariante** entre referenciais em movimento relativo:

$$\vec{V} = \vec{v} - \vec{u}. \quad (12.6)$$

Aqui reside o problema que preocupou Einstein em 1905: esta lei de transformação implica que o Princípio da Relatividade não é válido para fenómenos electromagnéticos.

A descoberta de Maxwell é que as leis dos fenómenos eléctricos e magnéticos determinam a velocidade c de um sinal luminoso, independentemente do modo como é emitido. Mas, de acordo com a análise de Galileu e Newton, a velocidade da luz não pode ser a mesma no referencial do comboio e no referencial do solo.

Suponhamos que as equações de Maxwell são válidas no referencial do comboio. A velocidade de um sinal luminoso neste referencial será c , a constante universal das equações de Maxwell. Mas, se o sinal viajar da traseira para a frente do comboio, **no referencial do solo** a sua velocidade será:

$$v = c + u$$

Se viajar na direcção oposta a velocidade do solo será

$$v = c - u$$

A velocidade da luz não só não é c , como é variável com a direcção de propagação.

Em resumo:

As leis de Maxwell não podem ser válidas nos dois referenciais, ou seja, as leis das interações eléctricas e magnéticas são diferentes em referenciais em movimento relativo uniforme e rectilíneo. O Princípio da Relatividade não pode valer para fenómenos eléctricos e magnéticos, se a lei de transformação de velocidades for dada pela transformação de Galileu (equação 12.5 na página 138).

12.2.3 Princípio da Relatividade e a Física Newtoniana.

Dicionário de cinemática

Para apreciar melhor a maneira como Einstein abordou o problema referido, fazemos aqui um pequeno interlúdio para ver como as leis de Newton são compatíveis com o Princípio da Relatividade e a transformação de Galileu.

Consideremos então dois referenciais, \mathcal{R} e \mathcal{R}' , em movimento relativo e tentemos estabelecer um dicionário entre grandezas medidas em \mathcal{R} (minúsculas) e \mathcal{R}' (maiúsculas). Admitimos que os dois sistemas de eixos são paralelos, e que a origem de \mathcal{R}' tem um vector de posição $\vec{r}_{O'}(t)$ em \mathcal{R} : o movimento relativo dos dois referenciais é apenas de translação. A velocidade e aceleração de \mathcal{R}' são:

$$\begin{aligned}\vec{u}_{O'}(t) &= \frac{d\vec{r}_{O'}(t)}{dt} \\ \vec{a}_{O'}(t) &= \frac{d\vec{u}_{O'}(t)}{dt}.\end{aligned}$$

O nosso dicionário tem as seguintes entradas:

Grandeza	\mathcal{R}	\mathcal{R}'
Distância entre dois pontos	d	$D = d$
Intervalo de tempo entre acontecimentos	Δt	$\Delta T = \Delta t$
Vector de posição	$\vec{r}(t)$	$\vec{R}(T) = \vec{r}(t) - \vec{r}_{O'}(t)$
Vector velocidade	$\vec{v}(t)$	$\vec{V}(T) = \vec{v}(t) - \vec{u}_{O'}(t)$
Vector aceleração	$\vec{a}(t)$	$\vec{A}(T) = \vec{a}(t) - \vec{a}_{O'}(t)$

Contudo, a cinemática não é suficiente para formular as leis da dinâmica Newtoniana. Precisamos dos conceitos de massa e força. Começemos pela massa: como se transforma entre referenciais?

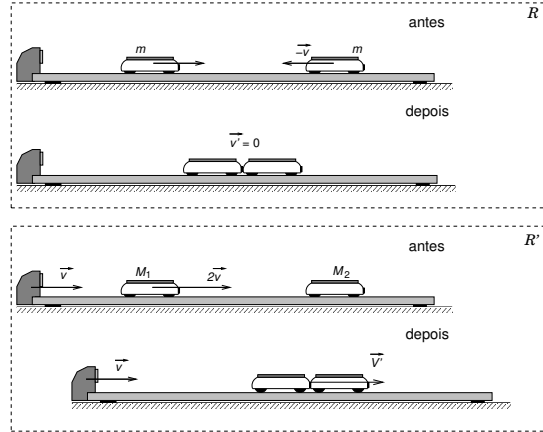


Figura 12.5: Uma colisão inelástica analisada em dois referenciais mostra que dois corpos com massas iguais em \mathcal{R} têm massas iguais em \mathcal{R}' . No primeiro caso, como as massas são iguais e as velocidades são opostas, a velocidade final é nula. Se o referencial \mathcal{R}' tiver uma velocidade $\vec{u} = -\vec{v}$, igual ao do carro da direita, este está parado em \mathcal{R}' e o outro tem velocidade $\vec{V} = \vec{v} - \vec{u} = 2\vec{v}$. Após a colisão o conjunto, parado em \mathcal{R} , tem velocidade $\vec{V}' = -\vec{u} = \vec{v}$ em \mathcal{R}' . Logo a conservação de momento implica $M_1 \times 2\vec{v} = (M_1 + M_2) \vec{v}$, ou seja, $M_1 = M_2$. Este argumento pode ser generalizado para qualquer razão entre massas.

Massa como invariante

Suponhamos que observamos uma colisão entre duas partículas de massas m_1 e m_2 em \mathcal{R} ; a conservação de momento linear implica:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2 \quad (12.7)$$

em que no primeiro membro temos o momento total antes da colisão e no segundo depois da colisão.

A lei de conservação de momento no referencial \mathcal{R}' terá a forma:

$$M_1 \vec{V}_1 + M_2 \vec{V}_2 = M_1 \vec{V}'_1 + M_2 \vec{V}'_2 \quad (12.8)$$

em que, de acordo com a nossa convenção, designamos as massas no novo referencial por maiúsculas. Usando o dicionário acima referido,

$$\begin{aligned} \vec{V}_1 &= \vec{v}_1 - \vec{u} \\ \vec{V}_2 &= \vec{v}_2 - \vec{u} \\ \vec{V}'_1 &= \vec{v}'_1 - \vec{u} \\ \vec{V}'_2 &= \vec{v}'_2 - \vec{u}, \end{aligned}$$

para substituir na equação 12.8, obtém-se,

$$M_1 \vec{v}_1 + M_2 \vec{v}_2 = M_1 \vec{v}'_1 + M_2 \vec{v}'_2, \quad (12.9)$$

visto que os termos em \vec{u} cancelam nos dois lados da equação. As duas equações 12.7 e 12.9 só podem ser ambas válidas se a razão entre as massas for a mesma nos dois referenciais¹

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{M_1}{M_2}.$$

Em resumo: as razões entre as massas de dois quaisquer corpos são as mesmas nos dois referenciais, se a conservação de momento linear se verificar em ambos. Escolhendo o mesmo corpo para unidade de massa em ambos os referenciais (por exemplo, um dm^3 de água), esta relação implica que a massa é um invariante:

$$M = m.$$

ETV₂: Numa experiência de colisão entre dois carros, um deles tem massa 0,5 kg e o outro 0,25 kg. O primeiro carro colide como segundo, que está parado, com uma velocidade de $v = 2 \text{ m s}^{-1}$.

- a) Qual é velocidade do centro de massa do sistema?
- b) Quais são as velocidades iniciais dos dois carros **no referencial** do centro de massa?
- c) Supondo que a colisão é elástica, calcular as velocidades dos dois carros no referencial do centro de massa, após a colisão.
- d) Calcular as velocidades finais dos dois carros no referencial do laboratório.

Referenciais inerciais

No caso de dois referenciais em movimento relativo uniforme, $\vec{u}_{O'}(t) = \text{constante}$, $\vec{a}_{O'} = 0$, a aceleração é um **invariante**:

$$\vec{A}(t) = \vec{a}(t) \quad (\vec{u}_{O'}(t) = \text{constante})$$

¹Isso vê-se facilmente, pondo em evidência uma das massas nas duas equações.

Se a massa e a aceleração são as mesmas, $m\vec{a}$ tem o mesmo valor e a segunda Lei de Newton será válida nos dois referenciais se as **forças** forem as mesmas!

Por exemplo, a lei da Gravitação Universal especifica uma força que depende da massa das partículas em interação e da distância entre elas: como são ambas grandezas que não variam, a força gravítica é invariante na mudança de referencial. Se todas as leis de força tiverem esta propriedade, o Princípio da Relatividade será válido e as leis de Newton terão a mesma forma em referenciais em movimento relativo uniforme.

Se imaginarmos, por um momento, que conhecemos todas as leis de força, podemos, pelo menos em princípio, certificarmos-nos que a força total sobre uma certa partícula é nula. De acordo com a lei da inércia, o movimento desta partícula deve ser uniforme, $\vec{a} = 0$. Se isso acontecer num dado referencial, \mathcal{R} , acontecerá em qualquer outro que esteja em movimento uniforme relativamente a \mathcal{R} ; mas não em relação a um referencial \mathcal{R}' acelerado em relação a \mathcal{R} , em que:

$$\vec{A} = \vec{a} - \vec{a}_{O'}(t).$$

e portanto

$$m\vec{A} = m\vec{a} - m\vec{a}_{O'}$$

Há duas maneiras, diferentes na perspectiva, de resumir esta situação:

à *La Newton*

As forças newtonianas são invariantes na mudança de referencial,

$$\vec{f} \text{ em } \mathcal{R} \rightarrow \vec{F} = \vec{f} \text{ em } \mathcal{R}';$$

a segunda lei de Newton só é válida numa classe de referenciais chamados **referenciais inerciais**, nos quais uma partícula livre de forças (de acordo com as leis que determinam as forças newtonianas) se move com velocidade uniforme. Os referenciais inerciais tem movimento relativo uniforme e rectilíneo. Num referencial acelerado em relação a um referencial inercial a segunda lei não é válida.

à *La Einstein*

A segunda lei de Newton é válida em qualquer referencial,

$$\begin{aligned}\vec{f} &= m\vec{a} && \text{em } \mathcal{R} \\ \vec{F} &= m\vec{A} && \text{em } \mathcal{R}',\end{aligned}$$

mas entre referenciais com aceleração mútua (\mathcal{R}' com aceleração $\vec{a}_{O'}$ em \mathcal{R}) as forças não são invariantes:

$$\vec{f} \text{ em } \mathcal{R} \rightarrow \vec{F} = \vec{f} - m\vec{a}_{O'} \text{ em } \mathcal{R};$$

Assim, as forças no referencial \mathcal{R}' , acelerado em relação a \mathcal{R} , diferem das forças em \mathcal{R} de um termo $-m\vec{a}_{O'}$. Esta força adicional tem as seguintes características:

- actua indistintamente sobre qualquer corpo;
- é proporcional à massa de cada corpo.

Como veremos, esta segunda perspectiva foi muito importante para Einstein, quando estendeu a Teoria da Relatividade para incluir as forças gravíticas. Mas estamos a adiantar-nos: inicialmente Einstein só se preocupou com referenciais em movimento relativo uniforme.

12.3 Os postulados da Relatividade Restrita

12.3.1 Três ideias incompatíveis

Temos então três ideias claramente em contradição:

12.1. A lei de transformação de velocidades entre referenciais em movimento relativo, baseada nas ideias Newtonianas de espaço e tempo:

$$\vec{V} = \vec{v} - \vec{u}.$$

12.2. O Princípio da Relatividade abrangendo todos os fenómenos, incluindo os electromagnéticos.

12.3. As equações de Maxwell, uma descrição completa de todas as leis das interações electromagnéticas com a sua constante universal, c , a velocidade da luz.

Uma pelo menos tem que cair! Qual?

No final do século XIX e princípio do século XX, a opinião maioritária dos físicos inclinava-se para deixar cair a segunda ideia, excluindo os fenómenos electromagnéticos, propagação de luz incluída, do âmbito do Princípio da Relatividade.

Havia boas razões para acreditar na síntese de Maxwell. Ela culminava pelo menos dois séculos de investigações de fenómenos eléctricos e magnéticos; reunia várias leis bem conhecidas e testadas da electricidade e magnetismo numa formulação única; tinha previsto, brilhantemente, o carácter electromagnético da luz, que Hertz confirmara experimentalmente, gerando, deliberadamente, ondas electromagnéticas.

Quanto à lei de adição de velocidades ela baseia-se na nossa experiência diária. Quando viajamos entre Lisboa e Porto e acertamos o relógio pelo da Gare do Oriente, ao chegar ao Porto, podemos conferir que o nosso relógio está certo pelo da Estação de Campanhã (isto supondo que a CP mantém os relógios certos entre si). De igual modo, se medirmos o comprimento de uma carruagem em movimento, fotografando-a de fora, encontramos o mesmo comprimento que se a medirmos a partir do interior, no referencial da mesma.

Claro que há também boas razões para acreditar no Princípio da Relatividade aplicado aos fenómenos electromagnéticos. Ao fim ao cabo, essas são as interações que dominam toda a Física e Química da matéria vulgar. Não era nada agradável se essas leis mudassem tanto que o nosso coração deixasse de bater num referencial com velocidade de 60 km h^{-1} em relação ao solo.

Seja como for, havia uma consequência óbvia de manter as hipóteses 1 e 3: as Leis de Maxwell só seriam válidas num referencial determinado e em qualquer outro em movimento relativo a esse referencial, a velocidade da luz seria diferente de c e variaria com a direcção. A própria Terra constitui um laboratório onde seria possível medir variações da velocidade da luz. Ao fim ao cabo, a Terra tem uma velocidade em relação ao Sol de 30 km s^{-1} , ainda por cima de direcção variável ao longo do ano. A experiência deste tipo mais famosa foi realizada por Albert Michelson e Edward Morley, dois físicos americanos, na Universidade de Case Western Reserve em 1887.

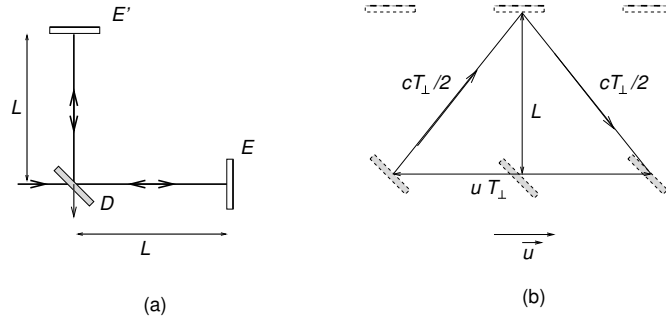


Figura 12.6: A experiência de Michelson-Morley consiste em medir a diferença de tempos de propagação da luz em dois trajectos perpendiculares de igual comprimento, $2L$. O dispositivo usa um espelho semi-transparente, D , para dividir um feixe de luz em dois feixes perpendiculares que são reflectidos em dois espelhos, E e E' , colocados a igual distância, L , de D . Se a velocidade da luz for a mesma na duas direcções, c , os tempos de viagem são iguais e valem $2L/c$. A figura (b) ilustra o cálculo do tempo na direcção perpendicular se o dispositivo tiver uma velocidade \vec{u} em relação ao referencial onde a velocidade da luz é c . A determinação da diferença de tempos é conseguida observando a interferência entre os dois feixes.

12.3.2 A experiência de Michelson-Morley

O princípio da experiência de Michelson e Morley é o de uma corrida entre dois feixes de luz em dois trajectos perpendiculares de igual distância (fig. 12.6)². Se a velocidade da luz for a mesma em todas as direcções, c , ou seja, se o dispositivo estiver no referencial onde as equações de Maxwell são válidas, os tempos serão iguais:

$$T_{\perp} = T_{\parallel} = \frac{2L}{c}.$$

Suponhamos agora que o dispositivo tem uma velocidade \vec{u} na direcção DE , no referencial onde a velocidade da luz é c . A velocidade da luz no sentido DE é $c - u$ e no sentido oposto $c + u$. O tempo para ir a E e voltar é

$$T_{\parallel} = \frac{L}{c - u} + \frac{L}{c + u} = \frac{2cL}{c^2 - u^2} = \frac{2L}{c} \frac{1}{1 - u^2/c^2}.$$

O cálculo de T_{\perp} está ilustrado na figura 12.6³; enquanto o divisor se desloca de uT_{\perp} a luz viaja uma distância cT_{\perp} que pelo teorema

²É uma corrida inteiramente análoga ao problema dos dois barcos no \mathcal{ETV}_1 !

³Este cálculo também pode ser feito referencial do dispositivo, usando a lei de transformação de velocidades de Galileu: ver a resposta ao \mathcal{ETV}_1 .

de Pitágoras vale:

$$\left(\frac{cT_{\perp}}{2}\right)^2 = \left(\frac{uT_{\perp}}{2}\right)^2 + L^2.$$

Resolvendo em ordem a T_{\perp} , vem

$$T_{\perp} = \frac{2L}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}.$$

Como vemos, se $u \neq 0$, $T_{\parallel} \neq T_{\perp}$.

Tomando como exemplo o valor de $u = 30 \text{ km s}^{-1}$, a velocidade orbital de Terra, temos um efeito deveras pequeno:

$$\frac{T_{\parallel} - T_{\perp}}{T_{\parallel}} = 1 - \sqrt{1 - u^2/c^2} \approx 0,5 \times 10^{-8}!$$

Contudo, a observação da interferência entre os dois feixes permite medir esta diferença sem problemas. A experiência foi realizada cuidadosamente; a possibilidade de os dois braços não terem o mesmo comprimento foi levada em conta, rodando o dispositivo de 90° e trocando as duas direcções. A experiência foi realizada em várias alturas do ano de modo a variar a direcção da velocidade orbital da Terra. Michelson e Morley nunca detectaram qualquer diferença entre os tempos T_{\parallel} e T_{\perp} .

O referencial privilegiado em que as leis de Maxwell seriam válidas é referido na literatura como o referencial do Éter. O Éter seria uma misteriosa substância, presente em todo o Universo, no qual se propagariam as ondas electromagnéticas, à semelhança do que acontece com onda mecânicas, como o som, que se propagam num meio material. Só um referencial em repouso em relação ao Éter mediria uma velocidade da luz idêntica em todas as direcções. Nesse sentido, a experiência de Michelson e Morley não detectou qualquer movimento da Terra em relação ao Éter.

12.3.3 Os dois postulados

Não há registo que Einstein tivesse conhecimento de Sherlock Holmes, ou do seu autor, Arthur Conan Doyle, mas a sua lógica faz eco da citação do famoso detective, reproduzida no início deste capítulo.

No seu artigo de 1905 com o título, *Sobre a Electrodinâmica dos Corpos em Movimento*⁴, menciona de passagem a falta de qualquer

⁴Zur Electrodynamik bewegter Körper, *Annalen de Physik*, **17** (1905)

evidência de que o Princípio de Relatividade não se aplique ao Electromagnetismo e assume-o como princípio universal:

Princípio de Relatividade

As leis da Física, incluindo as do Electromagnetismo são as mesmas em dois referenciais em movimento relativo uniforme e rectilíneo (velocidade constante).

Seguidamente, assume que a velocidade da luz é a mesma em todos os referenciais em movimento relativo uniforme, abrindo deste modo a possibilidade que as equações de Maxwell terem validade numa classe de referenciais que têm movimento relativo uniforme.

Princípio de constância da velocidade da luz

Existe uma classe de referenciais, ditos inerciais, com movimento relativo uniforme e rectilíneo, e nos quais luz tem a mesma velocidade, c : isto é a velocidade da luz é um **invariante nesta classe de referenciais**.

A **Relatividade Restrita** acaba aqui. São estes dois princípios e mais nada.

Chama-se **Restrita**, porque aborda apenas uma classe de referenciais, que se movem uns em relação aos outros com velocidade uniforme. Onze anos mais tarde Einstein verificou que, ao incluir no Princípio da Relatividade (agora com nome diferente) **todos** os referenciais, obteve a teoria relativista das interacções gravíticas.

O nome **Relatividade** não foi escolhido por Einstein e é um pouco infeliz, pois estes dois postulados referem, exclusivamente, coisas que não são relativas:

- As leis da Física (todas) são as mesmas em todos os referenciais inerciais;

- A velocidade da luz é um invariante, a mesma em todos os referenciais inerciais.

Das três ideias incompatíveis referidas acima, Einstein deixou cair a primeira ao sugerir que existe uma velocidade **invariante**: a velocidade da luz. Ao fazê-lo pôs em cheque os conceitos Newtonianos de espaço e de tempo, que, como vimos, estão por trás da lei de transformação das velocidades. Com que é que os substituiu?

12.4 O Espaço e Tempo em Relatividade Restrita

12.4.1 Uma corrida, dois filmes

Para explorar a natureza do espaço e tempo que decorre dos postulados fundamentais da relatividade vamos recorrer à ajuda de dois animais bem habituados a corridas de alta velocidade: o *Coyote* e o *Road Runner* (figs. 12.7 e 12.8).

Quem conhece os desenhos animados desta dupla, criada pela imaginação delirante de Chuck Jones, deve ter reparado que o *Road Runner* parece ter sempre a mesma velocidade relativamente ao *Coyote*, independentemente da velocidade deste. É uma boa metáfora para a velocidade da luz! Para simplificar as contas e não carregarmos com muitas potências de dez, vamos imaginar que no universo onde vivem $c = 300\text{ m s}^{-1}$ e que o *Road Runner* se move a esta velocidade.

Como é comum na sua existência, estes personagens vão fazer uma corrida ao longo de uma longa recta pontuada por um fiado regular de postes, que, desta vez contêm relógios. A distância entre os postes é de 150 m (a luz demora meio segundo a percorrer essa distância) e os dois *toons* partem do mesmo poste no mesmo instante $t = 0$. A velocidade do *Coyote* é $c/2$ e a do *Road Runner* é c . O nosso objectivo é analisar esta corrida de dois pontos de vista:

- do referencial do solo, S ;
- do referencial do *Coyote*, C ;

Comecemos pelo primeiro.



Figura 12.7: Um animal habituado a corridas de alta velocidade.



Figura 12.8: Pode o Road Runner correr à velocidade da luz?

