

Capítulo 7

Exercícios de CPM e PERT Enunciados

Problema 1

O banco TTM (Tostão a Tostão se faz um Milhão) decidiu transferir e ampliar a sua sede e serviços centrais para a cidade do Porto. Este projecto foi dividido em tarefas, tendo as suas precedências sido estabelecidas e os tempos de execução médios, e seus desvios-padrão, estimados:

| Actividade | Descrição | Duração média (semanas) | Desvio- Padrão (semanas) | Actividades imediatamente posteriores |
|------------|---|-------------------------------|--------------------------------|---|
| LO | Obtenção de licenças de obras | 5 | 1 | OA, ME RTF |
| OA | Obras de alteração do edifício | 21 | 2 | II |
| ME | Medição do espaço | 1 | 0 | PAI, PAM |
| RTF | Recrutamento e treino dos funcionários | 21 | 1 | M |
| PAI | Planeamento e aquisição de infra-estruturas | 24 | 1 | II |
| II | Instalação de infra-estruturas | 7 | 1 | IM |
| PAM | Planeamento e aquisição de mobiliário | 10 | 1 | IM |
| IM | Instalação de mobiliário | 1 | 0 | M |
| M | Mudança | 2 | 0 | — |

- (a) Desenhe a rede de actividades correspondente ao projecto.
- (b) Calcule as folgas totais e livres e determine o caminho crítico.
- (c) Qual é a probabilidade de o projecto se atrasar 2 semanas ou mais?
- (d) Durante a execução do projecto conclui-se que as actividades OA e PAM sofrerão atrasos de 4 e 8 semanas, respectivamente. Será necessário alterar a execução dessas actividades para que a data prevista para a conclusão do projecto não seja comprometida? Justifique.

Problema 2

No quadro seguinte estão representadas as actividades que constituem um determinado projecto. Para cada uma é fornecida a sua duração e as actividades que lhe são imediatamente posteriores:

| Actividade | Duração média (semanas) | Actividades imediatamente posteriores |
|------------|-------------------------------|---|
| A | 2 | G |
| B | 4 | — |
| C | 7 | E, I, B |
| D | 3 | A, F |
| E | 3 | G |
| F | 3 | I, B |
| G | 4 | H |
| H | 5 | — |
| I | 9 | H |

Desenhe a rede de actividades associada a este projecto e determine o caminho crítico e as folgas totais e livres de todas as actividades do projecto.

Problema 3

Considere o seguinte projecto:

| Actividade | Duração média (semanas) | Desvio-Padrão (semanas) | Actividades imediatamente precedentes |
|------------|-------------------------|-------------------------|---------------------------------------|
| A | 8 | 3 | D |
| B | 1 | 0 | H |
| C | 5 | 1 | — |
| D | 8 | 2 | — |
| E | 10 | 3 | C, D |
| F | 6 | 2 | H |
| G | 4 | 1 | B, I, J |
| H | 5 | 1 | A, E |
| I | 9 | 2 | D |
| J | 2 | 0 | A, E |

- (a) Trace a rede de actividades para este projecto.
- (b) Defina o caminho crítico (em termos de durações médias).
- (c) Defina as folgas médias (total e livre) das actividades H, J e I.
- (d) Determine a probabilidade de o projecto estar concluído antes da semana 27 (admita que o projecto arranca no início da semana 0). Critique a estimativa da probabilidade obtida.
- (e) Qual a probabilidade de o projecto estar concluído entre o início da semana 27 e o fim da semana 30?
- (f) Que data de conclusão do projecto deverá ser proposta, para que haja apenas 5% de probabilidade de não a cumprir?
- (g) No fim da semana 13, o estado de execução das diferentes actividades é o seguinte:
 - actividades completas: C e D
 - actividades em execução:
 - E (valor esperado da duração restante: 1 semana)
 - A (valor esperado da duração restante: 1 semana)
 - I (valor esperado da duração restante: 8 semana)
 - actividades não iniciadas: as restantes

Redefina a rede. Indique sobre a rede os valores esperados das datas de início mais cedo e das datas de fim mais tarde para as actividades não terminadas, bem como o(s) caminho(s) crítico(s), na nova situação.

Problema 4

Um dado projecto envolve as 9 actividades que se caracterizam na tabela seguinte:

| Actividade | Duração média (semanas) | Desvio- Padrão (semanas) | Actividades imediatamente anteriores |
|------------|-------------------------------|--------------------------------|--|
| A | 10 | 2 | — |
| B | 7 | 1 | — |
| C | 16 | 3 | — |
| D | 12 | 1 | A |
| E | 5 | 1 | B |
| F | 12 | 2 | B |
| G | 8 | 2 | E, D |
| H | 10 | 2 | F, E, D |
| I | 8 | 2 | G, H |

- Defina os números de ordem das actividades, desenhe a rede correspondente e determine o caminho crítico.
- Calcule as folgas médias total e livre das actividades F, B e D. Qual o interesse desses valores no controlo de um projecto?
- Calcule a probabilidade de o projecto não estar completo ao fim de 50 semanas. Que confiança tem no valor encontrado?

