TRABALHO 1

Sistema com massa e mola

Licenciatura de Engenharia Mecânica
Sistemas de Controlo
Docente: Paulo Moura Oliveira
Isabel Brás|70572
Filipe Fernandes|71717
03/04/2022

Índice

1. Introdução

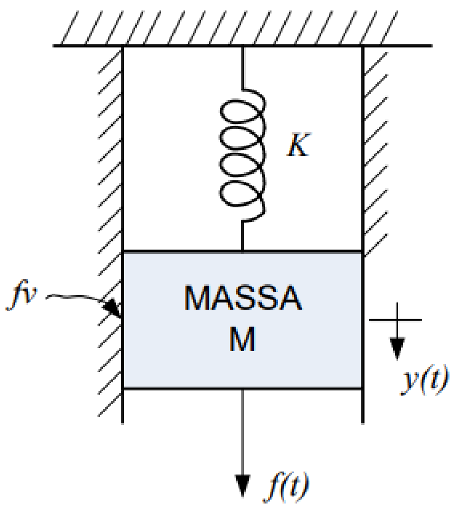
No âmbito da disciplina de Sistemas de Controlo, foi solicitada a realização de diversos relatórios sobre os trabalhos realizados no decorrer das aulas práticas. Pelo que, este relatório, é composto por diversos capítulos, cada um relacionado com os tópicos explícitos no protocolo e com os conteúdos necessários para a compreensão do trabalho realizado.

Foi fornecido um protocolo, com diversas questões. Questões essas que corresponderão a cada um dos capítulos deste relatório.

Sendo que, o principal objetivo deste, é compreender o modo como um sistema de amortecimento massa e mola se comporta ao longo do tempo.

Para além disso, é importante destacar que a resposta a essas questões foi dada com auxilio do Matlab, de modo que o programa correspondente á resposta da questão 5 e 6, será entregue em anexo com o relatório.

A figura seguinte, é o esquema demonstrativo de um sistema de amortecimento, que foi fornecido no protocolo. Neste, está representado o amortecedor de um automóvel, que é formado por uma massa que está ligada a uma mola.



Propriedades

fv: atrito

f(t): força aplicada

M: massa

K: constante da mola

Figura 1.Esquema do sistema massa mala

De modo a cumprir este propósito, é necessário compreender certos conceitos matemáticos e certos conceitos físicos e perceber como estes são aplicados. Alguns desse são:

1ª Lei de Newton

- $F_r = M^*a$ **(1)**

Propriedades

F_r: força resultante da soma das forças presentes no sistema

M: massa do corpo

a: aceleração

Sistemas de 2º Ordem

Representa o sistema que tem um ganho estático igual a 1

$$H(s)= \frac{w_n^2}{s^2+2\xi\,\omega_n s+\omega_n^2} \quad \textbf{(2)}$$

Quando $\omega_n > 0$. Esta função tem pólos no semiplano esquerdo, correspondendo a um sistema causal e estável, sse $\xi > 0$. Para $0 < \xi < 1$ os polos são complexos conjugados, sendo reais se $\xi > 1$. **[1]**

Os sistemas de 2º possui um denominador da seguinte forma:

$$s^{2+}2\xi\,\omega_n s + \omega_n^2 \quad \textbf{(3)}$$

$\xi \rightarrow$ fator de amortecimento

$\omega_n \rightarrow$ frequência natural não amortecida

$$w_n^2 = \frac{k}{M} \Rightarrow w_n^2 \approx \sqrt{\frac{K}{M}} \quad \textbf{(4)}$$

$$2\xi w_n = \frac{fv}{M} \Leftrightarrow \xi = \frac{fv}{2M\sqrt{\frac{k}{M}}} \quad \textbf{(5)}$$

Equação característica:

$$s^{2+}2\xi\,\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \quad \textbf{(6)}$$

$\xi < 1 \Rightarrow$ sub amortecido

$\xi = 1 \Rightarrow$ criticamente amortecido

$\xi > 1 \Rightarrow$ sobre amortecido

$\xi = 0 \Rightarrow$ não há amortecimento

Casos estudados:

Sistema sobre amortecido

Obteve-se ξ> 1, a função de transferência apresenta dois polos reias dados por:

$$s_{1,2} = \omega_n(-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}) \quad \textbf{(7)}$$

Quando ξ→1, s_1 tende para a origem e s_2 tende pra -∞, tendo ξ>> 1 tem-se

$s_1 \approx -\frac{\omega_n}{2\xi}$ e $s_2 \approx -2\xi\omega_n$. **[1]**

Quando t > 0 vai, naturalmente, ser a soma de duas exponenciais com expoentes, $s_1 t$ e $s_2 t$, respetivamente, com amplitudes apropriadas definidas:

$$M = \frac{\omega_n}{2\sqrt{\xi^2-1}}, \quad \textbf{(8)}$$

Sistema sub amortecido

Demonstra a relação das posições dos polos com os parâmetros ω_n e ξ.

Indica também o ângulo ψ = arcos ξ **(9)** , que será útil na caracterização destes sistemas.

Os pólos são dados por:

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm J\omega_n\sqrt{1 - \xi^2} \quad \textbf{(10)}$$

Em que ξ <1. **[1]**

2. Expressão no domínio de Laplace que permite simular o movimento y a partir de uma posição inicial sem força exercida f (sistema não forçado) (Questão nº1)

A partir da primeira lei de Newton e sabendo que: *f(t)-kf(t)-fv(t)=M*a(t);* sabendo que f ≡ y; e que $a(t)=\frac{d^2y(t)}{dt^2}$. Assim sendo, deduz-se que:

$$f(t)-ky(t)-fv\frac{dy(t)}{dt} = M*\frac{d^2y(t)}{dt^2} \Leftrightarrow M*\frac{d^2y(t)}{dt^2} + fv\frac{dy(t)}{dt} + ky(t) = f(t)$$

Nota: $y' = \frac{dy(t)}{dt}$

Utilizando as transformadas de Laplace e aplicando as seguintes regras, sendo essas:

- $f'(t) \xrightarrow{L} sF(s)-f(0)$
- $f''(t) \xrightarrow{L} s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$

Aplicando as regras referidas, obtém-se:

$$M[s^2y(s)-sy(0)-y'(0)] + fv[sy(s)-y(0)]+ky(s)=F(s)$$

Para que o Sistema seja não forçado, F(s)=0; logo a equação fica:

$$M[s^2y(s)-sy(0)-y'(0)] + fv[sy(s)-y(0)]+ky(s)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Ms^2y(s)-Msy(0)-My'(0)+fvsy(s)-fvy(0)+ky(s)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (Ms^2+fvs+k)y(s)-Msy(0)-My'(0)-fvy(0)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (Ms^2+fvs+k)\, y(s)= Msy(0) +My'(0)+fvy(0)$$

Sabendo que $y(0)=y_0$; e que $y'(0)=0$; subsitue-se por esses valores e obtém-se que:

$$y(s)=\frac{(Ms+fv)y(0)}{Ms^2+fvs+k}$$

Colocando M em evidência, obtêm-se que:

$$y(s)=\frac{\left(s+\frac{fv}{M}\right)y(0)}{s^2+\frac{fv}{M}s+\frac{k}{M}}$$

3. Equação característica, os polos e zeros do sistema. Faça o gráfico da sua localização no plano complexo (Questão nº2 e Questão nº 6)

Caso 1

Dados: M=1kg k=2 fv=3 y_0=1m

P(s)=0 => Polos

z(s)=0 => Zeros

$$y(s)=\frac{\left(s+\frac{fv}{M}\right)y(0)}{s^2+\frac{fv}{M}s+\frac{k}{M}}=\frac{z(s)}{P(s)}$$

$$y(s)=\frac{\left(s+\frac{3}{1}\right)y(0)}{s^2+\frac{3}{1}s+\frac{2}{1}}=\frac{(s+3)}{s^2+3s+2}=\frac{(s+3)}{(s+1)(s+2)}$$

Polos e zeros do sistema:

Polos:

- s=-1
- s=-2

Zeros:

- s=-3

Gráfico da sua localização no plano complexo:

Neste gráfico, observa-se que para este caso tanto os polos como o zero, estão situados sobre o eixo das abcissas, tendo $j\omega = 0$.