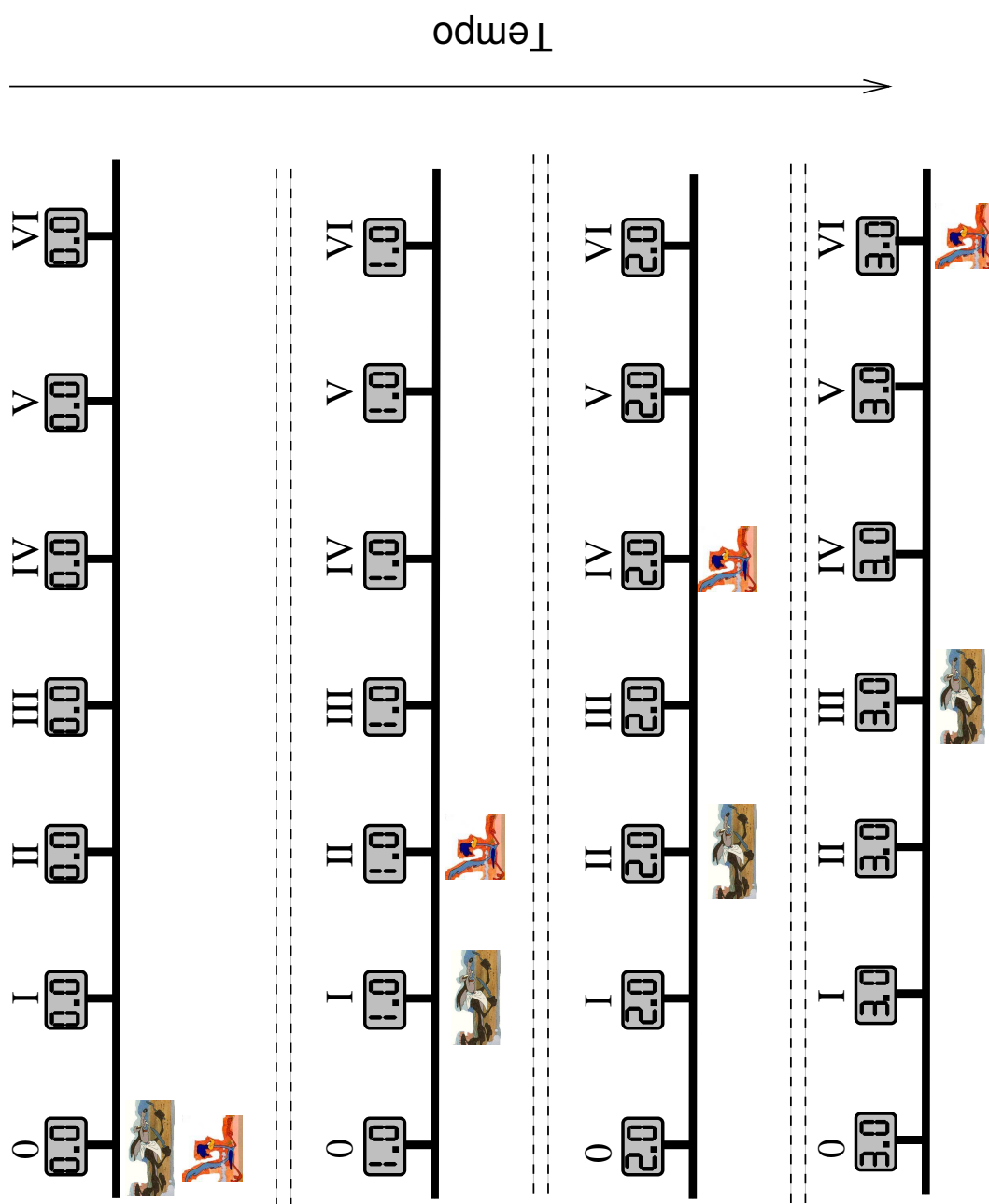


Figura 12.9: Filme da corrida no referencial do solo. Nota: virar a página a 90°.

Poste	<i>Coiote</i>	<i>Road Runner</i>
0	0,0	0,0
I	1,0	0,5
II	2,0	1,0
III	3,0	1,5
IV	4,0	2,0
V	5,0	2,5
VI	6,0	3,0

Tabela 12.1: O que marca o relógio de cada poste quando passa por ele cada um dos personagens.

Referencial do Solo, \mathcal{S}

A situação neste referencial é a seguinte:

- Partida no poste 0 na altura em que o respectivo relógio marca $t = 0,0 \text{ s}$;
- o *Coiote* tem a velocidade $c/2 = 150 \text{ m s}^{-1}$, ou seja, cobre a distância entre postes sucessivos num segundo;
- O *Road Runner* tem velocidade da luz, $c = 300 \text{ m s}^{-1}$, cobrindo duas vezes a distância entre postes em cada segundo.

Assumindo que os relógios estão sincronizados, é evidente que quando o *Coiote* passa no primeiro poste este marca $t = 1,0 \text{ s}$, no segundo, $t = 2,0 \text{ s}$ e assim sucessivamente. Do mesmo modo para o *Road Runner* teremos $t = 0,5$ ao passar o primeiro poste, $t = 1,0$ ao passar o segundo *etc.*

A figura 12.9 mostra algumas imagens do filme da corrida. Repare-se que em cada tira da figura temos o que se passa num “*agora*” deste referencial; por isso, os relógios marcam todos o mesmo tempo. Para referência futura indicamos na tabela 12.1 as indicações dos relógios de cada poste quando cada um dos personagens passa por ele.

É extremamente importante para o que se segue notar o seguinte:

Esta tabela é válida em qualquer referencial!!

Quando o *Coiote* passa no poste I, olha para o respectivo relógio e regista o tempo que ele indica na sua memória, num papel, ou no que quiser. Este valor não pode depender do referencial de observação. O *Coiote* não pode ter na sua cabeça um valor para um referencial e um valor diferente para outro.

A tabela 12.1 regista o que Einstein chamou **eventos ou acontecimentos**. A coincidência de posições do *Coiote* e do poste I com o relógio a mostrar 1,0, ou do *Road Runner* com o poste III com 1,5 no mostrador do respectivo relógio são eventos. Eventos são absolutos e todos os referenciais têm que concordar sobre eles; nenhum referencial pode observar o *Road Runner* a passar no poste III quando este marca 2,0; o animal lembrar-se-ia disso!

Referencial do *Coiote*, \mathcal{C}

Qual é o aspecto desta corrida no referencial do *Coiote*? Vamos supor que o *Coiote* tem consigo um relógio em tudo idêntico aos dos postes e que quando se encontra com o poste 0 marca exactamente o mesmo $T = 0,0 \text{ s}$. Como habitualmente vamos usar maiúsculas pra nos referirmos aos tempos medidos pelo relógio do *Coiote*.

- O *Coiote* está parado e são os postes que se movem em direcção a ele. Se a velocidade do *Coiote* em relação aos postes é de $c/2$ a velocidade dos postes em relação ao *Coiote* é de $-c/2$.
- Se o relógio do *Coiote* marcar $T_0 \text{ s}$ quando o primeiro poste passar por ele, marcará $2T_0 \text{ s}$ na passagem do segundo poste, $3T_0 \text{ s}$ na passagem do terceiro e assim sucessivamente. Isto é, a distância entre postes é $cT_0/2$, já que eles se movem com velocidade $-c/2$.

Newton diria que $T_0 = 1$ pois, como podemos ver na tabela 12.1 na página anterior no **referencial do solo** decorre um intervalo $\Delta t = 1 \text{ s}$ entre a partida do poste 0 e o cruzamento do poste I com o *Coiote*. $T_0 \text{ s}$ é o intervalo de tempo ΔT entre estes dois eventos no **referencial \mathcal{C}** . Mas já vimos que, se seguirmos Newton, não conseguiremos garantir a segunda condição que Einstein escolheu como postulado:

- a velocidade do *Road Runner* neste referencial **também é** c , ou seja o dobro da velocidade dos postes. Isto é: ao fim

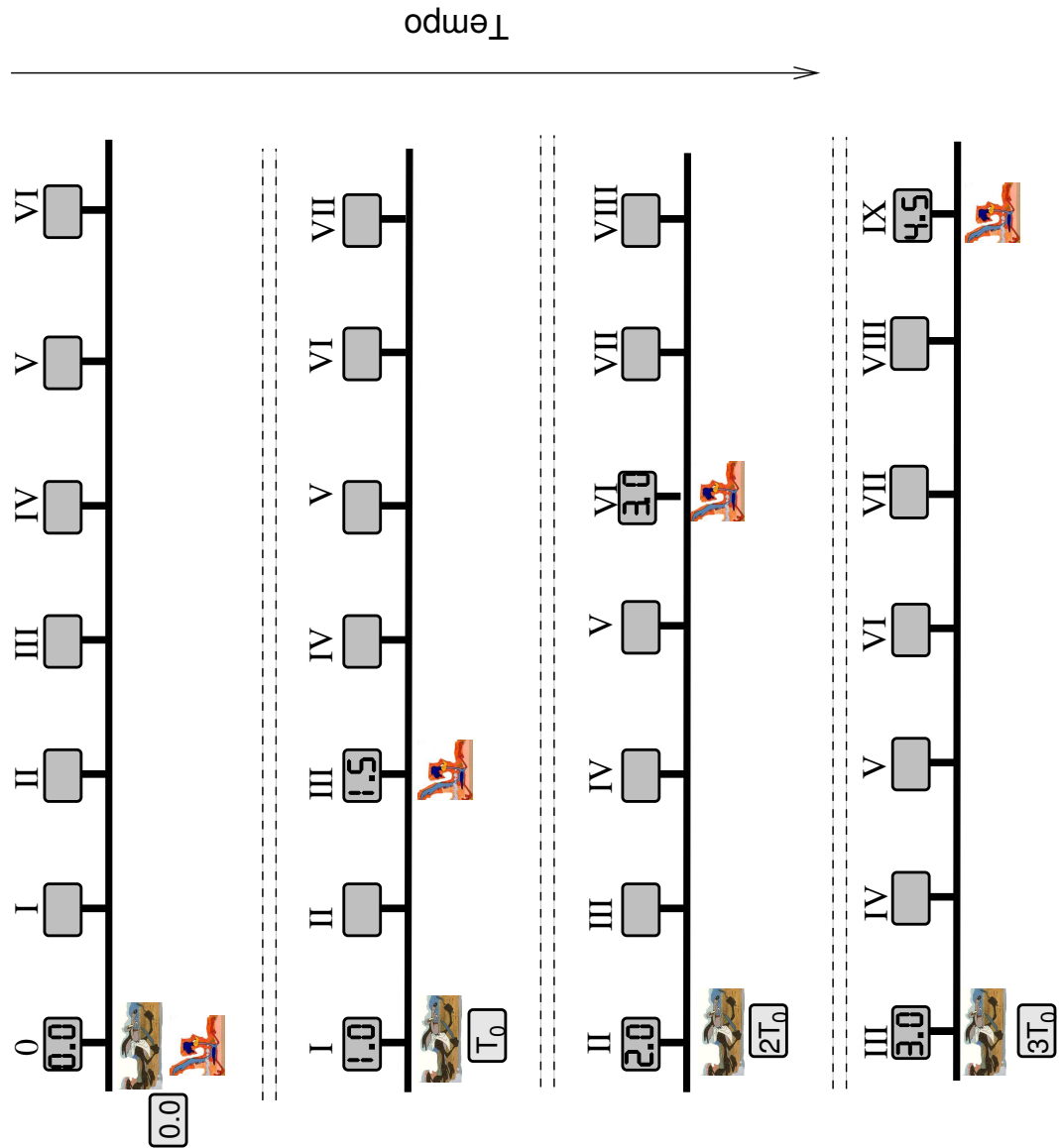


Figura 12.10: Filme da corrida no referencial do *Coyote*. Nota: virar a página a 90° .

de um tempo T , o *Road Runner* está a uma distância cT do *Coiole*.

Este ponto é **absolutamente crucial**: tudo o que se segue depende dele!

Passemos então ao filme no referencial \mathcal{C} .

Imagem 1 A primeira imagem do nosso filme não causa problemas: em $T = 0,0 \text{ s}$ (marcado no relógio do *Coiole*) os dois animais estão juntos ao poste 0, que está a passar pelo *Coiole* com velocidade $-c/2$.

Imagem 2 Suponhamos que a segunda imagem é tomada em $T = T_0 \text{ s}$, quando **o poste I passa pelo *Coiole***. Onde está nesse momento o *Road Runner*? Segundo Einstein, a uma distância do *Coiole* (e do poste I) igual a cT_0 . Mas a distância entre postes é $cT_0/2$; logo o *Road Runner* está a cruzar o poste III, que marca $1,5 \text{ s}$ (ver Tabela 12.1).

Usando o mesmo tipo de argumentos facilmente concluímos que a figura 12.10 na página precedente mostra correctamente o filme da corrida visto do referencial do *Coiole*, de acordo com os postulados da relatividade. O ponto fundamental que condiciona toda a representação é que a velocidade do *Road Runner* neste referencial ainda é c : a distância a que o *Road Runner* se encontra do *Coiole* tem que ser o dobro da distância percorrida por cada poste, desde o início do filme.

As figuras 12.9 e 12.10 contêm todas as surpresas relativistas da natureza do espaço e tempo. É só uma questão de olhar para elas atentamente.

12.4.2 Relatividade da Simultaneidade

O primeiro ponto que ressalta da análise das duas figuras é o seguinte.

Cada imagem é correspondente a um “agora” em cada referencial; ou seja a um dado instante nesse referencial.

- Assim, no referencial do solo, **quando** o *Coiole* está no poste I ($t = 1 \text{ s}$) o *Road Runner* está no poste II;

- Todavia, no referencial do *Coio*te, **quando** este está no poste I ($T = T_0$ s) o *Road Runner* está no poste III, e portanto já passou há um bocado no poste II.

O eventos que estão na mesma tira num referencial (simultâneos) não estão na mesma tira no outro. Por exemplo, os dois eventos registados no instante $T = 2T_0$ s (terceira tira) da figura na página 155:

- *Coio*te no poste II;
- *Road Runner* no poste VI;

ocorrem com um segundo de diferença no referencial do solo.

Este mesmo facto está patente no facto de os relógios dos postes não estarem sincronizados no referencial do *Coio*te. À medida que caminhamos no sentido oposto ao movimento dos postes, verificamos que os relógios estão cada vez mais adiantados; O relógio VI marca 3,0 quando (referencial \mathcal{C}) o II marca 2,0: mas no referencial \mathcal{S} o relógio VI só marca 3,0 um segundo depois de o relógio II marcar 2,0 (ou seja quando este marca 3,0 também). Temos dois eventos em que:

$$\begin{aligned}\Delta T &= 0 : && \text{simultâneos em } \mathcal{C}; \\ \Delta t &= 1 : && \text{um mais tarde que o outro em } \mathcal{S}.\end{aligned}$$

Assim:

O intervalo de tempo entre dois acontecimentos não é invariante. A simultaneidade de eventos é relativa! O “agora” é diferente em cada referencial.

Estranho? Certamente; mas apenas uma consequência necessária da invariância da velocidade da luz.

Sincronização de relógios

O resultado anterior resulta, como vimos, apenas de considerar que a velocidade da luz é um **invariante**. Repare-se que o filme feito no referencial \mathcal{S} , prova que os relógios estão bem sincronizados nesse referencial. O *Road Runner* parte da origem, onde o relógio

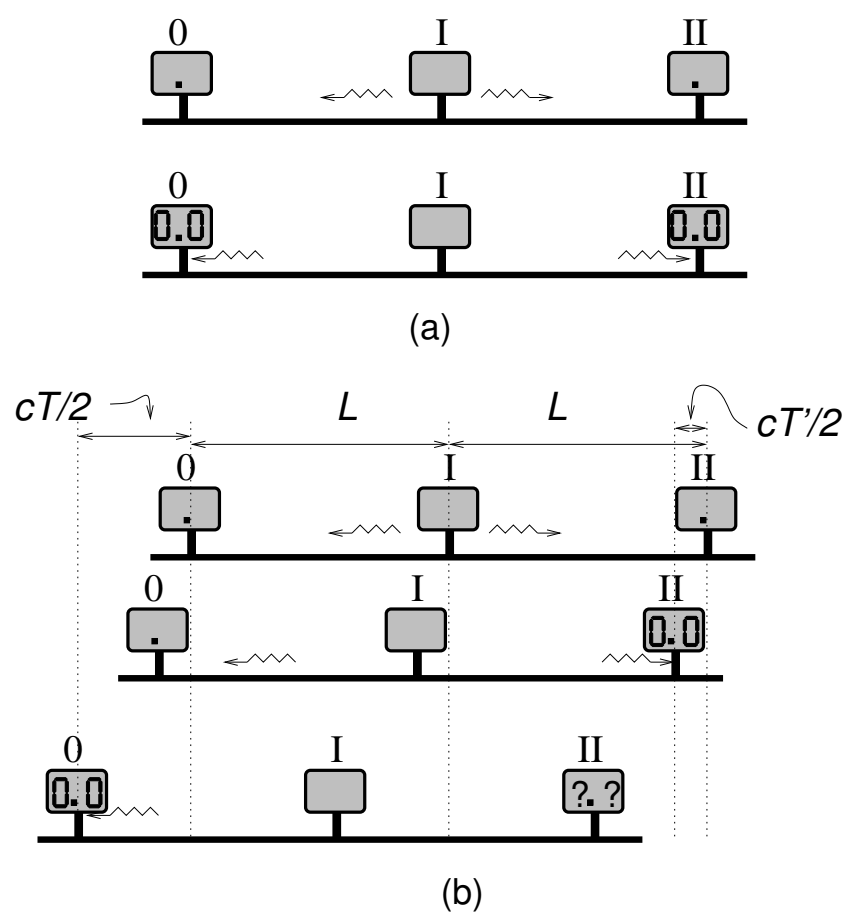


Figura 12.11: (a) Sincronização de relógios no referencial do solo; (b) no referencial do *Coiote* os relógios não ficam sincronizados, porque a velocidade da luz continua a ser a mesma nos dois sentidos.

marca 0 e ao passar no relógio I, a 150m de distância este marca 0,5s exactamente o tempo que ele demora a cobrir esta distância em \mathcal{S} : o mesmo se aplica aos outros relógios. Esta é uma maneira perfeitamente legítima de sincronizar relógios⁵. Existem muitas outras.

Vale a pena mencionar um outro procedimento de sincronização, por tornar muito clara a relatividade da simultaneidade (fig. 12.11).

Suponhamos que o relógio I manda dois sinais luminosos ao mesmo tempo em direcções opostas. Os relógios 0 e II estão a zero e começam a contar quando o sinal lhes chegar. Como a velocidade da luz não depende do sentido de propagação, os relógios 0 e II estarão, obviamente, sincronizados.

Sim, no referencial do solo, mas não no do *Coio*. No referencial do *Coio* os relógios movem-se com velocidade $-c/2$ e o sinal luminoso **continua a ter velocidade idêntica nos dois sentidos**, c . Neste referencial, no tempo T em que a luz viaja até chegar ao poste 0, este afasta-se uma distância $cT/2$ do poste emissor. Por isso a distância viajada pela luz, cT , é

$$cT = \frac{c}{2}T + L \Rightarrow T = \frac{2L}{c}.$$

em que L é a distância entre relógio no referencial \mathcal{C} . Ao contrário, o poste II move-se em direcção ao emissor; então,

$$cT' = L - \frac{c}{2}T' \Rightarrow T' = \frac{2L}{3c}.$$

Ou seja, neste referencial, o relógio do poste 0 começa a trabalhar depois do do poste II, mais precisamente depois de decorrer um tempo,

$$\Delta T = \frac{4L}{3c}.$$

Em resumo, na nossa corrida, quanto maior o número do poste, mais adiantado está o respectivo relógio no referencial \mathcal{C} . Repare-se que isto só acontece porque a velocidade da luz é a mesma nos dois sentidos, **nos dois referenciais**.

⁵Esta maneira exige que se conheça o valor da velocidade da luz no referencial em causa. Mas esta pode ser medida com um único relógio medindo o tempo de ida e volta a um espelho a uma distância conhecida.

\mathcal{ETV}_3 : Com referência à figura 12.11, mostrar que se a velocidade de luz satisfizer a lei Galileana de composição de velocidades, os dois relógios ficam sincronizados nos dois referenciais.

12.4.3 Dilatação dos tempos

Relógios em movimento andam mais devagar, é uma das frases que muitas vezes se houve a propósito da Relatividade. Vejamos exactamente o que quer dizer.

No referencial \mathcal{S} , do solo, o relógio do *Coiote* marca 0,0 s quando o *Coiote* está junto ao poste 0 e marca T_0 s quando ele passa no poste I, um **segundo mais tarde**. Ou seja,

Afirmção 1: no referencial \mathcal{S} , um relógio em movimento com velocidade $c/2$ avança T_0 s por cada segundo de um relógio parado.

Assim, quando um relógio do solo regista uma passagem de tempo de Δt , o relógio em movimento com velocidade $c/2$ regista um intervalo⁶

$$\Delta T = T_0 \Delta t$$

Mas quanto vale T_0 ?

Reparemos novamente no filme da corrida do ponto de vista do referencial \mathcal{C} (fig. 12.10 na página 155), em particular na segunda e quarta imagens:

- No instante $T = T_0$ s o relógio do poste III marca 1,5;
- No instante $T = 3T_0$ s, o relógio do poste III, a passar pelo *Coiote*, marca 3,0 s.

Ou seja,

⁶ T_0 é um tempo (de relógio em movimento) por unidade de tempo (de relógio em repouso); por isso é uma grandeza sem dimensões.

Afirmção 2: no referencial \mathcal{C} , do Coiote, um relógio em movimento com velocidade $-c/2$ (o do poste III) avança $\Delta t_{\text{III}} = 3,0 - 1,5 = 1,5 \text{ s}$, quando passam $\Delta T = 3T_0 - T_0 = 2T_0 \text{ s}$ num relógio parado (o do *Coiote*).

O **Princípio da Relatividade** implica que o referencial \mathcal{C} é “tão bom” como \mathcal{S} . Por outro lado, $c/2$ e $-c/2$ são velocidades equivalentes, pois as direcções positiva e negativa do eixo Ox são certamente equivalentes. Por isso a **Afirmção 1** implica que:

O relógio do poste III avança T_0 , por cada segundo do relógio do *Coiote*.

Ou seja,

$$\Delta t_{\text{III}} = T_0 \Delta T \quad (12.10)$$

em que Δt_{III} é o tempo marcado pelo relógio III em movimento no referencial do *Coiote*, e ΔT o tempo que decorreu entre os mesmos eventos no referencial do *Coiote*. Mas a **Afirmção 2** significa:

$$\Delta t_{\text{III}} = 1,5, \quad \text{quando } \Delta T = 2T_0. \quad (12.11)$$

Portanto,

$$1,5 = T_0 \times (2T_0)$$

ou seja,

$$T_0^2 = \frac{3}{4},$$

e

$$T_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,866.$$

O Princípio da Relatividade (equivalência de referenciais) e o da constância da velocidade da luz dizem-nos então que:

Um relógio em movimento com velocidade $c/2$ (ou $-c/2$) apenas anda $0,866 \text{ s}$ por cada segundo de um relógio parado.

Este efeito chama-se **dilatação dos tempos**. Repare-se na simetria entre os dois referenciais: o relógio do *Coiote* atrasa-se em relação aos relógio do Solo, e estes (como o do poste III) **atrasam-se exactamente o mesmo** em relação aos relógios do referencial do *Coiote*.

ETV₄ : Hei, calma Stôra, disse o aluno. Isto não bate certo! Não pode o relógio do Coiote andar mais devagar que os dos postes e os dos postes mais devagar que o do Coiote. Aliás repare: logo na segunda imagem do filme se vê isso. Quando o Coiote parte, o relógio dele marca o mesmo que o do poste 0, 0,0. Quando cruza o poste I este marca 1,0 e o dele só 0,866. Isto é, o do poste andou mais depressa o dele. Não é o que ele tem de concluir?
 Como responder a este aluno?

Tudo isto pode, à primeira vista, parecer um absurdo. Como é que um relógio A se atrasa em relação a B e B se atrasa relação a A ?