Capítulo 7

Exercícios de CPM e PERT

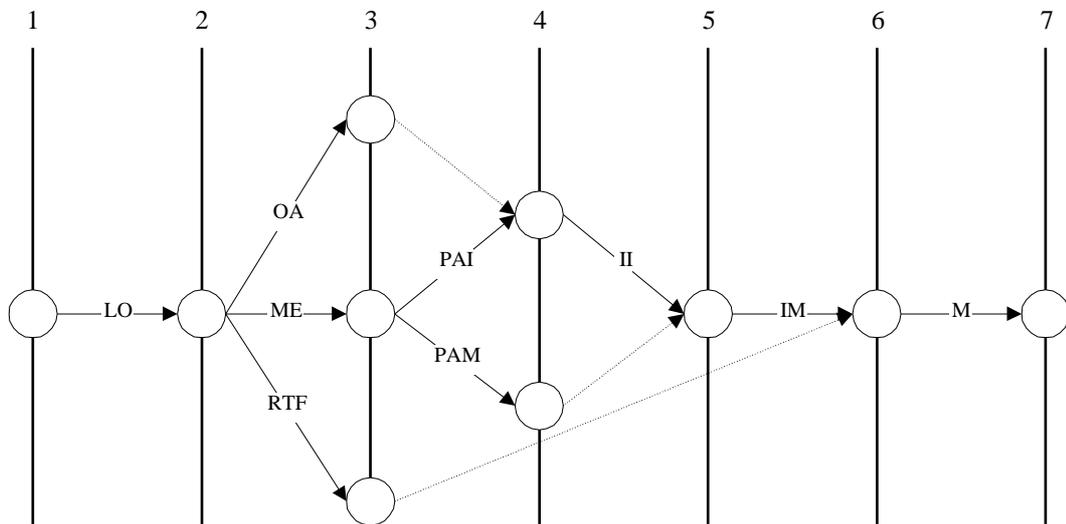
Resoluções

Problema 1

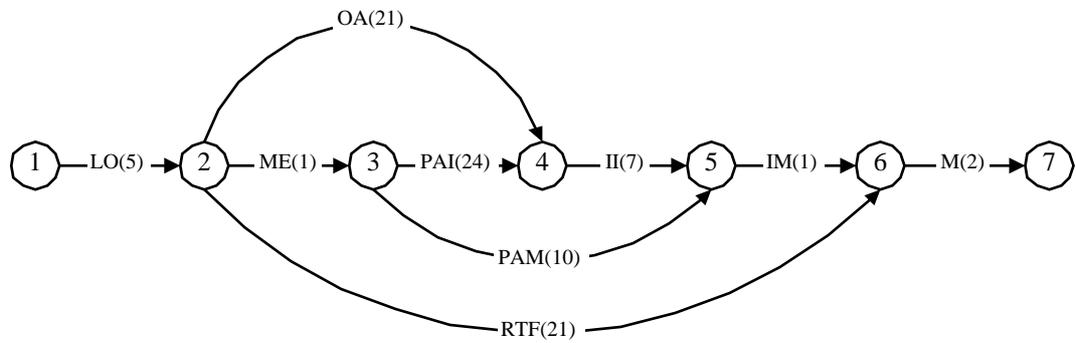
- (a) Para desenhar a rede de actividades é necessário começar por atribuir um número de ordem a cada actividade, seguindo o algoritmo dado nas aulas teóricas:

| Actividade | Actividades imediatamente subsequentes (posteriores) | | | | | | | | | Número de ordem |
|------------|--|----|----|-----|-----|----|-----|----|---|-----------------|
| | LO | OA | ME | RTF | PAI | II | PAM | IM | M | |
| LO | | x | x | x | | | | | | 1 |
| OA | | | | | | x | | | | 2 |
| ME | | | | | x | | x | | | 2 |
| RTF | | | | | | | | | x | 2 |
| PAI | | | | | | x | | | | 3 |
| II | | | | | | | | x | | 4 |
| PAM | | | | | | | | x | | 3 |
| IM | | | | | | | | | x | 5 |
| M | | | | | | | | | | 6 |

Seguidamente, desenham-se $6 + 1 = 7$ linhas verticais e constroi-se a rede partindo do fim para o princípio. O início de cada actividade coincide com a linha vertical correspondente ao seu número de ordem. Esta fase do desenho da rede está representada na figura seguinte.



Simplificando a rede apresentada na figura anterior, obtém-se a rede representada na figura seguinte.