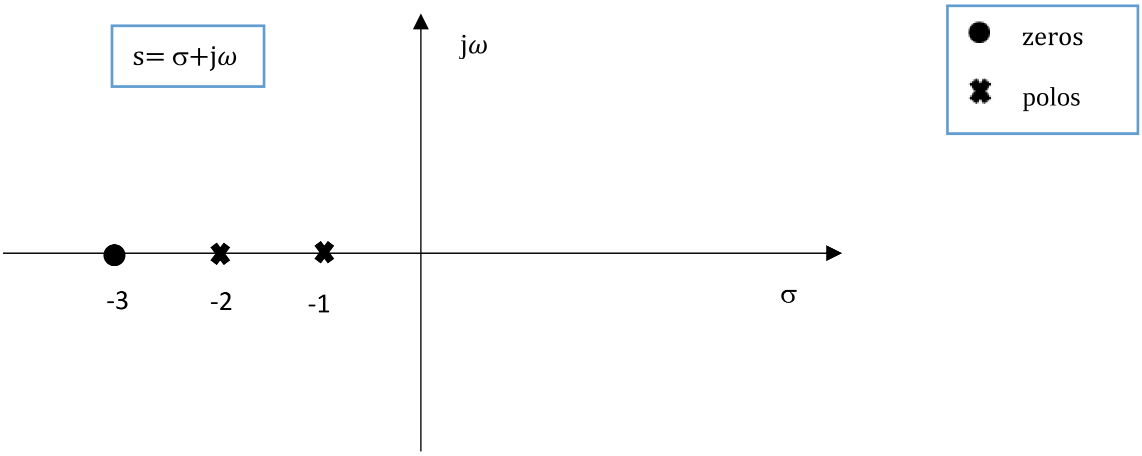


Gráfico 1. Gráfico da localização dos polos e zeros do sistema no tempo do caso 1

Equação característica:

Substituindo os valores específicos ao caso 1 nas expressões **(4)** e **(5),** obtemos:

$$\omega_n{}^2=2 \Leftrightarrow \omega_n=\sqrt{2}\ \text{rad/s}=1{,}41\ \text{rad/s}$$

$$2\xi\omega_n=3$$

$$\xi=\frac{3}{2\sqrt{2}}=1{,}06$$

A partir da expressão **(7),** retira-se que:

$$s_{1,2}=1{,}41(-1{,}06\pm\sqrt{0{,}12})$$

$\xi>1$; logo sistema é sobre amortecido

Assim, a partir da equação **(6)**, determina-se que a equação característica é:

$$s^2+3s+2=0$$

Caso 2

Dados: M=1kg k=2 fv=0,5 y_0=1m

$$y(s) = \frac{(s+0{,}5)}{s^2+0{,}5s+2}$$

Polos e zeros do sistema:

Polos:

- s=-0,25-j1,39
- s=-0,25+j1,39

Zeros:

- s=-0,5

Gráfico da sua localização no plano complexo:

No próximo gráfico observa-se a posição dos polos e dos zeros do sistema no plano complexo, e conclui-se que neste caso os polos do sistema possuem uma componente imaginária e uma componente real, diferenciando-se do caso anterior, onde os polos e o zero, estavam localizados sob o eixo das abcissas, tendo jω=0.