De facto não há nenhuma contradição. Quando queremos medir a taxa do relógio do *Coiote* em relação ao referencial \mathcal{S} , comparamos as suas leituras em dois relógios do Solo, C e D sincronizados em \mathcal{S} . Ao passar no segundo relógio do Solo, D , o relógio do *Coiote* avançou menos que a diferença das leituras que fez em C e D ; para um observador do Solo isso significa que o relógio do *Coiote* se atrasa. Contudo, o *Coiote* não pode tirar essa conclusão pois, no seu referencial, os relógios C e D não estão sincronizados; como vimos, D está adiantado relativamente a C . Para tirar conclusões sobre a taxa dos relógios de \mathcal{S} , o *Coiote* tem que fazer exactamente o mesmo que um observador do referencial do Solo: comparar um relógio do referencial do Solo com dois relógios sincronizados no seu referencial. Por esta razão, ambos chegarão exactamente à mesma conclusão: os relógios do outro referencial atrasam-se! De acordo com o Princípio da Relatividade não poderia ser de outro modo.

Repare-se, também, que não precisamos de dizer que tipo de relógio se trata. Seja digital, analógico, seja um pêndulo ou o nosso coração, qualquer processo de medir o tempo terá que dar o mesmo resultado para que a velocidade da luz seja um invariante. E todos os processos físicos decorrem exactamente segundo as mesmas leis nos dois referenciais. A dilatação do tempo não pode afectar apenas certos tipos de relógios: isso violaria o Princípio da Relatividade. É o **tempo** que anda mais devagar!

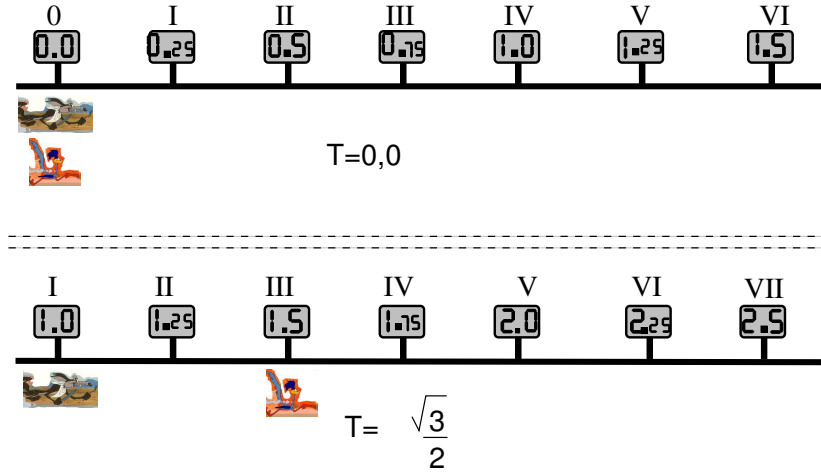


Figura 12.12: O tempo indicado pelos relógios de \mathcal{S} no mesmo instante do referencial \mathcal{C} , aumenta linearmente com a distância na direcção oposta ao do movimento dos postes em \mathcal{C} .

O filme completo

Estamos agora em posição de determinar o que mostram todos os relógios no filme feito no referencial \mathcal{C} (fig. 12.10 na página 155). Vejamos, por exemplo, o relógio do poste I:

- entre o instante inicial, $T = 0$ s, e $T = T_0$ s, quando passa pelo *Coio*te, o relógio do poste avança $\Delta t = T_0 \times \Delta T = T_0^2$ s;
- Em $T = T_0$ s, ao passar no *Coio*te, este relógio marca $t = 1$.

Destes dois resultados podemos concluir que, em $T = 0$, o relógio indicava

$$1 - \Delta t = 1 - T_0^2 = \frac{1}{4}.$$

Não é difícil ver que o relógio do poste n , que passa pelo *Coio*te em $T = nT_0$ s, marcava em $T = 0$,

$$n - T_0 \times (\Delta T) = n - T_0 (nT_0) = n (1 - T_0^2) = \frac{n}{4}.$$

O mesmo raciocínio pode ser repetido para cada instante do referencial \mathcal{C} . A conclusão é a mesma. O tempo t marcado por cada relógio aumenta de $1 - T_0^2 = 1/4$ por poste (ver figura 12.12).

Tal como tínhamos concluído, do ponto de vista do *Coio*te, nos relógios de \mathcal{S} há um adiantamento que cresce na direcção oposta ao do seu movimento em \mathcal{C} .

12.4.4 Contracção dos espaços

A distância entre os postes, no referencial do Solo é, por hipótese, $d = c/2 \times 1 = 150\text{m}$. No referencial do *Coio*te passa um poste por ele de T_0 em T_0 segundos e os postes movem-se com velocidade $-c/2$. Ou seja, a distância entre os postes é

$$D = \frac{cT_0}{2} = T_0 d = \frac{\sqrt{3}}{2} d \approx 130\text{m}!$$

A distância entre dois postes no referencial do *Coio*te é menor que no referencial do Solo.

Se tivermos um avião de 150m de comprimento estacionado entre os postes, o *Coio*te dirá que o seu comprimento é apenas de 130m ; um carro de 5m de comprimento medirá para o *Coio*te $0,866 \times 5 = 4,33\text{m}$! Note-se que 30 destes carros, topo a todo, medem para o *Coio*te 130m . Todas as distâncias, todos os objectos, terão no referencial em que se movem com velocidade $-c/2$ um comprimento, **na direcção do movimento**, inferior: apenas 86,6% do que têm no referencial em que estão em repouso: isto é a contracção dos espaços.

Isto funciona, obviamente nos dois sentidos: os dois referenciais têm as mesmas leis. Por isso, se o *Coio*te conduzir um carro idêntico ao que está estacionado, ele terá um comprimento de 5m no referencial do *Coio*te (onde está em repouso) mas do Solo parecerá encurtado, apenas com $4,33\text{m}$. Portanto:

Um corpo com velocidade $c/2$ (ou $-c/2$) tem um comprimento l na direcção do seu movimento, menor que o seu comprimento L no referencial em que está em repouso,

$$l = \frac{\sqrt{3}}{2} L.$$

Mas afinal, não quer isso dizer que a contracção dos espaços é uma ilusão? Um corpo só parece encurtar porque é visto de outro referencial. No referencial próprio em que está em repouso tem o seu *verdadeiro* comprimento?

Esta conclusão é atraente, mas errada. A contracção é real; acontece. Medir um comprimento de um objecto em movimento não causa qualquer dificuldade. Em todos os referenciais em que se move ele é mais curto que no seu referencial próprio.

Só que o comprimento de um objecto não é um **invariante**. Tal como a separação temporal entre eventos, a separação espacial entre dois pontos, ao contrário do que acontecia na concepção Newtoniana, não é um invariante. Mas isso não a torna menos *real*. A maior parte das grandezas físicas, quer em Relatividade, quer em Física Newtoniana, mudam de valor ao mudar de referencial. Nem por isso deixam de reflectir a realidade das coisas. Em Relatividade Restrita temos que incluir intervalos temporais e espaciais nessa classe de grandezas relativas.

ETV₅ : Hei, Stôra, disse o mesmo aluno. Esta agora é que não passa. O Coiote vai a guiar um Cadillac de 5 m de comprimento e ultrapassa um carro igual, parado, que segundo ele só mede 4,33 m. Ora veja, quando as traseiras estão a par sobram 67 cm do carro do Coiote à frente, certo? Não me diga que o pessoal que está em Terra não nota isso! Segundo o que a Stôra disse, eles deviam ver que faltam 67 cm ao Cadillac do Coiote. Em que ficamos? Como responder a este aluno?

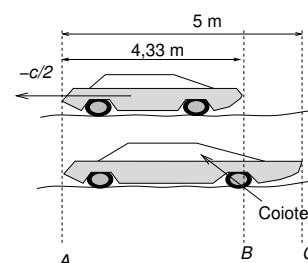


Figura 12.13: O Coiote acha que o seu carro é mais comprido. O pessoal de Terra não vai achar o mesmo?

12.4.5 Transformação de tempo e espaço para v arbitrário

Não é difícil generalizar os argumentos apresentados para uma mudança entre referenciais com velocidade relativa v , genérica, em vez de $c/2$. Isso está feito em apêndice. Os resultados são os seguintes:

Dilatação dos tempos

Um relógio em movimento uniforme com velocidade v demora um tempo Δt a passar entre dois pontos de um referencial inercial; o intervalo de tempo marcado pelo relógio, ΔT , ou seja o intervalo de tempo no referencial em que o relógio está em repouso, designado por **tempo próprio** do relógio, é inferior a Δt :

$$\Delta T = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Delta t. \quad (12.12)$$

Contração dos espaços

Um corpo em movimento num referencial \mathcal{R} , com velocidade v tem um comprimento na direcção do seu movimento l . O seu **comprimento próprio**, L , no referencial em que está em repouso, é maior que l :

$$L = \frac{l}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (12.13)$$

Acima escrevemos esta equação de modo diferente, mas exactamente com o mesmo significado:

$$l = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} L.$$

No caso de $v = c/2$, o factor $\sqrt{1 - v^2/c^2} = \sqrt{3/4} = \sqrt{3}/2$, conforme vimos acima.

Para as velocidades correntes no nosso dia-a-dia este factor é muito próximo da unidade. No caso de um avião à velocidade do som é tão próximo de um que nem todas as calculadoras o conseguem diferenciar da unidade:

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - \frac{340^2}{(3 \times 10^8)^2}} &\approx 1 - 0,64 \times 10^{-12} \\ &= 0,99999999999936. \end{aligned}$$

É por esta razão que na nossa experiência corrente os conceitos Newtonianos de espaço e tempo são perfeitamente adequados: as correcções relativistas são extremamente pequenas. Podemos continuar a usar a lei Galileana de composição de velocidades quando lidamos com carros, barcos, aviões ou mesmo planetas. Contudo, velocidades próximas da luz são correntes em física. Para começar, a própria luz, que é sempre relativista. Quer em aceleradores, quer na Natureza, por exemplo em fenómenos astrofísicos, é comum a ocorrência de feixes de partículas de alta energia com velocidade próximas da luz. Mas não é preciso ir para o espaço: as unidades de tratamento de médico de feixe de electrões usam electrões relativistas com velocidades muito próximas de c .

12.5 Energia e massa em Relatividade

12.5.1 Uma só grandeza conservada

A modificação profunda dos conceitos de espaço e tempo da Relatividade Restrita obrigou também a uma revisão da Dinâmica Newtoniana. Não é possível, no tempo disponível, abordar este aspecto da teoria, mas é conveniente comentar um resultado desta reformulação, que é considerado a equação mais famosa de toda a Física:

$$E = mc^2. \quad (12.14)$$

Em Física Newtoniana existem dois princípios de conservação distintos e independentes:

- a conservação de massa;
- a conservação de energia.

Note-se que **conservação** não é o mesmo que **invariância**:

- uma grandeza invariante tem o mesmo valor em referenciais diferentes;
- uma grandeza conservada, tem um valor constante no tempo, no mesmo referencial.

Einstein descobriu que em Relatividade estes dois princípios de conservação são substituídos por um só. Vejamos alguns exemplos.

- Suponhamos que medimos a massa de um corpo, usando a segunda lei de Newton, a partir da sua aceleração sob a acção de uma força conhecida. Se o corpo absorver uma quantidade de energia ΔE , segundo a Teoria da Relatividade a sua *massa aumenta* de

$$\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2}.$$

Se radiar energia, a sua massa diminui de um valor dado pela mesma relação.

- Um núcleo de número atómico Z e número de massa A tem Z protões e $A - Z$ neutrões. A massa destas partículas é

$$Zm_p + (A - Z)m_n.$$

Contudo, a massa do núcleo, $M(A, Z)$, é inferior a este valor. A energia de ligação do núcleo $E_b(A, Z)$ é a energia que é necessária para separar o núcleo nos seus constituintes. De acordo com a Relatividade,

$$Zm_p + (A - Z)m_n = M(A, Z) + \frac{E_b(A, Z)}{c^2}$$

Por outras palavras, ao formar o núcleo a partir das partículas que o constituem, o sistema liberta uma energia $E_b(A, Z)$ e a sua massa total diminui de $E_b(A, Z)/c^2$.

- Um electrão e a sua anti-partícula, o positrão podem aniquilar-se mutuamente e transformar-se em duas partículas de radiação, dois fotões γ :

$$e^- + e^+ = \gamma + \gamma$$

Este processo é muitas vezes referido como conversão de massa ($2m_e$) em energia. Contudo, se este processo ocorrer numa caixa de onde os fotões não possam sair, a massa total da caixa (medida, por exemplo, usando a segunda lei) não se altera.

Neste sentido, massa e energia são duas palavras diferentes (e duas unidades diferentes) para a mesma grandeza conservada. O factor c^2 na fórmula

$$E = mc^2$$

é essencialmente um factor de conversão entre as unidades convencionais de energia e de massa.

Isto significa que quando aceleramos uma partícula e aumentamos a sua energia, aumentamos também a sua massa: quando entramos num carro também entramos num automóvel. Que sentido tem, então, dizer que a massa do electrão é $m_e = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$, ou a do protão $m_p = 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}$?

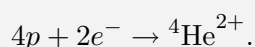
Quando uma partícula está em repouso tem a menor massa (menor energia) possível. Essa massa é a massa em repouso, ou energia em repouso da partícula. É um invariante relativista, isto é, tem

um valor idêntico em todos os referenciais inerciais. Também pode ser especificada em unidades de energia:

$$\begin{aligned}m_e c^2 &= 0,51 \text{ MeV.} \\ m_p c^2 &= 9,3 \times 10^3 \text{ MeV.}\end{aligned}$$

A Relatividade inclui ainda, de um modo muito natural, a possibilidade de partículas de massa em repouso nula; têm em todos os referenciais a mesma velocidade c , a velocidade da luz, não estando em repouso em nenhum referencial; têm massa no sentido em que contribuem com um termo E/c^2 para a massa total de um sistema: são os fótons, as partículas de luz.

ETV₆: O principal processo de produção de energia numa estrela como o Sol é a fusão de protões (núcleos de Hidrogénio) para formar Hélio. Embora a reacção tenha um conjunto de passos intermédios, podemos resumir os estados iniciais e final como



As massas são $m_p = 1,008 \text{ u.m.a}$, $m({}^4\text{He}^{2+}) = 4,003 \text{ u.m.a}$ e $m_e = 0,0005 \text{ u.m.a}$. A unidade de massa atómica vale $1 \text{ u.m.a} = 1,661 \times 10^{-27} \text{ kg}$.

- a) Calcular em Joule e eV a energia libertada por núcleo de Hélio formado.

O Sol radia uma potência de $3,9 \times 10^{26} \text{ W}$ e tem uma massa de $1,99 \times 10^{30} \text{ kg}$.

- b) Que fracção da sua massa radia por ano?
- c) Cerca de 2/3 da massa do Sol são núcleos de Hidrogénio e cerca de 1/3 de núcleos de Hélio. Quanto tempo, à taxa actual, vai demorar a consumir o Hidrogénio?

12.5.2 O limite Newtoniano

A energia total de um sistema pode sempre escrever-se na forma

$$E = M_0 c^2 + E',$$

em que E' é **definida** como a diferença entre a energia total e a energia em repouso do conjunto de partículas do sistema.

Nos processos químicos habituais, ligação química, ionização, etc., as variações de energia por partícula são da ordem do **electrão-Volt**, em todo o caso muito menores que a energia em repouso da partícula mais leve da matéria, o electrão. Na ausência de reacções nucleares, que envolvem energias por núcleo na escala do **MeV**, e de processos de aniquilação partícula-antipartícula:

- Os números de electrões e dos vários tipos de núcleos não se alteram, pelo que M_0 , a soma das massas em repouso das partículas de um sistema, é constante.
- Então E' , o excesso de energia relativamente a $M_0 c^2$, também é uma grandeza conservada.
- O valor de E' , é em geral, muito menor que a energia em repouso, $E' \ll M_0 c^2$ o que significa que

$$M = \frac{M_0 c^2 + E'}{c^2} = M_0 + \frac{E'}{c^2} \approx M_0.$$

Reencontramos, neste limite a situação habitual da Física Newtoniana:

- conservação separada de massa (M_0) e energia $E' = E - M_0 c^2$.
- Massa total praticamente igual à soma das massas (em repouso) das partículas constituintes do sistema.

12.6 Perguntas difíceis

12.6.1 Vivo mais se viajar numa nave?

Isto é real? Vivo mais se me puser em movimento? Ao fim ao cabo, se isto tudo for verdade, e eu me puser a

mexer numa nave a metade da velocidade da luz, por cada ano que passa na Terra só passam 0,866 anos para mim: será que isso aumentaria a minha vida em $1/0,866 = 1,15$ ou seja de 15%?

É absolutamente real, mas atenção, a vida aumenta de 15% apenas no referencial da Terra. Todos os relógios, isto é todos os processos físicos no referencial da nave serão mais lentos exactamente do mesmo factor. O princípio da Relatividade garante que através de experiências realizadas apenas no referencial da nave não podemos determinar a respectiva velocidade: as leis Físicas são as mesmas. Portanto, não chegaremos a saber que vivemos mais. É a Relatividade novamente. A nossa vida é um intervalo de tempo. Os intervalos de tempo são relativos: dependem do referencial.

Mas o efeito é absolutamente real e pode ser e foi medido, com relógios, muitas vezes. O sistema *GPS*, por exemplo, exige relógios em satélites perfeitamente sincronizados com relógios na Terra (ao nível do nano segundo, 10^{-9} s). Como os relógios dos satélites estão em movimento relativamente aos da Terra, torna-se necessário levar em conta a dilatação do tempo relativista. Contudo, a análise deste caso é mais complexa, não só porque o movimento dos satélites não é de velocidade constante, mas, sobretudo, porque o campo gravítico também altera a taxa de um relógio. Outra descoberta de Einstein⁷!

Mas existe uma experiência famosa em que se demonstrou a extensão do tempo de vida pela dilatação relativista dos tempos; não com pessoas mas com muões.

A experiência dos Muões

Uma das mais famosas experiências de medição da dilatação dos tempo diz respeito a uma partícula instável, o muão ou mesão- μ . Esta partícula tem uma semi-vida de cerca de $t_{1/2} = 1,56 \mu\text{s}$, o que quer dizer que um feixe de muões, ao fim deste tempo $t_{1/2}$, fica reduzido a metade das partículas. Ora um muão, mesmo viajando a uma velocidade próxima da luz, numa semi-vida não anda mais do que

$$d_{1/2} = 1,56 \times 10^{-6} \times 3 \times 10^8 = 468 \text{ m};$$

Um feixe de muões, em menos de 468 m, deve ficar reduzido a metade do fluxo.

⁷Feitas todas as contas os relógios dos satélites adiantam-se em relação aos da Terra.

Em 1941, Rossi e Hall mediram o fluxo de muões no topo do Monte Washington, no New Hampshire, a cerca de 2000m de altitude e também na base da Montanha. Os muões são criados por raios cósmicos ao incidirem na atmosfera terrestre. Como

$$\frac{2000}{468} = 4,3,$$

o fluxo de muões na base da montanha deveria ser inferior de um factor $2^{-4,3} \approx 1/20 = 5\%$, cerca de 20 vezes inferior ao medido no topo. Em vez disso encontraram um fluxo no sopé superior a **metade** do fluxo no topo, 71% para ser preciso. Os muões estavam a ter uma semi-vida muito superior a $1,56 \mu\text{s}$! Porquê?

Precisamente, por causa da dilatação de tempo relativista. Os muões têm uma semi-vida $t_{1/2} = 1,56 \mu\text{s}$ em repouso, ou seja no **referencial em que têm velocidade nula**. Quando passar nesse referencial uma semi-vida, passou no referencial onde foram feitas as medições de fluxo um tempo maior; por isso, a distância que os muões percorrem nesse referencial é superior a 468m. Os resultados desta experiência permitiram obter a velocidade dos muões, $v \approx 0,994c$.

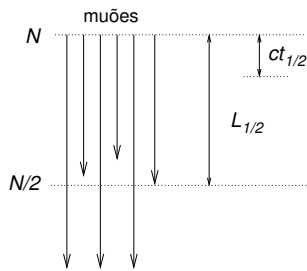


Figura 12.14: A distância em que um feixe de muões fica reduzido a metade, $L_{1/2}$ pode ser superior a $ct_{1/2}$, por causa da dilatação relativista dos tempos.

\mathcal{ETV}_7 : Calcular a semi-vida de muões num referencial em que estes têm uma velocidade $v = 0,994c$ e calcular a distância em que um feixe de muões com esta velocidade tem o fluxo reduzido a metade.

12.6.2 Velocidades maiores que c . É possível?

O segundo postulodo afirma que a velocidade da luz é um invariante, não que é uma velocidade limite. Por que é que se diz que não é possível ultrapassar a velocidade da luz?

Os físicos designam partículas com velocidade superior à da luz por *taquiões*. Taquiões surgem por vezes em certas propostas teóricas, mas não são bem vindos; são um aspecto indesejável da teoria, que os autores bem gostariam de varrer para baixo do tapete. Efectivamente colocam sérios problemas de interpretação em Relatividade.



Figura 12.15: Mais rápido que a luz cria muitos problemas...

Para ver porquê imaginemos um rato taquiónico (*Speedy Gonzalez?*) a participar na nossa corrida. Suponhamos que ele parte do poste I em $t = 1,0\text{ s}$ e chega ao poste III, em $t = 1,25\text{ s}$, onde fica sentado a deliciar-se com um bocado de queijo. O *Road Runner*, que viaja a velocidade c , demora um segundo a cobrir a mesma distância, pelo que estamos a falar de um rato com velocidade $4c$.

O problema surge quando tentamos descrever o seu movimento no referencial do *Coiote*. Como se vê na figura 12.10 na página 155, o evento “poste III a marcar $1,5\text{ s}$ ” é simultâneo, em \mathcal{C} (mesmo T), com o evento correspondente à partida do rato taquiónico, “poste I a marcar $1,0\text{ s}$ ”. Ora, o nosso taquião chegou ao poste III quando este marcava $1,25\text{ s}$, ou seja, *antes de marcar $1,5\text{ s}$* ! No referencial \mathcal{C} , o rato chegou *antes de partir*. Se levarmos em conta que *no mesmo instante de \mathcal{C}* o relógio de cada poste está adiantado relativamente ao do poste anterior de $1 - T_0^2 = 1/4\text{ s}$, podemos reconstruir a viagem do taquião vista do referencial \mathcal{C} . Que estranha que ela é (figura 12.16)!

- O primeiro acontecimento, segundo a cronologia de \mathcal{C} , é a chegada ao poste III: o rato materializa-se do nada!
- A seguir temos um rato descansar junto do poste III, mas temos outro a meio caminho entre o poste I e III; há dois ratos!?
- Finalmente, quando o poste I marca $t = 1,0\text{ s}$ ($T = T_0$) o taquião chega ao poste I, onde se esfuma. Para $T > T_0$ só temos o taquião a descansar junto ao poste III.

Este exemplo mostra o tipo de dificuldades que levantam sinais de velocidade superior à da luz. O intervalo de tempo Δt entre os eventos de emissão e receção de um taquião não tem o mesmo sinal em todos os referenciais: a emissão pode ser posterior à receção. Teremos referenciais em que há violação de causalidade: o efeito precede a causa. Esta situação pode dar origem a paradoxos sem fim como a estranha viagem do rato-taquiónico, que surge do nada onde termina(?) a viagem, se desdobra e anda para trás no tempo, da chegada para a partida.