Notação:

-Nós



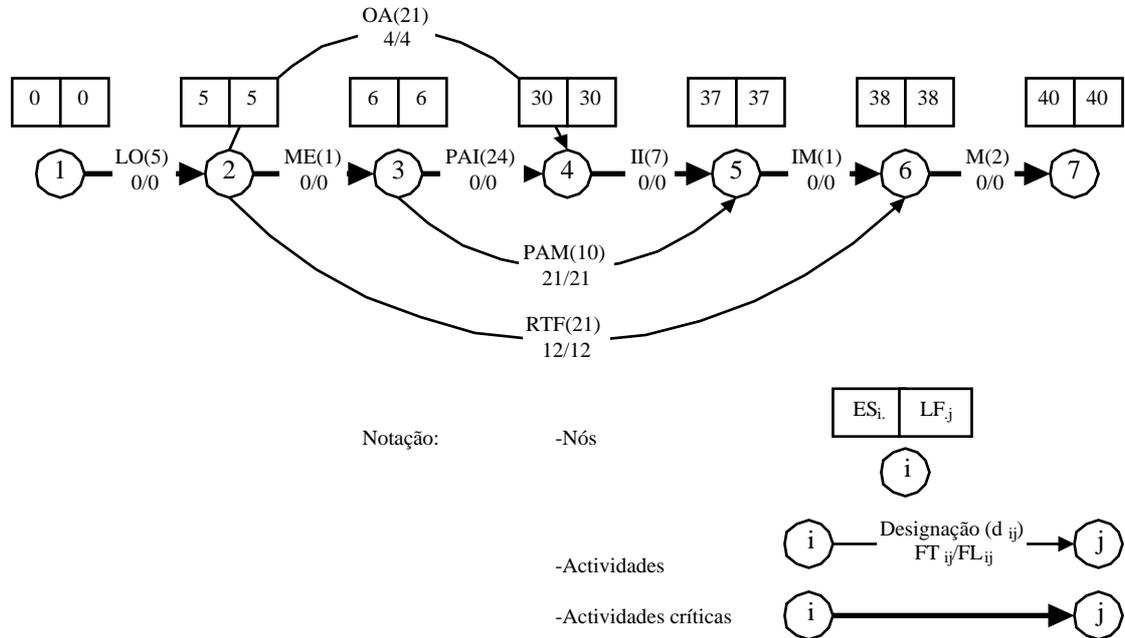
-Actividades



Designação (d_{ij})



- (b) Na figura seguinte estão representadas as folgas totais e livres de cada uma das actividades. O caminho crítico corresponde às actividades $LO \rightarrow ME \rightarrow PAI \rightarrow II \rightarrow IM \rightarrow M$



- (c) Duração total do projecto é igual à soma das durações das actividades do caminho crítico:

$$D_T = D_1 + D_2 + D_3 + \dots + D_n = 40$$

Como as durações das actividades são variáveis aleatórias, D_T também será uma variável aleatória com média μ_T dada por:

$$\mu_T = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \dots + \mu_n = 40$$

Admitindo que as durações das actividades são variáveis aleatórias independentes, a variância da duração total σ_T^2 será:

$$\sigma_T^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + \dots + \sigma_n^2 = 1^2 + 0^2 + 1^2 + 1^2 + 0^2 = 3$$

Duração total do projecto pode ser descrita por uma distribuição normal com média μ_T e variância σ_T^2 .

A probabilidade de o projecto se atrasar 2 semanas ou mais, corresponde à probabilidade de a duração do projecto ser ≥ 42 .

$$P(D \geq 42) = P\left(Z \leq \frac{42 - \mu_T}{\sigma_T}\right) = P\left(Z \leq \frac{42 - 40}{\sqrt{3}}\right) = P(Z \geq 1.15) \approx 0.1251 \approx 12.5\%$$

- (d) Dado que o atraso de 4 semanas na actividade OA, é \leq que a folga total de OA, esse atraso não compromete a data de fim do projecto.

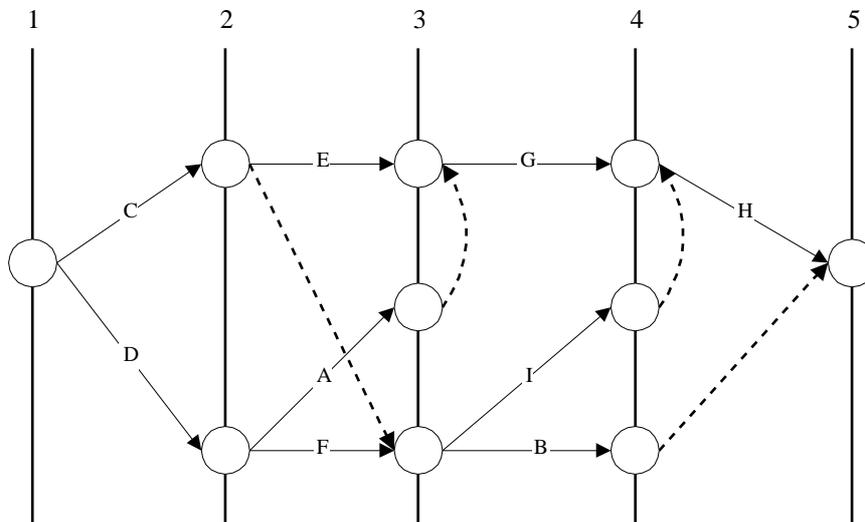
Dado que o atraso de 8 semanas na actividade PAM, é \leq que a folga total de PAM, esse atraso não compromete a data de fim do projecto.

