Tópicos de Matemática Elementar

www.fc.up.pt/cmup/apoiomat

João Nuno Tavares

Dept. Matemática, Faculdade de Ciências da Univ. Porto [1]

[1] E-mail adress: jntavar@fc.up.pt

Conteúdo

Capítulo 1

Introdução

Este texto é a versão pdf dos conteúdos do site denominado

Apoio ao aluno da FCUP
Tópicos de Matemática Elementar

disponível em:

http://www.fc.up.pt/cmup/apoiomat

para distribuição pública e gratuita a todos os que possa interessar.

O objectivo deste site é muito simples - ajudar o aluno recém chegado ao ensino superior (à FCUP, em particular) a relembrar aspectos importantes de Matemática elementar que aprendeu durante os anos de ensino básico e secundário.

Para isso, em cada tema, propõe-se um conjunto de perguntas/respostas que servem de estímulos à memória do aluno. Aconselha-se a que o aluno procure responder por si próprio às perguntas, mentalmente ou fazendo os cálculos apropriados, antes de ler as respostas sugeridas. Depois de percorrer cada tema, deve então resolver os testes de auto-avaliação (quizes) propostos.

Tentou-se focar os aspectos cujo conhecimento se considera imprescindível para que o aluno possa iniciar com segurança os estudos superiores nas disciplinas de Matemática, necessariamente mais formais e abstractos.

Houve a preocupação de recorrer a várias animações e ilustrações que ajudem a ganhar uma forte intuição sobre os conceitos, visualisando-os sempre que possível. Houve ainda uma tentativa de introduzir um método mais formal, para que gradualmente o aluno possa transitar entre o ensino secundário, fortemente computacional, e o ensino superior obrigatoriamente mais formal e abstracto.

Espera-se que o aluno cedo se aperceba da óbvia mais valia que a Matemática contem.

Nota importante: Este site de apoio em temas de Matemática Elementar é da exclusiva responsabilidade de João Nuno Tavares. Pode não reflectir por isso a opinião sobre opções de carácter científico e/ou pedagógico dos Departamentos de Matemática Pura e Aplicada da FCUP. Qualquer imprecisão ou incorrecção científica deve ser imputada ao responsável, que desde já agradece que lhe enviem sugestões e correcções ao site usando o e-mail jntavar@fc.up.pt.

1.1 Porquê Estudar Matemática?

A Matemática tem um notável potencial de revelação de estruturas e padrões que nos permitem compreender o mundo que nos rodeia.

Quando esses padrões são descobertos, ou inventados, muitas vezes em áreas científicas e tecnológicas aparentemente muito distintas, a Matemática pode ser usada para explicar, medir e controlar processos naturais. A Matemática tem uma influência universal no nosso quotidiano e contribui de forma decisiva para o progresso e bem-estar da humanidade.

Para além da sua beleza intrínseca e do seu conteúdo abstracto (axiomas, teoremas, teorias) a Matemática estimula diversos modos de pensamento, ao mesmo tempo versáteis e potentes, incluindo modelação, simulação, abstracção, optimização, análise lógica e dedutiva, inferência a partir de dados, manipulação de símbolos e experimentação. Tem um campo de aplicações praticamente ilimitado, presente em quase todas as áreas do conhecimento humano.

A Matemática não impõe limites à imaginação. É a única ciência com a capacidade de passar das observações das coisas visíveis à imaginação das coisas invisíveis.

Estudar Matemática desenvolve múltiplas capacidades, competências e talento, essenciais a uma integração consistente e bem sucedida no actual mercado de trabalho.

- Desenvolve o raciocínio lógico e dedutivo e as capacidades de generalização e abstracção
- Permite a modelação de situações reais e, através do seu potencial de representação simbólica (fórmulas, equações, gráficos), facilita a sua simulação, medição e controlo
- Desenvolve a capacidade de formular e resolver problemas de forma precisa, conduzindo rapidamente ao cálculo, controlo, decisão e resulltados
- Desenvolve a criatividade, a versatilidade de adaptação a novas situações e superação de novos desafios
- Desenvolve a capacidade de sonhar! Permite imaginar mundos diferentes, e dá também a possibilidade de comunicar esses sonhos de forma clara e não ambígua.

Por tudo isto, ser matemático é enveredar por uma carreira profissional muitíssimo atraente, com um enorme potencial de realização pessoal. Para além das vias de ensino e de investigação pura e aplicada, as formações em Matemática abrem um campo vasto de oportunidades de carreiras profissionais, cada vez mais solicitadas pelas várias entidades empregadoras - empresas, serviços, indústria, finança, seguradoras, etc.

Visite o site:

Estudar Matemática na FCUP

disponível em:

http://www.fc.up.pt/mat/

onde poderá ver a oferta de formações na área da Matemática.

Veja, nomeadamente, o mestrado em

Engenharia Matemática

com informações detalhadas disponíveis em:

http://www.fc.up.pt/dmat/engmat

João Nuno Tavares

Capítulo 2

Álgebra elementar

2.1 Regras operatórias básicas com fracções

▶ 1. Como se somam e multiplicam fracções?

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad+bc}{bd}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Exemplos: $\frac{2}{3} + \frac{4}{5} = \frac{22}{15}$; $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$; $\frac{1}{6} + \frac{5}{12} = \frac{42}{72} = \frac{7}{12}$; $\frac{1}{6} \times \frac{5}{12} = \frac{5}{72}$
$\frac{-2}{3} - \frac{4}{5} = -\frac{22}{15}$; $\frac{-2}{3} \times \frac{4}{3} = -\frac{8}{9}$; $\frac{1}{6} \times \frac{5}{12} = \frac{5}{72}$; $\frac{-1}{6} \cdot \frac{5}{2} = \frac{-5}{12}$

Erros frequentes. Atenção!

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \qquad \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{4}$$

$$\frac{x+2}{x+3} = \frac{2}{3} \qquad \frac{(x+1)^2}{x^2+1} = \frac{x+1}{x}$$

$$\frac{x^2+a^2}{x^4+a^4} = \frac{1}{x^2+a^2} \qquad \frac{1}{x+2} = \frac{1}{x} + \frac{1}{2}$$

2.2 Potências com expoente inteiro

▶ Como se define a potência a^n, de base a e expoente n, quando a é um número real e n um inteiro positivo: $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$?

$$a^n \doteq \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n\ factores}$$

Em particular $0^n = 0$.

Exemplos: $5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$; $\left(-\frac{1}{3}\right)^5 = \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3^5} = -\frac{1}{243}$.

▶ Como se define a potência a^n, de base a e expoente m, quando $a \in \mathbb{R}$ e m é um inteiro negativo?

1. quando $m < 0$ e $a \neq 0$, define-se $a^m = \frac{1}{a^{-m}}$. Por exemplo, $5^{-3} = \frac{1}{5^3}$
2. Quando $m = 0$ e $a \neq 0$, define-se $a^0 = 1$. Por exemplo $1^0 = 1$, $(-5)^0 = 1$
3. Quando $a = 0$ e $m < 0$, não se define 0^m. Por exemplo, $0^3 = 0$ mas não se define 0^{-5} como número real!

Atenção: não se define 0^0.

▶ Quais as regras operatórias com potências?

- $a^n \times a^m = a^{m+n}$
- $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

desde que todas as potências referidas sejam bem definidas (veja os casos particulares na pergunta anterior)

Por exemplo

$$\frac{2 \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot c \cdot c}{b \cdot b \cdot b \cdot d} = 2a^4 b^{-3} c^2 d^{-1}, \qquad b \neq 0, d \neq 0$$

Erros frequentes. Atenção!

- $a^n + a^m = a^{m+n}$. Por exemplo, $2^3 + 2^5 = 2^{3+5} = 2^8$
- $a^n \times a^m = a^{mn}$. Por exemplo, $2^3 \times 2^5 = 2^{3\times5} = 2^{15}$
- $\frac{a^m}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^{m-n}$. Por exemplo $\frac{2^7}{5^2} = \left(\frac{2}{5}\right)^{7-2} = \left(\frac{2}{5}\right)^5$
- $\frac{1}{2^3+3^5} = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^5}$

- $0^0 = 0$

▶ **Sejam a e b dois números reais não nulos arbitrários e p e q dois números inteiros não nulos quaisquer. Considere as seguintes condições e diga qual ou quais são verdadeiras.**

A. $a^p b^q = (ab)^{p+q}$ **B.** $\frac{1}{(ab)^p} = \frac{a^{-p}}{b^p}$

C. $(a+b)^p = a^p + b^p$ **D.** $a^p a^q = a^{pq}$

Apenas **B.** $\frac{1}{(ab)^p} = \frac{a^{-p}}{b^p}$. Os outros são erros grosseiros.

▶ **Mostre que:**

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2$$
$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

análogo para os restantes.

▶ **Recorde o triângulo de Pascal:**

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & \ldots & & & & & & & & \ldots &
\end{array}$$

e escreva o desenvolvimento das potências seguintes:

$$(a+b)^4$$

$$(a+b)^5$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

▶ **Calcule o valor de n quando:**

a. $\dfrac{2^{1000}}{2^n} = 2^{501}$ **b.** $\dfrac{2^{1000}}{2^n} = \dfrac{1}{16}$

c. $2^{1001} \cdot 2^n = \dfrac{1}{4}$ **d.** $(2^{10})^{15} = 2^n$

a. $\frac{2^{1000}}{2^n} = 2^{501} \iff 2^{1000-n} = 2^{501} \iff 1000-n = 501 \iff n = 499$

b. $\frac{2^{1000}}{2^n} = \frac{1}{16} \iff 2^{1000-n} = 2^{-4} \iff 1000-n = -4 \iff n = 1004$

c. $2^{1001} \cdot 2^n = \frac{1}{4} \iff 2^{1001+n} = 2^{-2} \iff 1001+n = -2 \iff n = -1003$

d. $(2^{10})^{15} = 2^n \iff 2^{150} = 2^n \iff n = 150$

2.3 Raízes quadradas

▶ **Como se resolve a equação (na incógnita x):**

$$x^2 = a?$$

com x e a ambos números reais.

3 casos são possíveis:

- se $a = 0$ a equação $x^2 = 0$ tem a solução única $x = 0$
- se $a < 0$ a equação não tem solução real porque x^2 é sempre positivo. Por exemplo $x^2 = -2$ não tem soluções reais.
- se $a > 0$ a equação $x^2 = a$ significa que temos de encontrar os números $x \in \mathbb{R}$ cujo quadrado é igual a $a > 0$. As duas soluções são $-\sqrt{a}$ e $\sqrt{a}$.

$\sqrt{a}$ chama-se a **raíz quadrada (positiva)** do número positivo a. No curso de cálculo demonstrar-se-á que esta raíz existe e é única.

▶ **Quais as regras operatórias com raízes quadradas?**

- $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}, \qquad a, b \geq 0$

- $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, \qquad a \geq 0, b > 0$

Consegue provar estas igualdades?

▶ **A igualdade:**

$$\sqrt{a^2} = a$$

é verdadeira para todo o $a \in \mathbb{R}$?

Não. Quando a é negativo, $\sqrt{a^2}$ é igual a $-a$. Por exemplo, $\sqrt{(-3)^2} = -(-3) = 3$.

▶ **Qual é então a afirmação correcta?**

A afirmação correcta é que:

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

onde o **módulo de a** se define por:

$$|a| \doteq \begin{cases} a & \text{se} \quad a \geq 0 \\ -a & \text{se} \quad a < 0 \end{cases}$$

Por exemplo $|8| = 8$; $|-6| = 6$.

▶ **Mostre que**

a. $\dfrac{1}{2+\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3}$ **b.** $\dfrac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{7}}{2}$

a. $\dfrac{1}{2+\sqrt{3}} = \dfrac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})\cdot(2-\sqrt{3})} = \dfrac{2-\sqrt{3}}{4-3} = 2-\sqrt{3}$

b. $\dfrac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{(\sqrt{7}-\sqrt{5})\cdot(\sqrt{7}+\sqrt{5})} = \dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{7}}{2}$

▶ **Simplifique a expressão:**

$$\sqrt{3+2\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{3+2\sqrt{2}} = \sqrt{1+2+2\sqrt{2}} = \sqrt{(1+\sqrt{2})^2} = 1+\sqrt{2}$$

▶ **O que há de errado na simplicação seguinte?**

$$\begin{aligned}\sqrt{3-2\sqrt{2}} &= \sqrt{1+2-2\sqrt{2}} \\ &= \sqrt{1+(\sqrt{2})^2-2\sqrt{2}} = \sqrt{(1-2\sqrt{2})^2} = 1-\sqrt{2}\end{aligned}$$

A resposta correcta é $\sqrt{2}-1$ porque $1-\sqrt{2}<0$

▶ **Como se resolve uma equação do 2º grau?**

$$ax^2+bx+c=0$$

com $a \neq 0$**.**

Aplicando a **fórmula resolvente**:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

À expressão:

$$\Delta \doteq b^2-4ac$$

chama-se o **discriminante** da equação.

3 casos podem ocorrer:

- quando $\Delta = 0$ a equação tem uma única solução real $x = -\frac{b}{2a}$. Por vezes diz-se que tem uma raíz dupla igual a $-\frac{b}{2a}$.
- quando $\Delta > 0$ a equação tem duas soluções reais distintas $x_1, x_2 = -\frac{b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.
- quando $\Delta < 0$ a equação não tem soluções reais. Mas tem duas soluções complexas, conjugadas uma da outra, $x_1, x_2 = -\frac{b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

▶ **Suponha que a equação do 2º grau:**

$$x^2+px+q=0$$

tem duas raízes distintas x_1 **e** x_2**. Mostre que:**

$$x_1+x_2=-p$$

$$x_1 \cdot x_2 = q$$

De acordo com a fórmula resolvente $x_1, x_2 = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\Delta}$, onde $\Delta = -\frac{p^2}{4} - q$. Portanto:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -\frac{p}{2} + \sqrt{\Delta} + -\frac{p}{2} - \sqrt{\Delta} = -p \\ x_1 \cdot x_2 &= \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\Delta}\right) \cdot \left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\Delta}\right) \\ &= \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q = q \end{aligned}$$

▶ **Considere o conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} : x(x-1) = x\}$. Escolha a resposta correcta:**

1. $A = \{1\}$	**2**. $A = \{0, 1\}$
3. $A = \{2\}$	**4**. $A = \{0, 2\}$

$$x(x-1) = x \Leftrightarrow x(x-1) - x = 0 \Leftrightarrow x(x-1-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$$

2.4 Raízes

▶ **Se a é um número real positivo e se n é um inteiro positivo, como se define a raíz de indíce n de a?**

$$\sqrt[n]{a} \equiv a^{1/n}$$

Por definição é o único **número positivo** x tal que $x^n = a$. No curso de cálculo prova-se que existe e é único.

Notas:

a. Quando n é par, então $-\sqrt[n]{a}$ é também um número cuja potência de expoente n é igual a a. Por exemplo $-\sqrt[4]{7}$, satisfaz $(-\sqrt[4]{7})^4 = \left(-(7)^{1/4}\right)^4 = 7$. A razão porque, neste caso, se opta pelo número positivo x, e se rejeita o negativo, deve-se à convenção que é, em geral, aceite.

b. Se n é ímpar e a é negativo, então é possível resolver a equação $x^n = a$. Por exemplo $x^3 = -8$ tem a solução $x = -2$, porque $(-2)^3 = -8$. Porque é que não dizemos que a raíz cúbica de -8 é -2? É de facto possível alargar a definição para este caso (e alguns autores fazem-no). Apenas por simplicidade se adopta a definição anterior - raízes de indíce $n > 0$ de números a positivos.