Ao contrário, dois acontecimentos que possam ser ligados por um relógio de velocidade inferior à da luz, (um relógio coincidente no espaço com os dois eventos) tem um intervalo de tempo em qualquer referencial dado por

$$\Delta t = \frac{\Delta \tau}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

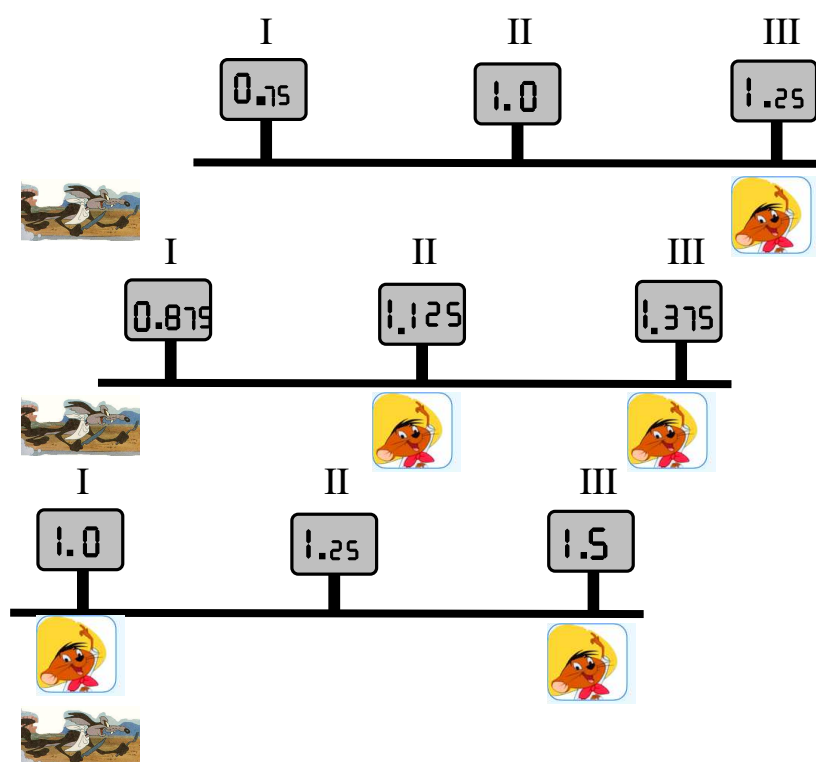


Figura 12.16: Viagem de um taquíon do poste I em $t = 1,0\text{ s}$ para o poste III em $t = 1,25\text{ s}$, vista do referencial do *Coyote*. Chega primeiro do que parte, desdobra-se em dois, um dos quais fica no poste III e o outro viaja para o poste I, onde desaparece para $t > 1,0\text{ s}$.

em que $\Delta\tau$ é o tempo próprio do relógio entre os dois eventos. Por isso Δt tem sempre o mesmo sinal em qualquer referencial.

\mathcal{ETV}_8 : No referencial \mathcal{C} quais são os valores do tempo T correspondente a cada tira do filme da viagem do rato taquíonico (fig 12.16 na página ao lado)?

12.6.3 Poderemos chegar às estrelas

Então a hipótese de viajar pela galáxia, está definitivamente posta de lado?

Curiosamente não, pelo menos não são as limitações da Relatividade que nos restringem.

Ainda que uma viagem pela galáxia possa demorar um milhão de anos a uma velocidade sub- c , esse tempo, Δt , é o do referencial da Terra. Uma nave com velocidade v em relação à Terra terá um tempo próprio (o tempo dos tripulantes e passageiros da nave),

$$\Delta T = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Delta t.$$

Ainda que Δt possa ser 10^6 anos, o tempo próprio pode ser um ano, se a velocidade for suficientemente próxima de c . Claro, entretanto passaram um milhão de anos da Terra. E só teremos notícias da nave dois milhões de anos mais tarde.

Aliás não deixa de ser curioso que a limitação da velocidade luz, 300 mil quilómetros por segundo, preocupe tanta gente, quando no presente, conseguimos, no máximo, alguns quilómetros por segundo nos nossos veículos mais rápidos!

\mathcal{ETV}_9 : Para que o tempo próprio da nave fosse um milhão de vezes inferior ao tempo no referencial da Terra, que velocidade teria que ter a nave?

12.7 Conclusões

É muito comum um sentimento de incredulidade no primeiro contacto com a Relatividade. Figuras proeminentes da cultura do século XX, como o filósofo francês Henri Bergson, que muito discorreu sobre a natureza do tempo, acharam as propostas da Relatividade sobre a natureza do espaço e tempo inaceitáveis.

Neste texto tentou-se mostrar que elas são uma consequência inevitável de duas ideias muito simples e fortemente sustentadas pela experiência:

- o Princípio da Relatividade;
- O princípio da invariância da velocidade da luz.

Por outro lado, estranhas como possam parecer as conclusões da Relatividade, elas não contradizem a nossa experiência quotidiana, que envolve apenas velocidades $v \ll c$. Os efeitos relativistas são extremamente pequenos para velocidades muito inferiores às da luz.

Finalmente é preciso dizer que a Relatividade não é uma teoria em fase especulativa, à espera de confirmação. No dia-a-dia de um laboratório de partículas, os efeitos relativistas são enormes e presentes em todas as actividades e análises de experiências. Os atrasos relativistas de relógios em movimento foram medidos e tem que ser levados em conta em toda a tecnologia *GPS*.

A escolha então é esta: aceitar uma teoria formulada com enorme simplicidade e elegância, a partir de princípios solidamente fundados na experiência; que dá conta de toda a nossa experiência sobre o espaço e tempo; com previsões verificadas todos os dias em inúmeras experiências. Ou, em alternativa, manter os nossos preconceitos sobre o espaço e tempo constituídos a partir de uma experiência limitada a uma fracção ínfima da gama de velocidades possíveis e que está em contradição com inúmeras observações. Pronto a escolher?

12.8 Resposta aos \mathcal{ETV}'_s

- 12.1. \mathcal{ETV}_1 : Seja \vec{v} a velocidade do barco no referencial da Terra. A velocidade **do** referencial do rio **no** referencial da Terra é $\vec{u} = (u, 0) = (-5, 0)$. Para a viagem ao longo da margem:

Na subida

$$\begin{aligned} V_x &= v_x - u \Rightarrow 25 = v_x + 5 \Rightarrow v_x = 20 \text{ km h}^{-1}; \\ V_y &= 0. \end{aligned}$$

Na descida:

$$\begin{aligned} V_x &= v_x - u \Rightarrow -25 = v_x + 5 \Rightarrow v_x = -30 \text{ km h}^{-1}; \\ V_y &= 0. \end{aligned}$$

O tempo total da viagem paralela à margem é

$$T_{\parallel} = \frac{2}{20} + \frac{2}{30} = 0,167 \text{ h} = 10 \text{ min.}$$

Para a viagem na perpendicular:

$$\begin{aligned} V_x &= 0 - u = -u = 5; \\ V_y &= v_y \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} V_x^2 + V_y^2 &= V^2 = (25)^2. \\ v_y^2 + u^2 &= V^2 \Rightarrow v_y^2 = V^2 - u^2 \Rightarrow v_y = 24,5 \text{ km h}^{-1}. \end{aligned}$$

O tempo de ida e volta

$$T_{\perp} = \frac{4}{24,5} = 0,163 \text{ h} = 9,8 \text{ min.}$$

12.2. \mathcal{ETV}_2 :

- (a) $0,75 v_{\text{cm}} = 0,5 \times 2 \Rightarrow v_{\text{cm}} = 1,33 \text{ m s}^{-1}$.
- (b) $V_{1x} = 2 - 1,33 = 0,67 \text{ m s}^{-1}$; $V_{2x} = -v_{\text{cm}} = -1,33 \text{ m s}^{-1}$.
- (c) $0,5 \times V'_{1x} + 0,25 \times V'_{2x} = 0 \Rightarrow V'_{1x} = -V'_{2x}/2$.

Como

$$0,5 \times (V'_{1x})^2 + 0,25 (V'_{2x})^2 = 0,5 \times (V_{1x})^2 + 0,25 (V_{2x})^2$$

e

$$V_{1x} = -V_{2x}/2$$

obtemos:

$$\begin{aligned} (V'_{1x})^2 &= (V_{1x})^2 \\ (V'_{2x})^2 &= (V_{2x})^2. \end{aligned}$$

As soluções são

$$V'_{1x} = V_{1x}; V'_{2x} = V_{2x},$$

ou

$$V'_{1x} = -V_{1x}; V'_{2x} = -V_{2x}.$$

A solução com sinal + corresponde à inexistência de colisão. A segunda solução é a correcta: as velocidades trocam de sinal.

(d)

$$v'_{1x} = V'_{1x} + v_{\text{cm}} = -0,67 + 1,33 = 0,67 \text{ m s}^{-1}.$$

$$v'_{2x} = V'_{2x} + v_{\text{cm}} = 1,33 + 1,33 = 2,67 \text{ m s}^{-1}.$$

12.3. \mathcal{ETV}_3 : Os relógios ficam sincronizados no referencial do solo, se este for o referencial privilegiado, onde a velocidade da luz é a mesma em todas as direcções. Mas nesse caso, a velocidade da luz no referencial que se move relativamente ao solo com velocidade v da esquerda para a direita é:

- $c - v$ para o sinal que viaja para o poste II;
- $c + v$ para o sinal que viaja para o poste 0.

O tempo que a Luz demora a atingir o poste II é

$$(c - v)T = L - vT \Rightarrow T = \frac{L}{c};$$

Para atingir o poste 0,

$$(c + v)T' = L + vT' \Rightarrow T' = \frac{L}{c}$$

Os relógios ficariam sincronizados nos dois referenciais.

12.4. \mathcal{ETV}_4 : O aluno esqueceu-se do problema da relatividade da simultaneidade. O argumento seria válido se, no instante em que o relógio do *Coiote* marca 0 **no referencial do *Coiote***, o relógio do poste I marcasse 0,0. Mas não marca, marca mais que zero (ver figura 12.12 na página 163). Por isso, quando este poste passa pelo *Coiote* este pode vê-lo a marcar mais do que 0,866 e concluir que o relógio do poste anda **mais devagar** que o seu próprio relógio.

12.5. \mathcal{ETV}_5 : O aluno voltou-se a esquecer da ...relatividade da simultaneidade. A imagem da figura 12.13 na página 165 é um “instante” do referencial do *Coiote*. Quando as traseiras estão em A a frente do Cadillac do *Coiote* está em C e a do carro parado no solo (com velocidade $-c/2$ em relação ao outro) está em B . Mas já vimos que eventos simultâneos num referencial, em dois locais diferentes, não são simultâneos no outro referencial. Se recordarmos o filme da figura 12.10 da página 155 vemos que eventos simultâneos no referencial do *Coiote* quanto mais para a frente estão, mais tarde ocorrem no referencial do Solo. Suponhamos que A , B e C são

marcações na estrada. O Cadillac estacionado tem a traseira coincidente com A e a frente com B , sempre. Há um instante em a traseira do Cadillac do *Coiote* passa em A . **No referencial \mathcal{C}** , nesse momento, a frente está em C à frente de B e o seu carro é maior que o do Solo. Mas, **no referencial do \mathcal{S}** , o filme é diferente (fig. 12.17). Quando a traseira do Cadillac está em A , a frente ainda não chegou a B . Só passa em B e C mais tarde; por isso o Cadillac do *Coiote* é mais curto, no referencial \mathcal{C} , que o Cadillac parado. O **quando** é relativo!

12.6. \mathcal{ETV}_6 :

(a)

$$\begin{aligned}\Delta m &= m(^4\text{He}^{2+}) - 4m_p - 2m_e = \\ &= 4,003 - 4 \times 1,008 - 2 \times 0,0005 \approx -0,03 \text{ u.m.a}\end{aligned}$$

$$\Delta E = -0,03 \times 1,661 \times 10^{-27} \times (3 \times 10^8)^2 = -0,4 \times 10^{-11} \text{ J.}$$

$$\Delta E = -\frac{0,4 \times 10^{-11}}{1,6 \times 10^{-19}} = -0,25 \times 10^8 = -25 \text{ MeV.}$$

O Sol radia $0,4 \times 10^{-11} \text{ J} = 25 \text{ MeV}$, por cada núcleo de hélio formado.

(b)

$$\begin{aligned}\Delta m &= -\frac{3,9 \times 10^{26}}{c^2} \times 365,3 \times 24 \times 3600 \\ &= -1,4 \times 10^{26-16+7} = -1,4 \times 10^{17} \text{ kg.}\end{aligned}$$

O Sol radia $1,4 \times 10^{17} \text{ kg}$ por ano, mas isso é uma fracção mínima da sua massa total

$$\frac{-\Delta m}{M_\odot} = 0,7 \times 10^{-13}.$$

(c) Massa em Hidrogénio $\sim 0,67 \times M_\odot = 1,3 \times 10^{30} \text{ kg}$; Massa de núcleos de Hidrogénio consumida por segundo:

$$\frac{3,9 \times 10^{26}}{0,4 \times 10^{-11}} \times 4m_p = 66 \times 10^{26+11-27} = 6,6 \times 10^{11} \text{ kg.}$$

Duração do combustível do Sol em anos:

$$T = \frac{1,3 \times 10^{30}}{6,6 \times 10^{11}} \times \frac{1}{3,15 \times 10^7} = 0,6 \times 10^{11} \text{ anos.}$$

12.7. $\mathcal{ETV}_7 : \sqrt{1 - v^2/c^2} = \sqrt{1 - 0,994^2} = 0,11;$

$$\Delta t = t_{1/2} / \sqrt{1 - v^2/c^2} \approx 14,2 \mu\text{s};$$

$$l = v\Delta t = 0,994 \times c \times 14,2 \times 10^{-6} = 4,23 \times 10^3 \text{ m} = 4,23 \text{ km.}$$

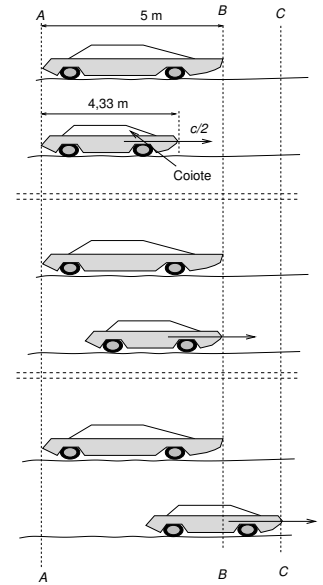


Figura 12.17: O "instante" da figura 12.13 da página 165 é este filme no referencial do solo.

12.8. \mathcal{ETV}_8 . Já sabemos que a última tira corresponde a $T = T_0$. Se olharmos, por exemplo, para o relógio III, vemos que entre duas tiras passa $\Delta t = 0,125$; este é o tempo próprio deste relógio, que tem velocidade $c/2$ no referencial \mathcal{C} . Assim entre duas tiras sucessivas

$$\Delta t = T_0 \Delta T \Rightarrow \Delta T = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{4\sqrt{3}} = 0,144 \text{ s}.$$

Assim, temos os três instantes:

$$\begin{aligned} T_1 &= T_0 - \frac{2}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0,577 \text{ s} \\ T_2 &= T_0 - \frac{1}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{12} = \frac{5\sqrt{3}}{12} = 0,722 \text{ s} \\ T_3 &= T_0 = 0,866 \text{ s}. \end{aligned}$$

Note-se como em \mathcal{C} o instante de chegada, $T = 0,577 \text{ s}$, é anterior ao de partida, $T = 0,866 \text{ s}$.

12.9. \mathcal{ETV}_9 : O factor $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ teria que valer 10^{-6} .

$$\begin{aligned} 1 - \frac{v^2}{c^2} &= 10^{-12} \Rightarrow \frac{v}{c} = \sqrt{1 - 10^{-12}} \\ &\approx 0,9999999999995. \end{aligned}$$

12.8.1 Actividades, questões e problemas

12.1. Escrever pequenos ensaios sobre o seguintes temas:

- (a) A invariância da velocidade da luz e a relatividade da simultaneidade.
- (b) Verificação experimental da teoria da Relatividade Restrita.
- (c) As razões de Einstein na escolha dos postulados fundamentais da Relatividade Restrita.
- (d) Os conceitos Newtonianos de espaço e tempo e a transformação de Galileu entre referenciais em movimento uniforme e rectilíneo.

12.8.2 Questões

12.1. Numa experiência de colisão entre dois carros iguais, um deles tem velocidade $v_x = 4 \text{ m s}^{-1}$, no referencial do centro de massa dos dois carros. Qual é a velocidade do outro carro?

- 12.2. Qual dos postulados da Relatividade é imediatamente incompatível com a transformação Galileana entre referenciais em movimento uniforme e rectilíneo?
- 12.3. Por que razão é que as equações de Maxwell não satisfazem o Princípio da Relatividade, se a transformação entre referenciais em movimento uniforme e rectilíneo for a transformação de Galileu?

12.8.3 Problemas

- 12.1. Um avião sobrevoa duas cidades A e B a 500 quilómetros de distância, com um intervalo de meia-hora, em dias sem vento. Se soprar um vento de com velocidade 100 km h^{-1} na direcção de A para B quanto demora o avião de $A \rightarrow B$ e de $B \rightarrow A$?

Nota: a velocidade do avião relativamente ao ar da atmosfera é sempre a mesma.

- 12.2. Um nadador tem que atravessar um rio de distância entre margens de 200 m. A velocidade que consegue em águas paradas é de 1 m s^{-1} . O rio tem uma corrente com velocidade $u = 0,5 \text{ m s}^{-1}$.

- Se ele nadar segundo a perpendicular à margem ($A \rightarrow B$) quanto tempo demora a atravessar o rio?
 - Qual é o tempo mínimo em que ele consegue atravessar o rio e a que distância do ponto B ele chegará se usar o trajecto em que o tempo de travessia é mínimo?
- 12.3. O seguinte resultado torna especialmente simples a análise de colisões de carros em movimento numa calha:

Numa colisão elástica de dois corpos em movimento rectilíneo, as velocidade dos corpos no referencial do centro de massa trocam de sentido na colisão. Isto é:

$$\begin{aligned}\vec{v}'_1 &= -\vec{v}_1; \\ \vec{v}'_2 &= -\vec{v}_2.\end{aligned}$$

Demonstrar este resultado.

- 12.4. O automóvel da figura está a deslocar-se com velocidade de 140 km h^{-1} e o comboio a 100 km h^{-1} .

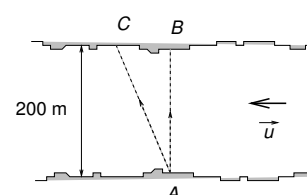


Figura 12.18: Como minimizar o tempo de travessia?

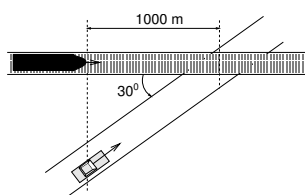


Figura 12.19: Passará a tempo?

- (a) Escolher os eixos apropriadamente e obter as seguintes equações paramétricas (distâncias em metros e tempo em segundos):

$$\text{comboio} \begin{cases} x(t) = 27,8t \\ y(t) = 577 \end{cases}$$

$$\text{carro} \begin{cases} x(t) = 33,7t \\ y(t) = 19,4t \end{cases}$$

- (b) Escrever as equações paramétricas das coordenadas $X(T)$ e $Y(T)$ do comboio, no referencial do carro assumindo uma transformação Galileana de coordenadas.
- (c) Ler das equações das coordenadas $X(T)$ e $Y(T)$ a velocidade do comboio no referencial do carro.
- (d) Representar num gráfico X, Y a trajectória do comboio no referencial do carro.
- 12.5. Uma nave com comprimento próprio, no referencial em que está em repouso, $l = 200\text{ m}$ move-se com velocidade $3c/4$ no referencial de uma estação espacial. Duas explosões ocorrem em simultâneo no referencial da nave em extremos opostos da mesma.
- (a) No referencial da estação, qual das explosões ocorre primeiro? A da frente ou a da traseira da nave?
- (b) Qual é o comprimento da nave no referencial da estação espacial?
- (c) Que intervalo de tempo decorre entre as duas explosões no referencial da estação orbital?

Nota: se um sinal de luz for emitido do ponto médio da nave atinge as extremidades ao mesmo tempo no referencial da nave, mas não no da estação orbital.

- 12.6. Qual é mais comprida: uma barra de $L = 1\text{ m}$, em repouso, ou uma barra com comprimento próprio de $1,20\text{ m}$ com velocidade (segundo o seu comprimento) $v = 2c/3$?
- 12.7. No livros do físico George Gamow, *As Aventuras de Mr. Tomkins*, Mr. Tomkins, um empregado bancário, depois de assistir a algumas palestras sobre Relatividade e Mecânica Quântica é afligido por pesadelos passados em universos em

que a velocidade da luz não é mais que algumas dezenas de quilómetros por hora, seja $c = 80 \text{ km h}^{-1}$. A mais trivial das viagens (comboio, ou mesmo bicicleta) é fortemente relativista. Na sua viagem diária para o emprego, Mr. Tomkins verifica que entre os relógios da estação de partida e chegada passam 30 minutos. Ao chegar, Mr. Tomkins verifica que há sempre uma diferença de 5 minutos entre o seu relógio e o da estação embora ele estivesse certo com o da estação de partida.

- (a) O seu relógio está atrasado ou adiantado, relativamente ao da estação?
- (b) Qual é a velocidade do comboio?
- (c) Mr. Tomkins sabe qual é a distância entre estações (pode vê-la num mapa) e conhece a velocidade do comboio. Por isso, em casa, calcula que a viagem lhe demora 30 minutos. Como explica ele que a sua viagem lhe demore 25 minutos, em vez de 30?

Nota: Ignorar os efeitos de aceleração no início e fim da viagem.

12.8.4 Desafios

- 12.1. Um barco tem uma velocidade máxima, relativamente às águas do rio, igual a v_M . Sabemos que, se as águas do rio tiverem uma velocidade \vec{u} , paralela às margens do mesmo, a velocidade máxima do barco em relação à Terra deixa de ser igual em todas as direcções.
- (a) Usando a transformação de Galileu, deduzir a expressão da velocidade máxima do barco, em função do ângulo θ da sua direcção de deslocamento com a margem, no referencial da Terra.

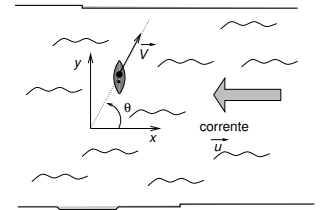


Figura 12.20: Qual é velocidade máxima do barco, V , no referencial da Terra, quando \vec{V} faz um ângulo θ com a margem?

Capítulo 13

A revolução quântica

A história da previsão e descoberta do fóton está entre os mais fascinantes episódios da ciência do século XX. Nunca, até hoje, a sugestão de uma nova partícula causou maior e mais duradoura confusão, a razão principal sendo que não se estava confrontado com um novo fenómeno, mas, ao contrário, com um velho fenómeno em novas vestes: radiação electromagnética livre, que se pensava compreendida como ondas, comportava-se em certas circunstâncias como constituída por partículas.