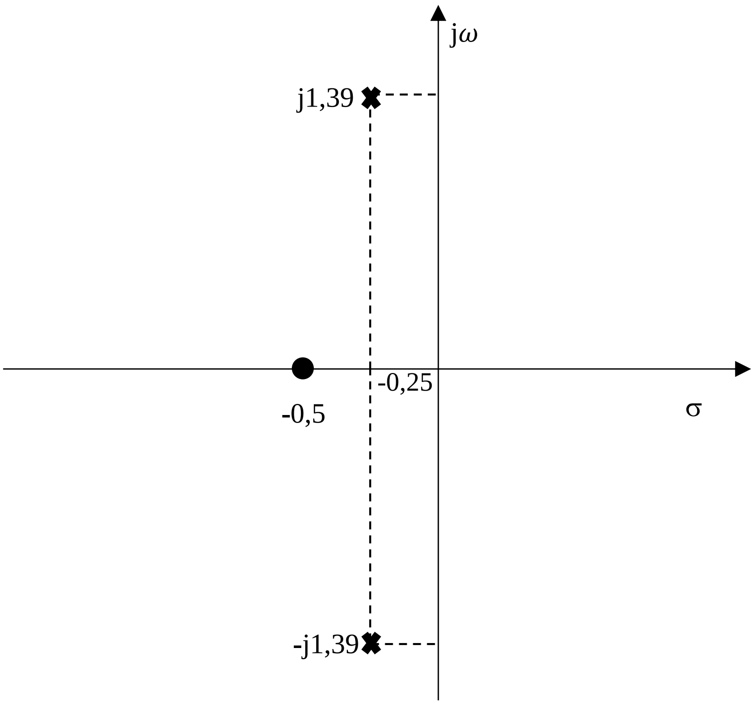


Gráfico 2. Gráfico da localização dos polos e zeros do sistema no tempo do caso 2

Equação característica:

Substituindo os valores específicos ao caso 2 nas expressões **(4)** e **(5),** obtemos:

$$\omega_n^2=2 \Leftrightarrow \omega_n=\sqrt{2}\ \mathrm{rad/s}=1{,}41\mathrm{rad/s}$$

$$2\xi\omega_n=0{,}5$$

$$\xi=\frac{0{,}5}{2\sqrt{2}}=0{,}18$$

Com recurso, á equação **(10)**, retira-se que:

$$s_{1,2}=-0{,}25\pm j1{,}39$$

$\xi<1$; logo o sistema é sub amortecido.

Assim, a partir da equação **(6)** admite-se que a equação característica é:

$$s^2+0{,}5s+2=0$$

4. A resposta no tempo, considerando o sistema não forçado (Questão nº3 e Questão nº6)

Caso 1:

$$y(s)=\frac{(s+3)}{(s+1)(s+2)}\xrightarrow{L^{-1}}\frac{A}{s+1}+\frac{B}{s+2}$$

$$A=[y(s)*(s+1)]_{s\text{-}1}=2$$

$$B=[y(s)*(s+2)]_{s\text{-}2}=-1$$

$$y(t)=2e^{-t}-e^{-2t}$$

No gráfico 3 observa-se como o sistema se comporta ao longo do tempo, conclui-se que com o passar do tempo o sistema irá aproximar-se de y(t)=0

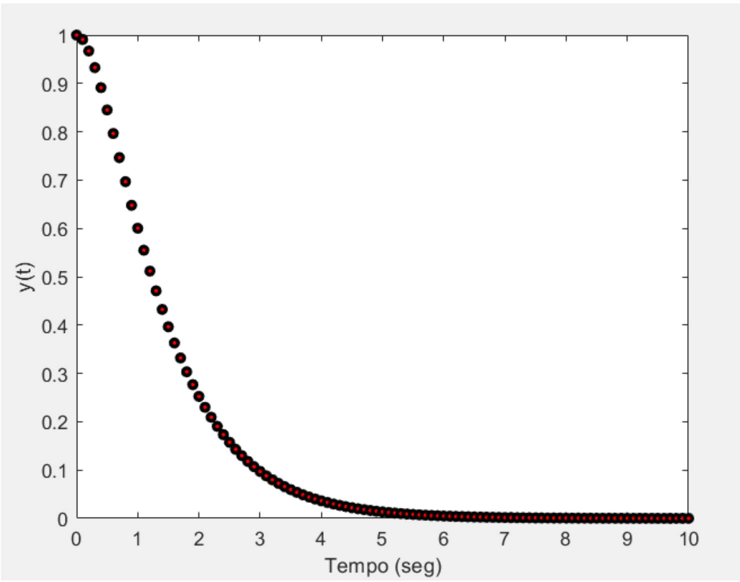


Gráfico 3. Resposta no tempo do sistema

Caso 2:

$$y(t)=\frac{y_0}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi\omega_n t}\sin[(\omega_n\sqrt{1-\xi^2})t+\operatorname{acos}(\xi)]$$

$y(t)=1{,}02e^{-0{,}25t}\sin(1{,}40\,t+79{,}63)$

No gráfico 4 observa-se como o sistema se comporta ao longo do tempo, num período de 10 segundos.