Problema 2

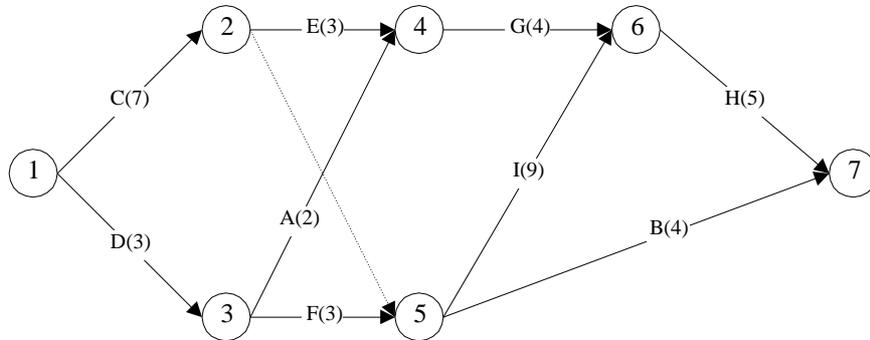
Para desenhar a rede de actividades é necessário começar por atribuir um número de ordem a cada actividade, seguindo o algoritmo dado nas aulas teóricas:

| Actividade | Activ. imediatamente posteriores | | | | | | | | | Número de ordem |
|------------|----------------------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|-----------------|
| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | |
| A | | | | | | | x | | | 2 |
| B | | | | | | | | | | 3 |
| C | | x | | | x | | | | x | 1 |
| D | x | | | | | x | | | | 1 |
| E | | | | | | | x | | | 2 |
| F | | x | | | | | | | x | 2 |
| G | | | | | | | | x | | 3 |
| H | | | | | | | | | | 4 |
| I | | | | | | | | x | | 3 |

Seguidamente, desenham-se $4 + 1 = 5$ linhas verticais e constroi-se a rede partindo do fim para o princípio. O início de cada actividade coincide com a linha vertical correspondente ao seu número de ordem. Esta fase do desenho da rede está representada na figura seguinte.



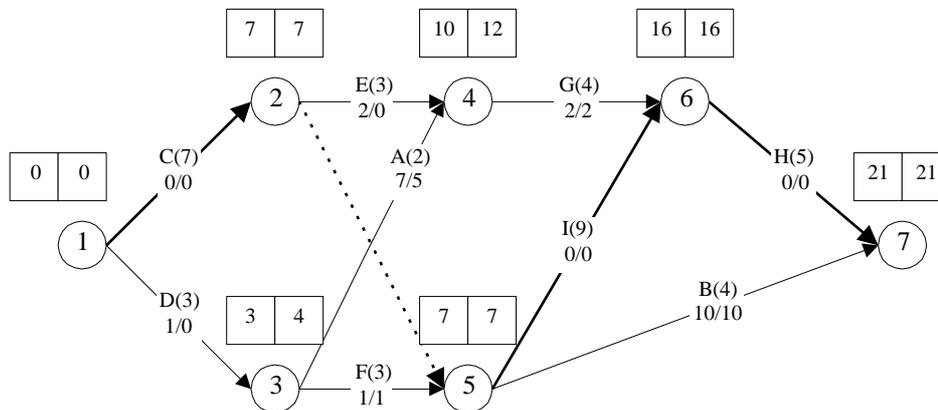
Simplificando a rede apresentada na figura anterior, obtém-se a rede representada na figura seguinte.



Notação: -Nós \textcircled{i}

-Actividades $\textcircled{i} \xrightarrow{\text{Designação } (d_{ij})} \textcircled{j}$

Na figura seguinte estão representadas as folgas totais e livres de cada uma das actividades. O caminho crítico corresponde às actividades $C \rightarrow I \rightarrow H$ e tem uma duração média de 21 semanas.