Abraham Pais [6]

Apesar das transformações radicais dos conceitos de espaço e tempo das Teorias da Relatividade Restrita e Geral, os físicos consideram as duas teorias, juntamente com a Física Newtoniana e a Electrodinâmica de Maxwell, como *teorias clássicas*.

Todas as teorias clássicas falam de um mundo de objectos, partículas ou campos, cuja existência independente e autónoma é fielmente representada na teoria; que evoluem sob a acção de leis determinísticas, as quais especificam totalmente o futuro e o passado a partir de um conjunto de dados iniciais. As teorias de Einstein introduziram a relatividade (variação com referencial) inesperada de algumas grandezas, como os intervalos temporais e espaciais, mas não puseram em causa a perspectiva realista da Física Newtoniana: o objecto da Física é aquilo que *é* e a sua essência é fielmente captada pela representação que dela faz a teoria.

O mesmo não se pode dizer em relação à Física Quântica. O corte em relação à tradição clássica é muito mais profundo e está bem

patente na dificuldade, ou mesmo impossibilidade, de formular a teoria sem referência à observação. Mesmo em Física Clássica, qualquer previsão concreta se refere ao resultado de uma experiência ou observação. Mas a representação teórica dos objectos da teoria, partículas ou campos, ignora completamente os processos de observação, cujos resultados podem ser deduzidos, sem ambiguidades, das propriedades objectivas dos campos e partículas. Não é assim em Física Quântica, que é muito mais uma teoria daquilo que se mede, do que uma teoria do que as coisas são em si.

Contudo, não foi uma iluminação filosófica que conduziu à sua formulação, mas sim o resultado de anos de experimentação, observação e reflexão em Física Atômica, que forçaram esta revisão das ideias clássicas.

O nosso objectivo neste capítulo, não é descrever o resultado final desta revolução, algo que exigiria muito mais tempo e preparação, mas sim explorar um pouco alguns dos aspectos da Física Atômica que forçaram esta descontinuidade com as ideias clássicas.

Vamos centrar-nos em três ideias fundamentais:

- a quantificação, natureza discreta de certas grandezas físicas, como a energia;
- a duplo aspecto de onda e partícula, quer do que classicamente se representava com campos (por exemplo a radiação electromagnética), quer do que se representava em termos de partículas, como os átomos e os electrões;
- o acaso, não como expressão da nossa ignorância sobre o comportamento de um sistema, que por si segue leis absolutamente determinadas, mas sim como elemento fundamental e irreduzível do funcionamento do universo.

Como veremos estas três ideias não são independentes e estão intimamente relacionadas. Começemos pela primeira.

13.1 A quantificação de energia

A posição e velocidade de uma partícula determinam a sua energia. No caso de uma onda, em que as diferentes partes de um meio vibram em torno de posições de equilíbrio, a energia será

tanto maior quanto mais rápidas forem essas oscilações e maior o afastamento do equilíbrio. As grandezas de que depende a energia de uma partícula ou onda variam continuamente, sem saltos. Nada na representação clássica do mundo nos prepara para a possibilidade de a energia poder tomar apenas certos valores discretos, estar **quantificada**; poder assumir dois valores E_1 e E_2 e nenhum valor entre estes dois. Como é que Max Planck, um académico respeitado, sem qualquer inclinação revolucionária, foi levado a propor isso mesmo?

13.1.1 Radiação electromagnética

Frequência e comprimento de onda

Cargas eléctricas aceleradas produzem campos eléctricos e magnéticos variáveis no tempo e no espaço: radiação electromagnética. Assim uma carga acelerada origina forças eléctricas sobre outra carga colocada a uma certa distância, r , mas não instantaneamente. Como vimos no último capítulo, só passado um tempo r/c é que a perturbação electromagnética, criada pela primeira carga, actua sobre a segunda; a lei de Coulomb só é válida para cargas em repouso e tem que ser modificada para cargas movimento.

Quando o movimento da carga que cria a radiação é harmónico,

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t + \varphi),$$

o campo eléctrico criado num ponto de vector de posição \vec{r} relativamente à posição de equilíbrio da carga é também harmónico¹

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{e}}{r} \cos \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) + \varphi \right] \quad (r = |\vec{r}|). \quad (13.1)$$

Repare-se no seguinte:

- A frequência angular de variação no tempo é a mesma da carga que cria o campo;
- o valor do campo no instante t é determinado pelo movimento da carga no instante anterior $t - r/c$, em que r é a distância à carga; r/c é o tempo que a perturbação electromagnética demora a percorrer a distância r .

¹A fórmula seguinte só é válida se $x_0 \ll |\vec{r}|$, isto é, para distâncias à carga muito superiores à sua amplitude de oscilação. Se assim não fosse, o tempo de propagação da radiação, r/c , seria diferente para diferentes posições da carga na sua oscilação. Por outro lado, a amplitude de oscilação, $|\vec{e}|$, depende do ângulo entre o vector \vec{r} e a direcção de oscilação da carga.

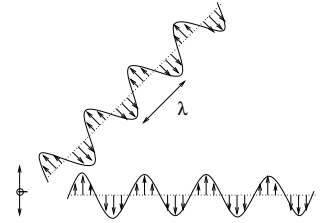


Figura 13.1: Uma carga oscilante emite radiação electromagnética em todas as direcções. O campo eléctrico oscila no tempo com a mesma frequência que a carga; o comprimento de onda é a distância percorrida pela radiação durante um período de oscilação.

- O ângulo de fase da função cosseno, a parte oscilante do campo, tem uma variação de 2π , correspondente a um período do cosseno, numa distância Δr dada por:

$$\omega \frac{\Delta r}{c} = 2\pi.$$

Esta distância é o **comprimento de onda da radiação**, λ :

$$\lambda = 2\pi \frac{c}{\omega} = cT = c/\nu.$$

em que

- $T = 2\pi/\omega$ é o período da radiação;
- $\nu = 1/T$ é a sua frequência, o número de oscilações completas por segundo.

Uma carga acelerada perde energia devido à radiação que emite. Se estiver a oscilar, a sua amplitude diminui gradualmente, tal como se estivesse sujeita a uma força de atrito: esse mecanismo chama-se **amortecimento radiativo**. A energia perdida pela carga pode, eventualmente ser absorvida *mais tarde* por outra carga, distante da primeira; o campo eléctrico da radiação ao actuar nessa carga acelera-a e aumenta a respectiva energia cinética. Contudo, a conservação de energia aplica-se em todos os instantes. Por isso, os campos oscilantes da radiação tem uma certa quantidade de energia.

Distribuição espectral

Quando fazemos passar a luz do Sol por um prisma, ou simplesmente, vemos a imagem do Sol reflectida/refractada em pequenas gotas de água suspensas na atmosfera—o arco-íris—verificamos que a radiação Solar é composta de várias **cores**. Os nossos sentidos diferenciam deste modo a radiação de acordo com a respectiva frequência ou comprimento de onda. A radiação que percebemos como vermelha tem uma frequência mais baixa (comprimento de onda maior) que a que percebemos como violeta. Num corpo macroscópico a uma temperatura finita, como o Sol, existem muitas frequências possíveis de oscilação das cargas e o campo de radiação emitido é uma sobreposição (soma) de campos com variações temporais semelhantes à da equação 13.1 na página anterior, mas com frequências muito variadas; uma certa gama de frequências é percebida pelo nosso sentido visual, frequências

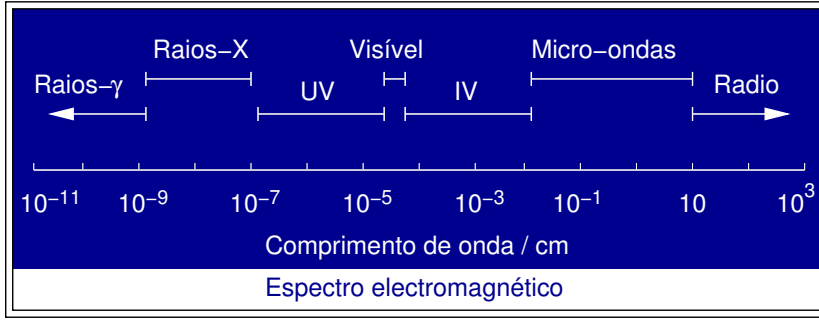


Figura 13.2: Espectro electromagnético; embora a radiação electromagnética seja o mesmo fenómeno em todos os comprimentos de onda, a variedade de aplicações e de instrumentos apropriados à detecção nas diferentes gamas do espectro, conduziu a diferentes designações.

mais baixas (infra-vermelhos) são detectadas na nossa pele, na forma de uma sensação de calor. A cada intervalo de frequências corresponde uma certa energia e a energia total da radiação é a soma das energias associadas a cada intervalo de frequências.

A potência incidente numa pequena área ΔA de um corpo exposto a um campo de radiação estacionário é

$$\frac{dE}{dt} = I \Delta A,$$

em que I é a intensidade de radiação, a potência incidente por unidade de área. Se contarmos apenas a radiação cuja frequência está numa banda $[\nu, \nu + \Delta\nu]$ ($\Delta\nu \ll \nu$) podemos definir a intensidade espectral de radiação, $I(\nu)$

$$\left. \frac{dE}{dt} \right|_{\nu, \nu + \Delta\nu} = I(\nu) \Delta\nu \Delta A.$$

Com a frequência e o comprimento de onda estão relacionados, $\lambda = c/\nu$, a intensidade espectral também pode ser definida por gama de comprimentos de onda:

$$\left. \frac{dE}{dt} \right|_{\lambda, \lambda + \Delta\lambda} = J(\lambda) \Delta\lambda \Delta A.$$

sendo a relação entre as duas densidades

$$J(\lambda) = \frac{c}{\lambda^2} I\left(\frac{c}{\lambda}\right).$$

\mathcal{ETV}_1 : Atendendo às respectivas definições, quais são as unidades SI das densidades espectrais, $I(\nu)$ e $J(\lambda)$?

Equilíbrio térmico radiação-matéria

Imaginemos agora um sistema isolado, limitado por paredes perfeitamente reflectoras, que não deixam a radiação escapar. Um tal sistema acabará por atingir o equilíbrio térmico, em que deixa de haver transferências de energia entre as suas diferentes partes.

Não é difícil ver que a energia do sistema ficará dividida entre a matéria e a radiação. Se toda a energia ficasse na matéria, na forma de movimento desordenado das suas partículas, estas, como estão carregadas, emitiriam radiação e perderiam energia. Se toda a energia estivesse na radiação electromagnética, as cargas materiais ficariam expostas a campos eléctricos oscilantes que as colocariam em movimento, havendo transferência de energia da radiação para a matéria.

Planck, em 1900, determinou a forma como a distribuição espectral da radiação em equilíbrio térmico com a matéria varia com a temperatura, $I_{\text{cn}}(\nu, T)$. Considerou cargas sujeitas a oscilações harmónicas com uma dada frequência ν e expostas a um campo de radiação e mostrou que a situação de equilíbrio, em que deixa de haver fluxo de energia entre matéria e radiação, é determinada pela condição:

$$I_{\text{cn}}(\nu, T) \propto \nu^2 \epsilon_\nu(T), \quad (13.2)$$

em $\epsilon_\nu(T)$ é a energia média de cada carga em oscilação com frequência ν .

Como vimos no 10º ano, no caso de um líquido ou gás, a temperatura absoluta, T , é uma medida da energia cinética média de translação por partícula,

$$\epsilon_c = \frac{3}{2} k_B T, \quad (13.3)$$

em que k_B é a constante de Boltzmann. Para osciladores harmónicos com movimento numa direcção, considerados por Planck, a física clássica previa a mesma energia média independentemente da respectiva frequência,²

²Planck considerou osciladores com movimento segundo uma só direcção.

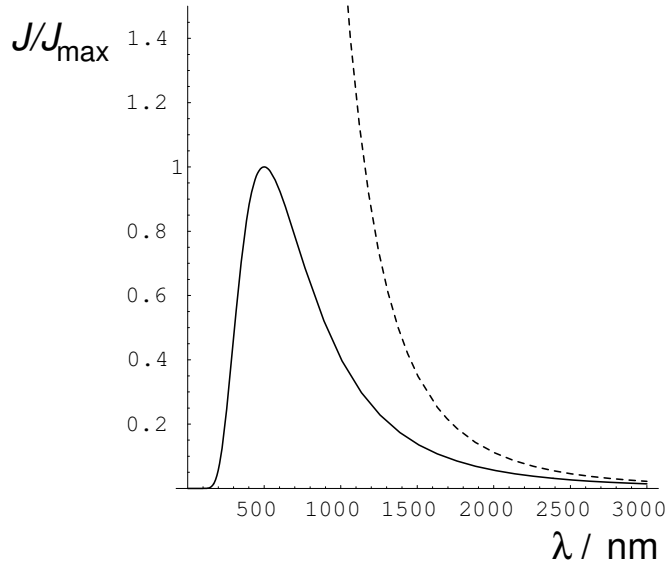


Figura 13.3: A distribuição de Planck para $T = 5780\text{ K}$ normalizada pelo valor do seu máximo (a cheio); se a relação da eq. 13.4 fosse válida, a distribuição espectral seria a da curva tracejada.

$$\epsilon_{\nu}^{(\text{cl})}(T) = k_B T, \quad (13.4)$$

o que implicava que a densidade espectral aumentasse com a frequência (Lei de Rayleigh-Jeans),

$$I_{\text{cn}}(\nu, T) \propto \nu^2 k_B T,$$

ou, em termos do comprimento de onda, crescesse quando $\lambda \rightarrow 0$:

$$J_{\text{cn}}(\lambda, T) \propto \frac{c^3}{\lambda^4} k_B T.$$

As medições experimentais de Wien mostravam que para $\nu \rightarrow \infty$ ($\lambda \rightarrow 0$) a densidade espectral tornava-se nula:

$$\begin{aligned} I_{\text{cn}}(\nu \rightarrow \infty, T) &\propto \nu^3 e^{-a\nu/T} \rightarrow 0 \\ J_{\text{cn}}(\lambda \rightarrow 0, T) &\propto \lambda^{-5} e^{-ac/\lambda T} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

No seu primeiro trabalho, Max Planck **adivinhou** a forma da distribuição espectral do corpo negro. Não há outra maneira de

A respectiva energia cinética média é $k_B T/2$, um terço do resultado da equação 13.3, pois só há movimento segundo um eixo. Mas a energia potencial média do oscilador é também $k_B T/2$ o que dá uma energia total igual a $k_B T$.

descrever a sua descoberta. Conhecendo o comportamento em dois limites, baixas e altas frequências, Planck propôs uma única fórmula que reproduzia muito fielmente as curvas experimentais em todas as frequências.

A sua contribuição revolucionária foi a hipótese que fez para obter este resultado. Planck assumiu que uma carga em oscilação só poderia trocar energia com a radiação em múltiplos inteiros de um valor proporcional à respectiva frequência de oscilação

$$E = h\nu,$$

em que h é uma nova constante, que ficou conhecida por **constante de Planck**. De acordo com esta hipótese, excitar oscilações de frequência ν elevada requer muita energia (pelo menos $h\nu$) e essa energia pode distribuir-se de muitas maneiras diferentes por osciladores de frequência mais baixa. Por isso é muito mais frequente observar essa energia distribuída por osciladores de baixa frequência, do que concentrada numa única oscilação. Planck concluiu que a energia média de osciladores de elevada frequência é fortemente suprimida relativamente a osciladores de frequência mais baixa. O resultado que obteve foi, em vez do da equação 13.4 na página precedente,

$$\epsilon_\nu(T) = \frac{h\nu}{e^{h\nu/k_B T} - 1} \quad (13.5)$$

que, substituído na equação 13.2 deu, para a distribuição espectral de radiação térmica,

$$I_{\text{cn}}(\nu, T) = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \frac{h\nu}{e^{h\nu/k_B T} - 1}. \quad (13.6)$$

$$J_{\text{cn}}(\lambda, T) = \frac{2\pi c}{\lambda^4} \frac{hc/\lambda}{e^{hc/\lambda k_B T} - 1}. \quad (13.7)$$

A verificação experimental mais precisa de sempre da fórmula de Planck teve uma origem algo inesperada.

■ Lei de Kirchhoff e o corpo negro ■

Já vimos no 10º ano, que a radiação incidente na superfície de um corpo, pode ser absorvida ou reflectida. A fracção absorvida depende da frequência da radiação:

$$I_{\text{abs}}(\nu) = e(\nu)I_{\text{inc}}(\nu) \quad 0 \leq e(\nu) \leq 1.$$

Quando o corpo está em equilíbrio com a radiação emitirá a mesma quantidade de radiação que absorve:

$$I_{\text{em}}(\nu) = e(\nu)I_{\text{inc}}(\nu)$$

e, por esta razão, $e(\nu)$ é a **emissividade** do corpo. Kirchhoff mostrou que, quando existe equilíbrio térmico completo entre radiação e matéria, se obtém

$$I_{\text{em}}(\nu) = e(\nu)I_{\text{cn}}(\nu, T)$$

em que a função $I_{\text{cn}}(\nu, T)$ é uma função universal da frequência e temperatura, que Kirchhoff desconhecia. Foi esta função que Planck determinou. Repare-se que a radiação emitida por um corpo a temperatura T tem a distribuição espectral da radiação térmica, $I_{\text{cn}}(\nu, T)$, se $e(\nu) = 1$, ou seja, se o corpo absorver toda a radiação que nele incide. Por isso se chama radiação do corpo negro.

Caixa 13.1: Lei de Kirchhoff.

\mathcal{ETV}_2 : De acordo com o resultado de Planck a energia média de um oscilador de frequência ν dividida pelo correspondente resultado clássico é

$$\frac{\epsilon_\nu(T)}{k_B T} = \frac{h\nu/k_B T}{e^{h\nu/k_B T} - 1},$$

ou seja é apenas função da variável $x = h\nu/k_B T$, que não é mais que a razão entre a mínima energia possível para o oscilador (acima de 0) e a energia clássica, de acordo com a proposta de Planck.

- a) Usando uma calculadora gráfica estudar esta função de x ,

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$$

e verificar os seguintes limites:

- i. $f(x) \approx 1$, $x \ll 1$;
- ii. $f(x) \ll x$, $x \gg 1$.

- b) Como podemos interpretar estes limites, referindo-nos à energia média de um oscilador? Em que situação é que o resultado de Planck é totalmente distinto do resultado clássico?

A radiação cósmica de fundo

Como realizar experimentalmente radiação em equilíbrio térmico com a matéria? Kirchhoff tinha sugerido, antes de Planck, que uma cavidade com paredes que absorvessem radiação de todas as frequências, acabaria por estar preenchida por radiação em equilíbrio térmico com a matéria. Um pequeno orifício nessa cavidade emitiria radiação com a distribuição espectral da radiação em equilíbrio térmico, com a mesma temperatura das paredes do corpo. Kirchhoff chamou a essa radiação **radiação de um corpo negro**. Mas o melhor corpo negro que conhecemos é o universo nos primeiros tempos da sua existência.

Em 1965 dois cientistas dos Laboratórios Bell no Estados Unidos, conseguiram permissão para usar uma antena de radar, de comunicação com satélites, já fora de uso, para procurar emissões de rádio vindas das estrelas. Arno Penzias e Robert Wilson, viram os seus esforços frustrados, por não conseguirem ver-se livre de um ruído persistente (estática) captado pela antena, qualquer que fosse a direcção do céu para onde estivesse apontada. Ainda pensaram que fosse devido aos “presentes” deixados por pombos que se aninhavam na antena. Mas após uma limpeza paciente da mesma, o ruído continuava.

Felizmente, em conversa com outros colegas, souberam que alguns físicos da vizinha Universidade de Princeton, que trabalhavam num modelo de criação do Universo em que este tinha sido muito mais pequeno e muito mais quente no passado, tinham previsto que o Universo deveria estar hoje permeado por radiação electromagnética, com energia apreciável precisamente na gama de comprimentos de onda que Penzias e Wilson tinham medido. Penzias e Wilson tinham de facto descoberto a radiação cósmica de fundo, um vestígio do Big Bang.

Satélite COBE

Em 1966 Penzias e Wilson mediram a intensidade espectral de radiação apenas a uma frequência determinada. Em 1992, o satélite COBE, **CO**smic **B**ackground **E**xplorer, completou uma série de medidas do modo como a energia da radiação cósmica de fundo se distribui pelos diferentes comprimentos de onda; verificou-se um excelente acordo destes resultados com a lei proposta por Planck em 1900, com uma temperatura $T = 2,725\text{ K}$. A Fig. 13.4 na página seguinte ilustra a qualidade desse acordo.

Esta radiação é um vestígio do tempo em que toda a matéria do universo estava ionizada. A existência de cargas livres mantinha a radiação e matéria em equilíbrio térmico. Com a expansão do universo e seu consequentemente arrefecimento, formaram-se os primeiros átomos neutros de hidrogénio e passou a haver muito menos emissão e absorção de radiação. Isso aconteceu na altura em que a temperatura do universo era cerca de $T \approx 3000\text{ K}$. A radiação cósmica de fundo que observamos hoje é a que existia nessa altura. O seu comprimento de onda aumentou na mesma proporção que as distâncias entre galáxias no Universo em expansão e isso correspondeu a uma diminuição de temperatura da distribuição espectral de radiação.

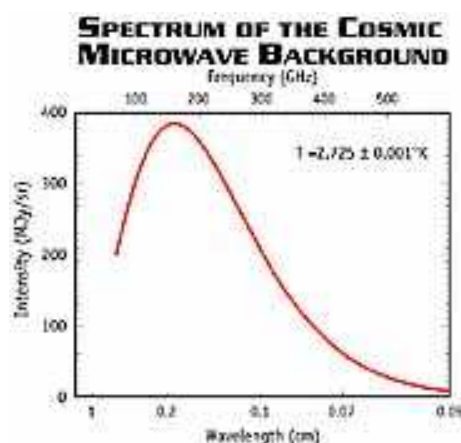


Figura 13.4: Os dados da medição da radiação cósmica de fundo pelo satélite COBE não se conseguem distinguir da curva teórica da lei de Planck (vermelho *online*).[4]

Leis de Wien e Stefan Boltzmann

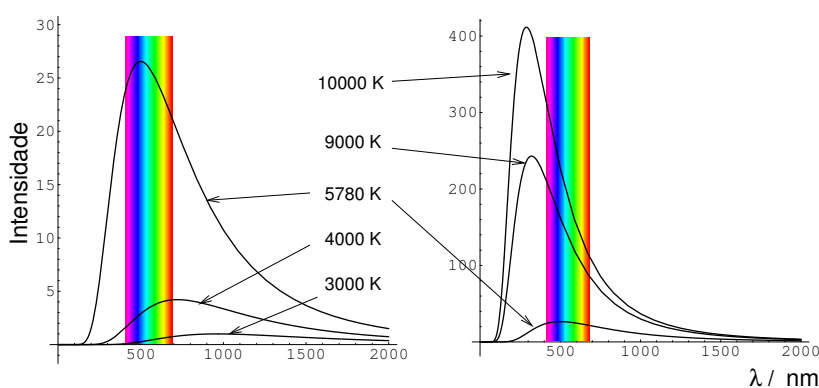


Figura 13.5: Intensidade espectral, $J_{\text{cn}}(\lambda)$ da radiação do corpo negro para várias temperaturas (lei de Planck). A banda colorida mostra, aproximadamente, a gama de radiação visível. As curvas de intensidade foram divididas pelo valor do máximo da curva de $T = 3000 \text{ K}$.

