Teorema de Pitágoras

O **teorema de Pitágoras** é uma relação matemática entre os três lados de qualquer triângulo rectângulo. Na geometria euclidiana, o teorema afirma que:

> “ Em qualquer triângulo rectângulo, o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos. ”

Por definição, a hipotenusa é o lado oposto ao ângulo recto, e os catetos são os dois lados que o formam. O enunciado anterior relaciona comprimentos, mas o teorema também pode ser enunciado como uma relação entre áreas:

> “ Em qualquer triângulo rectângulo, a área do quadrado cujo lado é a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados cujos lados são os catetos. ”

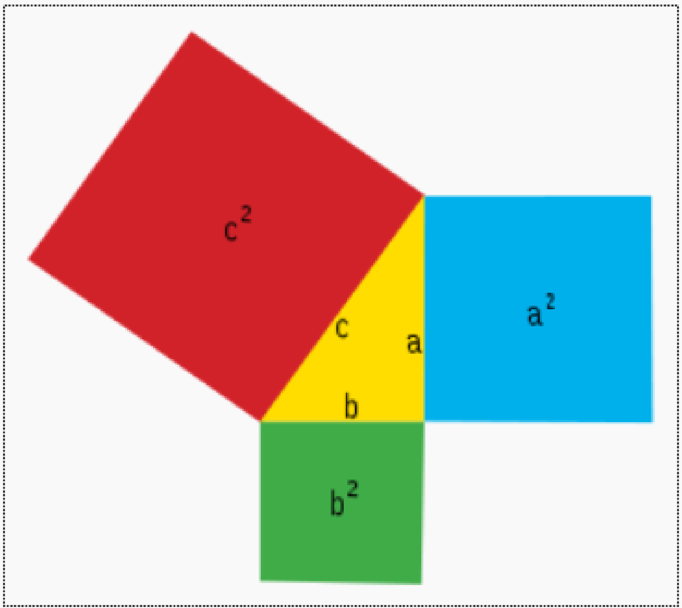
Para ambos os enunciados, pode-se equacionar

$$c^2 = b^2 + a^2,$$

onde *c* representa o comprimento da hipotenusa, e *a* e *b* representam os comprimentos dos outros dois lados.

O teorema de Pitágoras leva o nome do matemático grego Pitágoras (570 a.C. – 495 a.C.), que tradicionalmente é creditado pela sua descoberta e demonstração, embora seja frequentemente argumentado que o conhecimento do teorema seja anterior a ele (há muitas evidências de que matemáticos babilónicos conheciam algoritmos para calcular os lados em casos específicos, mas não se sabe se conheciam um algoritmo tão geral quanto o teorema de Pitágoras).

O teorema de Pitágoras é um caso particular da lei dos cossenos, do matemático persa Ghiyath al-Kashi (1380 – 1429), que permite o cálculo do comprimento do terceiro lado de qualquer triângulo, dados os comprimentos de dois lados e a medida de algum dos três ângulos



O teorema de Pitágoras: a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos (*a* e *b*) equivale à área do quadrado construído sobre a hipotenusa (*c*).

Fórmula

Sendo *c* o comprimento da hipotenusa e *a* e *b* os comprimentos dos outros dois lados, o teorema pode ser expresso por meio da seguinte equação:

$$c^2 = b^2 + a^2 \, .$$

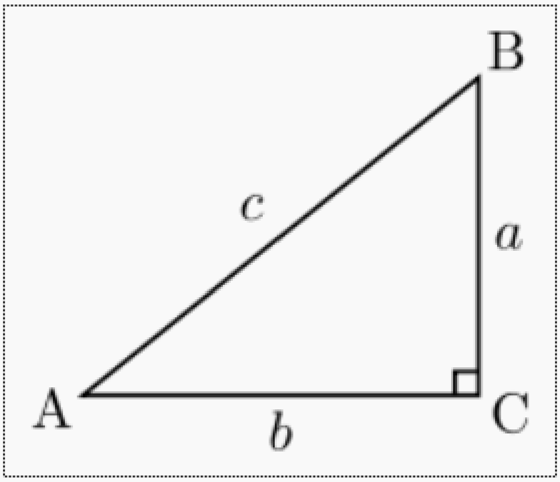
Manipulando algebricamente essa equação, chega-se a que se os comprimentos de quaisquer dois lados do triângulo rectângulo são conhecidos, o comprimento do terceiro lado pode ser encontrado:

$c = \sqrt{b^2 + a^2}$, $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ e $a = \sqrt{c^2 - b^2}$.