Notação: -Nós $\begin{matrix} \text{ES}_i & \text{LF}_j \\ \textcircled{i} \end{matrix}$

-Actividades $\textcircled{i} \xrightarrow{\text{Designação } (d_{ij})} \textcircled{j}$
 $\text{FT}_{ij}/\text{FL}_{ij}$

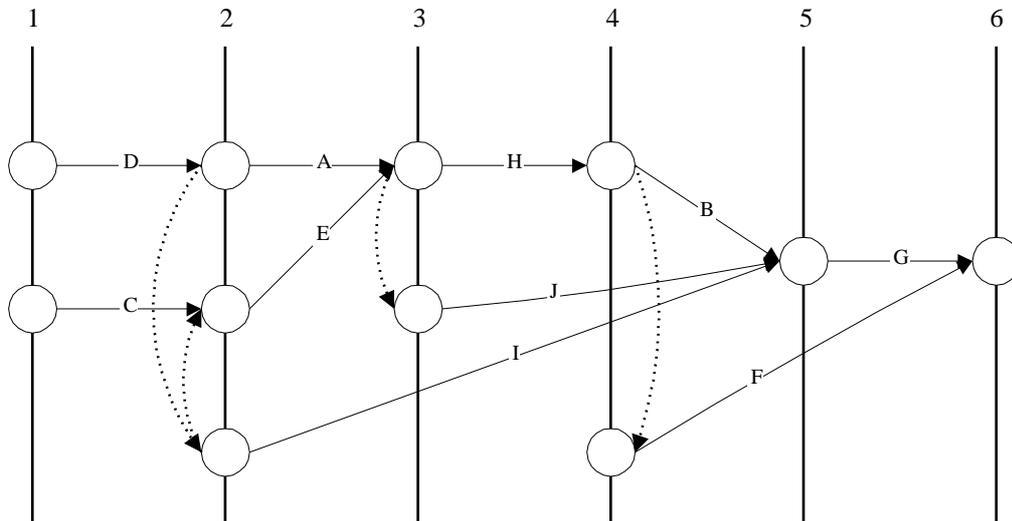
-Actividades críticas $\textcircled{i} \xrightarrow{\text{thick arrow}} \textcircled{j}$

Problema 3

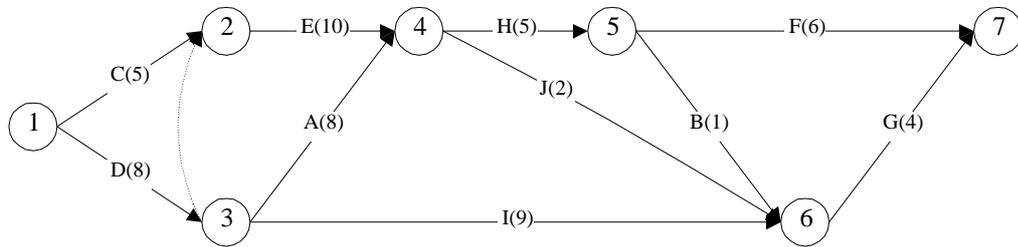
- (a) Para desenhar a rede de actividades é necessário começar por atribuir um número de ordem a cada actividade, seguindo o algoritmo dado nas aulas teóricas:

| Actividade | Actividades imediatamente posteriores | | | | | | | | | | Número de ordem |
|------------|---------------------------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|-----------------|
| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | |
| A | | | | | | | | x | | x | 2 |
| B | | | | | | | x | | | | 4 |
| C | | | | | x | | | | | | 1 |
| D | x | | | | x | | | | x | | 1 |
| E | | | | | | | | x | | x | 2 |
| F | | | | | | | | | | | 4 |
| G | | | | | | | | | | | 5 |
| H | | x | | | | x | | | | | 3 |
| I | | | | | | | x | | | | 2 |
| J | | | | | | | x | | | | 3 |

Seguidamente, desenham-se $5+1 = 6$ linhas verticais e constroi-se a rede partindo do fim para o princípio. O início de cada actividade coincide com a linha vertical correspondente ao seu número de ordem. Esta fase do desenho da rede está representada na figura seguinte.



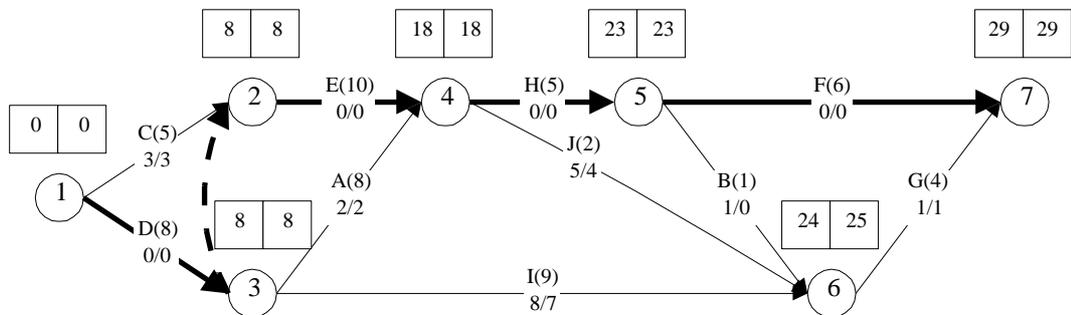
Simplificando a rede apresentada na figura anterior, obtém-se a rede representada na figura seguinte.