▶ **Quais as regras operatórias com raízes?**

- $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
- $\sqrt[n]{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}$
- $\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$
- $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
- $\sqrt[n]{abc} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c}$
- $\sqrt[mn]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$

Erros frequentes. Atenção!

- ○ $\sqrt{a^2} = a$
- ○ $\sqrt{a^2} = \pm a$
- ○ $\sqrt{a+b} - \sqrt{b} = \sqrt{a}, \quad \forall a > 0, \forall b > 0$
- ○ $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt[4]{ab}, \quad \forall a \geq 0, \forall b \geq 0$
- ○ $\sqrt[4]{a^2} = \sqrt{a^2}$
- ○ $\sqrt{a^2} = |a|^2$
- ○ $\frac{\sqrt[5]{a}}{\sqrt[3]{a}} = \sqrt{a}, \quad \forall a > 0$
- ○ $a\sqrt[3]{a} = a^{\frac{2}{3}}, \quad \forall a \in \mathbb{R}$

2.5 Potências de expoente fraccionário

▶ **Como se define $a^{\frac{m}{n}}$, quando $a > 0$, m é um inteiro qualquer e n é um inteiro positivo?**

Põe-se:

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

Com esta definição as regras operatórias mantêm-se:

- $a^r \times a^s = a^{r+s}$
- $(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$
- $(a^r)^s = a^{rs}$
- $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$

quando $a > 0$, $r, s \in \mathbb{Q}$, desde que todas as potências referidas sejam bem definidas.

2.6 Progressões

▶ **O que é uma progressão aritmética? E o que é uma progressão geométrica?**

- Uma progressão aritmética é uma sequência (finita) de números, em que cada um é obtido do anterior somando um número fixo r, a que se chama razão:

$$a_1 \qquad a_2 = a_1 + r \qquad a_3 = a_2 + r \quad \cdots \quad a_N = a_{N-1} + r$$

- Uma progressão geométrica é uma sequência (finita) de números, em que cada um é obtido do anterior multiplicando-o por um número fixo r, a que se chama razão:

$$a_1 \quad a_2 = a_1 \cdot r \quad a_3 = a_2 \cdot r \quad \cdots \quad a_N = a_{N-1} \cdot r$$

▶ Como se calcula a soma de uma progressão aritmética com N termos e razão $r \neq 0$?

$$a_1 \quad a_2 = a_1 + r \quad a_3 = a_2 + r \quad \cdots \quad a_N = a_{N-1} + r$$

Seja $S_N = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{N-1} + a_N$ a soma pretendida. Note que:

$$\begin{aligned}
a_1 &= a_1 \\
a_2 &= a_1 + r \\
a_3 &= a_2 + r = a_1 + 2r \\
a_4 &= a_3 + r = a_1 + 3r \\
\vdots & \quad \vdots \\
a_N &= a_{N-1} + r = a_1 + (N-1)r
\end{aligned}$$

Escrevemos agora a soma S_N de duas formas:

$$S_N = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{N-1} + a_N$$

e

$$S_N = a_N + a_{N-1} + a_{N-3} + \cdots + a_2 + a_1$$

Somando termo a termo vem:

$$\begin{aligned}
2S_N &= (a_1 + a_N) + (a_2 + a_{N-1}) + (a_3 + a_{N-3}) + \cdots + (a_{N-1} + a_2) + (a_N + a_1) \\
&= (a_1 + a_N) + (a_1 + r + a_N - r) + (a_1 + 2r + a_N - 2r) + \cdots + (a_N - r + a_1 + r) + (a_N + a_1) \\
&= (a_1 + a_N) + (a_1 + a_N) + (a_1 + a_N) + \cdots + (a_N + a_1) + (a_N + a_1) \\
&= N(a_1 + a_N)
\end{aligned}$$

Portanto:

$$S_N = \frac{N}{2} \cdot (a_1 + a_N)$$

Substituindo $a_N = a_1 + (N-1)r$, obtemos uma outra fórmula para a soma:

$$S_N = Na_1 + r\,\frac{N(N-1)}{2}$$

▶ **Como se calcula a soma de uma progressão geométrica com N termos e razão $r \neq 1$?**

$$a_1 \qquad a_2 = a_1 \cdot r \qquad a_3 = a_2 \cdot r \qquad \cdots \qquad a_N = a_{N-1} \cdot r$$

Seja $S_N = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{N-1} + a_N$ a soma pretendida. Note que:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1 \\ a_2 &= a_1 \cdot r \\ a_3 &= a_2 \cdot r = a_1 \cdot r^2 \\ a_4 &= a_3 \cdot r = a_1 \cdot r^3 \\ &\vdots \\ a_N &= a_{N-1} \cdot r = a_1 \cdot r^{N-1} \end{aligned}$$

Consideremos agora a soma S_N:

$$\begin{aligned} S_N &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{N-1} + a_N \\ &= a_1 + ra_1 + r^2 a_1 + \cdots + r^{N-1} a_1 \\ &= a_1 + ra_1 + r^2 a_1 + \cdots + r^{N-1} a_1 \\ &= a_1(1 + r + r^2 + \cdots + r^{N-1}) \end{aligned}$$

Multipliquemos ambos os membros por r:

$$rS_N = a_1(r + r^2 + r^3 + \cdots + r^N)$$

e, finalmente, subtraímos membro a membro, para obter:

$$\begin{aligned} S_N - rS_N &= a_1(1 + r + r^2 + \cdots + r^{N-1}) - a_1(r + r^2 + r^3 + \cdots + r^N) \\ &= a_1(1 - r^N) \end{aligned}$$

Portanto, como $r \neq 1$, vem:

$$\boxed{S_N = a_1 \cdot \frac{1-r^N}{1-r}}$$

▶ **Calcule:**

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \cdots + 999$$

Trata-se de uma progressão aritmética de razão $r = 2$. Quantos termos N tem? Como vimos, o último termo é da forma $a_N = a_1 + (N-1)r$. Portanto:

$$999 = 1 + (N-1)2 \qquad \therefore \qquad N = 500$$

Aplicando a fórmula da soma vem:

$$S_N = \frac{N}{2} \cdot (a_1 + a_N) = \frac{500}{2} \cdot (1 + 999) = 250\,000$$

▶ **Calcule:**

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \cdots + 512 + 1024$$

Note que:

$$1+2+4+8+16+32+\cdots+512+1024 = 1+(2+4+8+16+32+\cdots+512+1024)$$

e os termos entre parêntisis formam uma progressão geométrica de razão $r = 2$. Quantos termos N tem? Como vimos, o último termo é da forma $a_N = a_1 \cdot r^{N-1}$. Portanto:

$$1024 = 2 \cdot 2^{N-1} \quad \therefore \quad 2^N = 1024 = 2^{10} \quad \therefore \quad n = 10$$

Aplicando a fórmula da soma vem:

$$S_N = 2 \cdot \frac{1 - r^N}{1 - r} = 2\frac{1 - 2^{10}}{1 - 2} = 2046$$

e a soma pretendida é pois igual a 2047.

2.7 Inequações

▶ **Qual o significado da inequação (em $\mathbb{R}$):**

$$|x - a| \leq c\ ?$$

$|x - a|$ representa a distância entre os pontos x e a, em $\mathbb{R}$. Portanto:

- se $c < 0$, $|x - a| \leq c$ é impossível. Aliás, como se sabe $|x - a| \geq 0$.
- se $c = 0$, $|x - a| \leq 0$ tem a solução única $x = a$.
- se $c > 0$, $|x - a| \leq c \Leftrightarrow -c < x - a < c \Leftrightarrow a - c < x < a + c$.

▶ **Resolver, em $\mathbb{R}$, a inequação:**

$$|x - 1| < 4$$

A condição $|x - 1| < 4$ representa o conjunto dos pontos x (em $\mathbb{R}$) cuja distância ao ponto 1 é inferior ou igual a 4. Portanto:

$$|x - 1| < 4 \quad \Longleftrightarrow \quad -4 < x - 1 < 4 \quad \Longleftrightarrow \quad -3 < x < 5$$

▶ **Resolver, em $\mathbb{R}$, a inequação:**

$$|x+5| \geq 2$$

A condição $|x+5| \geq 2$ representa o conjunto dos pontos x (em $\mathbb{R}$) cuja distância ao ponto -5 é superior ou igual a 2. Portanto:

$$|x+5| \geq 2 \iff x \leq -5-2=-7 \text{ ou } x \geq -5+2=-3$$

▶ **Como se resolve a inequação quadrática:**

$$ax^2+bx+c \leq 0 \text{ ?}$$

Calculamos as raízes da equação $ax^2+bx+c=0$ através da fórmula resolvente:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Seja $\Delta \doteq b^2-4ac$ o **discriminante** da equação.

3 casos podem ocorrer:

- quando $\Delta = 0$ a equação tem uma única raíz dupla igual a $-\frac{b}{2a}$. Neste caso:

$$ax^2+bx+c \leq 0 \Leftrightarrow a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \leq 0$$

  – Se $a > 0$ então a inequação tem uma única solução $x = -\frac{b}{2a}$
  – Se $a < 0$ então a inequação é válida $\forall x \in \mathbb{R}$

- quando $\Delta > 0$ a equação tem duas soluções reais distintas $x_1, x_2 = -\frac{b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$. Suponhamos que $x_1 < x_2$. Neste caso:

$$ax^2+bx+c \leq 0 \Leftrightarrow a(x-x_1)(x-x_2) \leq 0$$

  – Se $a > 0$ então a inequação tem o conjunto solução $[x_1, x_2]$
  – Se $a < 0$ então a inequação tem o conjunto solução $]-\infty, x_1] \cup [x_2, +\infty[$

- quando $\Delta < 0$ a equação não tem soluções reais. Neste caso:

  – Se $a > 0$ então a inequação não tem soluções reais
  – Se $a < 0$ então a inequação é válida $\forall x \in \mathbb{R}$

Observe bem a animação "Função quadrática".

▶ **Resolver, em $\mathbb{R}$, a inequação:**

$x^2 > 4$

$$\begin{aligned} x^2 > 4 &\iff x^2 - 4 > 0 \\ &\iff (x-2)(x+2) > 0 \\ &\iff x \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[\end{aligned}$$

como se vê pelo quadro de sinais seguinte:

x		-2		2	
x-2	-	-	-	0	+
x+2	-	0	+	+	+
(x-2)(x+2)	+	0	-	0	+

▶ **Resolver, em $\mathbb{R}$, a inequação:**

$\frac{2x-1}{x+3} \geq 5$

x não pode ser igual a -3 para não anular o denominador.

$$\begin{aligned} \frac{2x-1}{x+3} \geq 5 &\iff \frac{2x-1}{x+3} - 5 \geq 0 \\ &\iff \frac{2x-1-5x-15}{x+3} \geq 0 \\ &\iff \frac{-3x-16}{x+3} \geq 0 \\ &\iff x \in [-16/3, -3[\end{aligned}$$

como se vê pelo quadro de sinais seguinte:

x		-16/3		-3	
-3x-16	+	0	-	-	-
x+3	-	-	-	0	+
(-3x -16)/(x+3)	-	0	+	nd	-

▶ **Resolver, em $\mathbb{R}$, a inequação:**

$\frac{(x-5)(x+1)}{x^2-2x+1} \leq 0$

A equação do 2º grau $x^2-2x+1=0$ tem uma raíz dupla em $x=1$. Portanto x não pode ser igual a 1 para não anular o denominador.

O quadro de sinais é o seguinte:

x		-1		1		5	
x+1	-	0	+	+	+	+	+
x-5	-	-	-	-	-	0	+
x^2-2x+1	+	+	+	0	+	+	+
$(x-5)(x+1)/(x^2-2x+1)$	+	0	-	nd	-	0	+

O conjunto de soluções é pois:

$$[-1,5]-\{1\}$$

▶ **Resolver, em $\mathbb{R}$, a inequação:**

$$|x^2-4|<5$$

$$\begin{aligned}
|x^2-4|<5 &\iff -5<x^2-4<5\\
&\iff -1<x^2<9\\
&\iff \underbrace{x^2>-1}_{\text{condição universal}} \quad \text{e} \quad x^2<9\\
&\iff x^2<9\\
&\iff -3<x<3
\end{aligned}$$

▶ **Resolver, em $\mathbb{R}$, a inequação:**

$$|x-2|^2-|x|\leq 0$$

Se $x\geq 0$ a inequação fica na forma $|x-2|^2-x\leq 0$, enquanto que, se $x<0$ a inequação fica na forma $|x-2|^2+x\leq 0$.

Na primeira hipótese $x\geq 0$:

$$\begin{aligned}
|x-2|^2-x\leq 0 &\iff x^2-4x+4-x<0\\
&\iff x^2-5x+4<0\\
&\iff (x-1)(x-4)<0\\
&\iff 1<x<4
\end{aligned}$$

Na segunda hipótese $x < 0$:

$$\begin{aligned} |x-2|^2 + x \leq 0 &\iff x^2 - 4x + 4 + x < 0 \\ &\iff x^2 - 3x + 4 < 0 \\ &\iff x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Portanto, o conjunto de soluções é $[1, 4]$.

▶ **Resolver, em $\mathbb{R}$, a inequação:**

$$|x-3| \leq 2|x-1|$$

Existem 4 hipóteses:

$x \geq 3$ e $x \geq 1$, isto é, $x \geq 3$, caso em que a inequação fica na forma $x - 3 \leq 2x - 2 \Leftrightarrow x \geq -1$. Portanto $x \geq 3$ e $x \geq -1$, isto é $x \geq 3$.

ou:

$x \geq 3$ e $x < 1$, o que é impossível.

ou:

$x < 3$ e $x \geq 1$, isto é, $1 \geq x < 3$, caso em que a inequação fica na forma $-x + 3 \leq 2x - 2 \Leftrightarrow x \geq 5/3$. Portanto $1 \geq x < 3$ e $x \geq 5/3$, isto é $5/3 \geq x < 3$.

ou, finalmente:

$x < 3$ e $x < 1$, isto é, $x < 1$, caso em que a inequação fica na forma $-x + 3 \leq -2x + 2 \Leftrightarrow x \geq -1$. Portanto $x < 1$ e $x \geq -1$, isto é $x \geq -1$.

A reunião das 3 condições dá o conjunto de soluções:

$$]-\infty, -1] \cup [5/3, +\infty[$$

▶ **Resolver, em $\mathbb{R}$, a inequação:**

$$|x-3| \leq 2|x-1|$$

usando um outro método.

A inequação é equivalente a $|x-3|^2 \leq (2|x-1|)^2$ porque $\sqrt{a^2} = |a|$ e a função $\sqrt{\cdot}$ é injectiva.

$$\begin{aligned} |x-3|^2 \leq (2|x-1|)^2 &\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 \leq 4x^2 - 8x + 4 \\ &\Leftrightarrow 3x^2 - 2x - 5 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow x \in]-\infty, -1] \cup [5/3, +\infty[\end{aligned}$$

porque:

$$3x^2 - 2x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4+60}}{6} = \frac{2 \pm 8}{6} \Leftrightarrow x = -1 \vee \frac{5}{3}$$

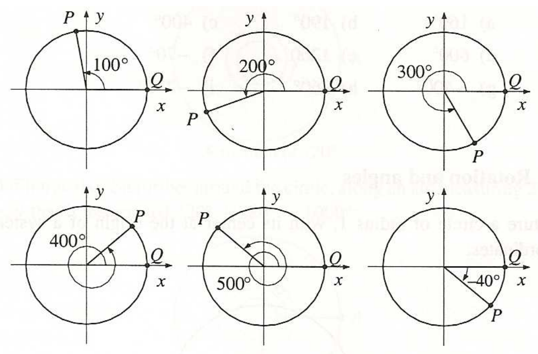
Capítulo 3

Trigonometria

3.1 Senos e cossenos

▶ O que representam os ângulos com os valores seguintes : 100º, 200º, 300º, 400º, 500º, -40º ?