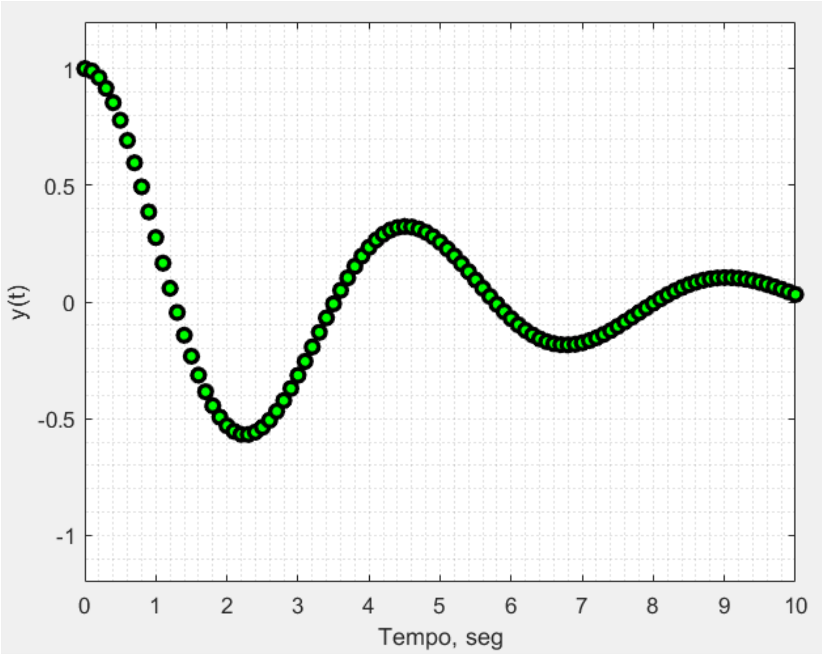


Gráfico 4. Resposta no tempo do sistema

5. Verificar se o valor estacionário da resposta é zero utilizando o teorema do valor final (Questão nº4 e Questão nº6)

Caso 1:

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = 0$$

Teorema do valor final:

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sy(s)$$

$$lim_{s\to 0}\, sy(s) = \lim_{s\to 0} \frac{s(s+3)}{(s+1)(s+2)} = \frac{0\times 3}{2} = 0$$

Caso 2:

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = 0$$

$$\lim_{s \to 0} sy(s) = \lim_{s \to 0} \frac{s(s+0{,}5)}{s^2 + 0{,}5s + 2} = \frac{0 \times 0{,}5}{2} = 0$$

6. Conclusões

Com base nos dados obtidos e estudados para cada um dos casos; conclui-se que o caso sub amortecido, sendo esse caso 2, varia mais ao longo do tempo, em comparação com o caso sobre amortecido, sendo esse o caso 1. Pelo que, no caso 1, o gráfico (gráfico 1) em função do tempo, acaba por estabilizar, passado algum tempo, mantendo-se constante. Enquanto, que no caso dois, o gráfico em função do tempo é mais irregular. Contudo, verifica-se, no gráfico 2, que a amplitude da função diminui. Ou seja, aproxima-se de um eixo imaginário, coincidente com y(t) = 0, pelo que irá chegar a um instante em que irá estabilizar perto desse eixo.

7. Referências

Almeida, Borges, Resposta no tempo de sistemas de primeira e de segunda ordem só com pólos.(2011).http://users.isr.ist.utl.pt/~aguiar/respostas%20no%20tempo.pdf (31/03/2022) **[1]**