Outro corolário do teorema é que:

> “ Em qualquer triângulo rectângulo, a hipotenusa é maior que qualquer um dos catetos, mas menor que a soma deles. ”

maior que qualquer um dos catetos pois todos os comprimentos são necessariamente números positivos, e $c^2 > b^2$, logo $c > b$, e $c^2 > a^2$, logo $c > a$. E a hipotenusa é menor que a soma dos catetos pois $c^2 = b^2 + a^2$, e $(b+a)^2 = b^2 + 2ba + a^2$, logo $c^2 < (b+a)^2$, logo $c < b + a$.



Um triângulo retângulo, de catetos *a* e *b*, e de hipotenusa *c*.

Demonstrações

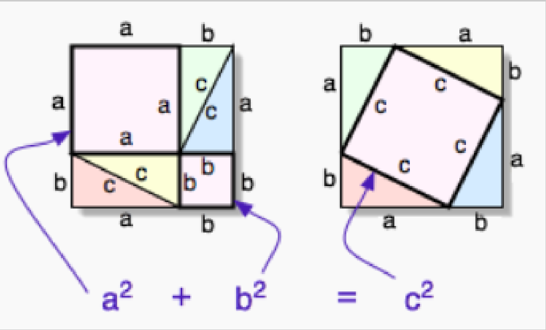
O teorema de Pitágoras já teve muitas demonstrações publicadas. O livro *The Pythagorean Proposition*, de Elisha Scott Loomis, por exemplo, contém 370 demonstrações diferentes. Há uma demonstração no livro Os Elementos, de Euclides. E também ofereceram demonstrações, o matemático indiano Bhaskara Akaria, o polímata italiano Leonardo da Vinci, e o vigésimo presidente dos Estados Unidos, James A. Garfield.

O teorema de Pitágoras é tanto uma afirmação a respeito de áreas quanto a respeito de comprimentos, algumas provas do teorema são baseadas em uma dessas interpretações, e outras provas são baseadas na outra interpretação.

Não se sabe ao certo qual seria a demonstração utilizada por Pitágoras, entretanto, muitos autores concordam que ela teria sido feita através da comparação de áreas, conforme se segue:

1. Desenha-se um quadrado de lado $b + a$;
2. Traçam-se dois segmentos paralelos aos lados do quadrado;
3. Divide-se cada um destes dois rectângulos em dois triângulos rectos, traçando as diagonais. Chama-se c o comprimento de cada diagonal;
4. A área da região formada ao retirar os quatro triângulos rectos é igual a $b^2 + a^2$;
5. Desenha-se agora o mesmo quadrado de lado $b + a$, mas colocamos os quatro triângulos rectos noutra posição.
6. A área da região formada quando se retiram os quatro triângulos rectos é igual a c^2.

Como $b^2 + a^2$ representa a área do quadrado maior subtraída da soma das áreas dos triângulos rectângulos, e c^2 representa a mesma área, então $\boldsymbol{b^2 + a^2 = c^2}$. Ou seja: num triângulo rectângulo o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos. O segmento de medida c foi chamado de hipotenusa e os de medida b e a foram chamados de catetos.



Provável forma usada por Pitágoras para demonstrar o teorema que leva seu nome

Por semelhança de triângulos

Esta demonstração se baseia na proporcionalidade dos lados de dois triângulos semelhantes, isto é, que a razão entre quaisquer dois lados correspondentes de triângulos semelhantes é a mesma, independentemente do tamanho dos triângulos.