Veja a figura:



Quando um ponto P se move sobre uma circunferência, de centro O, rodando no sentido positivo (anti-horário), partindo de uma certa posição inicial Q, quando ele regressa a Q, após descrever uma volta inteira, diz-se que o ponto P (ou a semi-recta OP, se preferir) descreveu um **ângulo (de rotação)** (orientado) igual a 360º.

Se o ponto descreve um quarto de volta, o ângulo (de rotação) será igual a $\frac{1}{4} \times 360^o = 90^o$. Um outro exemplo, 300º representa o valor do ângulo correspondente à rotação positiva de P de $\frac{300}{360} = \frac{15}{18}$ de volta inteira.

Quando P roda no sentido negativo (horário), os ângulos são negativos.

Não há qualquer razão matemática para que uma volta inteira corresponda a 360^o, ou, de outra forma, para que a unidade de medida seja o grau $= \frac{1}{360}$ de volta inteira. De facto a única razão é de carácter histórico - é assim desde a antiguidade clássica. Como veremos, existe uma unidade de medida mais apropriada do ponto de vista matemático - o radiano.

▶ Como se definem as funções trigonométricas $\cos\theta$, $\sin\theta$ e $\tan\theta$ de um ângulo orientado θ, medido em graus?

Seja r a posição final da semi-recta que, partindo da posição inicial Ox, rodou em torno da origem de um ângulo (de rotação) igual a θ graus, no sentido positivo (anti-horário) se $\theta > 0$ ou no sentido negativo (horário) se $\theta < 0$. Seja P o ponto de intersecção da semi-recta com o **círculo trigonométrico**, isto é, com a circunferência de centro na origem e de raio 1. Se $P = (x, y)$, relativamente a um sistema de eixos ortogonais monométricos, então:

$$\cos\theta = x = \text{abcissa de } P$$
$$\sin\theta = y = \text{ordenada de } P$$
$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{\text{ordenada de } P}{\text{abcissa de } P}$$

APPLET <www.fc.up.pt/cmup/apoiomat>

É óbvio que, pelas definições anteriores:

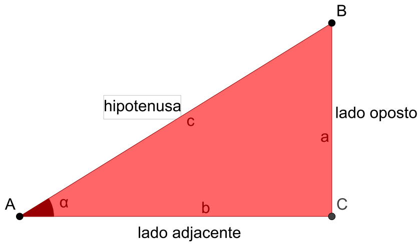
$$\begin{gathered}\cos\theta = \cos(\theta + n\cdot 360^o)\\ \sin\theta = \sin(\theta + n\cdot 360^o),\quad n\in\mathbb{Z}\\ \cos\theta = \cos(-\theta)\\ \sin\theta = -\sin(-\theta)\end{gathered}$$

onde θ é um ângulo medido em graus.

▶ Se α é o ângulo agudo ($0 < \alpha < 90^o$), medido em graus, de um triângulo rectângulo, como o que se mostra na figura, como se define $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ e $\tan\alpha$?

Pondo:

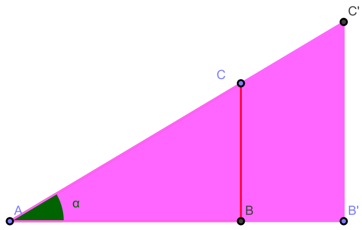
- $\sin\alpha = \dfrac{\text{lado oposto}}{\text{hipotenusa}} = \dfrac{a}{c}$
- $\cos\alpha = \dfrac{\text{lado adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \dfrac{b}{c}$
- $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\text{lado oposto}}{\text{lado adjacente}} = \dfrac{a}{b}$



▶ Como se mostra que a definição anterior não depende do triângulo rectângulo escolhido (tendo α como o mesmo ângulo agudo, medido em graus)?

Construímos dois triângulos rectângulos quaisquer, tendo α como um dos ângulos agudos comum (veja a figura ao lado). Os triângulos são semelhantes (porquê?). Se $k > 0$ é a razão de semelhança vemos que:

$$\sin\alpha = \frac{ka}{kc} = \frac{a}{c}$$



▶ Referindo-se às figuras anteriores mostre que:

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

Como o triângulo é rectângulo, aplicando o teorema de Pitágoras obtemos:

$$(\text{hipotenusa})^2 = (\text{lado oposto})^2 + (\text{lado adjacente})^2$$

isto é:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Dividindo ambos os membros por $c^2 \neq 0$, obtemos:

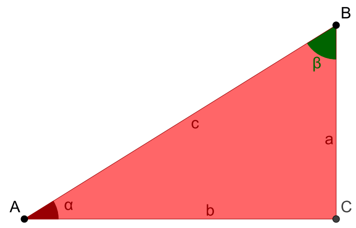
$$1 = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha$$

▶ Observe o triângulo rectângulo da figura, onde os ângulos indicados α e β se medem em graus. Mostre que $\alpha + \beta = 90^{\text{o}}$ e ainda que:

$$\sin\alpha = \cos\beta \qquad e \qquad \sin\alpha = \cos\beta$$

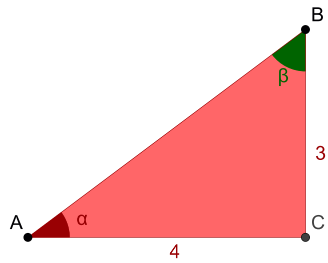
É claro que $\alpha + \beta = 90^o$ porque o triângulo é rectângulo. Basta aplicar as definições anteriores:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \cos\beta = \cos(90^o - \alpha)$$
$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \sin\beta = \sin(90^o - \alpha)$$



▶ Observe o triângulo rectângulo que se mostra na figura ao lado, onde os ângulos indicados α e β se medem em graus, e calcule os valores das expressões seguintes:

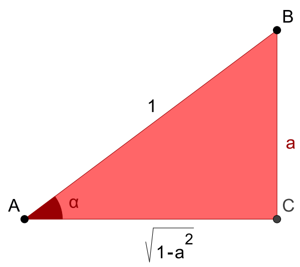
1. $\sin^2\alpha$	2. $\sin^2\beta$
3. $\cos^2\alpha$	4. $\cos^2\beta$
5. $\sin^2\alpha + \cos^2\beta$	6. $\sin^2\alpha + \cos^2\beta$
7. $\cos^2\alpha + \sin^2\beta$	



exercício de cálculo

▶ Se $\sin\alpha = a$, com $0 < a < 1$ quais os valores do $\cos\alpha$ e de $\tan\alpha$?

Podemos usar o triângulo modelo da figura seguinte:



para deduzir que:

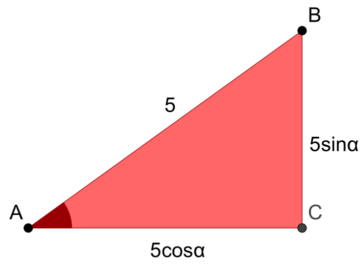
$$\cos\alpha = \sqrt{1-a^2} \quad e \quad \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$$

Observe que, substituindo nas fórmulas anteriores $\sin\alpha$ por a, estas podem ser escritas na forma:

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} \quad e \quad \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$$

► A hipotenusa de um triângulo rectângulo mede 5 cm e um dos seus ângulos agudos mede 37^o. Qual a medida de cada um dos dois outros lados?

Usando uma calculadora obtemos $\sin 37^o \approx 0.6018$ e $\cos 37^o \approx 0.7986$. Podemos usar o triângulo da figura ao lado para deduzir que:



$$\sin\alpha = BC/AC = BC/5$$

e portanto

$$BC = 5 \times \sin 37^o \approx 3.009$$

Analogamente:

$$AC = 5 \times \cos 37^o \approx 3.993$$

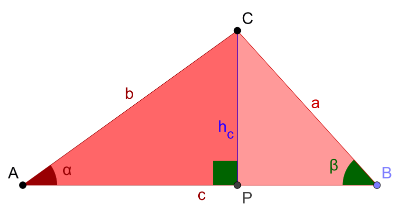
► Observe o triângulo acutângulo da figura. h_c representa a altura relativa ao lado $c = AB$. Mostre que:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$

Como o $\triangle(CPA)$ é rectângulo em P vem que:

$$h_c = a\sin\beta$$

Analogamente, como $\triangle(CPB)$ é rectângulo em P vem que:



$$h_c = b\sin\alpha$$

Portanto $a\sin\beta = b\sin\alpha$. Dividindo ambos os membros por $\sin\alpha\sin\beta \neq 0$ obtemos o que se pretende.

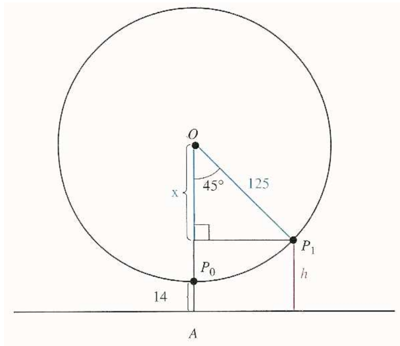
Raciocinando de forma análoga, fazendo intervir as alturas h_a e h_b, relativas aos lados $a = BC$ e $b = AC$, respectivamente, obtemos a importante **Lei dos** senos:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

▶ Observe a figura e diga quais os valores de x e h.

$x + h = 125 + 14 = 139 \Rightarrow x = 139 - h$. Por outro lado, $125\cos 45^{\text{o}} = x$. Portanto:

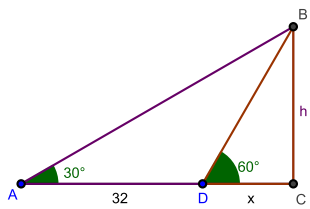
$$x = 125\frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad h = 139 - 125\frac{\sqrt{2}}{2}$$



▶ Observe a figura e diga quais os valores de x e h.

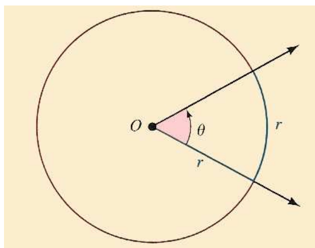
$\sqrt{3} = \tan 60^{\text{o}} = \frac{h}{x}$ enquanto que $\frac{\sqrt{3}}{3} = \tan 30^{\text{o}} = \frac{h}{x+32}$ Portanto: $h = x\sqrt{3}$ e $\sqrt{3}h = x + 32$, donde se deduz que:

$$h = 16\sqrt{3}, \qquad x = 16$$

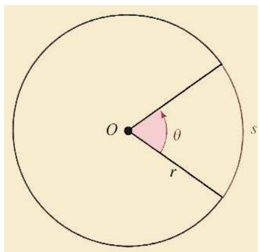


▶ O que é um radiano?

Na figura o ângulo θ mede 1 radiano, porque o arco determinado por θ na circunferência, tem um comprimento igual ao raio.



Na figura o ângulo θ mede $\frac{s}{r}$ radianos, porque o arco determinado por θ na circunferência de raio r, tem um comprimento igual a s:



$$\text{medida de } \theta \text{ em radianos} = \frac{\text{arco determinado por } \theta}{\text{raio da circunferência}}$$

Por exemplo, se numa circunferência de raio $r = 3$ cm, o arco determinado por um ângulo ao centro θ, mede $s = 6$ cm, então a medida de θ em radianos é igual a $\theta = s/r = 6/3 = 2$ radianos.

▶ Como converto graus em radianos e vice-versa?

Sabendo que 360º corresponde a 2π radianos, basta usar uma proporcionalidade directa. Por exemplo:

$$\begin{array}{ccc} 360^{\circ} & \longleftrightarrow & 2\pi\,\text{rad} \\ 45^{\circ} & \longleftrightarrow & x \end{array} \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = \frac{2\pi\,\text{rad} \times 45^{\circ}}{360^{\circ}} = \frac{\pi}{4}\,\text{rad}$$

enquanto que:

$$\begin{array}{ccc} 360^{\circ} & \longleftrightarrow & 2\pi\,\text{rad} \\ x & \longleftrightarrow & \frac{\pi}{6}\,\text{rad} \end{array} \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = \frac{\frac{\pi}{6}\,\text{rad} \times 360^{\circ}}{2\pi\,\text{rad}} = 30^{\circ}$$

isto é:

$$45^{\circ} = \frac{\pi}{4}\,\text{rad}, \qquad \frac{\pi}{6}\,\text{rad} = 30^{\circ}$$

▶ Quais as vantagens de usar a medida de ângulos em radianos?

- A medida em radianos é **adimensional**, isto é, não depende da unidade de medida com a qual se medem comprimentos de arco. Recorde que um radiano é um quociente entre o comprimento de um arco e o raio de uma circunferência. É indiferente a medida com a qual se medem estes comprimentos. Pode ser em mm, cm, metros, etc. É por isso que os matemáticos, os físicos, etc preferem usar a medida dos ângulos em radianos, e é também por isso que a variável independente nas funções trigonométricas tais como $\sin x$, $\cos x$, etc, é usualmente expressa em radianos.

- Como, por exemplo, $\sin x$ é adimensional e x também o é (quando medido em radianos) podemos comparar $\sin x$ com x. De facto, para ângulos muito pequenos (perto de 0), $\sin x$ é aproximadamente igual a x. Uma melhor aproximação para $\sin x$ é $x - \frac{x^3}{6}$, sendo o erro inferior a $\frac{x^5}{120}$. **Atenção: mas é um erro grave dizer que $\sin\alpha$ é aproximadamente igual a α, mesmo para valores de α muito pequenos, se medimos α em graus.**

- **Atenção: outro erro grave é por exemplo afirmar que:**

$$\cos\alpha = \cos(\alpha + 2n\pi),\ \forall n \in \mathbb{Z}$$

se medimos α em graus. De facto, no segundo membro estamos a somar o valor de um ângulo em graus, α, com o valor de um ângulo em radianos, $2n\pi$, o que é absurdo, e torna falsa a igualdade.

Tenha pois em atenção que em todas as fórmulas trigonométricas que usar, todos os ângulos envolvidos têm obrigatoriamente de estar medidos na mesma unidade (graus, radianos, ou qualquer outra).

Outras vantagens do uso da medida de ângulos em radianos estão ilustradas nas questões seguintes.

▶ Se um veículo se desloca com velocidade 36 km/h, qual a velocidade angular de cada roda, em rotações por minuto (rpm), supondo que o seu raio é 50cm e que elas rodam sem deslizar?

Se numa hora o veículo anda 36 km = 3 600 000 cm, num minuto ele anda 3 600 000/60 = 60 000 cm. Portanto, num minuto um ponto da circunferência da roda descreve um arco de comprimento 60 000 cm, uma vez que não há deslize. O ângulo ao centro θ correspondente é pois:

$$\theta = \frac{\text{arco}}{\text{raio da circunferência}} = \frac{60000\,\text{cm}}{50\,\text{cm}} = 1200\,\text{rad}$$

Cada rotação (volta inteira) corresponde a 2π rad. Logo num minuto a roda dá $600/\pi$ voltas. A velocidade angular da roda é pois $600/\pi \approx 156$ rpm (rotações por minuto).

▶ O ponteiro dos minutos de um relógio mede 3 cm. Qual o comprimento do arco que a ponta do ponteiro percorre em 20 minutos?

Em 20 minutos o ponteiro descreve um ângulo igual a $\frac{360^o}{3} = 120^o = \frac{2\pi}{3}$ rad, isto é descreve $1/3$ de volta.