Notação: -Nós \textcircled{i}

-Actividades $\textcircled{i} \xrightarrow{\text{Designação } (d_j)} \textcircled{j}$

(b) Na figura seguinte estão representadas as folgas totais e livres de cada uma das actividades. O caminho crítico corresponde às actividades $D \rightarrow E \rightarrow H \rightarrow F$ e tem uma duração média de 29 semanas.



Notação: -Nós $\begin{matrix} \text{ES}_i & \text{LF}_j \\ \hline \textcircled{i} \end{matrix}$

-Actividades $\textcircled{i} \xrightarrow{\text{Designação } (d_j)} \textcircled{j}$
 FT_{ij}/FL_{ij}

-Actividades críticas $\textcircled{i} \xrightarrow{\text{thick}} \textcircled{j}$

(c) Ver figura anterior.

(d) A duração total do projecto é igual à soma das durações das actividades do caminho crítico:

$$D_T = D_1 + D_2 + D_3 + \dots + D_n = 29$$

Como as durações das actividades são variáveis aleatórias, D_T também será uma variável aleatória com média μ_T dada por:

$$\mu_T = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \dots + \mu_n = 8 + 10 + 5 + 6 = 29$$

Admitindo que as durações das actividades são variáveis aleatórias independentes, a variância da duração total σ_T^2 será:

$$\sigma_T^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + \dots + \sigma_n^2 = 2^2 + 3^2 + 1^2 + 2^2 = 18$$

Duração total do projecto pode ser descrita por uma distribuição normal com média μ_T e variância σ_T^2 .

Neste caso teremos então:

$$P(D \leq 27) = P\left(Z \leq \frac{27 - \mu_T}{\sigma_T}\right) = P\left(Z \leq \frac{27 - 29}{4.24}\right) = P(Z \leq -0.47) \approx 0.5 - 0.1808 \approx 0.32$$

A probabilidade de o projecto estar concluído antes da semana 27 é de aproximadamente 30%.

Foi dito que a duração do caminho crítico tinha uma distribuição que tendia para a distribuição normal. Isso significa que a sua distribuição não será exactamente normal, tal como nós a consideramos. Estamos pois perante uma possível fonte de erro para a estimativa da probabilidade encontrada. Outro pressuposto que pode falsear os resultados é de que a duração do projecto é a duração do caminho crítico encontrado. Ora este é o caminho crítico quando as actividades demoram exactamente a sua duração média. Se isso não acontecer pode o caminho crítico ser alterado e a duração do projecto não corresponder à duração do caminho crítico “médio”.

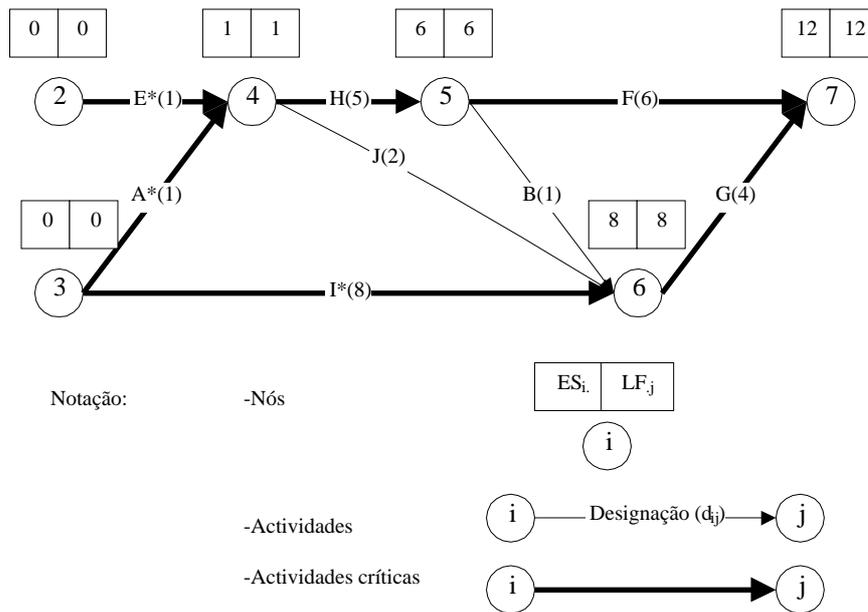
- (e) A probabilidade de o projecto estar concluído entre o início da semana 27 e o fim da semana 30 é a probabilidade de a duração do projecto estar entre 27 e 31.

$$P(27 \leq D \leq 31) = P\left(\frac{27 - 29}{4.24} \leq Z \leq \frac{31 - 29}{4.24}\right) = P(-0.47 \leq Z \leq 0.47) = 2 \times 0.1808 \approx 0.36$$

- (f) Devem-se propor 36 semanas até à conclusão do projecto, para que haja apenas 5% de probabilidade de não cumprimento.

$$P(D \geq d) = 0.05 \equiv P\left(Z \geq \frac{d - 29}{4.24}\right) = 0.05 \equiv \frac{d - 29}{4.24} = 1.645 \equiv d = 36 \text{ semanas}$$

- (g) A situação intermédia referida no enunciado, está representada na figura seguinte.