Sendo *ABC* um triângulo rectângulo, com o ângulo recto localizado em *C*, como mostrado na figura. Desenha-se a altura com origem no ponto *C*, e chama-se *H* sua intersecção com o lado *AB*. O ponto *H* divide o comprimento da hipotenusa, *c*, nas partes *d* e *e*. O novo triângulo, *ACH*, é semelhante ao triângulo *ABC*, pois ambos têm um ângulo recto, e eles compartilham o ângulo em *A*, significando que o terceiro ângulo é o mesmo em ambos os triângulos também marcado como θ na figura. Seguindo-se um raciocínio parecido, percebe-se que o triângulo *CBH* também é semelhante à *ABC*. A semelhança dos triângulos leva à igualdade das razões dos lados correspondentes:

$$\frac{a}{c} = \frac{e}{a} \qquad \text{e} \qquad \frac{b}{c} = \frac{d}{b}.$$

O primeiro resultado é igual ao cosseno de cada ângulo θ e o segundo resultado é igual ao seno.

Estas relações podem ser escritas como:

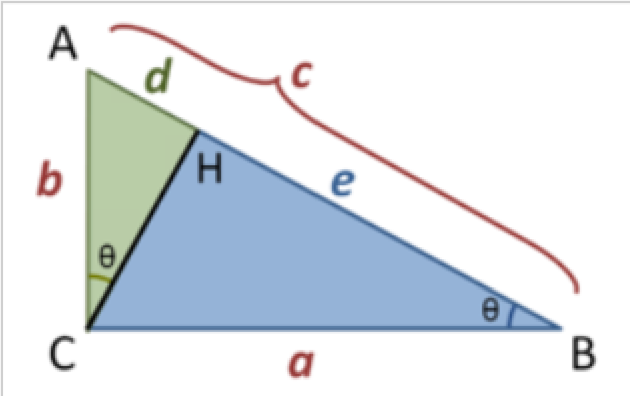
$$a^2 = c \times e \qquad \text{e} \qquad b^2 = c \times d.$$

Somando estas duas igualdades, obtém-se

$$a^2 + b^2 = c \times e + c \times d = c \times (d + e) = c^2,$$

que, rearranjada, é o teorema de Pitágoras:

$$a^2 + b^2 = c^2 \ .$$



Demonstração que utiliza o conceito de semelhança: os triângulos ABC, ACH e CBH têm a mesma forma, diferindo apenas pelas suas posições e tamanhos.

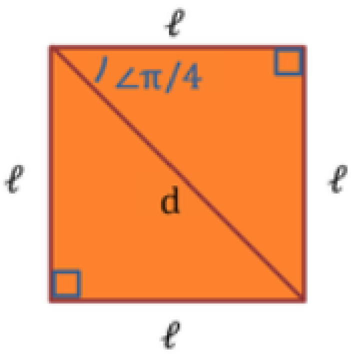
A diagonal do quadrado

A diagonal do quadrado divide-o em dois triângulos rectângulos congruentes. Sendo l o lado e d a diagonal, segue que:

$$d^2 = l^2 + l^2 = 2\,l^2.$$

Finalmente, o comprimento da diagonal é encontrado como:

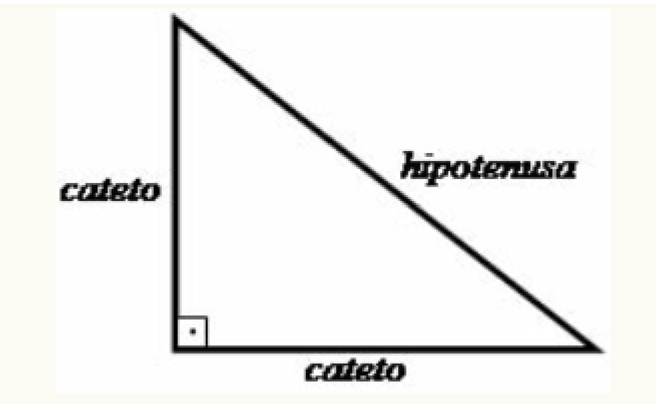
$$d = \sqrt{2\,l^2} = l\sqrt{2}.$$



Calcular a diagonal do quadrado e do rectângulo

Os estudos relacionados à criação da Geometria e da Trigonometria datam dos séculos anteriores ao nascimento de Cristo. Naquela época, os grandes pensadores buscavam formas de elucidar situações matemáticas envolvendo a Geometria. Dentre esses inúmeros estudos surgiu um dos mais conhecidos e aplicáveis fundamentos da Matemática, o Teorema de Pitágoras.

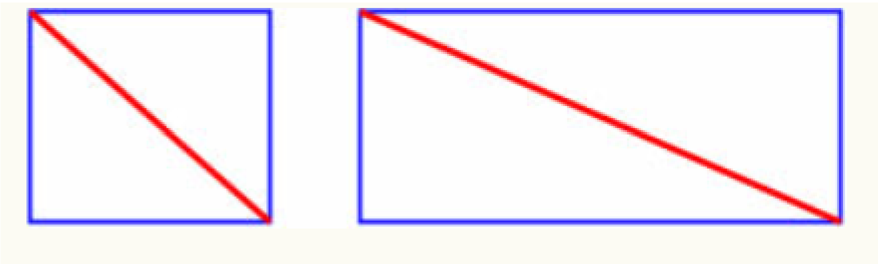
Os primeiros passos rumo à criação do Teorema de Pitágoras ocorreram baseados no estudo do triângulo rectângulo, em que Pitágoras estabeleceu uma relação entre os lados dessa figura de formato triangular. Os lados perpendiculares, isto é, que formam o ângulo de 90º (recto) foram denominados de catetos e o lado oposto ao ângulo reto foi chamado de hipotenusa.



A relação proposta por Pitágoras sugere que: "A soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa."

$$(hip)^2 = (cat)^2 + (cat)^2$$

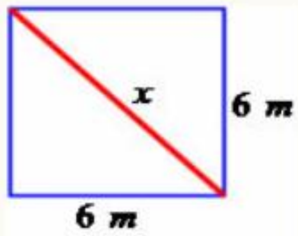
Essa relação utilizada para o cálculo das medidas de um dos lados do triângulo rectângulo, também é utilizada para o cálculo das medidas de um quadrado ou rectângulo. Nesses quadriláteros temos um elemento denominado diagonal, caracterizado por um segmento de recta responsável por unir dois vértices da figura. Observe os quadriláteros a seguir com destaque em relação a uma de suas diagonais.



Observe que ao traçarmos uma das diagonais dividimos o quadrilátero em dois triângulos rectângulos, nos quais podemos aplicar o Teorema de Pitágoras para o cálculo das medidas desconhecidas.

Exemplo 1

Determine a medida da diagonal do seguinte quadrilátero.

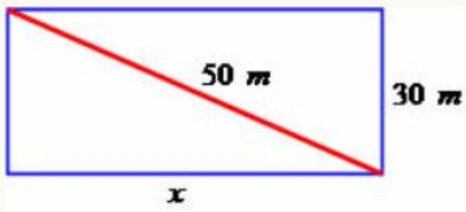


$$x^2 = 6^2 + 6^2$$
$$x^2 = 36 + 36$$
$$x^2 = 72$$
$$\sqrt{x^2} = \sqrt{72}$$
$$x = 6\sqrt{2}\ m$$

A diagonal possui medida igual a $6\sqrt{2}$ metros.

Exemplo 2

Determine a medida do comprimento de uma região rectangular com diagonal e largura medindo 50 e 30 metros, respectivamente.



$$x^2 + 30^2 = 50^2$$
$$x^2 + 900 = 2500$$
$$x^2 = 2500 - 900$$
$$x^2 = 1600$$
$$\sqrt{x^2} = \sqrt{1600}$$
$$x = 40\ m$$

O comprimento possui medida equivalente a 40 metros.