Se o ponteiro descrevesse uma volta inteira a ponta percorria um arco de comprimento $2\pi \times 3 = 6\pi$ cm, que é o perímetro de uma circunferência de raio 3 cm. Como descreve apenas $1/3$ de volta a ponta percorre um arco de comprimento $6\pi/3 = 2\pi \approx 6.28$ cm.

▶ Como posso visualizar a função $\sin$?

Imagino um ponto P a rodar sobre o círculo trigonométrico, no sentido positivo (anti-horário), com velocidade angular uniforme. A projecção desse ponto no eixo dos yy é um ponto A de coordenadas $(0, \sin\theta)$, onde θ é o ângulo polar de $\overrightarrow{OP}$. A anda para cima e para baixo no intervalo $[-1, 1]$. Se imagino que em A está um marcador que traça um risco num papel que se desloca da direita para esquerda, a curva que se obtem é exactamente o gráfico da função seno. Imagine um osciloscópio, como os que se usam para detectar ondas sísmicas... Veja a figura e clique no play para ver a animação.

APPLET <www.fc.up.pt/cmup/apoiomat>

▶ Como posso visualizar a função cos?

Como $\cos\theta = \sin(90^o + \theta)$ posso imaginar o traçado como na questão anterior só que agora começo no instante inicial com o ângulo 90^o em vez de 0^o. Há um deslocamento de fase... Veja a figura e clique no play para ver a animação.

APPLET <www.fc.up.pt/cmup/apoiomat>

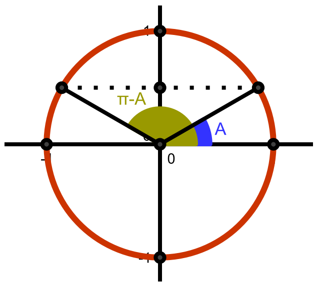
▶ Como posso visualizar a função tan ?

Imagino um ponto P a rodar sobre o círculo trigonométrico, no sentido positivo (anti-horário), com velocidade angular uniforme. A recta OP intersecta a recta $x = 1$, chamada neste contexto, a recta das tangentes, num ponto Q de coordenadas $(1, \tan\theta)$, onde θ é o ângulo polar de $\overrightarrow{OP}$. Q anda para cima e para baixo no intervalo $]-\infty, +\infty[$. Se imagino que em Q está um marcador que traça um risco num papel que se desloca da direita para esquerda, a curva que se obtem é exactamente o gráfico da função tangente. Veja a figura e clique no play para ver a animação.

APPLET <www.fc.up.pt/cmup/apoiomat>

▶ Como se resolve a equação trigonométrica:

$$\sin X = \sin A \; ?$$



Como é claro da figura no círculo trigonométrico:

$$\begin{aligned} \sin X &= \sin A \\ &\Leftrightarrow \quad X = A + 2k\pi \quad \vee \quad X = \pi - A + 2k\pi = -A + (2k+1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

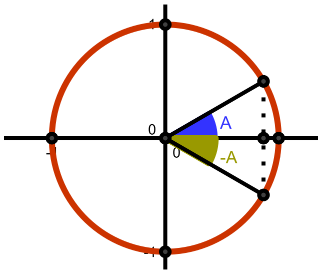
Estas duas fórmulas podem ser condensadas na fórmula única:

$$x = (-1)^n A + n\pi, \qquad n \in \mathbb{Z}$$

como é fácil verificar fazendo, ora $n = 2k$, ora $n = 2k + 1$.

► Como se resolve a equação trigonométrica:

$$\cos X = \cos A \ ?$$

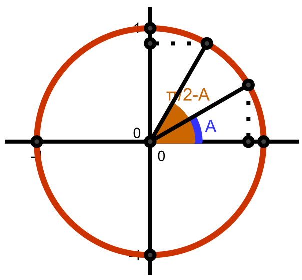


Como é claro da figura no círculo trigonométrico:

$$\begin{aligned} \cos X &= \cos A \\ &\Leftrightarrow X = \pm A + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

► Como se resolve a equação trigonométrica:

$$\sin X = \cos A \ ?$$



Como é claro da figura no círculo trigonométrico:

$$\cos A = \sin\left(\frac{\pi}{2} - A\right)$$

e também:

$$\boxed{\sin A = \cos\left(\frac{\pi}{2} - A\right)}$$

Portanto a equação dada é equivalente a:

$$\sin X = \sin\left(\frac{\pi}{2} - A\right)$$

que é resolvida pelo método apresentado no problema **??**, isto é:

$$\begin{aligned} \sin X &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - A\right) \\ &\Leftrightarrow X = (-1)^n\left(\frac{\pi}{2} - A\right) + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

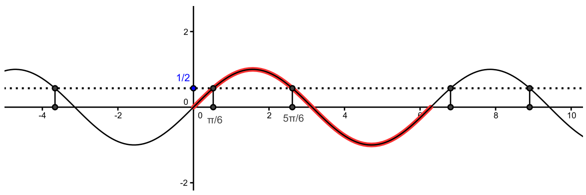
▶ Como se resolve a equação trigonométrica:

$\boxed{\cos X = \sin A}$?

$$\begin{aligned} \cos X &= \sin A \\ &\Leftrightarrow \cos X = \cos\left(\frac{\pi}{2} - A\right) \\ &\Leftrightarrow X = \pm\left(\frac{\pi}{2} - A\right) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

▶ Como se resolve a equação trigonométrica:

$\boxed{2\sin x - 1 = 0}$?



$2\sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2}$. A figura esclarece claramente o que há a fazer:

- Calculamos as soluções no intervalo $[0, 2\pi]$. Como $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ uma dessas soluções é $x = \frac{\pi}{6}$. Mas como $\sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, uma outra solução é $x = \frac{5\pi}{6}$.

- Usamos agora o facto de sin ser periódica de período 2π. Portanto as soluções são:

  $$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

  ou:

  $$x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Estas duas fórmulas podem ser condensadas na fórmula única:

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi, \qquad n \in \mathbb{Z}$$

como é fácil verificar fazendo ora $n = 2k$ ora $n = 2k + 1$.

▶ Como se resolve a equação trigonométrica:

$$\sin 3x - \sin x = 0\ ?$$

Usando a fórmula:

$$\sin A - \sin B = 2 \sin \tfrac{A-B}{2} \cos \tfrac{A+B}{2}$$

e fazendo $A = 3x$ e $B = x$, vemos que a equação dada é equivalente a:

$$2 \sin \frac{3x - x}{2} \cos \frac{3x + x}{2} = 2 \sin x \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \vee \cos 2x = 0$$

Por outro lado:

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

enquanto que:

$$\cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

As soluções são pois:

$$x = k\pi \quad \vee \quad x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

▶ Como se resolve a equação trigonométrica:

$$\cos(4x) = \sin\left(\tfrac{\pi}{5} - x\right)\ ?$$

Como $\cos A = \sin\left(\frac{\pi}{2} - A\right)$, fazendo $A = 4x$ vemos que a equação é equivalente a:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - 4x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{5} - x\right)$$

Por outro lado, como fizemos no problema **??**:

$$\sin B = \sin C \Leftrightarrow B = (-1)^n C + n\pi, \qquad n \in \mathbb{Z}$$

Portanto, fazendo $B = \frac{\pi}{2} - 4x$ e $C = \frac{\pi}{5} - x$, vemos que:

$$\frac{\pi}{2} - 4x = (-1)^n \left(\frac{\pi}{5} - x\right) + n\pi$$

Fazendo, por um lado $n = 2k$ e, por outro lado, $n = 2k+1$, obtemos após cálculo que as soluções são:

$$x = \frac{\pi}{10} - \frac{2k\pi}{3} \quad \vee \quad x = -\frac{3\pi}{50} - \frac{2k\pi}{5}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

ou, com outro aspecto:

$$x = (20k+3)\frac{\pi}{30} \quad \vee \quad x = (20k-3)\frac{\pi}{50}$$

▶ **Como se calculam as raízes da equação trigonométrica:**

$$2\sin(2x) + \sqrt{2} = 0$$

que pertencem ao intervalo $]-\pi/2, 3\pi/2]$**?**

$$\begin{aligned}
2\sin(2x) + \sqrt{2} &= 0 \\
&\Leftrightarrow \sin(2x) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\
&\Leftrightarrow \sin(2x) = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\
&\Leftrightarrow \sin(2x) = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \\
&\Leftrightarrow 2x = -(-1)^n\frac{\pi}{4} + n\pi, \qquad n \in \mathbb{Z} \\
&\Leftrightarrow x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{2}, \qquad n \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Para calcular as raízes que pertencem ao intervalo $]-\pi/2, 3\pi/2]$, devemos calcular os valores de n tais que:

$$-\frac{\pi}{2} < (-1)^{n+1}\frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{2} < \frac{3\pi}{2}$$

Desembaraçando de denominadores e dividindo tudo por π, vem:

$$-4 < (-1)^{n+1} + 4n < 12$$

- se n fôr par, digamos $n = 2k$ então:

$$\begin{aligned} -4 < (-1)^{n+1} + 4n < 12 \quad &\Leftrightarrow \quad -4 < (-1)^{2k+1} + 8k < 12 \\ &\Leftrightarrow \quad -4 < -1 + 8k < 12 \\ &\Leftrightarrow \quad -3/8 < k < 13/8 \\ &\Leftrightarrow \quad k = 0 \vee 1 \\ &\Leftrightarrow \quad n = 0 \vee 2, \qquad \text{já que } n = 2k \end{aligned}$$

- se n fôr impar, digamos $n = 2k + 1$ então:

$$\begin{aligned} -4 < (-1)^{n+1} + 4n < 12 \quad &\Leftrightarrow \quad -4 < (-1)^{2k+2} + 8k < 12 \\ &\Leftrightarrow \quad -4 < 1 + 8k < 12 \\ &\Leftrightarrow \quad -5/8 < k < 11/8 \\ &\Leftrightarrow \quad k = 0 \vee 1 \\ &\Leftrightarrow \quad n = 1 \vee 3, \qquad \text{já que } n = 2k + 1 \end{aligned}$$

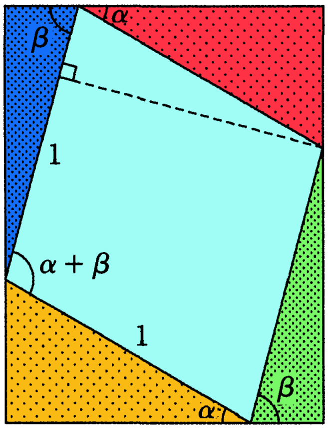
Portanto as soluções pretendidas obtêm-se fazendo $n = 0, 1, 2$ e 3 na fórmula geral $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{2}$. São elas

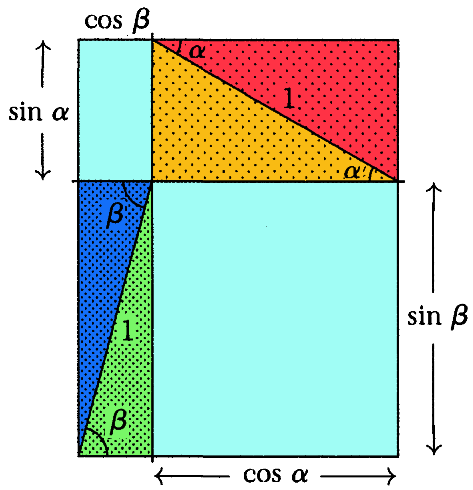
$$-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{8}, -\frac{\pi}{8} + \frac{2\pi}{2} = \frac{7\pi}{8}, \frac{\pi}{8} + \frac{3\pi}{2} = \frac{13\pi}{8}$$

▶ Como posso demonstrar a fórmula do seno da soma:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \qquad \textbf{[Fórmula D]}$$

A demostração seguinte deve-se a Volker Priebe e Edgar A. Ramos “Proof without Words: The Sine of a Sum"; Mathematics Magazine, Vol. 73, No. 5 (Dec., 2000), p. 392. A figura fala por si:





Mas eis algumas indicações:

- os dois rectângulos têm a mesma largura e o mesmo comprimento (e portanto a mesma área). Porquê?
- o quadrilátero azul claro contido no rectângulo da esquerda é um paralelogramo. Porquê? A área desse paralelogramo é igual a $\sin(\alpha+\beta)$. Porquê?
- A área do paralelogramo azul claro contido no rectângulo da esquerda é igual à soma das áreas dos dois rectângulos azul claro contidos no rectângulo da direita. Porquê? A soma destas áreas é $\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$. Porquê?

Portanto:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

▶ **Calcular, em função de** $\sin, \cos$ **e** $\tan$ **de** α **e** β**, usando a [Fórmula D]:**

- $\sin(\alpha-\beta)$
- $\cos(\alpha+\beta)$
- $\cos(\alpha-\beta)$
- $\tan(\alpha+\beta)$
- $\tan(\alpha-\beta)$

- em $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ substitua β por $-\beta$. Vem que:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha-\beta) &= \sin(\alpha+(-\beta)) \\ &= \sin\alpha\cos(-\beta) + \cos\alpha\sin(-\beta) \qquad \text{[Fórmula D]} \\ &= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} \cos(\alpha+\beta) &= \sin\left(90^{\mathrm{o}}-(\alpha+\beta)\right) \\ &= \sin\left((90^{\mathrm{o}}-\alpha)-\beta\right) \\ &= \sin\left(90^{\mathrm{o}}-\alpha\right)\cos\beta-\cos\left(90^{\mathrm{o}}-\alpha\right)\sin\beta \quad \text{[Fórmula anterior]} \\ &= \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \end{aligned}$$

- substitua β por $-\beta$ na fórmula anterior:

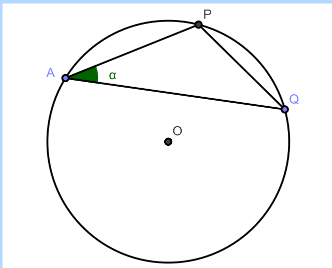
$$\begin{aligned} \cos(\alpha-\beta) &= \cos(\alpha+(-\beta)) \\ &= \cos\alpha\cos(-\beta)-\sin\alpha\sin(-\beta) \\ &= \cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta \end{aligned}$$

- Usamos a definição de tangente e as fórmulas anteriores. Calculando obtemos:
$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\ldots=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

- Usamos a definição de tangente e as fórmulas anteriores. Calculando obtemos:
$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}=\ldots=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

► Na figura o ângulo α com vértice sobre a circunferência de raio r, determina um arco PQ sobre essa circunferência. Mostrar que:

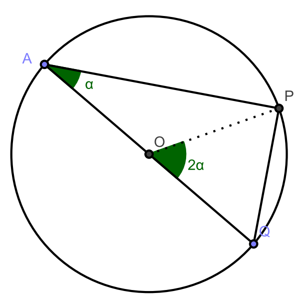
$$\boxed{\sin\alpha=\frac{\overline{PQ}}{2r}}$$



A que é igual o arco $\widehat{PQ}$?