Os caminhos críticos correspondem às actividades $E \rightarrow H \rightarrow F$, $A \rightarrow H \rightarrow F$ e $I \rightarrow G$ e têm uma duração média de 12 semanas

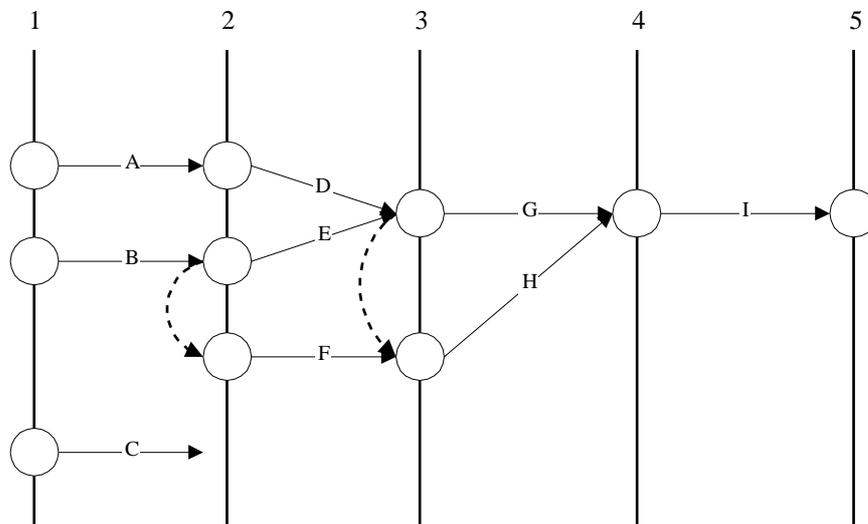
A semana 0 desta rede corresponde à semana 14 da rede inicial, o que significa que o projecto pode terminar no início da semana 26 (ou fim da semana 25), estando 3 semanas adiantado face à previsão inicial.

Problema 4

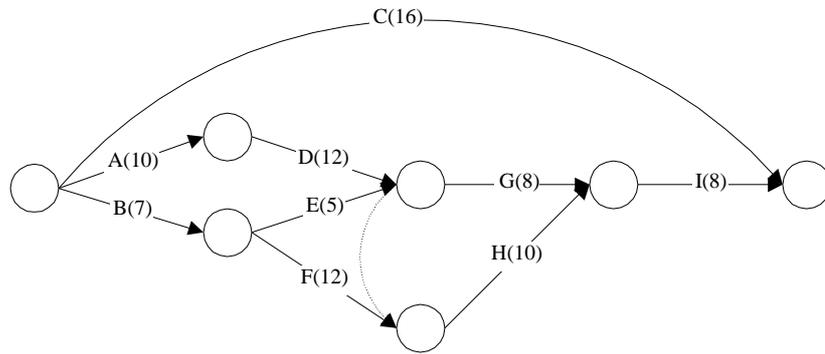
- (a) Para desenhar a rede de actividades é necessário começar por atribuir um número de ordem a cada actividade, seguindo o algoritmo dado nas aulas teóricas:

| Actividade | Activ. imediatamente posteriores | | | | | | | | | Número de ordem |
|------------|----------------------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|-----------------|
| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | |
| A | | | | x | | | | | | 1 |
| B | | | | | x | x | | | | 1 |
| C | | | | | | | | | | 1 |
| D | | | | | | | x | x | | 2 |
| E | | | | | | | x | x | | 2 |
| F | | | | | | | | x | | 2 |
| G | | | | | | | | | x | 3 |
| H | | | | | | | | | x | 3 |
| I | | | | | | | | | | 4 |

Seguidamente, desenham-se $4+1 = 5$ linhas verticais e constroi-se a rede partindo do fim para o princípio. O início de cada actividade coincide com a linha vertical correspondente ao seu número de ordem. Esta fase do desenho da rede está representada na figura seguinte.



Simplificando a rede apresentada na figura anterior, obtém-se a rede representada na figura seguinte.