Nos textos do 10º ano (Capítulo VI) apresentamos dois resultados que são consequência da Lei de Planck:

Lei de Stefan-Boltzmann: A intensidade total da radiação térmica, isto é, somada sobre todas as gamas de frequência, é

proporcional à quarta potência da temperatura em kelvin:

$$I_{\text{cn}} = \sigma T^4 \quad (\text{lei de Stefan – Boltzmann})$$

A constante σ é designada por constante de Stefan-Boltzmann e o seu valor pode deduzir-se da lei de Planck:

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15 h^3 c^2} = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}.$$

Lei de deslocamento de Wien: A uma dada temperatura, T , a intensidade $J_{\text{cn}}(\lambda)$ tem um máximo a um comprimento de onda λ_T , dado por

$$\lambda_T = \frac{b}{T}$$

em que

$$b = \frac{hc}{4,965k_B} \approx 2,9 \times 10^{-3} \text{ m K}.$$

Assim, quanto mais alta for a temperatura de um corpo negro:

- i) mais energia radia. Repare-se que entre uma temperatura de 300 K (temperatura ambiente) e 3000 K (o filamento de uma lâmpada de halógeno) a temperatura aumenta 10 vezes, mas a potência radiada aumenta 10^4 vezes (10 000 vezes mais energia radiada no mesmo tempo). Na figura 13.5 é visível o aumento da intensidade a todos os comprimentos de onda, quando a temperatura aumenta.
- ii) Mais pequenos são os comprimentos de onda onde a maior parte da energia radiada é emitida. Como se vê na fig. 13.5, a distribuição espectral desloca-se para comprimentos de onda mais pequenos com o aumento de temperatura.

Contudo, temos que ter em atenção que estes resultados só são aplicáveis à radiação do corpo negro. A radiação emitida por um corpo de emissividade $e(\nu)$ tem uma distribuição espectral diferente (ver caixa 13.1 na página 193),

$$I_{\text{em}}(\nu, T) = e(\nu) I_{\text{cn}}(\nu, T).$$

\mathcal{ETV}_3 : Se olharmos para uma fotografia da Terra tirada por uma nave ou satélite, vemos que parte da Terra tem uma bela cor azul, permeada de branco, e a parte onde é noite aparece preta. Quer isso dizer que as temperaturas superficiais são tão diferentes que uma parte da Terra radia no visível e outra não?

13.1.2 O efeito fotoelétrico

No seu artigo de 1905 sobre o efeito fotoelétrico, Einstein levou a ideia de quantificação de energia para a radiação electromagnética.

Einstein mostrou que, em certas circunstâncias, a radiação electromagnética se comportava como um gás de partículas independentes cuja energia era dada pela fórmula de Planck:

$$E = h\nu.$$

Um dos fenómenos que invocou para justificar esta afirmação foi o efeito fotoelétrico. Este efeito fora descoberto por Hertz, e consiste na emissão de electrões por superfícies metálicas nas quais incide radiação.

Se a radiação electromagnética consiste em campos eléctricos oscilantes, não surpreende que possa acelerar electrões e comunicar-lhes energia suficiente para que saiam de um metal. Era de esperar que, aumentando a amplitude do campo eléctrico e portanto a intensidade da radiação, a energia comunicada aos electrões fosse maior. O que se observava, contudo, era que a energia dos electrões emitidos era determinada exclusivamente pela frequência da radiação:

- se esta fosse inferior a um certo valor, dependente do metal, não havia emissão de electrões;
- acima desse valor, a energia cinética dos electrões aumentava com o valor de ν , não com a intensidade da radiação. Esta só fazia variar o **número** de electrões emitidos, ou seja a corrente eléctrica (ver caixa 13.2 na página ao lado).

■ Medição do efeito fotoelétrico ■

Um célula fotoelétrica é constituída por dois eléctrodos mantidos em vácuo. Na ausência de irradiação, mesmo com uma diferença de potencial entre os eléctrodos não há corrente, pois as cargas não podem passar entre eles. Se um dos eléctrodos for irradiado e emitir electrões por efeito fotoelétrico, estes podem viajar até ao outro e, pelo circuito externo, repor a neutralidade de carga voltando ao emissor: isto corresponde à existência de uma corrente eléctrica.

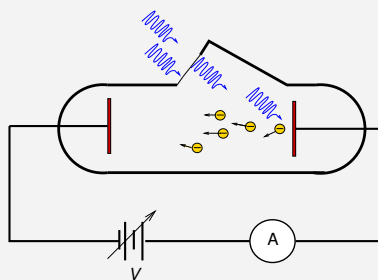
A energia cinética máxima dos electrões emitidos pode ser medida com facilidade mantendo o eléctrodo emissor a um potencial positivo relativamente ao colector. Nesse caso, a energia potencial eléctrica dos electrões aumenta de eV entre emissor e receptor, em que V é a diferença de potencial entre emissor e receptor. Se $eV > E_c^{\max}$ nenhum electrão atingirá o receptor e a corrente pára. Assim a energia cinética máxima é

$$E_c^{\max} = eV_p$$

em que V_p é a diferença de potencial para a qual a corrente se anula. Usando a relação de Einstein:

$$eV_p = h\nu - W.$$

O trabalho de Millikan consistiu precisamente numa medição cuidadosa dos potenciais de paragem para diferentes frequências da radiação.



Caixa 13.2: Uma célula fotoelétrica.

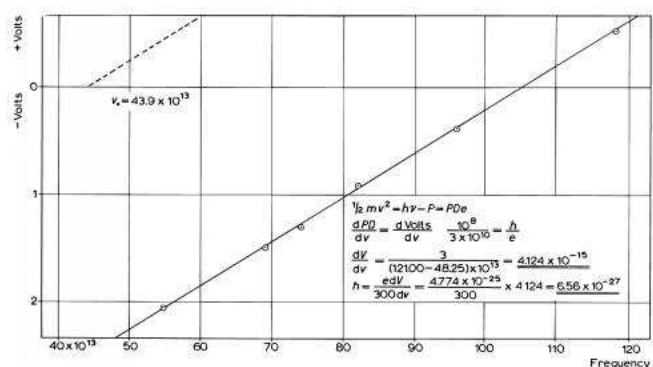


Fig. 4.

Figura 13.6: O estudo de Millikan do efeito fotoelétrico, reproduzido da sua lição de prémio Nobel. Millikan confessa nessa palestra que tudo tentou para mostrar que Einstein estava errado ao propor a existência de quanta de radiação.

Einstein pode explicar estas observações assumindo que a emissão de um electrão resultava da absorção de **uma** das partículas, ou **quanta**, de luz. A variação de energia do electrão seria

$$\Delta E = h\nu.$$

Supondo que, para sair do metal um electrão precisa, **pelo menos**, de uma energia, W , a sua energia cinética será, no máximo,

$$E_c^{\max} = h\nu - W.$$

Se $h\nu < W$, não haverá efeito fotoelétrico. Esta relação previa que a energia cinética dos electrões emitidos teria uma dependência linear na frequência da radiação, um resultado que viria a ser verificado, com grande precisão, por Robert Millikan, seis anos mais tarde (fig. 13.6).

13.1.3 A constante de Planck no átomo: Niels Bohr

Quando Planck em 1900 estudou o equilíbrio entre matéria e radiação, imaginou a matéria constituída por cargas com oscilações harmónicas em torno de posições de equilíbrio. Nem Planck, nem nenhum dos seus contemporâneos conheciam a estrutura do átomo.

O espectro de um átomo podia observado estudando a absorção e emissão de radiação da matéria no estado gasoso. As distâncias entre os átomos são grandes e estes quase não interagem uns

com os outros. Ao contrário do caso dos sólidos ou líquidos, os espectros atômicos, quer de emissão, quer de absorção são **espectros de riscas**. A energia da radiação emitida ou absorvida está concentrada num conjunto discreto de frequências; não está distribuída continuamente por todas as frequências como num sólido. Isto é, num átomo as cargas eléctricas oscilam apenas com certas frequências ($\nu_1, \nu_2, \nu_3 \dots$) e só absorvem ou emitem radiação com essas frequências. Os estudos dos espectros de diferentes substâncias na fase gasosa permitem ver que cada elemento tem um conjunto único de frequências, que permitem distingui-lo de todos os outros.

O átomo planetário clássico

Mas em 1913, quando Niels Bohr, um jovem Dinamarquês, tentou explicar a origem dos espectros atômicos, já existia um modelo detalhado do átomo. Ernest Rutherford, que chefiava o Laboratório de Física da Universidade de Manchester, Hans Geiger e Ernest Marsden (um estudante de 20 anos), tinham realizado, em 1911, um conjunto de experiências que estabeleceram a existência no núcleo atômico. Bohr sabia, então, que a quase totalidade da massa do átomo e toda a sua carga positiva estava concentrada numa região de dimensões muito inferiores ao tamanho do átomo e que os electrões interagem com o núcleo positivo por forças de Coulomb. O modelo de Rutherford era o de um pequeno sistema planetário, com o núcleo no lugar do Sol, os electrões no lugar de planetas e as forças de Coulomb em vez das forças gravitacionais.

As leis da atracção gravitacional e de Coulomb

$$\begin{aligned}\vec{F}_g &= -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{e}_r \\ \vec{F}_e &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{e}_r,\end{aligned}$$

obtêm-se uma da outra com as substituições:

$$\begin{aligned}m_1 &\leftrightarrow q_1 \\ m_2 &\leftrightarrow q_2 \\ -G &\leftrightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0}.\end{aligned}$$

No caso do átomo mais simples, o de hidrogénio, com uma carga $+e$ no núcleo e um único electrão, a força sobre o electrão seria:

$$\vec{F}_e = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} \hat{e}_r. \quad (13.8)$$

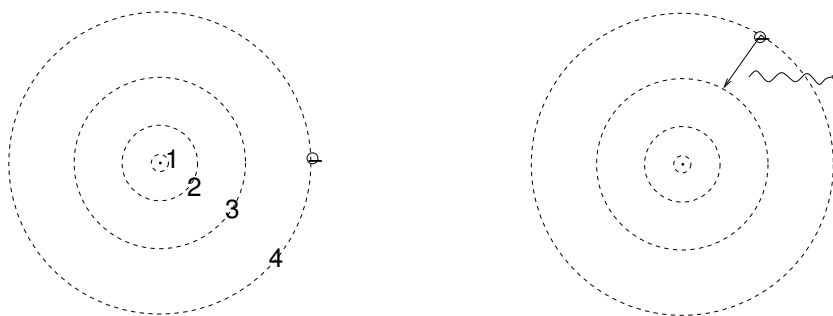


Figura 13.7: As quatro primeiras órbitas do átomo de Bohr $r_1 = a_0$, $r_2 = 4a_0$, $r_3 = 9a_0$ e $r_4 = 16a_0$. Nesta escala o núcleo é demasiado pequeno para ser representado. O átomo só emite radiação quando o electrão transita entre duas órbitas estacionárias.

Este modelo colocava um dilema. O electrão só poderia manter-se a uma certa distância do núcleo se estivesse em movimento numa órbita fechada semelhante à de um planeta. Contudo, a física clássica previa que uma carga acelerada emitisse radiação; o electrão deveria perder gradualmente energia e, tal como no caso de órbitas gravíticas, o raio e o período da sua órbita deveriam diminuir continuamente. Mas no electromagnetismo de Maxwell o período da órbita e o período da radiação emitida são idênticos. Ora o átomo tem um espectro de riscas: só emite radiação num conjunto discreto de frequências.

Postulados de Bohr

Bohr conseguiu “explicar” o espectro do átomo de hidrogénio com duas propostas radicais. Na primeira introduziu a quantificação de energia na estrutura atómica:

Postulado das órbitas estacionárias: existem determinadas órbitas nas quais o electrão não emite radiação electromagnética. No caso de órbitas circulares, as órbitas estacionárias são determinadas pela condição

$$mvr = n \frac{h}{2\pi} = n\hbar \quad (n = 1, 2, \dots)$$

em que r é o raio da órbita e v o módulo da sua velocidade. A constante $\hbar = h/2\pi$, designa-se por constante de Planck reduzida, ou, mais frequentemente, “h cortado”.

Usando a segunda Lei de Newton para relacionar v e r numa órbita circular, com a força centrípeta determinada pela Lei de Coulomb (eq. 13.8), Bohr pode mostrar que a energia, o raio e o período das órbitas estacionárias estavam quantificados, isto é assumiam apenas um conjunto discreto de valores, E_n , r_n e T_n com $n = 1, 2, \dots$ (ver \mathcal{ETV}_4).

Com o seu segundo postulado Bohr introduz o quantum de luz de Einstein na teoria do átomo.

Postulado da transição entre órbitas estacionárias: o átomo só emite ou absorve radiação quando o electrão transita entre duas órbitas estacionárias. Num transição em que a energia do átomo diminui, $E_n \rightarrow E_{n'}$, com $E_{n'} < E_n$, é emitido um quantum de frequência:

$$E_n - E_{n'} = h\nu;$$

se a energia do electrão aumentar, $E_{n'} > E_n$, é absorvido um quantum de frequência dada por

$$E_{n'} - E_n = h\nu.$$

A partir destas duas ideias Bohr obteve as frequências dos quanta emitidos pelo átomo de hidrogénio:

$$\nu_{i \rightarrow f} = R \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right) \quad n_i = 2, 3, \dots; n_f = 1, 2, \dots \quad (13.9)$$

com

$$R = \frac{m_e}{4\pi\hbar^3} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 = 2,3 \times 10^{15} \text{ Hz}. \quad (13.10)$$

As frequências obtidas por Bohr, usando os resultados destas equações 13.9 e 13.10, coincidiam com as observadas no espectro do hidrogénio. Bohr tinha encontrado uma expressão para o espectro de um átomo em termos de constantes fundamentais incluindo a constante de Planck. A “impressão digital” do átomo de Hidrogénio tinha sido decifrada!

Apesar deste triunfo, a teoria de Bohr era profundamente insatisfatória. Usava elementos da Física Clássica, órbitas newtonianas, mas introduzia ideias que não tinham qualquer cabimento na Física Clássica: certas órbitas eram seleccionadas (porquê? Com que mecanismo?) e, em total contradição com a teoria clássica da radiação, postulava-se que nessas órbitas o electrão não radiava.

E como e quando é que um electrão “decidia” transitar de órbita? Contudo, a teoria funcionava! Ninguém mais do que Bohr tinha consciência do carácter paradoxal e provisório das suas propostas, a que se referiu nos seguintes termos já em 1913:

Espero ter-me exprimido de modo suficientemente claro, para que possam apreciar até que ponto estas considerações estão em conflito com o conjunto de conceitos, admiravelmente consistente, a que, justamente, chamamos teoria clássica da electrodinâmica. Por outro lado, tentei transmitir a impressão que—precisamente dando forte ênfase a este mesmo conflito—será possível com o tempo estabelecer uma certa coerência nas novas ideias.

Niels Bohr

13.1.4 Sumário

Vimos três momentos em que a ideia de quantificação da energia foi introduzida na Física:

- Em 1900, Planck deduziu a forma da densidade espectral da radiação térmica, supondo que a emissão ou absorção de radiação por um oscilador de frequência ν ocorria em múltiplos inteiros de $h\nu$.
- Em 1905, Einstein mostrou que fórmula de Planck sugere que a radiação térmica é um gás de partículas em que cada partícula (quantum) de radiação de frequência ν tem uma energia $E = h\nu$. Propõe que o efeito fotoeléctrico resulta da absorção de um só quantum de radiação pelo electrão.
- Em 1913, Bohr sugeriu que os valores possíveis de energia das órbitas de um electrão no átomo de Hidrogénio são discretos e deduziu a respectiva fórmula.

Os anos seguintes iriam assistir à introdução de conceitos ainda mais inesperados!

\mathcal{ETV}_4 : No modelo atômico de Niels Bohr as órbitas estacionárias satisfazem as leis clássicas de movimento.

- a) Usando a segunda lei de Newton, demonstrar a seguinte relação para uma órbita circular de um electrão em torno e um protão:

$$m_e v^2 r = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}.$$

- b) Mostrar que os postulados de Bohr conduzem aos seguintes resultados para a velocidade, raio e energia de uma órbita estacionária ($n = 1, 2, \dots$),

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{1}{n} v_0 \\ r_n &= n^2 a_0 \\ E_n &= -\frac{1}{n^2} E_0, \end{aligned}$$

e determinar os valores de v_0 , a_0 (Raio de Bohr) e E_0 .

- c) Mostrar que a frequência de um quantum de radiação emitido numa transição de uma órbita $n_i \rightarrow n_f$, é

$$\nu_{i \rightarrow f} = \frac{E_0}{h} \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right)$$

13.2 Dualidade onda-corpúsculo

13.2.1 O fóton

O momento linear da radiação

Em Física Newtoniana uma partícula de velocidade \vec{v} tem energia cinética

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2$$

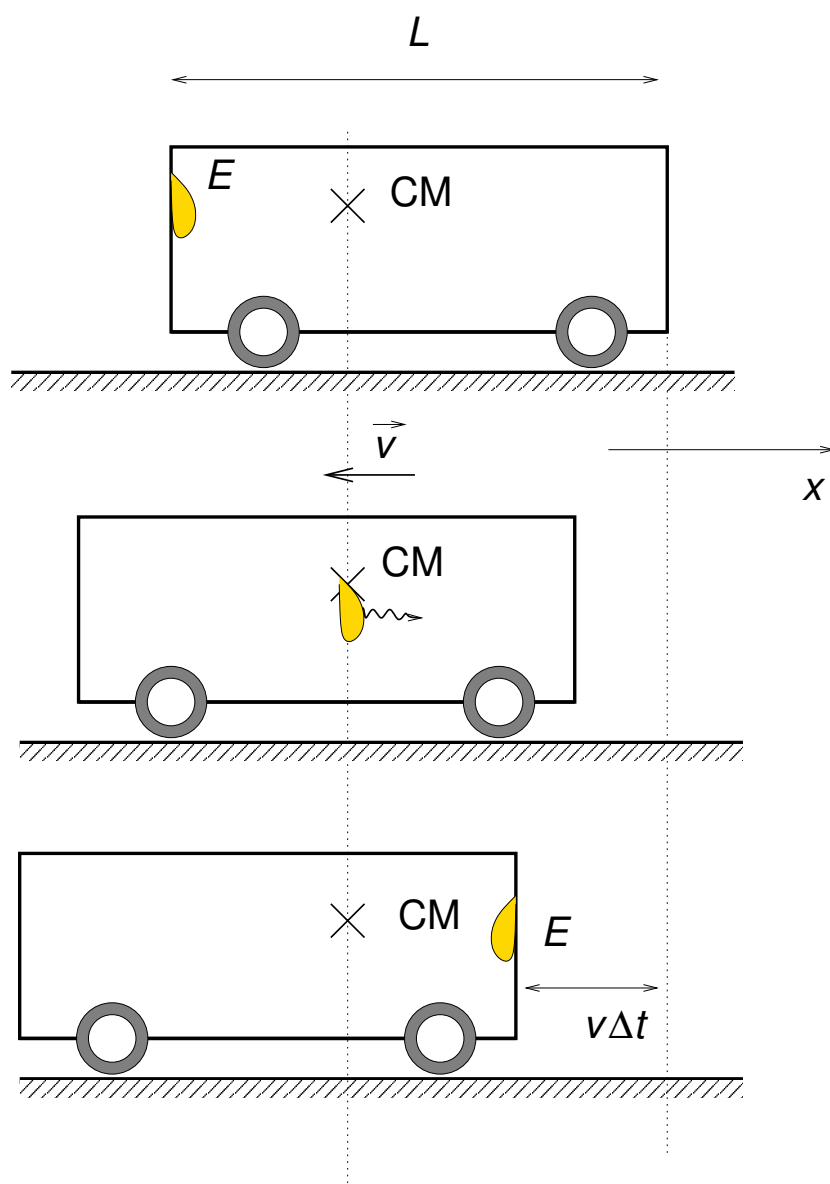


Figura 13.8: Para que a posição do centro de massa do conjunto não varie, o carro tem de adquirir uma velocidade $v_x = -E/Mc$ em que E é a energia transferida de uma extremo ao outro.

e momento linear

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

o que permite escrever a seguinte relação entre momento e energia

$$E = \frac{1}{2} \frac{(mv)^2}{m} = \frac{p^2}{2m}.$$

Einstein propusera que a fórmula de Planck e o efeito fotoeléctrico podiam ser interpretados considerando a radiação constituída por partículas de energia

$$E = h\nu.$$

Qual seria o momento linear de uma tal partícula?

Einstein apresentou um argumento muito bonito (vintage Einstein), baseado na equivalência massa-energia, que permitia obter o momento linear da radiação (fig 13.8).

Considerou uma carruagem que radia uma quantidade de energia E de uma extremidade à outra. De acordo com a Relatividade Restrita, isso corresponde a transferir uma massa $m = E/c^2$ de um lado ao outro da carruagem. Contudo, não havendo forças exteriores, o centro de massa do conjunto, radiação e carro, não pode deslocar-se; logo o carro tem que avançar no sentido oposto ao da radiação. Como,

$$Mx_c + \frac{E}{c^2}x_r = \left(M + \frac{E}{c^2}\right)x_{\text{cm}}$$

temos,

$$M\Delta x_c + \frac{E}{c^2}\Delta x_r = \left(M + \frac{E}{c^2}\right)\Delta x_{\text{cm}} = 0 \quad (13.11)$$

em que:

- Δx_c é o deslocamento da carruagem segundo Ox ;
- Δx_r é o deslocamento da radiação na mesma direcção;
- $\Delta x_{\text{cm}} = 0$ é o deslocamento do centro de massa do conjunto, também segundo Ox .

Se for Δt o intervalo de tempo entre a emissão e absorção da radiação,

$$\begin{aligned} \Delta x_r &= c\Delta t \\ \Delta x_c &= v_x\Delta t \end{aligned}$$

Substituindo na equação 13.11, obtemos

$$\Delta x_c = -\frac{E}{Mc^2}\Delta x_r \Rightarrow v_x\Delta t = -\frac{E}{Mc^2}c\Delta t$$

ou

$$Mv_x = -\frac{E}{c}.$$

Esta equação exprime a conservação de momento linear na emissão de radiação; o momento total após a emissão deve continuar a ser nulo, pelo que o momento da radiação emitida na direcção Ox é

$$p_x = \frac{E}{c}.$$

Suponhamos que foi emitido um único quantum de radiação com

$$E = h\nu :$$

o respectivo momento será

$$p = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}.$$

em que $\lambda = c/\nu$ é o comprimento de onda da radiação emitida.

A confirmação inequívoca da existência de quanta de radiação, **fotões**, com energia e momento dados pelas relações de Planck-Einstein,

$$\begin{aligned} E &= h\nu \\ p &= \frac{h}{\lambda}, \end{aligned}$$

foi obtida por Arthur Holly Compton, um físico inglês, quando estudou a difusão de raios-X pela matéria.