Fazendo variar o ponto A sobre a circunferência, mantendo sempre os pontos P e Q fixos, e portanto o ângulo α, podemos considerar o caso em que AQ é um diâmetro da circunferência, como na figura ao lado. Nesse caso o triângulo $\triangle(APQ)$ é rectângulo em P (porquê?) e daí que:

$$\sin\alpha=\frac{\overline{PQ}}{2r}$$



Quanto ao comprimento do arco $\widehat{PQ}$, calculamos pela regra de três simples":

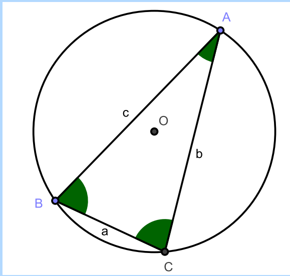
$$\begin{array}{ccc} 2\pi & \longleftrightarrow & 2\pi r \\ 2\alpha & \longleftrightarrow & \widehat{PQ} \end{array} \Longrightarrow \widehat{PQ} = \frac{2\pi r \times 2\alpha}{2\pi} = 2r\alpha$$

Note que a corda é menor que o arco: $\overline{PQ} = 2r\sin\alpha < 2r\alpha = \widehat{PQ}$. O quociente entre os dois é:

$$\frac{\overline{PQ}}{\widehat{PQ}} = \frac{2r\sin\alpha}{2r\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\alpha} \longrightarrow 1, \text{quando } \alpha \to 0$$

▶ **Usando a questão anterior deduzir a lei dos senos:**

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$



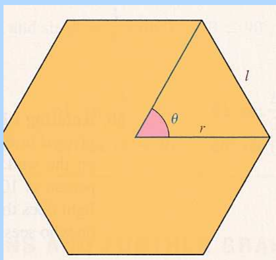
Dado o triângulo $\triangle(ABC)$ consideramos a circunferência circunscrita de raio r.

A questão anterior diz-me que $\sin A = \frac{\overline{BC}}{2r} = \frac{a}{2r}$, isto é $\frac{a}{\sin A} = 2r$. Analogamente, $\sin B = \frac{\overline{AC}}{2r} = \frac{b}{2r}$, isto é $\frac{b}{\sin B} = 2r$, e $\sin C = \frac{\overline{AB}}{2r} = \frac{c}{2r}$, isto é $\frac{c}{\sin C} = 2r$. Portanto:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

▶ **Usando a questão anterior mostrar a seguinte relação, válida para um polígono regular de n lados $(n \geq 3)$ inscrito numa circunferência de raio r:**

$$\ell = 2r\,\sin\frac{\pi}{n}$$



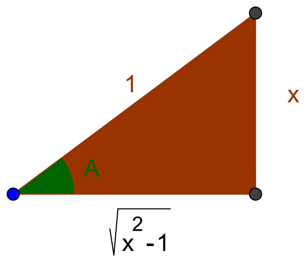
A questão anterior diz que $\sin\frac{\theta}{2} = \frac{\ell}{2r}$, donde se deduz que $\ell = 2r\,\sin\frac{\theta}{2}$. Mas $\theta = \frac{2\pi}{n}$. Substituindo vem pois que $\ell = 2r\,\sin\frac{\pi}{n}$.

Note que quando $\ell = r$ obtemos $r = 2r \sin \frac{\pi}{n} \implies \sin \frac{\pi}{n} = \frac{1}{2} \implies n = 6$ - um hexágono regular.

▶ **A que é igual:**

$$\cos(2 \arcsin x)\ ?$$

Construímos um triângulo rectângulo como o que se representa na figura ao lado.
Se $A = \arcsin x$, então:



$$\begin{aligned}\cos(2 \arcsin x) &= \cos(2A)\\ &= \cos^2 A - \sin^2 A\\ &= \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{1}\right)^2 - \frac{x^2}{1},\\ &= 1 - 2x^2\end{aligned}$$

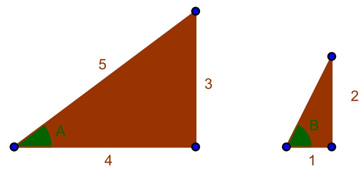
Portanto:

$$\cos(2 \arcsin x) = 1 - 2x^2$$

▶ **A que é igual:**

$$\sin\left(\arccos \tfrac{4}{5} + \arctan 2\right)\ ?$$

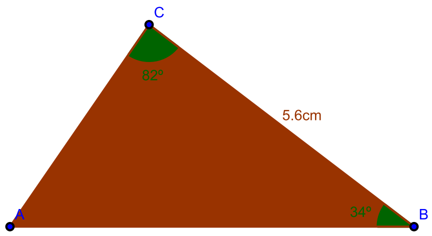
Construímos dois triângulos rectângulos como os que se representam na figura ao lado - um com um ângulo cujo cosseno seja igual a $4/5$ e outro com um ângulo cuja tangente seja igual a 2.



Se $A = \arccos \frac{4}{5}$ e $B = \arctan 2$, então:

$$\begin{aligned}\sin\left(\arccos \frac{4}{5} + \arctan 2\right) &= \sin(A+B)\\ &= \sin A \cos B + \sin B \cos A\\ &= \frac{3}{5}\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}}\frac{4}{5}, \qquad \text{veja a figura}\\ &= \frac{13\sqrt{5}}{25}\end{aligned}$$

▶ **Resolver o triângulo da figura seguinte:**



Dados: $B = 34^o, C = 82^o$ e $a = 5.6cm$.

É claro que $A = 180^o - (34^o + 82^o) = 64^o$. Para calcular o lado b uso a lei dos senos:

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A} \Longrightarrow b = \frac{a \sin B}{\sin A}$$

donde:

$$b = \frac{5.6 \sin 34^o}{\sin 64^o} \Longrightarrow b \approx 3.5cm$$

Para calcular o lado c uso a também a lei dos senos:

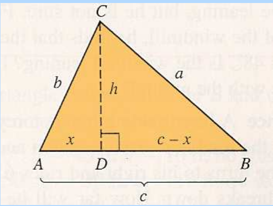
$$\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A} \Longrightarrow cb = \frac{a \sin C}{\sin A}$$

donde:

$$c = \frac{5.6 \sin 82^o}{\sin 64^o} \Longrightarrow c \approx 6.2cm$$

▶ **Deduzir a lei dos cossenos (ver a figura ao lado).**

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$



Aplicamos duas vezes o teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned} h &= b^2 - x^2 \\ h &= a^2 - (c-x)^2 \end{aligned}$$

Portanto

$$b^2 - x^2 = a^2 - (c-x)^2 \quad \Longrightarrow \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2cx$$

Mas $\cos A = x/b$, isto é, $x = b \cos A$, e substituindo obtemos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

De forma análoga se obtem as duas outras fórmulas:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

FORMULÁRIO

▶ Alguns valores importantes:

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{23}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nd

▶ Quais as relações entre as funções trigonométricas de ângulos complementares (cuja soma é 90º ou $\frac{\pi}{2}$ radianos)?

$$\boxed{\begin{aligned}\cos\left(\tfrac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \sin\alpha \\ \sin\left(\tfrac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \cos\alpha\end{aligned}}$$

▶ Quais as relações entre as funções trigonométricas de ângulos com amplitudes α e $\frac{\pi}{2} + \alpha$?

$$\boxed{\begin{aligned}\sin\left(\tfrac{\pi}{2} + \alpha\right) &= \cos\alpha \\ \cos\left(\tfrac{\pi}{2} + \alpha\right) &= -\sin\alpha\end{aligned}}$$

▶ Quais as relações entre as funções trigonométricas de ângulos suplementares (cuja soma é 180º ou π radianos)?

$$\boxed{\begin{aligned} \sin(\pi-\alpha) &= \sin\alpha \\ \cos(\pi-\alpha) &= -\cos\alpha \\ \tan(\pi-\alpha) &= -\tan\alpha \end{aligned}}$$

▶ Quais as relações entre as funções trigonométricas de ângulos com amplitudes α e $\pi+\alpha$?

$$\boxed{\begin{aligned} \sin(\pi+\alpha) &= -\sin\alpha \\ \cos(\pi+\alpha) &= -\cos\alpha \\ \tan(\pi+\alpha) &= \tan\alpha \end{aligned}}$$

▶ Quais as relações entre as funções trigonométricas de ângulos simétricos α e $-\alpha$?

$$\boxed{\begin{aligned} \sin(-\alpha) &= -\sin\alpha \\ \cos(-\alpha) &= \cos\alpha \\ \tan(-\alpha) &= -\tan\alpha \end{aligned}}$$

▶ Quais as relações entre as funções trigonométricas de ângulos com amplitudes α e $2\pi-\alpha$?

$$\boxed{\begin{aligned} \sin(2\pi-\alpha) &= -\sin\alpha \\ \cos(2\pi-\alpha) &= \cos\alpha \\ \tan(2\pi-\alpha) &= -\tan\alpha \end{aligned}}$$

Capítulo 4

Números complexos

4.1 Números complexos

▶ 1. O que é a unidade imaginária i ?

É uma solução da equação $x^2 + 1 = 0$. Portanto $i = \sqrt{-1}$ satisfaz

$$i^2 = -1$$

▶ 2. Como posso calcular as várias potências de i?

Sucessivamente:

$$\begin{aligned}
i^2 &= -1 \\
i^3 &= i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i \\
i^4 &= (i^2)^2 = -1 \cdot -1 = 1 \\
i^5 &= i^4 \cdot i = i \\
i^6 &= (i^2)^3 = (-1)^3 = -1 \\
i^7 &= (i^2)^3 \cdot i = (-1) \cdot i = -i \\
i^8 &= (i^2)^4 = (-1)^4 = 1
\end{aligned}$$

Em geral, é fácil provar que, para k inteiro positivo:

$$i^{4k} = 1, \quad i^{4k+1} = i, \quad i^{4k+2} = -1, \quad i^{4k+3} = -i$$

Erros frequentes. Atenção! Não é correcto escrever:

$$\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{(-1) \cdot (-1)} = \sqrt{1} = 1$$

já que por definição, $\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1} = i\cdot i = -1$.

▶ 3. A que é igual $\sqrt{-a}$ onde a é um número real positivo?

$$\sqrt{-a} = \sqrt{a}\, i$$

Exemplos:

$$\begin{aligned} \sqrt{-9} &= \sqrt{9}\, i = 3i \\ \sqrt{-8} &= \sqrt{8}\, i = 2\sqrt{2}i \\ 2\sqrt{-32} &= 8\sqrt{2}\, i \end{aligned}$$

Erros frequentes. Atenção! Não é correcto escrever:

$$\sqrt{-4}\cdot\sqrt{-7} = \sqrt{28}$$

De facto, por definição:

$$\sqrt{-4}\cdot\sqrt{-7} = (\sqrt{4}\, i)\cdot(\sqrt{7}\, i) = \sqrt{28}\, i^2 = -\sqrt{28} = -2\sqrt{7}$$

▶ 4. Como se resolve a equação quadrática $x^2 - 7x + 32.5 = 0$ no campo complexo?

Usamos a fórmula resolvente $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$:

$$x = \frac{7\pm\sqrt{49-130}}{2} = \frac{7\pm\sqrt{-81}}{2} = \frac{7\pm\sqrt{9}\, i}{2} = 3.5\pm 4.5\, i$$

▶ 5. Como se somam dois números complexos $z = a + b\,i$ e $w = c + d\,i$, e qual o seu significado geométrico?

Da seguinte forma:

$$z + w = (a + b\,i) + (c + d\,i) = (a + c) + (b + d)\,i$$

O número complexo $z = a + b\,i$ é representado no plano complexo (plano de Argand) pelo vector (a, b). Analogamente, $w = c + d\,i$ é representado pelo vector (c, d). A soma $z+w$ é então representada pelo vector soma $(a, b)+(c, d) = (a + c, b + d)$, obtido pela regra do paralelogramo.

APPLET <www.fc.up.pt/cmup/apoiomat>

▶ 6. O que é o conjugado do número complexo $z = a + b\,i$?

É o número complexo $\bar{z} = a - b\,i$. Se $z = a + b\,i$ é representado no plano complexo (plano de Argand) pelo vector (a, b), então $\bar{z} = a - b\,i$ é representado pelo vector $(a, -b)$, obtido do primeiro reflectindo-o relativamente ao eixo real.

▶ 7. O que é o módulo do número complexo $z = a + b\,i$?

É o número real positivo $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Se $z = a + b\,i$ é representado no plano complexo (plano de Argand) pelo vector (a, b), então $|z|$ não é mais do que a norma desse vector. Note que:

$$|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$$

▶ 8. O que é a forma polar ou trigonométrica do número complexo $z = a + b\,i$?

Se $z = a + b\,i$ é representado no plano complexo (plano de Argand) pelo vector (a, b), considerem-se as coordenadas polares do vector z, isto é:

- o seu **módulo** $|z|$ e
- o seu **argumento (positivo mínimo)**, isto é, o ângulo positivo $\theta \in [0, 2\pi[$ que o vector faz com a parte positiva do eixo real (ver applet).

Podemos então escrever que:

$$\begin{gathered}\text{parte real de } z = \operatorname{Re}(z) = a = |z| \cos\theta \\ \text{parte imaginária de } z = \operatorname{Im}(z) = b = |z| \sin\theta\end{gathered}$$

e portanto:

$$z = |z|(\cos\theta + i\,\sin\theta) = |z|\,\mathrm{cis}(\theta)$$

que é a **forma polar ou trigonométrica** do número complexo $z = a + b\,i$, onde, como é habitual, se escreveu:

$$\mathrm{cis}(\theta) = \cos\theta + i\,\sin\theta$$

Exemplos:

$$\begin{aligned}
\sqrt{2} + \sqrt{2}\,i &= 2\,\mathrm{cis}(\pi/4) \\
\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}\,i &= \sqrt{3}\,\mathrm{cis}(\pi/3) \\
-3 - 2\sqrt{10}\,i &= 7\,\mathrm{cis}(245^o)
\end{aligned}$$

▶ 9. Como se multiplicam dois números complexos $z = a + b\,i$ e $w = c + d\,i$?

$$\begin{aligned}
zw &= (a + b\,i) \cdot (c + d\,i) \\
&= ac + ad\,i + bc\,i + bd\,i^2 \\
&= ac + (ad + bc)\,i - bd \\
&= (ac - bd) + (ad + bc)\,i
\end{aligned}$$

Portanto:

$$zw = (ac - bd) + (ad + bc)\,i$$

Em representação polar, se:

$$z = |z|\,\mathrm{cis}(\alpha), \qquad w = |w|\,\mathrm{cis}(\beta)$$

então:

$$\begin{aligned}
zw &= (|z|\,\mathrm{cis}(\alpha)) \cdot (|w|\,\mathrm{cis}(\beta)) \\
&= |z| \cdot |w|\,\{(\cos\alpha + i\,\sin\alpha) \cdot (\cos\beta + i\,\sin\beta)\} \\
&= |zw|\,\{(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + i\,(\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta)\} \\
&= |zw|\,\{\cos(\alpha + \beta) + i\,\sin(\alpha + \beta)\}] \\
&= |zw|\,\mathrm{cis}(\alpha + \beta)
\end{aligned}$$

isto é: o módulo do produto é o produto dos módulos e o argumento do produto é a soma dos argumentos (módulo 2π).

APPLET <www.fc.up.pt/cmup/apoiomat>

▶ 10. Qual o significado geométrico da multiplicação do número complexo z por i?

Se $z = |z|\,\mathrm{cis}(\alpha)$, como $i = \mathrm{cis}(\pi/2)$, a fórmula anterior diz que:

$$i \cdot z = |z|\,\mathrm{cis}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$$

Portanto o vector iz é obtido a partir do vector z rodando-o no sentido positivo um ângulo de 90º.

▶ 11. Qual o significado geométrico da multiplicação do número complexo z por $\sqrt{3}+i$?

Se $z = |z|\,\mathrm{cis}(\alpha)$, como $i = 2\,\mathrm{cis}(\pi/6)$, a fórmula anterior diz que:

$$(\sqrt{3}+i) \cdot z = (2\,\mathrm{cis}(\pi/6)) \cdot (|z|\,\mathrm{cis}(\alpha)) = 2|z|\,\mathrm{cis}\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)$$

Portanto o vector $(\sqrt{3}+i)z$ é obtido a partir do vector z rodando-o no sentido positivo um ângulo de 30º e aumentando-lhe o comprimento duas vezes.

