1. Considere uma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$ tal que $f\big(\frac{\pi}{2}, -1\big) = 0$ e $\nabla f\big(\frac{\pi}{2}, -1\big) = (2, 3)$. Considere a função
$$H(x, y) = f\left(\frac{y}{1 + x^2},\ \cos(2xy + \pi)\right).$$
Dado o vetor $\vec{v} = \big(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\big)$, considere a derivada direcional $D_{\vec{v}}H(1, \pi)$. Indique qual das seguintes afirmações é verdadeira:

(a) $D_{\vec{v}}H(1, \pi) = -2\pi\sqrt{2}$;

(b) $D_{\vec{v}}H(1, \pi) = \frac{5\sqrt{2}}{2}$;

(c) $D_{\vec{v}}H(1, \pi) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\pi - 3)$;

(d) $D_{\vec{v}}H(1, \pi) = \frac{\sqrt{2}}{2}(-\pi + 1)$;

(e) $D_{\vec{v}}H(1, \pi) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\pi + 1)$.

Resolução:

Seja $f = f(u, v)$. Sabemos que $\nabla f\big(\frac{\pi}{2}, -1\big) = \left(\frac{\partial f}{\partial u}\big(\frac{\pi}{2}, -1\big), \frac{\partial f}{\partial v}\big(\frac{\pi}{2}, -1\big)\right) = (2, 3)$.

$f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ logo f é diferenciável em todo o ponto de $\mathbb{R}^2$. A função
$$g(x, y) = \left(\frac{y}{1 + x^2},\ \cos(2xy + \pi)\right)$$
é uma função cujas componentes $g_1(x, y) = \frac{y}{1+x^2}$ e $g_2(x, y) = \cos(2xy + \pi)$ são funções pertencentes a $C^1(\mathbb{R}^2)$, portanto a função g também é diferenciável em todo o ponto de $\mathbb{R}^2$. Pelo teorema da derivada da função composta a função
$$H(x, y) = (f \circ g)(x, y) = f\left(\frac{y}{1 + x^2},\ \cos(2xy + \pi)\right)$$
é diferenciável em $\mathbb{R}^2$. Então
$$D_{\vec{v}}H(1, \pi) = \nabla H(1, \pi) \cdot \vec{v}.$$
Aplicando a regra da cadeia (ou regra da derivada da função composta), obtemos
$$\frac{\partial H}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{y}{1 + x^2},\ \cos(2xy+\pi)\right) \times \left[\frac{-2xy}{(1 + x^2)^2}\right] + \frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{y}{1 + x^2},\ \cos(2xy+\pi)\right) \times \Big[-2y \operatorname{sen}(2xy+\pi)\Big].$$
Substituindo no ponto $(1, \pi)$ obtemos $\frac{\partial H}{\partial x}(1, \pi) = -\pi$.
$$\frac{\partial H}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{y}{1 + x^2},\ \cos(2xy+\pi)\right) \times \left[\frac{1}{1 + x^2}\right] + \frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{y}{1 + x^2},\ \cos(2xy+\pi)\right) \times \Big[-2x \operatorname{sen}(2xy+\pi)\Big].$$
Substituindo no ponto $(1, \pi)$ obtemos $\frac{\partial H}{\partial y}(1, \pi) = 1$. Assim
$$D_{\vec{v}}H(1, \pi) = \nabla H(1, \pi) \cdot \vec{v} = (-\pi, 1) \cdot \big(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\big) = \frac{\sqrt{2}}{2}(-\pi + 1).$$

2. Considere uma função $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$ tal que $\nabla f(0,1)=(2,4)$. Considere a função

$$H(x,y)=(y^2+1)\text{arctg}\,x+f\big(x\cos y,\mathrm{e}^{\operatorname{sen} y}\big).$$

Indique qual das seguintes afirmações é verdadeira:

(a) $\nabla H(0,0)=(1,0)$;
(b) $\nabla H(0,0)=(3,4)$;
(c) $\nabla H(0,0)=(1,4)$;
(d) $\nabla H(0,0)=(3,4\mathrm{e})$;
(e) $\nabla H(0,0)=(1,4\mathrm{e})$.