Raios-X

Raios-X são radiação com comprimentos de onda $\lambda \sim 0,1 - 100$, muito menores que os da luz visível, ou mesmo do ultra-violeta (UV). São hoje em dia muito utilizados em diagnóstico médico e terapêutica. Um electrão acelerado por uma diferença de potencial de alguns dezenas de milhar de Volt têm uma energia cinética da ordem das dezenas de keV ($1 \text{ keV} = 10^3 \text{ eV}$). Se chegar próximo de um átomo com muitos electrões (Z , número atómico elevado) pode ionizar o átomo excitando um dos electrões mais fortemente

■ Röntgen e os raios-X ■

A descoberta dos raios-X é atribuída a Wilhelm Conrad Röntgen (27 de Março, 1845–10 de Fevereiro 1923) um físico alemão da Universidade de OWürzburg. Röntgen foi o primeiro galardoado com o prémio Nobel da Física (1901) por esta descoberta.

Röntgen fazia experiências com descargas eléctricas em tubos de vácuo, e, em Novembro de 1895, reparou que um tubo completamente tapado, de modo a não deixar passar luz, mesmo assim causava uma tênue luminosidade num écran a cerca de um metro de distância. Foi no curso de uma dessas experiência que um dia viu a sombra do esqueleto da sua mão projectada num écran revestido de um composto de bário carbonato, azoto e platina.

Os raios-X são radiação electromagnética de frequência mais elevada que a luz visível ou ultravioleta. Os electrões, que são as cargas materiais de menor massa, são mais fortemente acelerados pelos campos eléctricos da radiação. Por essa razão, os elementos de número atómico Z elevado, com Z electrões por átomo, absorvem e difundem mais intensamente os raios-X. Por isso, o esqueleto, que tem Cálcio, absorve e difunde mais os raios-X que os tecidos moles que são sobretudo compostos por elementos leves como Oxigénio e Hidrogénio e, por isso, mais transparentes a raios-X.



Imagem da mão de esposa de Röntgen.

Caixa 13.3: A descoberta dos raios-X.

ligados do átomo (com energias de ionização na gama dos keV). A transição de um electrão dos níveis de energia menos ligados (energia de ionização de alguns eV) para um nível profundo é acompanhada, segundo Bohr, pela emissão de um fóton com frequência

$$\nu = \frac{E_i - E_f}{h};$$

quando $E_i - E_f \sim 1 \text{ keV}$, o comprimento de onda está fora da gama do visível, na região dos raios-X. Electrões livres de alta energia que passem muito próximos de núcleos de número atómico elevado tem acelerações muito elevadas também e emitem raios-X com um espectro contínuo, que têm o nome de radiação *bremsstrahlung* (do alemão, radiação de travagem).

Uma ampola de produção de raios-X contém um filamento de tungsténio (que pode atingir temperaturas elevadas sem fundir) que emite electrões se estiver a uma temperatura elevada (a energia de agitação térmica é suficiente para que os electrões saiam do metal, um processo semelhante à evaporação). Esses electrões são acelerados, em vácuo, por campos eléctricos, até energias cinéticas de alguns milhares de electrões-Volt e dirigidos contra um alvo metálico (em geral Cobre ou Molibdénio) de onde emergem os raios-X.

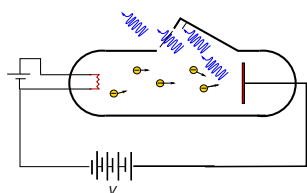


Figura 13.9: Esquema de uma ampola de raios-X.

\mathcal{ETV}_5 : Numa transição entre níveis de energia em que $E_i - E_f = 1 \text{ keV}$, quais são a frequência e comprimento de onda da radiação emitida?

A experiência de Compton

Se a radiação não fosse difundida pela matéria (desviada da sua direcção de propagação) o mundo ser-nos-ia invisível. A luz do Sol só chegaria a nós directamente do Sol; não a receberíamos difundida pela atmosfera, pelas árvores, montanhas, casas, etc. Acender uma luz num quarto escuro de nada serviria: só veríamos a lâmpada se olhássemos para ela; se os objectos não desviassem a luz que lhes chega da lâmpada em direcção ao nossos olhos, não os veríamos.

Classicamente, a radiação são campos eléctricos e magnéticos oscilantes, que põem cargas em movimento. Cargas aceleradas emitem radiação em todas as direcções. Por isso parte da radiação

incidente na matéria é re-emitada em direcções diferentes. Os electrões, que são as cargas de menor massa e, por isso, com maiores acelerações, são também as que difundem mais a radiação.

Compton estudou, precisamente, a difusão de raios-X pela matéria. As suas experiências mostraram que parte da radiação difundida de um ângulo θ em relação à direcção original tinha um comprimento de onda λ' maior que o da radiação incidente, λ (fig. 13.10):

$$\lambda'(\theta) - \lambda_{\text{inc}} = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta) \quad (13.12)$$

Este resultado é o que se obtém se a difusão for o resultado de uma colisão entre um electrão de baixa energia inicial e uma partícula cujo momento e energia são dadas exactamente pelas relações de Planck-Einstein: o fóton. Na colisão o electrão adquire parte da energia e do momento do fóton e por essa razão a energia do fóton diminui. Como $E \propto \nu$ e $\nu \propto 1/\lambda$ o comprimento de onda do fóton aumenta.

13.2.2 Partículas ou ondas?

Uma leitura atenta das secções anteriores mostra que temos vindo a usar para o mesmo fenómeno, a radiação, duas representações incompatíveis.

De um lado a representação ondulatória: a radiação são campos eléctricos que oscilam no tempo e no espaço. O número de oscilações do campo num dado ponto por unidade de tempo é frequência ν ; a distância que contém uma oscilação espacial completa é o comprimento de onda λ . A amplitude de oscilação do campo pode variar de um modo contínuo; um campo eléctrico origina uma força sobre as cargas materiais e pode, por isso, transferir quer energia quer momento para a matéria de um modo contínuo.

Por outro lado, a fórmula de Planck, o efeito fotoeléctrico e o efeito de Compton revelam que a radiação é constituída por partículas; os eventos de transferência de energia entre radiação e matéria são descontínuos e correspondem à emissão/absorção/colisão de partículas de energia e momento dados pelas relações de Planck e Einstein:

$$E = h\nu \quad (13.13)$$

$$p = \frac{h}{\lambda}. \quad (13.14)$$

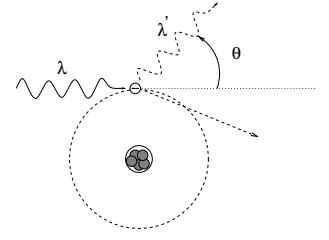


Figura 13.10: A difusão de raios-X pode ser vista como uma colisão entre duas partículas, um fóton e um electrão. Quando a velocidade inicial do electrão é pequena, verifica-se a relação de Compton, eq. 13.12, para a variação de comprimento de onda do fóton.

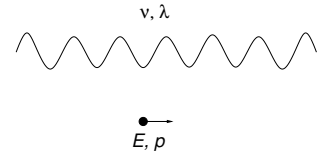


Figura 13.11: Partículas ou ondas?

A associação de energia ou momento a um fenómeno ondulatório, por si só, não é supreeendente. Mas, nestas equações, E e p referem-se à energia e momento de uma partícula, num evento discreto de absorção, emissão ou colisão. Aqui reside o busílis: o que é a frequência ou o comprimento de onda de uma partícula? Estes conceitos referem-se a uma perturbação de um campo definido em todo o espaço e variando no tempo.

Assim, o primeiro membro destas equações refere-se a entidades discretas, partículas, e o segundo a campos distribuídos no espaço e tempo. A constante de Planck (a natureza quântica da matéria) aparece a ligar estes dois conceitos!

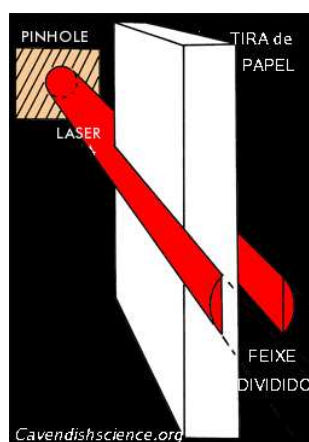


Figura 13.12: A experiência de Young pode ser facilmente realizada com um laser.[7]

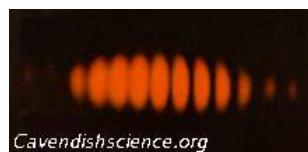


Figura 13.13: Franjas observadas na experiência de Young com laser de He-Ne.[7]

▷ Actividade 13.2

13.2.3 A experiência de Young

Na realidade a natureza ondulatória da luz tinha sido estabelecida por Thomas Young, muito antes da teoria do Electromagnetismo de Maxwell, numa experiência que muitos contam entre as mais belas de sempre na História da Física.

Young fez a sua experiência em público, em 24 de Novembro de 1803 na Real Sociedade em Londres. Com um espelho desviou a luz do sol para um trajecto horizontal e fê-la passar por um pequeno orifício de modo a criar um feixe de luz de pequeno diâmetro. No caminho desse feixe colocou, longitudinalmente uma pequena tira de papel de modo a dividir o feixe em duas partes. Num alvo, em vez de duas manchas luminosas correspondentes aos dois feixes, os assistentes viram franjas alternadamente claras e escuras. Esta experiência pode ser facilmente reproduzida na sala de aula substituindo a luz do Sol por um laser.

A origem das franjas claras e escuras está descrita na figura 13.14. A experiência de Young é quase sempre descrita usando duas fendas para proporcionar dois caminhos de propagação da radiação, da fonte ao alvo, embora Young tenha usado os dois lados de uma tira de papel. Seja como for, no alvo temos que somar os campos eléctricos correspondentes à radiação de cada fenda, de acordo com o princípio de sobreposição. Sabemos que o campo eléctrico tem uma oscilação completa numa distância correspondente a um comprimento de onda. Na figura 13.14, os dois caminhos da fonte F ao ponto P têm o mesmo comprimento. Por essa razão os campos eléctricos correspondentes à radiação que se propaga por cada uma das fendas estão em fase e somam-se. Ao contrário, no ponto Q o caminho pela fenda I tem meio comprimento de onda a mais que o da fenda II. O resultado é que os campos eléctricos da radiação

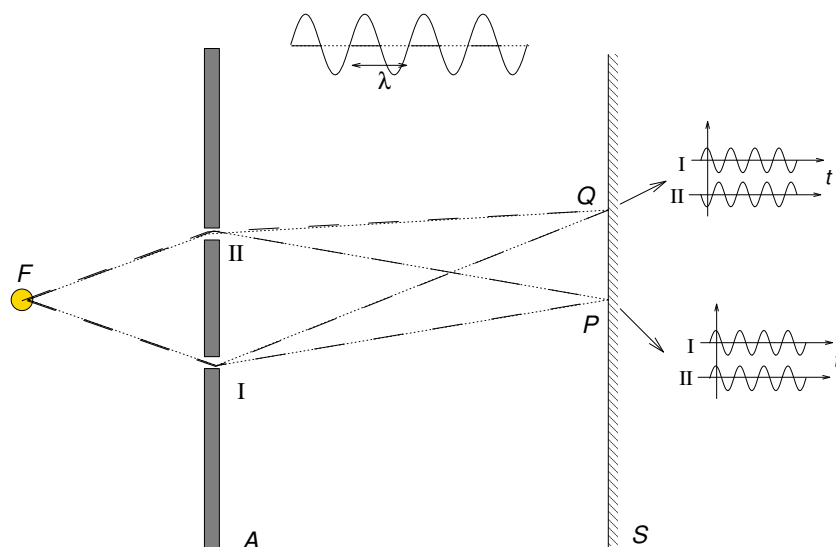


Figura 13.14: A experiência de Young. Neste caso são usadas duas fendas para proporcionar dois caminhos de propagação da radiação da fonte F ao alvo; originalmente, Young usou uma tira de papel. Os dois caminhos de propagação das ondas da fonte F ao ponto P têm o mesmo comprimento, 10λ . Os campos eléctricos da radiação que se propaga por cada fenda estão em fase e somam-se: a intensidade luminosa é alta em P . Mas em Q a radiação que se propaga pela fenda I percorre uma distância de $10,5\lambda$ enquanto que a que se propaga pela fenda II percorre apenas 10λ . Os campos eléctricos respectivos cancelam-se pois têm sinais opostos: a intensidade luminosa é baixa em Q . P está num máximo de intensidade e Q num mínimo.

que se propaga por cada fenda, oscilam, em Q , em oposição de fase: quando um é positivo o outro é negativo (sentido oposto) e a intensidade é muito baixa ou quase nula em Q . Assim, à medida que nos afastamos do ponto P , a intensidade vai oscilando entre máximos e mínimos: as franjas de interferência de Young.

Note-se que, quando existem duas fendas, há zonas do alvo, onde os campos se cancelam, **que recebem menos luz do que com uma só fenda**. Este fenómeno de sobreposição de duas ondas chama-se **interferência**.

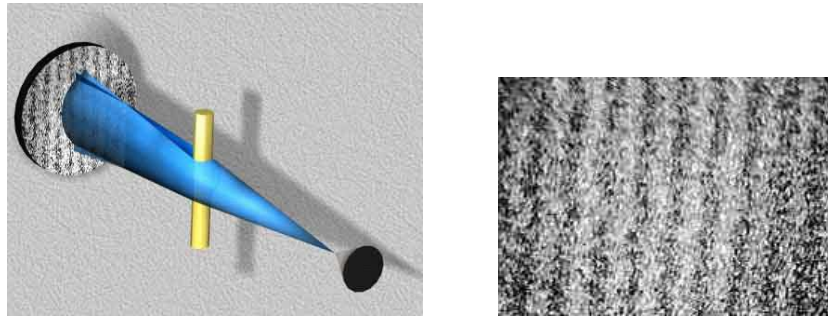


Figura 13.15: Uma experiência de Young com electrões. À esquerda: um feixe de electrões, emitido por uma fina ponta de tungsténio, tem no seu caminho um fio metálico; quando o fio é carregado positivamente, cada electrão pode atingir um ponto do alvo por dois caminhos e estes interferem: à direita, franjas de interferência de electrões de energia cinética de 400 eV. [8]

\mathcal{ETV}_6 : Na figura 13.14 na página precedente, o ponto Q é o mínimo de intensidade mais próximo de P . A distância PQ é metade da distância inter-franjas. Se o comprimento de onda diminuir, a distância entre franjas aumenta ou diminui?

Interferência de partículas

Feynman, no primeiro capítulo do terceiro volume das *Feynman Lectures on Physics* [2], imagina a experiência de Young feita com balas, disparadas em todas as direcções por uma arma colocada no lugar da fonte de luz. A intensidade pode ser medida contando o número de balas que chegam por unidade de tempo a cada ponto do alvo. Naturalmente, cada bala detectada no alvo passou por um das das duas fendas e o número total de balas em cada ponto do alvo é apenas a soma das balas que passam por cada fenda. O número de balas que atingem um dado ponto do alvo é **sempre maior com duas fendas do que com uma**: não há interferências.

Se tomarmos as balas como modelo para partículas, deveríamos esperar o mesmo para electrões ou neutrões, por exemplo.

Na realidade, esta experiência já foi feita com muitos tipos de par-

tículas (electrões, átomos e até moléculas) sempre com o mesmo resultado: observam-se franjas de interferência, tal como com radiação electromagnética³ (fig. 13.15). Para além disso, é possível obter desta experiência o comprimento de onda a partir da separação entre as franjas de interferência; verifica-se que, para qualquer tipo de partículas, é sempre dado pela relação

$$p = \frac{h}{\lambda},$$

tal como para os fotões.

De Broglie e o átomo de Bohr

Esta relação, $p = h/\lambda$, foi proposta para electrões por Louis De Broglie, um físico aristocrata francês, no contexto da teoria de Bohr. De Broglie imaginou que ao electrão estava associada uma onda nas suas órbitas em torno do núcleo. Como as órbitas são fechadas, o perímetro de cada órbita deve corresponder a um número inteiro de oscilações completas dessa onda, ou seja a um número inteiro de comprimentos de onda (ver fig. 13.16)

$$2\pi r = n\lambda \quad (n \text{ inteiro}) \quad (13.15)$$

Usando a relação $p = h/\lambda$, de Broglie obteve:

$$2\pi r = n \frac{h}{p} \Rightarrow pr = n \frac{h}{2\pi} = n\hbar$$

ou seja,

$$mvr = n\hbar \quad (n \text{ inteiro})$$

que é precisamente a condição de quantificação de Bohr.

Hoje em dia, a natureza ondulatória de qualquer feixe de partículas é verificada a toda a hora em centenas de laboratórios em todo o mundo. Métodos correntes de caracterização de estruturas, quer com feixes de neutrões, quer com feixes de electrões, quer com feixes de fotões (raios-X) são essencialmente experiências de interferências de feixes destas partículas. Seja qual for a partícula, a relação entre o momento e o comprimento de onda é a mesma que Einstein obteve para o fotão

$$p = \frac{h}{\lambda}.$$

³Naturalmente, a observação de franjas exige certas condições. Por exemplo, a distância entre franjas pode ser demasiado pequena, para ser observável; se houver variação temporal rápida das franjas, podemos observar apenas uma média sobre várias posições, com intensidade uniforme, sem contraste.

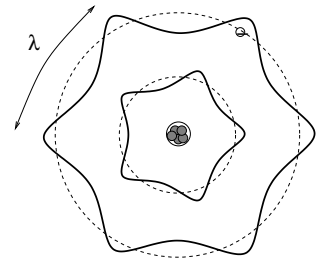


Figura 13.16: Duas órbitas possíveis, de acordo com a ideia de De Broglie: a onda associada ao electrão está esquematicamente representada a cheio, usando a direcção radial para representar a amplitude da onda, seja ela o que for. A órbita mais interior tem um perímetro 5λ e a exterior 6λ . Não existe nenhuma órbita entre estas duas e isso explicaria a hipótese de quantificação de Bohr.

A primeira experiência de interferência de fótons foi feita por Thomas Young, antes da natureza corpuscular da radiação ter sido descoberta por Einstein e Planck. A primeira experiência de interferência de electrões foi feita em 1927 por Clinton Davisson e Lester Germer e, independentemente, por George P. Thompson, que partilharam o prémio Nobel por este trabalho. A descoberta do electrão foi anterior⁴: ou seja, ao contrário do fóton, a natureza corpuscular do electrão foi estabelecida antes da sua natureza ondulatória.

13.3 A Mecânica Quântica

13.3.1 O acaso

Partículas que são ondas, ondas que são partículas, energias que só podem tomar certos valores, órbitas estacionárias que de repente deixam de o ser quando o electrão decide transitar de uma para a outra! Tudo isto parece muito confuso. Nada que se pareça com a clareza e transparência da Física Newtoniana!

Era, de facto, muito confuso e na década de 1920 nenhum físico percebia o que se estava a passar. Como vimos, as hipóteses mais arrojadas recebiam plena confirmação experimental. Contudo, misturavam ideias clássicas e quânticas de uma maneira incompreensível:

- A radiação era descrita a partir das equações de Maxwell, como campos eléctricos e magnéticos variáveis no espaço e tempo, mas também era constituída por partículas com energia e momento relacionadas com as frequências temporais e espaciais dos campos.
- Os electrões faziam órbitas clássicas, calculadas de acordo com a lei de Newton, mas, em desacordo com a electrodinâmica clássica, não radiavam quando estavam em certas órbitas. Ainda por cima, de vez em quando (quando? como? porquê?) mudavam de órbita!

⁴Curiosamente a descoberta da partícula *electrão*, também galardoada com o Nobel da Física, é devida a J. J. Thompson, o *pai* de George P. Thomson. Assim, o pai recebeu o Nobel por estabelecer que o electrão era uma partícula e o filho por demonstrar que era uma onda!

■ O argumento de De Broglie ■

De Broglie não tinha qualquer ideia sobre a natureza da onda associada ao electrão. Mas o seu argumento é independente dela. Para um electrão numa órbita circular parece natural assumir uma onda com um alongamento que depende do ângulo θ com um eixo no plano da órbita, $\psi(\theta)$. A oscilação mais simples é harmónica

$$\psi(\theta) = A \cos(k\theta + \varphi)$$

Como $\theta = 0$ e $\theta = 2\pi$ são a mesma direcção, temos que ter $\psi(0) = \psi(2\pi)$ e o parâmetro k tem que ser um inteiro, $k = 0, 1, 2, \dots$. Uma oscilação completa ocorrerá entre duas direcções com uma diferença de ângulos tal que

$$k\Delta\theta = 2\pi.$$

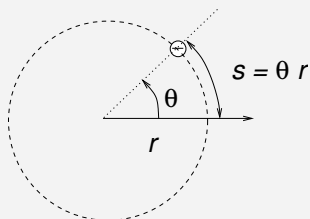
Por outro lado, para um electrão numa órbita de raio r , este ângulo (em radianos) corresponde a uma distância $s = \Delta\theta \times r$. Esta distância entre dois máximos de alongamento da onda é, precisamente, o comprimento de onda. Logo

$$k \frac{\lambda}{r} = 2\pi$$

ou

$$2\pi r = k\lambda \quad (k, \text{ inteiro})$$

Esta é a condição referida no texto (eq. 13.15).



Caixa 13.4: O argumento de De Broglie para a quantificação das órbitas.

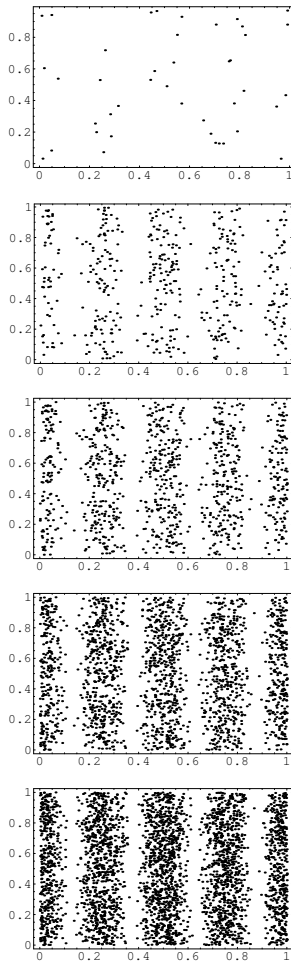


Figura 13.17: Formação de franjas de interferência por acumulação de eventos aleatórios.

- Os electrões também eram ondas, e quando um electrão dispunha de dois caminhos possíveis eles interferiam exactamente como se ele fosse uma onda espalhada no espaço e propagando-se pelos dois caminhos.

A descoberta da Mecânica Quântica entre 1925 e 1927 por Heisenberg, Schrödinger, Born e Bohr, pôs fim a este estado de coisas e integrou todas estas ideias numa teoria consistente, com princípios bem definidos e que está na base de toda a nossa compreensão do comportamento da matéria.

O conceito de probabilidade tem um papel fundamental na formulação da Mecânica Quântica. As suas leis fundamentais estabelecem formas de calcular probabilidades de certos acontecimentos. O acaso é um elemento irreduzível do comportamento da natureza. À medida que a história do mundo se desenrola, acontecem certas coisas e não outras, de modo totalmente aleatório, mesmo para quem tenha a informação mais completa possível sobre o estado do Mundo. Einstein, foi das primeiras pessoas a compreender que o acaso estava ao virar da porta.