▶ 12. Como calculo o inverso $1/z$ do número complexo $z = a + b\,i \neq 0$?

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z} &= \frac{1}{a+b\,i} = \frac{1}{a+b\,i} \cdot \frac{a-b\,i}{a-b\,i} \\
&= \frac{a-b\,i}{a^2+b^2} \\
&= \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}\,i
\end{aligned}$$

Mais sucintamente:

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

Em representação polar, se $z = |z|\,\mathrm{cis}(\alpha)$, então é claro que $\bar{z} = |z|\,\mathrm{cis}(-\alpha)$. Portanto:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z} &= \frac{\bar{z}}{|z|^2} \\
&= \frac{1}{|z|^2}|z|\,\mathrm{cis}(-\alpha) \\
&= \frac{1}{|z|}\,\mathrm{cis}(-\alpha)
\end{aligned}$$

isto é: o módulo do inverso é o recíproco do módulo e o argumento do inverso é o simétrico do argumento (módulo 2π).

▶ 13. O que é a fórmula de Moivre?

Seja z um número complexo em representação polar - $z = |z|\,\text{cis}(\alpha)$. Então:

$$\begin{aligned}
z^2 &= (|z|\,\text{cis}(\alpha)) \cdot (|z|\,\text{cis}(\alpha)) = |z|^2\,\text{cis}(2\alpha) \\
z^3 &= (|z|\,\text{cis}(\alpha))^2 \cdot (|z|\,\text{cis}(\alpha)) = |z|^2\,\text{cis}(2\alpha) \cdot (|z|\,\text{cis}(\alpha)) = |z|^3\,\text{cis}(3\alpha) \\
&\vdots \\
z^n &= |z|^n\,\text{cis}(n\alpha)
\end{aligned}$$

A fórmula de Moivre dá pois a potência de expoente n de um número complexo:

$$z^n = (|z|\text{cis}(\alpha))^n = |z|^n\,\text{cis}(n\alpha)$$

Exemplos:

$$\begin{aligned}
(\sqrt{3}+i)^5 &= (2\,\text{cis}(\pi/6))^5 = 2^5\,\text{cis}(5\pi/6) = -16\sqrt{3} + 16\,i \\
(\sqrt{3}+i)^5 &= (2\,\text{cis}(\pi/6))^5 = 2^5\,\text{cis}(5\pi/6) = -16\sqrt{3} + 16\,i \\
(1+i)^1 0 &= \left(\sqrt{2}\,\text{cis}(\pi/4)\right)^1 0 = 2^5\,\text{cis}(5\pi/2) = 32\,i
\end{aligned}$$

▶ 14. Como calculo as raízes de indíce n do número complexo $w = a + b\,i$?

Pretendo resolver a equação na incógnita z:

$$z^n = w$$

isto é, quero calcular os números complexos z cuja potência de expoente n é igual ao número dado w.

Escrevo w em forma polar: $w = |w|\,\text{cis}(\theta)$, e também $z = |z|\,\text{cis}(\alpha)$. $|w|$ e θ são conhecidos e o que procuro são os valores de $|z|$ e de $\alpha|$. Mas pela fórmula de Moivre:

$$z^n = w \iff (|z|\,\text{cis}(\alpha))^n = |z|^n\,\text{cis}(n\alpha) = |w|\,\text{cis}(\theta)$$

Portanto:

$$|z|^n = |w| \implies |z| = |w|^{1/n} \qquad \text{(solução única)}$$

e:

$$n\alpha = \theta + 2k\pi \implies \alpha = \frac{\theta + 2k\pi}{n}$$

É fácil mostrar que existem apenas n soluções distintas que podem ser obtidas fazendo k sucessivamnte igual a $0, 1, 2, \cdots, n-1$.

Resumindo: as n raízes distintas de indíce n do número complexo $w = a + b\,i = |w|\,\mathrm{cis}(\theta)$ são obtidas pela fórmula:

$$z_k = |w|^{1/n}\,\mathrm{cis}\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, 2, \cdots, n-1$$

▶ 15. Quais as raízes cúbicas de -1?

São os números z que elevados ao cubo dão -1: $z^3 = -1$. Pondo $z = |z|\mathrm{cis}(\alpha)$, como $-1 = \mathrm{cis}(\pi)$ vem que:

$$\begin{aligned}
(|z|\mathrm{cis}(\alpha))^3 = |z|^3\mathrm{cis}(3\alpha) = \mathrm{cis}(\pi) \quad &\Leftrightarrow \quad |z|^3 = 1 \wedge 3\alpha = \pi + 2k\pi \\
&\Leftrightarrow \quad |z| = 1 \wedge \alpha = \frac{\pi + 2k\pi}{3}, \quad k = 0, 1, 2 \\
&\Leftrightarrow \quad \alpha = \frac{\pi}{3}, \frac{\pi + 2\pi}{3} = \pi, \frac{\pi + 4\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}
\end{aligned}$$

As raízes cúbicas de i são pois:

$$\begin{aligned}
z_0 &= \mathrm{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i \\
z_1 &= \mathrm{cis}\,(\pi) = -1 \\
z_2 &= \mathrm{cis}\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,i
\end{aligned}$$

Capítulo 5

Geometria analítica

5.1 Geometria analítica plana

▶ O que é um referencial cartesiano $\mathcal{R}$ no plano? Para que serve?

É um sistema constituído por dois eixos ortogonais - o **eixo das abcissas, ou eixo dos xx**, e o **eixo das ordenadas, ou eixo dos yy** (claro que podem ser usadas outras letras). Fixamos ainda uma mesma unidade de medida em ambos os eixos.

Serve para estudar geometria plana com ajuda de álgebra, isto é, para estudar Geometria Analítica 2D. A cada ponto A do plano associamos, de forma unívoca, o par de **coordenadas** relativas a esse sistema de eixos (ou referencial):

$$A \quad \longleftrightarrow \quad (x_A, y_A) \in \mathbb{R}^2$$

x_A diz-se a abcissa e y_A a ordenada do ponto A. Escreve-se então:

$$A(x_A, y_A)$$

As figuras do plano, tais como, rectas, curvas, polígonos, e outros lugares geométricos, podem então ser descritos por equações ou inequações nas variáveis x e y, onde $P(x, y)$ designa um ponto genérico desse lugar.

APPLET <www.fc.up.pt/cmup/apoiomat>

▶ O que é um referencial cartesiano $\mathcal{R}$ no espaço? Para que serve?

É um sistema constituído por três eixos ortogonais - o **eixo das abcissas, ou eixo dos xx**, e o **eixo das ordenadas, ou eixo dos yy** e o **eixo das cotas, ou eixo dos zz** (claro que podem ser usadas outras letras). Fixamos ainda uma mesma unidade de medida em todos os eixos.

Serve para estudar geometria espacial com ajuda de álgebra, isto é, para estudar Geometria Analítica 3D. A cada ponto A do plano associamos, de forma unívoca, o terno de **coordenadas** relativas a esse sistema de eixos (ou referencial):

$$A \quad \longleftrightarrow \quad (x_A, y_A, z_A) \in \mathbb{R}^3$$

x_A diz-se a abcissa, y_A a ordenada e z_A a cota do ponto A Escreve-se então:

$$A(x_A, y_A, z_A)$$

As figuras do espaço, tais como, rectas, planos, curvas, superfícies, poliedros, e outros lugares geométricos, podem ser então descritos por equações ou inequações nas variáveis x, y e z, onde $P(x, y, z)$ designa um ponto genérico desse lugar.

▶ O que é a diferença de dois pontos A e B no plano ou no espaço?

A diferença de dois pontos A e B no plano ou no espaço, representa o vector $\overrightarrow{AB} = B - A$. No plano, se $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ então:

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A)$$

No espaço, se $A = (x_A, y_A, z_A)$ e $B = (x_B, y_B, z_B)$ então:

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$$

Em particular, $\overrightarrow{OA}$ é o **vector de posição** do ponto A, e representa-se por

$$\vec{\mathbf{a}} = \overrightarrow{OA}$$

As coordenadas de $\vec{\mathbf{a}}$ são pois as coordenadas de A.

APPLET <www.fc.up.pt/cmup/apoiomat>

▶ Como se somam dois vectores $\vec{\mathbf{v}}_1$ e $\vec{\mathbf{v}}_2$ do plano? E no espaço?

Pela regra do paralelogramo.

No plano, se $\vec{\mathbf{v}}_1 = (x_1, y_1)$ e $\vec{\mathbf{v}}_2 = (x_2, y_2)$ então:

$$\vec{\mathbf{v}}_1 + \vec{\mathbf{v}}_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

No espaço, se $\vec{\mathbf{v}}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{\mathbf{v}}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ então:

$$\vec{\mathbf{v}}_1 + \vec{\mathbf{v}}_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

Erro frequente. Atenção! Somar dois vectores um no plano e outro no espaço. Não faz sentido escrever, por exemplo:

$$(-1, 2) + (0, 2, -1)$$

▶ Dado um ponto A e um vector $\vec{\mathbf{v}}$ o que representa $A + \vec{\mathbf{v}}$?

Representa o ponto extremidade do vector $\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{v}}$. Se $A = (x_A, y_A)$ e $\vec{\mathbf{v}} = (a, b)$ então:

$$A + \vec{\mathbf{v}} = (a + x_A, b + y_A)$$

APPLET <www.fc.up.pt/cmup/apoiomat>

▶ Como se multiplica um vector $\vec{\mathbf{v}}$ por um escalar λ? Qual o significado?

Seja $\vec{\mathbf{v}} = (x, y)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Se $\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{0}}$ ou se $\lambda = 0$ obtem-se o vector nulo $\vec{\mathbf{0}}$. Se $\vec{\mathbf{v}} \neq \vec{\mathbf{0}}$ e $\lambda \neq 0$ então $\lambda\vec{\mathbf{v}}$ é um vector com a mesma direcção de $\vec{\mathbf{v}}$, o mesmo sentido se $\lambda > 0$ e sentido oposto se $\lambda < 0$, e comprimento igual a $|\lambda|$ vezes o comprimento de $\vec{\mathbf{v}}$.

Se $\vec{\mathbf{v}}$ está fixo e λ varia obtemos todos os vectores colineares com $\vec{\mathbf{v}}$ ou, de forma equivalente, todos os pontos da recta gerada por $\vec{\mathbf{v}}$.

Se $\vec{\mathbf{v}} = (x, y)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, então:

$$\lambda\vec{\mathbf{v}} = \lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$$

APPLET <www.fc.up.pt/cmup/apoiomat>

▶ O que é o produto escalar (euclideano) de dois vectores no plano $\mathbb{R}^2$?

O produto escalar (euclideano) de dois vectores $\vec{\mathbf{v}}_1 = (x_1, y_1)$ e $\vec{\mathbf{v}}_2 = (x_2, y_2)$ define-se por:

$$\vec{\mathbf{v}}_1 \cdot \vec{\mathbf{v}}_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

APPLET <www.fc.up.pt/cmup/apoiomat>

▶ O que é a norma (euclideana) de um vector $\vec{v}$ no plano $\mathbb{R}^2$?

A norma (euclideana) de um vector $\vec{\mathbf{v}} = (x, y)$ no plano $\mathbb{R}^2$ define-se por:

$$\|\vec{\mathbf{v}}\| \doteq \sqrt{\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{v}}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

que não é mais do que o Teorema de Pitágoras.

▶ O que é o produto escalar (euclideano) de dois vectores no espaço $\mathbb{R}^3$?

O produto escalar (euclideano) de dois vectores $\vec{\mathbf{v}}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{\mathbf{v}}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ define-se por:

$$\vec{\mathbf{v}}_1 \cdot \vec{\mathbf{v}}_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

▶ O que é a norma (euclideana) de um vector $\vec{v}$ no espaço $\mathbb{R}^3$?

A norma (euclideana) de um vector $\vec{\mathbf{v}} = (x, y, z)$ no no espaço $\mathbb{R}^3$ define-se por:

$$\|\vec{\mathbf{v}}\| \doteq \sqrt{\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{v}}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

que não é mais do que o Teorema de Pitágoras.

▶ Quais as principais propriedades do produto escalar? E da norma (quer no plano, quer no espaço)?

- 1. $\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{u}}$
- 2. $\vec{\mathbf{u}} \cdot (\vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{w}}) = \vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{w}}$
- 3. $\lambda(\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}}) = (\lambda\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}}) = \vec{\mathbf{u}} \cdot (\lambda\vec{\mathbf{v}})$
- 4. $|\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}}| \leq \|\vec{\mathbf{u}}\| \, \|\vec{\mathbf{v}}\|$
- 5. $|\ \vec{\mathbf{v}}| \geq 0$ e $\|\vec{\mathbf{v}}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{\mathbf{v}} = \mathbf{0}$
- 6. $|\lambda\vec{\mathbf{v}}| = |\lambda| \, \|\vec{\mathbf{v}}\|$
- 7. $|\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}}| \leq \|\vec{\mathbf{u}}\| + \|\vec{\mathbf{v}}\|$
  desigualdade triangular

▶ Como se define a distância $d(A,B)$ entre dois pontos $A=(x_A,y_A)$ e $B=(x_B,y_B)$ no plano?

É a norma do vector $\overrightarrow{AB}$:

$$\boxed{d(A,B) \doteq \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}}$$

Por exemplo, se $A=(1,-2)$ e $B=(-3,1)$, então:

$$d(A,B) = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(-3-1)^2+(1+2)^2} = \sqrt{25} = 5$$

▶ Como se define a distância $d(A,B)$ entre dois pontos $A=(x_A,y_A,z_A)$ e $B=(x_B,y_B,z_B)$ no espaço?

É a norma do vector $\overrightarrow{AB}$:

$$\boxed{d(A,B) \doteq \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}}$$

Por exemplo, se $A=(1,-2,1)$ e $B=(-3,1,-2)$, então:

$$d(A,B) = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(-3-1)^2+(1+2)^2+(-2-1)^2} = \sqrt{34}$$

▶ Como se define o ângulo convexo entre dois vectores não nulos $\vec{\mathbf{u}}$ e $\vec{\mathbf{v}}$ (quer no plano, quer no espaço)?

Pela desigualdade: $|\vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{v}}| \le \|\vec{\mathbf{u}}\|\,\|\vec{\mathbf{v}}\|$, e uma vez que ambos os vectores são não nulos, deduzimos que $\frac{|\vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{v}}|}{\|\vec{\mathbf{u}}\|\,\|\vec{\mathbf{v}}\|} \le 1$, isto é:

$$-1 \le \frac{\vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{v}}}{\|\vec{\mathbf{u}}\|\,\|\vec{\mathbf{v}}\|} \le 1$$

Portanto existe um único valor $\theta \in [0,\pi]$ tal que $\cos\theta = \frac{\vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{v}}}{\|\vec{\mathbf{u}}\|\,\|\vec{\mathbf{v}}\|}$, já que a função cosseno restrita ao intervalo $[0,\pi]$ é uma função bijectiva sobre o intervalo $[-1,1]$. A este valor de θ chama-se o **ângulo convexo** entre dois vectores não nulos $\vec{\mathbf{u}}$ e $\vec{\mathbf{v}}$. Portanto, pondo $\theta \doteq \measuredangle(\mathbf{u},\mathbf{v}) \in [0,\pi]$, esse ângulo define-se através da fórmula:

$$\boxed{\cos\measuredangle(\vec{\mathbf{u}},\vec{\mathbf{v}}) = \frac{\vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{v}}}{\|\vec{\mathbf{u}}\|\,\|\vec{\mathbf{v}}\|}}$$

isto é:

$$\boxed{\vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{v}} = \|\vec{\mathbf{u}}\|\,\|\vec{\mathbf{v}}\|\cos\measuredangle(\vec{\mathbf{u}},\vec{\mathbf{v}})}$$

Exemplos:

Se $\vec{\mathbf{u}} = (-1, 2, 0)$ e $\vec{\mathbf{v}} = (1, -2, 1)$ então:

$$\begin{aligned}
\cos \measuredangle(\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}) &= \frac{\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}}}{\|\vec{\mathbf{u}}\| \, \|\vec{\mathbf{v}}\|} \\
&= \frac{(-1,2,0) \cdot (1,-2,1)}{\|(-1,2,0)\| \, \|(1,-2,1)\|} \\
&= \frac{-1-4+0}{\sqrt{(-1)^2+2^2+0^2}\,\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}} \\
&= \frac{-5}{\sqrt{5}\,\sqrt{6}} \\
&\approx \text{............} \Rightarrow \cos \measuredangle(\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}) \approx \text{.....}
\end{aligned}$$

▶ Quando é que dois vectores são ortogonais (no plano ou no espaço)?