Resolução:

Seja $f=f(u,v)$. Sabemos que $\nabla f(0,1)=\left(\dfrac{\partial f}{\partial u}(0,1),\dfrac{\partial f}{\partial v}(0,1)\right)=(2,4)$.

$f\in C^1(\mathbb{R}^2)$ logo f é diferenciável em todo o ponto de $\mathbb{R}^2$. A função

$$g(x,y)=\left(x\cos y,\mathrm{e}^{\operatorname{sen} y}\right)$$

é uma função cujas componentes $g_1(x,y)=x\cos y$ e $g_2(x,y)=\mathrm{e}^{\operatorname{sen} y}$ são funções pertencentes a $C^1(\mathbb{R}^2)$, portanto a função g também é diferenciável em todo o ponto de $\mathbb{R}^2$. Pelo teorema da derivada da função composta a função

$$(f\circ g)(x,y)=f\big(x\cos y,\mathrm{e}^{\operatorname{sen} y}\big)$$

é diferenciável em $\mathbb{R}^2$. Uma vez que a função $(x,y)\to(y^2+1)\text{arctg}\,x$ também é diferenciável em $\mathbb{R}^2$, a função

$$H(x,y)=(y^2+1)\text{arctg}\,x+f\big(x\cos y,\mathrm{e}^{\operatorname{sen} y}\big).$$

é soma de duas funções diferenciáveis $\mathbb{R}^2$. Aplicando a regra da derivada da soma de funções, obtemos

$$\frac{\partial H}{\partial x}(x,y)=\frac{y^2+1}{1+x^2}+\frac{\partial}{\partial x}\Big[f\big(x\cos y,\mathrm{e}^{\operatorname{sen} y}\big)\Big].$$

Aplicando a regra da cadeia à segunda parcela, obtemos

$$\frac{\partial H}{\partial x}(x,y)=\frac{y^2+1}{1+x^2}+\frac{\partial f}{\partial u}\big(x\cos y,\mathrm{e}^{\operatorname{sen} y}\big)\times\cos y+\frac{\partial f}{\partial v}\big(x\cos y,\mathrm{e}^{\operatorname{sen} y}\big)\times 0.$$

De forma análoga calculamos a derivada parcial de H em ordem à variável y :

$$\frac{\partial H}{\partial y}(x,y)=2y\,\text{arctg}x+\frac{\partial}{\partial y}\Big[f\big(x\cos y,\mathrm{e}^{\operatorname{sen} y}\big)\Big].$$

Pela regra da cadeia (ou derivada da função composta) obtemos

$$\frac{\partial H}{\partial y}(x,y)=2y\,\text{arctg}x+\frac{\partial f}{\partial u}\big(x\cos y,\mathrm{e}^{\operatorname{sen} y}\big)\times\big(-x\text{sen}y\big)+\frac{\partial f}{\partial v}\big(x\cos y,\mathrm{e}^{\operatorname{sen} y}\big)\times\big(\cos y\mathrm{e}^{\text{sen}y}\big).$$

Assim $\nabla H(0,0)=\left(\dfrac{\partial H}{\partial x}(0,0),\dfrac{\partial H}{\partial y}(0,0)\right)=(3,4).$

3. Considere uma função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de classe $C^1(\mathbb{R}^3)$ tal que $\nabla f(1,1,1) = (2,4,3)$. Considere a função $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$g(s,t) = (\cos(st), \mathrm{e}^{st}, t^2)\,.$$

Seja $H(s,t) = (f \circ g)(s,t)$ e designe por $JH(0,1)$ a matriz jacobiana (ou matriz derivada) da função H no ponto $(0,1)$.

Indique qual das seguintes afirmações é verdadeira:

a) $JH(0,1) = \begin{bmatrix} 4 & 6 \end{bmatrix}$; *b*) $JH(0,1) = \begin{bmatrix} 2 & 6 \end{bmatrix}$;

c) $JH(0,1) = \begin{bmatrix} 1 & 6 \end{bmatrix}$; *d*) $JH(0,1) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix}$;

e) $JH(0,1) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Resolução:

A matriz jacobiana da função H no ponto $(0,1)$ é

$$JH(0,1) = Jf(g(0,1)) \times Jg(0,1)$$

sendo $Jf(g(0,1))$ a matriz jacobiana da função f no ponto $g(0,1)$ e $Jg(0,1)$ a matriz jacobiana da função g no ponto $(0,1)$. Uma vez que $g(0,1) = (1,1,1)$, $Jf(1,1,1) = \left[\begin{array}{ccc} 2 & 4 & 3 \end{array}\right]$ e $Jg(0,1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ temos

$$JH(0,1) = \left[\begin{array}{ccc} 2 & 4 & 3 \end{array}\right] \times \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc} 4 & 6 \end{array}\right].$$

4. Considere $g : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ uma função de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$ tal que $g\big(\frac{\pi}{2}, 1\big) = 1$ e $\nabla g\big(\frac{\pi}{2}, 1\big) = (1, 1)$. Seja $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x, y) = g\big(2\,\mathrm{arctg}(x^2 + y^2), e^{xy}\big).$$

Indique qual das seguintes afirmações é verdadeira:

(a) O plano tangente ao gráfico da função f no ponto $(1, 0)$ está definido pela equação $z = 2x+y-1$;

(b) O plano tangente ao gráfico da função f no ponto $(1, 0)$ está definido pela equação $z = 2x - 1$;

(c) O plano tangente ao gráfico da função f no ponto $(1, 0)$ está definido pela equação $z = 2x+3y-1$;

(d) O plano tangente ao gráfico da função f no ponto $(1, 0)$ está definido pela equação $z = 3x+y-2$;

(e) O plano tangente ao gráfico da função f no ponto $(1, 0)$ está definido pela equação $z = 3x+3y-2$.

Resolução:

Seja $g = g(u, v)$. Sabemos que $\nabla g\big(\frac{\pi}{2}, 1\big) = \left(\frac{\partial g}{\partial u}\big(\frac{\pi}{2}, 1\big), \frac{\partial g}{\partial v}\big(\frac{\pi}{2}, 1\big)\right) = (1, 1)$. A função g pertence a $C^1(\mathbb{R}^2)$ então g é diferenciável em todo o ponto de $\mathbb{R}^2$.

A função

$$h(x, y) = \Big(2\mathrm{arctg}(x^2 + y^2),\ \mathrm{e}^{xy}\Big)$$

é uma função cujas componentes $h_1(x, y) = 2\,\mathrm{arctg}(x^2+y^2)$ e $h_2(x, y) = \mathrm{e}^{xy}$ são funções pertencentes a $C^1(\mathbb{R}^2)$, portanto a função g também é diferenciável em todo o ponto de $\mathbb{R}^2$. Pelo teorema da derivada da função composta a função

$$f(x, y) = (g \circ h)(x, y) = g\Big(2\,\mathrm{arctg}(x^2 + y^2),\ \mathrm{e}^{xy}\Big)$$

é diferenciável em $\mathbb{R}^2$. A equação geral do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(1, 0)$ é

$$z = f(1, 0) + \frac{\partial f}{\partial x}(1, 0)(x - 1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 0)y.$$

Aplicando a regra da cadeia (ou regra da derivada da função composta), obtemos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial g}{\partial u}\Big(2\,\mathrm{arctg}(x^2 + y^2),\ \mathrm{e}^{xy}\Big) \times \left[\frac{4x}{1 + (x^2 + y^2)^2}\right] + \frac{\partial g}{\partial v}\Big(2\,\mathrm{arctg}(x^2 + y^2),\ \mathrm{e}^{xy}\Big) \times y\,\mathrm{e}^{xy}.$$

Substituindo no ponto $(1, 0)$ obtemos $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 0) = 2$.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial g}{\partial u}\Big(2\,\mathrm{arctg}(x^2 + y^2),\ \mathrm{e}^{xy}\Big) \times \left[\frac{4y}{1 + (x^2 + y^2)^2}\right] + \frac{\partial g}{\partial v}\Big(2\,\mathrm{arctg}(x^2 + y^2),\ \mathrm{e}^{xy}\Big) \times x\,\mathrm{e}^{xy}.$$

Substituindo no ponto $(1, 0)$ obtemos $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 0) = 1$.

$f(1, 0) = g(\frac{\pi}{2}, 1\big) = 1$.

Então o plano tangente ao gráfico de f no ponto $(1, 0)$ está definido pela equação

$$z = 2x + y - 1.$$