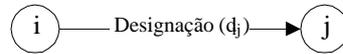


Notação:

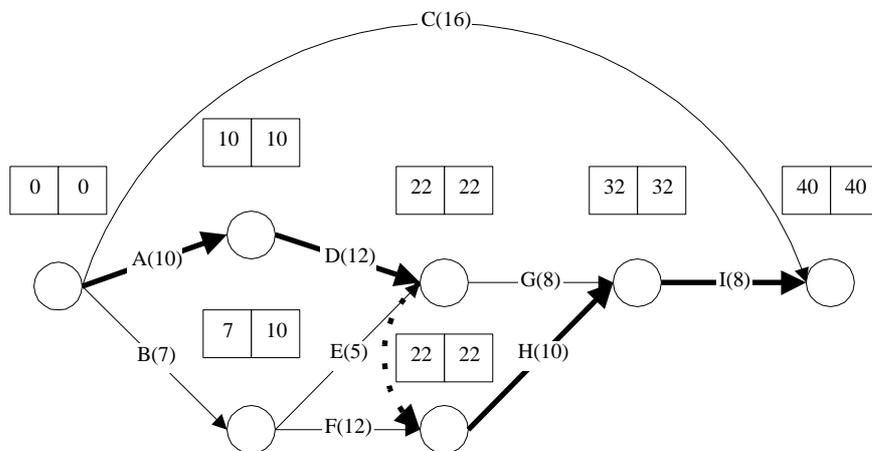
-Nós



-Actividades

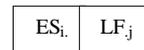


O caminho crítico corresponde às actividades $A \rightarrow D \rightarrow H \rightarrow I$ e tem uma duração média de 40 semanas.

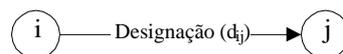


Notação:

-Nós



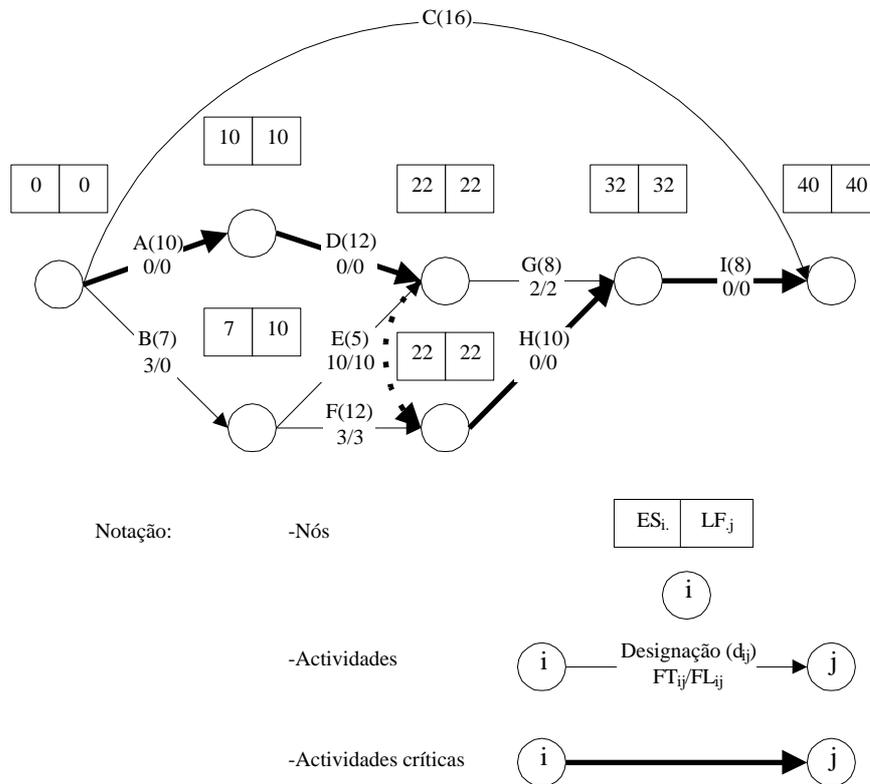
-Actividades



-Actividades críticas



(b) Na figura seguinte estão representadas as folgas totais e livres de cada uma das actividades.



(c) A duração total do projecto é igual à soma das durações das actividades do caminho crítico:

$$D_T = D_1 + D_2 + D_3 + \dots + D_n = 40$$

Como as durações das actividades são variáveis aleatórias, D_T também será uma variável aleatória com média μ_T dada por:

$$\mu_T = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \dots + \mu_n = 10 + 12 + 10 + 8 = 40$$

Admitindo que as durações das actividades são variáveis aleatórias independentes, a variância da duração total σ_T^2 será:

$$\sigma_T^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + \dots + \sigma_n^2 = 2^2 + 1^2 + 2^2 + 2^2 = 13$$

Duração total do projecto pode ser descrita por uma distribuição normal com média μ_T e variância σ_T^2 .

Neste caso teremos então:

$$P(D \geq 51) = P\left(Z \geq \frac{51 - \mu_T}{\sigma_T}\right) = P\left(Z \geq \frac{51 - 40}{3.61}\right) = P(Z \geq 3.05) \approx 1 - 0.5 - 0.4989 \approx 0.0011$$

A probabilidade de o projecto não estar concluído ao fim de 50 semanas é de aproximadamente 1%.