Quando $\measuredangle(\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}) = \pi/2$, isto é, quando $\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = 0$. Por convenção considera-se o vector nulo $\vec{\mathbf{0}}$ ortogonal a qualquer outro vector.

▶ Se $\vec{\mathbf{n}} \neq \mathbf{0}$, o que representa a equação em $\vec{\mathbf{x}}$:

$$\vec{\mathbf{n}} \cdot \vec{\mathbf{x}} = 0 \ \mathbf{?}$$

Representa o conjunto de todos os vectores $\vec{\mathbf{x}}$ que são ortogonais a $\vec{\mathbf{n}}$. Temos que distinguir os dois casos:

- no plano, a equação $\vec{\mathbf{n}} \cdot \vec{\mathbf{x}} = 0$ representa a recta vectorial (i.e., que passa no origem) ortogonal a $\vec{\mathbf{n}}$. Se $\vec{\mathbf{n}} = (a, b)$ e $\vec{\mathbf{x}} = (x, y)$, $\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{x}} = (a, b) \cdot (x, y) = ax + by$, e essa equação escreve-se na forma:

  $$ax + by = 0$$

  que se diz a **equação cartesiana** da recta referida.

- no espaço, a equação $\vec{\mathbf{n}} \cdot \vec{\mathbf{x}} = 0$ representa o plano vectorial (i.e., que passa no origem) ortogonal a $\vec{\mathbf{n}}$. Se $\vec{\mathbf{n}} = (a, b, c)$ e $\vec{\mathbf{x}} = (x, y, z)$, $\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{x}} = (a, b, c) \cdot (x, y, z) = ax + by + cz$, e essa equação escreve-se na forma:

  $$ax + by + cz = 0$$

  que se diz a **equação cartesiana** da plano referido.

Exemplos:

$2x - y = 0$ é a equação da recta vectorial ortogonal ao vector $\vec{\mathbf{n}} = (2, -1)$.

$2x - y + 5z = 0$ é a equação do plano vectorial ortogonal ao vector $\vec{\mathbf{n}} = (2, -1, 5)$.

$2x + 5z = 0$ (em $\mathbb{R}^3$) é a equação do plano vectorial ortogonal ao vector $\vec{\mathbf{n}} = (2, 0, 5)$. Esta recta está contida no plano $y = 0$, isto é, no plano xz.

▶ No plano, como posso descrever parametricamente a recta anterior $\vec{\mathbf{n}} \cdot \vec{\mathbf{x}} = 0$?

O vector $\vec{\mathbf{v}} = (-b, a)$ pertence à recta, uma vez que $\vec{\mathbf{n}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = (a, b) \cdot (-b, a) = 0$. Portanto a recta é também o conjunto de todos os vectores $\vec{\mathbf{x}}$ que são múltiplos escalares do vector $\vec{\mathbf{v}}$. Isto é:

$$\text{recta } ax + by = 0 \quad = \quad \{\vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{R} : \quad \vec{\mathbf{x}} = t\,(-b, a), \quad t \in \mathbb{R}\}$$

Esta equação $\vec{\mathbf{x}} = t\vec{\mathbf{v}}$ diz-se a **equação vectorial** da recta referida. Se $\vec{\mathbf{x}} = (x, y)$, como $\vec{\mathbf{v}} = (-b, a)$, então $\vec{\mathbf{x}} = t\vec{\mathbf{v}} \Leftrightarrow (x, y) = t(-b, a) \Leftrightarrow x = -tb, y = ta$ e a equação vectorial é equivalente às duas equações seguintes:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -tb \\ y & = & ta \end{array} \right. , \qquad t \in \mathbb{R}$$

que se dizem as **equações paramétricas** da recta. Quando o "tempo" t varia, elas representam o movimento de um ponto (partícula) que se desloca sobre a recta com movimento uniforme de vector-velocidade $\vec{\mathbf{v}} = (-b, a)$ e velocidade (escalar) $v = \|\vec{\mathbf{v}}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

APPLET <www.fc.up.pt/cmup/apoiomat>

▶ Calcule a equação cartesiana da recta que passa no ponto $A = (-1, 2)$ e é perpendicular ao vector $\vec{\mathbf{n}} = (3, 4)$.

Se $P = (x, y)$ é um ponto genérico dessa recta, então o vector $P - A = \overrightarrow{AP} = (x, y) - (-1, 2) = (x + 1, y - 2)$ é ortogonal ao vector $\vec{\mathbf{n}}$. Portanto $\overrightarrow{AP} \cdot \vec{\mathbf{n}} = 0$, isto é:

$$(x + 1, y - 2) \cdot (3, 4) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3(x + 1) + 4(y - 2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x + 4y = 5$$

▶ Calcule as equações paramétricas da recta que passa no ponto $A = (-1, 2)$ e é perpendicular ao vector $\vec{\mathbf{n}} = (3, 4)$. ?

O vector $\vec{\mathbf{v}} = (-4, 3)$ é perpendicular ao vector $\vec{\mathbf{n}}$ uma vez que $\vec{\mathbf{n}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = (3, 4) \cdot (-4, 3) = 0$. Portanto a recta é a recta que passa no ponto $A = (-1, 2)$ e é paralela ao vector $\vec{\mathbf{v}} = (-4, 3)$. Se $P = (x, y)$ é um ponto genérico dessa recta, então o vector $P - A = \overrightarrow{AP} = (x, y) - (-1, 2) = (x + 1, y - 2)$ é um múltiplo escalar do vector $\vec{\mathbf{v}}$, isto é, $\overrightarrow{AP} = t\,\vec{\mathbf{v}}$, ou ainda:

$$(x + 1, y - 2) = t\,(-4, 3) \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -1 - 4t \\ y & = & 2 + 3t \end{array} \right. , \qquad t \in \mathbb{R}$$

APPLET <www.fc.up.pt/cmup/apoiomat>

▶ Qual a equação cartesiana e as equações paramétricas da recta que passa em dois pontos distintos $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$ no plano ?

Essa é a recta que passa em A e é paralela ao vector $\overrightarrow{AB}$. Portanto, se $P = (x, y)$ é um ponto genérico dessa recta, vemos que:

$$P = A + t\,\overrightarrow{AB}, \qquad t \in \mathbb{R}$$

que é a chamada **equação vectorial** da recta. Em coordenadas:

$$(x, y) = (x_A, y_A) + t\,(x_B - x_A, y_B - y_A), \qquad t \in \mathbb{R}$$

isto é:

$$\begin{cases} x &= x_A + t\,(x_B - x_A) \\ y &= y_A + t\,(y_B - y_A) \end{cases}, \qquad t \in \mathbb{R}$$

que são as **equações paramétricas** da recta. Eliminando o parâmetro t, obtemos:

$$(y_B - y_A)(x - x_A) = (x_B - x_A)\,(y - y_A)$$

que é a **equação cartesiana** da recta.

- Se $x_B - x_A = 0$ então a $y_B - y_A \neq 0$, porque os dois pontos são distintos, e a recta é uma recta vertical de equação $x = x_A$.
- Se $y_B - y_A = 0$ então a $x_B - x_A \neq 0$, porque os dois pontos são distintos, e a recta é uma recta horizontal de equação $y = y_A$.
- Se $x_B - x_A \neq 0$ e $y_B - y_A \neq 0$, a recta tem por equação:

$$y = y_A + \tfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A)$$

▶ No plano, o que é a inclinação de uma recta? E o declive?

A inclinação é o menor ângulo positivo α que a recta faz com a parte positiva do eixo dos xx.

O declive m é a tangente desse ângulo:

$$m = \tan\alpha$$

Se $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$ são dois pontos distintos dessa recta então:

declive $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

se a recta não fôr vertical (e portanto $x_B \neq x_A$). Se a recta fôr vertical diz-se que o seu declive é infinito,

▶ Porque é que no plano uma recta é definida por uma equação cartesiana e no espaço preciso de duas equações cartesianas?

Porque no espaço uma equação cartesiana do tipo $ax + by + cz = d$ define um plano - o plano que passa num dos seus pontos e é ortogonal ao vector $\vec{\mathbf{n}} = (a, b, c)$. Para definir uma recta no espaço preciso de dois planos, e portanto de duas equações cartesianas - a recta é então a intersecção desses dois planos.

▶ O que representa um sistema de duas equações lineares nas incógnitas x e y, do tipo (supondo que a e b não são simultaneamente nulos e também d e e):

$$\left\{ \begin{array}{lcl} ax + by & = & c \\ dx + ey & = & f \end{array} \right. \quad ?$$

A equação $ax + by = c$ é a equação cartesiana de uma recta no plano, perpendicular ao vector $\vec{\mathbf{m}} = (a, b)$. Analogamente, a equação $dx + ey = f$ é a equação cartesiana de uma recta no plano, perpendicular ao vector $\vec{\mathbf{n}} = (d, e)$. Portanto o sistema representa o conjunto dos pontos que pertencem simultaneamente às duas rectas. 3 casos podem ocorrer:

- as duas rectas são concorrentes num único ponto. Neste caso o sistema tem uma única solução que representa as coordenadas do ponto de intersecção das duas rectas. Isto ocorre se e só se os vectores $\vec{\mathbf{m}} = (a, b)$ e $\vec{\mathbf{n}} = (d, e)$ não são colineares, ou, de forma equivalente, se e só se os vectores (a, b) e $(-e, d)$ não são perpendiculares, isto é:

$$ae - bd \neq 0$$

- as duas rectas são paralelas não coincidentes. Neste caso o sistema não tem solução.

- as duas rectas são coincidentes. Neste caso o sistema tem uma infinidade de soluções - todos os pontos que estão sobre as rectas coincidentes.

▶ Resolva os sistemas seguintes:

a. $\begin{cases} x-3y &= 1 \\ 2x-5y &= 0 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 2x-3y &= 5 \\ 3x+2y &= 1 \end{cases}$

c. $\begin{cases} x-y &= 0 \\ 2x-2y &= 2 \end{cases}$

d. $\begin{cases} x+y &= 1 \\ x-y &= 1 \end{cases}$

Soluções:

[a.] $x=-5,\ y=-2$ [b.] $x=1,\ y=-1$ [c.] Impossível [d.] $x=1,\ y=0$

▶ **a. Calcule uma equação da recta que passa no ponto $A(-1,4)$ e é perpendicular à recta $2x-y=3$.**
b. Calcule a equação da recta que passa no ponto $A(-1,4)$ e é paralela à recta $2x-y=3$.

a. Sendo perpendicular à recta $2x-y=3$, a equação vectorial da recta pedida é $(x,y)=(-1,4)+t(2,-1)$, $t\in\mathbb{R}$. Daí que $x=-1+2t \wedge y=4-t$. Eliminando t obtem-se $x+2y=7$.

b. A equação vectorial dessa recta é $(x,y)=(-1,4)+t(1,2)$, $t\in\mathbb{R}$, porque $(2,-1)\cdot(1,2)=0$ Daí que $x=-1+t \wedge y=4+2t$. Eliminando t obtem-se $2x-y=-6$.

▶ **Calcule a distância entre um ponto $A=(1,-2)$ e a recta $4x-3y=1$.**

Calculamos:

1. a equação da recta que passa no ponto A e é perpendicular à recta dada
2. a intersecção I das duas rectas anteriores
3. a distância entre A e I, isto é, a norma do vector $\overrightarrow{AI}$. Esta é, por definição, a distância entre um ponto A e a recta $2x-3y=1$.

[1.] A recta $4x-3y=1$ é perpendicular ao vector $(4,-3)$. Portanto, essa recta é paralela ao vector $\vec{\mathbf{n}}=(3,4)$, por exemplo. Se $P=(x,y)$ é um ponto da recta que passa em $A=(1,-2)$ e é perpendicular à recta $4x-3y=1$, então $\overrightarrow{AP}\cdot\vec{\mathbf{n}}=0$, isto é:

$$(x-1,y+2)\cdot(3,4)=0 \iff 3\,(x-1)+4\,(y+2)=0 \iff 3x+4y=-5$$

[2.] a intersecção I das duas rectas anteriores é dada pela solução do sistema:

$$\begin{cases} 4x-3y &= 1 \\ 3x+4y &= -5 \end{cases}$$

A solução única é:

$$\begin{cases} x &= -\frac{11}{25} \\ y &= -\frac{23}{25} \end{cases}$$

que são as coordenadas do ponto de intersecção I das duas rectas anteriores.

[3.] a distância entre A e I, isto é, a norma do vector $\overrightarrow{AI}$ é dada por:

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{AI}\| &= \left\|\left(-\frac{11}{25}-1,-\frac{23}{25}+2\right)\right\| \\ &= \sqrt{\left(-\frac{36}{25}\right)^2+\left(\frac{27}{25}\right)^2} \\ &= \frac{9}{5} \end{aligned}$$

▶ **Calcule a distância entre um ponto $A = (x_A, y_A)$ e a recta L de equação $ax + by + c = 0$.**

Calculamos como na questão anterior:

1. a equação da recta que passa no ponto A e é perpendicular à recta dada
2. a intersecção I das duas rectas anteriores
3. a distância entre A e I, isto é, a norma do vector $\overrightarrow{AI}$. Esta é, por definição, a distância entre um ponto $A = (x_A, y_A)$ e a recta $L: \quad ax + by + c = 0$.

[1.] A recta $L: \quad ax + by + c = 0$ é perpendicular ao vector $\vec{\mathbf{n}} = (a, b)$. Se $P = (x, y)$ é um ponto da recta que passa em $A = (x_A, y_A)$ e é perpendicular à recta L, então:

$$(x, y) = (x_A, y_A) + t(a, b) = (x_A + ta, y_A + tb), \qquad t \in \mathbb{R}$$

[2.] O ponto de intersecção I das duas rectas anteriores corresponde ao valor de t tal que $(x_A + ta, y_A + tb) \in L$, isto é:

$$a(x_A+ta)+b(y_A+tb)+c = 0 \Rightarrow ax_A+ta^2+by_A+tb^2+c = 0 \Rightarrow t = \frac{-ax_A - by_A - c}{a^2 + b^2}$$

Portanto as coordenadas de I são:

$$\left(x_A + \frac{-ax_A - by_A - c}{a^2 + b^2}a, y_A + \frac{-ax_A - by_A - c}{a^2 + b^2}b\right)$$

[3.] a distância entre A e I, isto é, a norma do vector $\overrightarrow{AI}$ é dada por:

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{AI}\| &= \left\|\left(x_A + \frac{-ax_A - by_A - c}{a^2 + b^2}a - x_A, y_A + \frac{-ax_A - by_A - c}{a^2 + b^2}b - y_A\right)\right\| \\ &= \sqrt{\left(\frac{ax_A + by_A + c}{a^2 + b^2}a\right)^2 + \left(\frac{ax_A + by_A + c}{a^2 + b^2}b\right)^2} \\ &= \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{aligned}$$

Conclusão: a distância d entre um ponto $A = (x_A, y_A)$ e a recta L de equação $ax + by + c = 0$ é dada por

$$d = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

▶ Qual a distância entre a recta $y = mx + c$, $c \neq 0$ e a origem?