Pensemos por exemplo na teoria de Bohr. Átomos excitados radiam em todas as direcções. Quando um electrão transita de órbita, em que direcção é emitido o fóton? Se a órbita é estacionária e o átomo isolado, o que determina quando ocorre a transição? Em 1917, Einstein propôs uma descrição da interacção entre um átomo e a radiação em que introduziu a **probabilidade** de um átomo transitar de estado num dado intervalo de tempo. A sua descrição foi integralmente confirmada pela Mecânica Quântica.

As experiências de interferência são outro exemplo do aparecimento do conceito de probabilidade. Pensemos na formação das franjas de interferência (ver figura 13.17). Seja ela feita com electrões, neutrões ou fótons, sabemos que o processo de detecção é sempre o de uma contagem. É o que aprendemos com o efeito fotoeléctrico, ou que já sabíamos em relação a electrões. Quando detectamos um electrão detectamos uma partícula de carga $-e$. As franjas de interferência formam-se por acumulação de acontecimentos individuais, aleatórios, conforme ilustra a simulação disponível do portal do projecto Faraday (fig. 13.17).

13.3.2 Ondas e probabilidades

A integração dos conceitos de partícula e onda processou-se precisamente usando o conceito de probabilidade. Afinal, o que vibra,

qual é a onda associada a um electrão? Na teoria quântica verifica-se que essa onda determina apenas a **probabilidade de detecção** do electrão num dado ponto. Quanto maior for a amplitude da onda mais provável é a detecção de uma electrão nesse ponto: de facto a probabilidade de detecção é proporcional à **intensidade da onda**, que por sua vez é proporcional ao quadrado da amplitude da onda. No caso do fóton a probabilidade de detecção é proporcional ao quadrado do campo eléctrico.

Se a onda que determina esta probabilidade for uma onda harmónica, com uma oscilação espacial de comprimento de onda λ , e amplitude constante, o momento da partícula é dado pela relação de Einstein-De Broglie,

$$p = \frac{h}{\lambda},$$

mas a sua posição fica totalmente indeterminada, pois, como a amplitude da onda é constante, a probabilidade de detecção é a mesma em todos os pontos.

Princípio de incerteza

A descrição probabilística da Mecânica Quântica tem como consequência uma relação muito peculiar entre certas grandezas físicas como o momento e a posição. Quanto melhor tentamos especificar uma mais incerta fica a outra. Estas relações foram descobertas por Heisenberg e no caso do momento e posição têm a forma

$$\Delta p_x \Delta x \geq \frac{\hbar}{2},$$

em que Δp_x e Δx são as indeterminações da componente x do momento e Δx a indeterminação da coordenada x .

Na situação acima referida, de uma onda harmónica de amplitude constante, $p = h/\lambda$ é perfeitamente determinado, $\Delta p = 0$, o que implica que $\Delta x \rightarrow \infty$, ou seja total indeterminação de posição. Como vimos, a probabilidade de detecção é idêntica em todo o espaço.

Como vemos, tudo o que é quântico têm a constante de Planck! O que explica, em parte que os efeitos quânticos não sejam observados no nosso dia-a-dia é o valor extremamente reduzido desta constante, **quando expressa nas unidades mais adequadas à nossa experiência comum.**

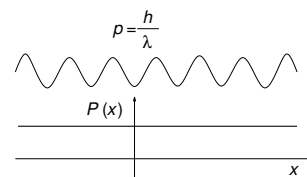


Figura 13.18: Se a amplitude da onda é constante, a probabilidade de detecção é igual em todos os pontos.

Isto é, quando lidamos com velocidades $v \sim 1 \text{ m s}^{-1}$, massas $m \sim 1 \text{ kg}$ e distâncias de $x \sim 1 \text{ m}$, podemos ter posições e momento muito bem definidos,

$$\begin{aligned}\Delta p_x &\ll p_x \\ \Delta x &\ll x,\end{aligned}$$

e, mesmo assim, como $p_x x \sim 1 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}$, ter

$$\Delta p_x \Delta x \gg \frac{\hbar}{2}$$

já que $\hbar = 1,05 \times 10^{-34} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}$. Nessas circunstâncias, o limite quântico do produto de incertezas não é relevante.

13.4 Conclusões

Neste capítulo demos apenas uma panorâmica muito breve do muito que fica por saber mesmo depois de um ano inteiro com várias horas de aulas por semana.

A revolução quântica permitiu-nos uma capacidade de compreensão e previsão muito detalhada do comportamento da matéria ao nível atómico e molecular. Todos os progressos de tecnologia, seja ao níveis de novos materiais (plásticos, polímeros), da electrónica, dos computadores, das telecomunicações, de novos fármacos, da genética molecular, etc, radicam ao fim ao cabo nesta revolução do pensamento humano que teve lugar no primeiro quarto do século XX.

Para quem queira saber mais, ainda sobra muito para aprender!

13.5 Respostas aos \mathcal{ETV}'_s

13.1. \mathcal{ETV}_1 : Como dE/dt é uma potência temos que $I(\nu)\Delta A\Delta\nu$ tem como unidade SI o W. Logo $I(\nu)$ tem unidade SI $\text{W m}^{-2} \text{ s}$ e $J(\lambda)$ W m^{-3} . Contudo, não é invulgar encontrar o comprimento de onda medido em nm (10^{-9} m) pelo que também se encontra $J(\lambda)$ expresso em $\text{W m}^{-2} \text{ nm}^{-1}$.

13.2. \mathcal{ETV}_2 : o gráfico da função

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$$

tem o aspecto da figura 13.19. O facto de $f(x) \rightarrow 1$ quando $x \rightarrow 0$ significa que

$$\frac{\epsilon_\nu(T)}{\epsilon_\nu^{(cl)}(T)} \approx 1 \Rightarrow \epsilon_\nu(T) \approx \epsilon_\nu^{(cl)}(T) = k_B T,$$

quando $k_B T \gg h\nu$. Neste limite, quando a energia térmica clássica é muito maior que a energia mínima de excitação do oscilador, os resultados quânticos e clássicos coincidem.

Como $f(x) \rightarrow 0$, quando $x \gg 1$,

$$\frac{\epsilon_\nu(T)}{\epsilon_\nu^{(cl)}(T)} \ll 1 \Rightarrow \epsilon_\nu(T) \ll \epsilon_\nu^{(cl)}(T)$$

A energia média do oscilador é muito menor que a energia térmica clássica, $k_B T$, quando a energia mínima de excitação é maior que $k_B T$.

13.3. \mathcal{ETV}_3 : Obviamente que não. A Terra tem uma temperatura tal que quase não radia no visível. Como tal é “preta”. Contudo, reflecte uma fracção apreciável da luz que incide do Sol e é essa radiação reflectida que nos permite ver a Terra do espaço. Essa radiação tem uma distribuição espectral característica da temperatura do Sol, não da Terra.

13.4. \mathcal{ETV}_4 :

(a) A segunda lei de Newton implica, para uma órbita circular:

$$m_e \frac{v^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2};$$

ou

$$m_e v^2 r = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}.$$

(b) Usando a condição de quantificação de Bohr

$$m_e v r = n\hbar$$

vem,

$$\begin{aligned} v &= \frac{1}{n} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar} = \frac{1}{n} v_0. \\ v_0 &= \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar} = 2,2 \times 10^6 \text{ m s}^{-1} \end{aligned}$$

Com este resultado é simples obter os raios das órbitas de Bohr:

$$r_n = \frac{n\hbar}{m_e v_n} = n^2 a_0$$

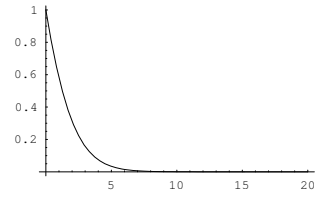


Figura 13.19: Gráfico da função $f(x) = x / (\exp(x) - 1)$.

com

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{m_e (e^2/4\pi\epsilon_0)} = 0,53 \text{ \AA}.$$

Finalmente, para calcular a energia:

$$E = \frac{1}{2} m_e v^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = -\frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

em que usámos apenas a segunda lei de Newton. Substituindo os valores de r_n

$$E_n = -\frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_n} = -\frac{1}{n^2} E_0$$

em que

$$E_0 = \frac{m_e}{2\hbar^2} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 = 2,17 \times 10^{-18} \text{ J} = 13,6 \text{ eV}.$$

- (c) Como $E_i = -E_0/n_i^2$ e $E_f = -E_0/n_f^2$ a energia do quantum emitido ($n_i > n_f$) é

$$E = E_i - E_f = E_0 \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right)$$

e, usando a relação de Planck,

$$\nu_{i \rightarrow f} = \frac{E_0}{h} \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right).$$

- 13.5. \mathcal{ETV}_5 : Um eV é a variação de energia de um electrão numa diferença de potencial de 1 V, ou seja:

$$1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19} \times 1 = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}.$$

Então

$$1 \text{ keV} = 1,6 \times 10^{-16} \text{ J}$$

e

$$\nu = \frac{1,6 \times 10^{-16}}{h} = \frac{1,6 \times 10^{-16}}{6,6 \times 10^{-34}} = 2,4 \times 10^{17} \text{ Hz};$$

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{3 \times 10^8}{2,4 \times 10^{17}} = 1,2 \times 10^{-9} \text{ m} = 12 \text{ \AA}.$$

- 13.6. \mathcal{ETV}_6 : Se o comprimento de onda diminuir, a diferença entre o comprimento dos dois caminhos $F \rightarrow I \rightarrow Q$ e $F \rightarrow II \rightarrow Q$ não se altera. Mas passa a ser **maior** que $\lambda/2$, porque λ diminuiu. Será num ponto mais próximo de P (onde os dois caminhos têm igual comprimento) que os dois caminhos terão uma diferença de $\lambda/2$; logo, a distância entre franjas diminui, se λ diminuir.

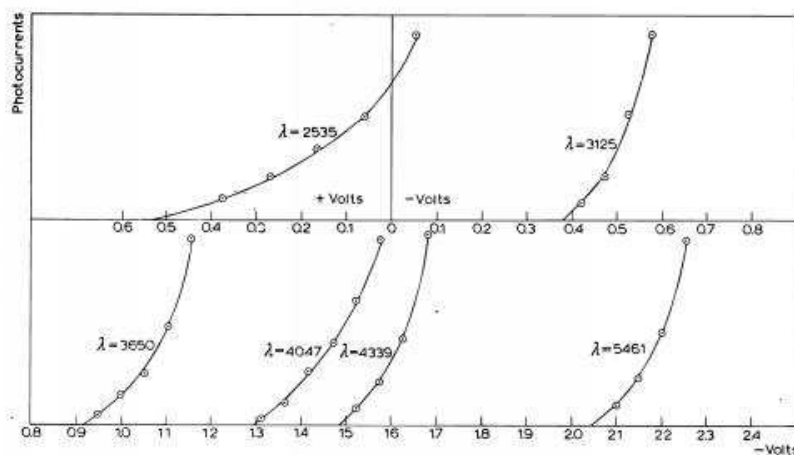


Fig. 3.

Figura 13.20: Resultados das medições de Millikan da corrente fotoelétrica em função da diferença de potencial entre colector e emissor para vários comprimentos de onda.

13.6 Actividades questões e problemas

13.1. Medições de efeito fotoelétrico de Millikan.

A figura 13.20 mostra os resultados de Millikan para a corrente fotoelétrica em função da diferença de potencial colector-emissor para vários comprimentos de onda. Fazer uma representação gráfica do potencial de paragem em função da frequência da radiação e obter o valor da constante de Planck que resulta destes dados.

13.2. A experiência de Young

A experiência de Young pode ser facilmente reproduzida usando um laser escolar ou mesmo um apontador laser. Se o feixe laser não tiver um diâmetro superior à espessura de uma folha de papel, pode ser expandido fazendo-o passar por um orifício feito com a ponta de uma agulha num pedaço de cartolina fixado junto da abertura do laser. Uma tira de papel, com 2 ~ 3 cm de comprimento e cerca de 2 mm de largura é colocada no caminho do feixe com as faces paralelas à direcção do mesmo de modo a dividir o feixe em dois. Numa sala escurecida as franjas de interferência são visíveis numa parede ou num alvo colocado à frente do feixe.

13.6.1 Questões

13.1. Traduzir em equações as seguintes definições:

- (a) o comprimento de onda é a distância percorrida pela radiação durante um período.
- (b) a variação de fase num período de oscilação é 2π .

13.2. Um núcleo de número atómico Z tem carga Ze . Podemos calcular os raios e energias das órbitas de Bohr para uma electrão no potencial de um núcleo de número atómico Z em vez do núcleo de hidrogénio. Repetindo a análise de Bohr mostrar que

$$a_o(Z) = \frac{a_o(Z=1)}{Z} \quad (13.16)$$

$$E_0(Z) = Z^2 \times E_0(Z=1) \quad (13.17)$$

Nota: Num átomo neutro de número atómico Z existem Z electrões e a repulsão eléctrica entre electrões não pode ser ignorada. Por isso os níveis de energia não são dados exactamente pela fórmula da equação 13.17. Contudo, ela dá uma estimativa razoável das energias dos electrões que orbitam mais próximos do núcleo e que estão mais fortemente ligados (maior energia de ionização).

13.3. Duas estrelas tem temperaturas superficiais de $T_1 = 3000 \text{ K}$ e $T_2 = 10\,000 \text{ K}$. Qual delas radia mais energia por unidade de área na gama do infra-vermelho?

13.6.2 Problemas

13.1. A constante solar (ver texto 10º ano) é definida com a intensidade total da radiação solar a uma distância do Sol igual ao raio da órbita de Terra e vale

$$I_S = 1,36 \times 10^3 \text{ W m}^{-2}.$$

Usando uma tabela de dados astronómicos para determinar a área do Sol e a distância Terra-Sol,

- (a) calcular a potência total radiada pelo Sol.
- (b) determinar a temperatura superficial do Sol.

- (c) determinar o comprimento de onda onde a densidade espectral radiada pelo Sol é máxima.

Nota: assumir que o Sol é um corpo negro(?), ou seja $e(\nu) = 1$. Será que todos os “corpos negros” são negros?

- 13.2. De acordo com o esquema da figura 13.2 na página 189 o comprimentos de onda dos raios-X estão na gama $10^{-9} \sim 10^{-6}$ cm.

- (a) Qual é a gama de frequências dos raios-X?
 (b) Qual é gama de energia dos fotões de raios-X em eV?

- 13.3. O trabalho de extracção do Cobre (energia mínima para retirar um electrão do metal) é $W = 4,7$ eV. Qual é o comprimento de onda máximo da radiação que pode originar efeito fotoeléctrico no Cobre? Porquê “máximo”?

13.4.

- (a) Usando uma tabela de constantes confirmar o valor numérico de R na equação 13.10 na página 203.
 (b) Mostrar que os comprimentos de onda das riscas do espectro do átomo de Hidrogénio são dados pela expressão:

$$\frac{1}{\lambda_{i \rightarrow f}} = R_H \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right) \quad n_i = 2, 3, \dots; n_f = 1, 2, \dots$$

e calcular o valor da constante de Rydberg, R_H em m^{-1} .

- (c) Calcular os comprimentos de onda da radiação emitida em transições para a órbita estacionária com $n_f = 2$, com $n_i = 3, 4, 5$.

- 13.5. Raios-X de comprimento de onda $\lambda = 0,1 \text{ \AA}$, são difundidos de $\theta = \pi/4$ numa experiência de efeito de Compton. Qual é a variação de energia dos electrões que difundem esta radiação?

Apêndice A

Transformação do espaço e tempo para v qualquer

A.0.3 Dilatação do tempo e contracção de espaço

No texto obtivemos as relações entre o tempo próprio de um relógio, ΔT , e o tempo medido num referencial em que ele se move com velocidade $c/2$:

$$\Delta T = \frac{\sqrt{3}}{2} \Delta t.$$

Usando este resultado, verificámos que um objecto de comprimento l no seu referencial mede um comprimento menor num referencial em que se move com velocidade $c/2$:

$$L = \frac{\sqrt{3}}{2} l$$

O método que usámos pode ser generalizado para qualquer velocidade.

No referencial \mathcal{S} , (do solo) em vez de postes distando de $c/2$, usamos postes a uma distância $d = v$. Um observador ligado a um referencial \mathcal{C} (o *Coioite*) move-se agora com velocidade v , demorando $\Delta t = 1 \text{ s}$, em \mathcal{S} , a passar entre dois postes sucessivos. Um sinal de luz (o *Road Runner*) é emitido quando o observador passa na origem e quer o seu relógio quer o do poste marcam 0. Usamos maiúsculas em \mathcal{C} e minúsculas em \mathcal{S} .

O observador passa pelo poste n quando este marca n e quando o seu próprio relógio marca nT_0 . Isto é, $T_0\Delta t$ é o tempo marcado pelo relógio com velocidade v , quando em \mathcal{S} passa um intervalo de tempo Δt .

Poste	<i>Coiole</i>		Luz
	t	T	t
0	0,0	0	0,0
I	1,0	T_0	v/c
II	2,0	$2T_0$	$2v/c$
n	n	nT_0	nv/c

Tabela A.1: O que marca o relógio de cada poste quando passa por ele cada um dos personagens; a velocidade do *Coiole* é v e ele demora um segundo a percorrer a distância entre postes sucessivos no referencial \mathcal{S} .

O sinal de luz demora, no referencial \mathcal{S} ,

$$\frac{d}{c} = \frac{v}{c}$$

a percorrer a distância entre dois postes. Por isso, quando passa no poste m este marca um tempo:

$$t_m = m \frac{v}{c}.$$

A tabela 12.1 na página 153 passa a ter o aspecto da tabela A.1.

A distância entre entre postes no referencial \mathcal{C} é

$$D = vT_0.$$

Quando o observador cruza o primeiro poste ($T = T_0$) onde está o sinal de luz?

Está à frente do observador uma distância cT_0 (velocidade da luz é um invariante) e por isso está no poste número

$$m = 1 + \frac{cT_0}{D} = 1 + \frac{cT_0}{vT_0} = 1 + \frac{c}{v}.$$

Nesse momento este poste marca

$$t_m = m \frac{v}{c} = \left(1 + \frac{c}{v}\right) \frac{v}{c} = 1 + \frac{v}{c}.$$

Quando este mesmo poste passa pelo observador, o seu relógio marca $t = m$ e o relógio do observador $T = mT_0$. Portanto os tempos em cada referencial dos seguintes acontecimentos, que ocorrem precisamente no mesmo ponto do referencial \mathcal{S} , no poste m , são:

- passagem do sinal de luz pelo relógio $m = 1 + c/v$:

$$\begin{aligned} t &= 1 + \frac{v}{c} \\ T &= T_0 \end{aligned}$$

- passagem do relógio $m = 1 + c/v$ pelo observador:

$$\begin{aligned} t &= m = 1 + \frac{c}{v} \\ T &= mT_0 = \left(1 + \frac{c}{v}\right) T_0. \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} \Delta t &= 1 + \frac{c}{v} - \left(1 + \frac{v}{c}\right) = \frac{c}{v} - \frac{v}{c} = \frac{c}{v} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right); \\ \Delta T &= (m - 1)T_0 = \frac{c}{v}T_0 \end{aligned}$$

Mas Δt é tempo medido por um relógio em movimento com velocidade $-v$ no referencial \mathcal{C} . Pelo Princípio de Relatividade deve valer:

$$\Delta t = T_0 \Delta T$$

ou seja,

$$\frac{c}{v} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{c}{v} T_0^2$$

o que dá

$$T_0 = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Para $v = c/2$ voltamos a obter:

$$T_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

A.0.4 A transformação de Lorentz

A coordenada espacial no poste n no referencial \mathcal{S} é

$$x = nv.$$

Um evento A que ocorre no poste n com o respectivo relógio a marcar t tem coordenadas espacial e temporal em \mathcal{S} , (x, t) . Quais são as coordenadas X e T em \mathcal{C} deste mesmo evento?

O relógio n passa na origem do referencial \mathcal{C} (o *Coiote*) em $T = nT_0$ e $t = n$. O tempo que decorre desde A até este cruzamento é

$$\begin{aligned}\Delta t &= n - t && \text{em } \mathcal{S}; \\ \Delta T &= nT_0 - T && \text{em } \mathcal{C}.\end{aligned}$$

Já vimos que

$$\Delta t = T_0 \Delta T;$$

Então

$$\begin{aligned}n - t &= T_0 (nT_0 - T) \\ T &= \frac{1}{T_0} (t + nT_0^2 - n).\end{aligned}$$

Usando as expressões $T_0 = \sqrt{1 - v^2/c^2}$ e $n = x/v$, obtemos

$$T = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \left(t - \frac{xv}{c^2} \right) = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \left(t - \frac{xv}{c^2} \right).$$

Por outro lado, como a distância entre postes em \mathcal{C} é vT_0 e o poste n avançou deste $T = 0$ uma distância vT no referencial \mathcal{C} :

$$\begin{aligned}X &= nvT_0 - vT = xT_0 - \frac{v}{T_0} \left(t - \frac{xv}{c^2} \right) \\ &= \frac{1}{T_0} \left[x \left(T_0^2 + \frac{v^2}{c^2} \right) - vt \right] = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} (x - vt)\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}X &= \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} (x - vt) \\ T &= \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \left(t - \frac{xv}{c^2} \right)\end{aligned}$$

são as equações que determinam a transformação de coordenadas de um evento entre os dois referenciais, $(x, t) \rightarrow (X, T)$.

Estas transformações ditas de **Lorentz**, são uma consequência dos postulados da Relatividade, mas não foram descobertas por Einstein; Hendrik Antoon Lorentz, um físico holandês, já tinha descoberto que as equações de Maxwell mantinham a forma sob esta transformação de coordenadas. Contudo, foi Einstein quem primeiro interpretou o significado profundo desta transformação e compreendeu as suas implicações nos conceitos de espaço e tempo.

Bibliografia

- [1] Paul Falstad. Math and physics applets. URL: <http://www.falstad.com/mathphysics.html>, 2006.
- [2] R. Feynman, R. Leighton, and M. Sands. *The Feynman Lectures on Physics*, chapter 1.
- [3] Tony R. Kuphaldt. All about circuits. URL: http://www.allaboutcircuits.com/vol_1/chpt_11/3.html, 2003.
- [4] NASA. Wilkinson microwave anisotropy probe. URL: <http://map.gsfc.nasa.gov>, Abril 2004.
- [5] American Institute of Physics. Center for history of physics. URL: <http://www.aip.org/history>, 2006.
- [6] Abraham Pais. *Inward bound: of matter and forces in the physical world*. Clarendon Press, Oxford, 1986.
- [7] Walter Scheider. Do the "double slit" experiment the way it was originally done. URL: <http://www.cavendishscience.org/phys/tyoung/tyoung.htm>. Original Physics Teacher 24, 217, 1986, 2000.
- [8] J. Summhammer. Interferometry with electrons and ions. URL: <http://www.ati.ac.at/~summweb/ifm/main.html>, 2005.
- [9] R. M. Tennent, editor. *Science Data Book*. Oliver & Boyd, 1971.