Quero saber a distância d entre o ponto $A = (0,0)$ e a recta L de equação $mx - y + c = 0$. De acordo com a fórmula anterior d é dada por:

$$d = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|b|}{\sqrt{1^2 + m^2}}$$

▶ Calcular a equação paramétrica da recta que passa em $A(-1, 0, 2)$ e é ortogonal ao plano π de equação $x + 2y - z = 1$.

O plano π é perpendicular ao vector $\vec{\mathbf{n}} = (1, 2, -1)$. Portanto a recta ℓ é a recta que passa em $A(-1, 0, 2)$ e tem a direcção do vector $\vec{\mathbf{n}}$. A equação vectorial de ℓ é pois:

$$(x, y, z) = (-1, 0, 2) + t(1, 2, -1) = (-1 + t, 2t, 2 - t), \qquad t \in \mathbb{R}$$

e as equações paramétricas são:

$$\begin{cases} x &= -1 + t \\ y &= 2t \\ z &= 2 - t \end{cases}, \qquad t \in \mathbb{R}$$

▶ Calcule a distância entre o ponto $A(-1, 0, 2)$ e o plano π de equação $x + 2y - z = 1$.

Calculamos:

1. a equação da recta ℓ que passa no ponto A e é perpendicular ao plano π dado
2. a intersecção I desta recta com o plano π
3. a distância entre A e I, isto é, a norma do vector $\overrightarrow{AI}$. Esta é, por definição, a distância entre um ponto $A = (x_A, y_A, z_A)$ e o plano $\pi : ax + by + cz = d$.

[1.] Como vimos na questão anterior, a equação vectorial de ℓ é:

$$(x, y, z) = (-1, 0, 2) + t(1, 2, -1) = (-1 + t, 2t, 2 - t), \qquad t \in \mathbb{R}$$

[2.] O ponto de intersecção I das duas rectas anteriores corresponde ao valor de t tal que $(-1+t, 2t, 2-t) \in \pi$, isto é:

$$(-1+t) + 2(2t) - (2-t) = 1 \quad \Rightarrow \quad t = 2/3$$

Portanto as coordenadas de I são:

$$\left(-1+\frac{2}{3}, \frac{8}{3}, 2-\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{8}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

[3.] a distância entre A e I, isto é, a norma do vector $\overrightarrow{AI}$ é dada por:

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{AI}\| &= \left\|(-1,0,2) - \left(\frac{1}{3}, \frac{8}{3}, \frac{4}{3}\right)\right\| \\ &= \sqrt{\left(-\frac{4}{3}\right)^2 + \left(-\frac{8}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} \\ &= \frac{2\sqrt{21}}{3} \end{aligned}$$

▶ Qual a equação da circunferência com centro em $C = (a, b)$ e raio $R > 0$?

Essa circunferência é o conjunto dos pontos $P = (x, y)$ cuja distância a C é constante e igual a R: $d(P, C) = R$. Como ambos os membros são positivos, esta equaçao é equivalente a $\|P - A\|^2 = R^2$ ou ainda:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$$

▶ Calcular, no plano, a recta mediatriz do segmento que une $A(x_A, y_A)$ a $B(x_B, y_B)$.

A recta mediatriz do segmento AB é constituída por todos os pontos $P(x, y)$ que estão equidistantes de A e B:

$$P: \qquad d(P, A) = d(P, B)$$

Uma vez que as distâncias são números positivos, isto é equivalente a:

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2: \qquad (x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = (x - x_B)^2 + (y - y_B)^2$$

Calculando, vem que:

$$-2x_A\, x + x_A^2 - 2y_A\, y + y_A^2 = -2x_B\, x + x_B^2 - 2y_B\, y + y_B^2$$

ou ainda:

$$2(x_B - x_A)\, x + 2(y_B - y_A)\, y = x_B^2 + y_B^2 - x_A^2 - y_A^2$$

Tem pouco interesse obter a fórmula geral. Em cada caso fazem-se os cálculos.

▶ **Calcular, no espaço, o plano mediador do segmento que une $A(x_A, y_A, z_A)$ a $B(x_B, y_B, z_B)$.**

Este é o plano que passa no ponto médio M do segmento AB, e é ortogonal ao vector $\overrightarrow{AB}$. Se P é um ponto qualquer desse plano, então:

$$(P - M) \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

Pondo $P(x, y, z)$, e como $M = \left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}, \frac{z_A+z_B}{2}\right)$, vem que:

$$\left(x - \frac{x_A + x_B}{2}, y - \frac{y_A + y_B}{2}, z - \frac{z_A + z_B}{2}\right) \cdot (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A) = 0$$

Depois de fazer os cálculos obtem-se a equação do plano mediador. Tem pouco interesse obter uma fórmula geral. Em cada caso fazem-se os cálculos.

Capítulo 6

Sucessões

6.1 Sucessões

▶ O que é uma sucessão de números reais?

É uma função cujo domínio é $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \cdots\}$, o conjunto dos números naturais, e que toma valores em $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{cccccc} u & : & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & n & \longmapsto & u(n) = u_n \end{array}$$

A imagem de $n \in \mathbb{N}$ por u representa-se por $u(n)$ ou, como é mais usual, por u_n, e diz-se o **termo de ordem n** da sucessão u.

A sucessão u representa-se frequentemente por $(u_n) = (u_1, u_2, u_3, \cdots)$.

Exemplos:

- $u_n = (-1)^n$. Neste caso, para n par a imagem é sempre constante e igual 1, enquanto que, para n ímpar a imagem é sempre constante e igual -1.
- $u_n = \frac{1}{n}$. Os primeiros termos da sucessão são $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$.
- $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$. Os primeiros termos da sucessão são $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \ldots$.

Erro frequente. Atenção!

Não confundir a sucessão (u_n) com o conjunto dos seus valores $\{u_n\}$. Assim, por exemplo, a sucessão $u_n = (-1)^n$ é $(-1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, \cdots)$ enquanto que o conjunto dos seus valores é $\{-1, 1\}$.

▶ Existe alguma maneira de visualizar melhor o que é uma sucessão de números reais?

Outra maneira de pensar numa sucessão (u_n) é como uma sequência de posições de um ponto que se desloca na recta real, de tal forma que:

no instante $n = 1$ ocupa a posição $u_1 \in \mathbb{R}$

no instante $n = 2$ ocupa a posição $u_2 \in \mathbb{R}$

no instante $n = 3$ ocupa a posição $u_3 \in \mathbb{R}$

e assim sucessivamente. As posições u_n não precisam de ser diferentes.

Exemplos:

- para a sucessão constante $u_n = 1$ o ponto nunca muda de posição - está sempre no ponto 1
- já para a sucessão $u_n = (-1)^n$ o ponto muda alternadamente entre as duas posições -1 e 1.
- para a sucessão $u_n = \frac{1}{n}$ o ponto move-se para a esquerda aproximando-se cada vez mais de 0.

Clique no play nos applets seguintes:

APPLET <www.fc.up.pt/cmup/apoiomat>

Existe ainda uma outra forma útil de representar uma sucessão (u_n) - através do seu gráfico, isto é, o conjunto de pontos do plano $\mathbb{R}^2$ com coordenadas (n, u_n). Clique no play nos applets seguintes:

APPLET <www.fc.up.pt/cmup/apoiomat>

▶ Quando é que uma sucessão é limitada superiormente? e inferiormente?

Superiormente quando todas as posições estão para a esquerda de algum número L. Inferiormente quando todas as posições estão para a direita de algum número ℓ.

Quando a sucessão é limitada superiormente e inferiormente, diz-se apenas **limitada**.

Simbolicamente:

- limitada superiormente quando $\exists M \in \mathbb{R} : u_n < M, \forall n \in \mathbb{N}$.

- limitada inferiormente quando $\exists \mathbf{m} \in \mathbb{R} : u_n > m$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
- limitada quando $\exists L \in \mathbb{R} : |u_n| < L$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

▶ Quando é que uma sucessão é crescente? e decrescente?

Crescente quando o ponto u_n se move sempre para a direita, decrescente quando se move sempre para a esquerda. Simbolicamente:

- crescente quando $u_n \leq u_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
- decrescente quando $u_n \geq u_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Quando, em vez de $\leq$ ou $\geq$ temos desigualdades estritas $<$ ou $>$, diz-se que a sucessão é estritamente crescente ou decrescente, respectivamente.

▶ Como sei se uma sucessão é crescente?

A sucessão é crescente quando $u_n \leq u_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Mas isto é equivalente a:

$$u_n - u_{n+1} \leq 0$$

É isto que tenho que verificar se é válido $\forall n$. Se todos os termos forem estritamente positivos, então $u_n \leq u_{n+1} \Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$, que é um critério muitas vezes útil.

▶ Como sei se uma sucessão é decrescente?

A sucessão é decrescente quando $u_n \geq u_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Mas isto é equivalente a:

$$u_n - u_{n+1} \geq 0$$

É isto que tenho que verificar se é válido $\forall n$. Se todos os termos forem estritamente positivos, então $u_n \geq u_{n+1} \Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$, que é um critério muitas vezes útil.

▶ A sucessão $u_n = \frac{n+6}{n+1}$ é monótona? e limitada?

$$u_n - u_{n+1} = \frac{n+6}{n+1} - \frac{(n+1)+6}{(n+1)+1} = \ldots = \frac{5}{(n+1)(n+2)} > 0, \quad \forall n$$

Portanto $u_{n+1} < u_n$, $\forall n$. O ponto move-se sempre para a esquerda e a sucessão é pois estritamente decrescente.

Como:

$$1 < \frac{n+6}{n+1} = \frac{1+\frac{6}{n}}{1+\frac{1}{n}} < 1 + \frac{6}{n} < 7, \forall n$$

a sucessão é limitada.

▶ O que é uma progressão aritmética?

Uma progressão aritmética é uma sucessão de números reais (u_n), em que cada termo é obtido do anterior somando um número fixo $r \in \mathbb{R}$, a que se chama razão:

$$u_1 \quad u_2 = u_1 + r \quad u_3 = u_2 + r \quad \cdots \quad u_n = u_{n-1} + r$$

Por outras palavras, uma sucessão de números reais (u_n) é uma progressão aritmética se e só se a diferença entre dois termos consecutivos é constante. Esta constante r é razão:

$$u_n - u_{n-1} \equiv r \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Exemplos:

$u_n = 4 + \frac{n-1}{3}$ é uma progressão aritmética de razão $r = \frac{1}{3}$ porque:

$$u_n - u_{n-1} = \left(4 + \frac{n-1}{3}\right) - \left(4 + \frac{(n-1)-1}{3}\right) = ... = \frac{1}{3}$$

$u_n = \frac{n-1}{n+3}$ não é uma progressão aritmética porque a diferença entre dois termos consecutivos não é constante - depende de n.

▶ O que é uma progressão geométrica?

Uma progressão geométrica é uma sucessão de números reais (u_n) não nulos, em que cada um é obtido do anterior multiplicando-o por um número fixo $r \neq 0$, a que se chama razão:

$$u_1 \quad u_2 = u_1 \cdot r \quad u_3 = u_2 \cdot r \quad \cdots \quad u_n = u_{n-1} \cdot r$$

Por outras palavras, uma sucessão de números reais (u_n) não nulos é uma progressão geométrica se e só se a quociente entre dois termos consecutivos é constante. Esta constante r é razão:

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} \equiv r \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Exemplos:

$u_n = \frac{1}{3^n}$ é uma progressão geométrica de razão $r = \frac{1}{3}$ porque:

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{\frac{1}{3^n}}{\frac{1}{3^{n-1}}} = ... = \frac{1}{3}$$

$u_n = 2n^2$ não é uma progressão geométrica porque a quociente entre dois termos consecutivos não é constante - depende de n.

▶ **Como se calcula a soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética de razão $r \neq 0$?**

$$u_1 \qquad u_2 = u_1 + r \qquad u_3 = u_2 + r \qquad \cdots$$

Seja $S_n = a_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{n-1} + u_n$ a soma pretendida dos n primeiros termos. Note que:

$$\begin{array}{rcl} u_1 & = & u_1 \\ u_2 & = & u_1 + r \\ u_3 & = & u_2 + r = u_1 + 2r \\ u_4 & = & u_3 + r = u_1 + 3r \\ \vdots & & \vdots \\ u_n & = & u_{n-1} + r = u_1 + (n-1)r \end{array}$$

Escrevemos agora a soma S_n de duas formas:

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{n-1} + u_n$$

e

$$S_n = u_n + u_{n-1} + u_{n-3} + \cdots + u_2 + u_1$$

Somando termo a termo vem:

$$\begin{array}{rcl} 2S_n & = & (u_1 + u_n) + (u_2 + u_{n-1}) + \cdots + (u_{n-1} + u_2) + (u_n + u_1) \\ & = & (u_1 + u_n) + (u_1 + r + u_n - r) + \cdots + (u_n - r + u_1 + r) + (u_n + u_1) \\ & = & (u_1 + u_n) + (u_1 + u_n) + \cdots + (u_n + u_1) + (u_n + u_1) \\ & = & n(u_1 + u_n) \end{array}$$

Portanto:

$$\boxed{S_n = n \cdot \tfrac{u_1 + u_n}{2}}$$

Substituindo $u_n = u_1 + (n-1)r$, obtemos uma outra fórmula para a soma:

$$\boxed{S_n = nu_1 + r\,\tfrac{n(n-1)}{2}}$$

▶ **Como se calcula a soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica de razão r ($r \neq 0, r \neq 1$)?**

$$u_1 \qquad u_2 = u_1 \cdot r \qquad u_3 = u_2 \cdot r \qquad \cdots$$

Seja $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{n-1} + u_n$ a soma pretendida. Note que:

$$\begin{array}{rcl} u_1 & = & u_1 \\ u_2 & = & u_1 \cdot r \\ u_3 & = & u_2 \cdot r = u_1 \cdot r^2 \\ u_4 & = & u_3 \cdot r = u_1 \cdot r^3 \\ \vdots & & \vdots \\ u_n & = & u_{n-1} \cdot r = u_1 \cdot r^{n-1} \end{array}$$

Consideremos agora a soma S_n:

$$\begin{array}{rcl} S_n & = & u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{n-1} + u_n \\ & = & u_1 + ru_1 + r^2u_1 + \cdots + r^{n-1}u_1 \\ & = & u_1 + ru_1 + r^2u_1 + \cdots + r^{n-1}u_1 \\ & = & u_1(1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1}) \end{array}$$

Multipliquemos ambos os membros por r:

$$rS_n = u_1(r + r^2 + r^3 + \cdots + r^n)$$

e, finalmente, subtraímos membro a membro, para obter:

$$\begin{array}{rcl} S_n - rS_n & = & u_1(1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1}) - u_1(r + r^2 + r^3 + \cdots + r^n) \\ & = & u_1(1 - r^n) \end{array}$$

Portanto, como $r \neq 1$, vem:

$$\boxed{S_n = u_1 \cdot \tfrac{1-r^n}{1-r}}$$

▶ Calcule:

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \cdots + 999$$

Trata-se da soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética de razão $r = 2$. Mas a que é igual n? Como vimos, o último termo é da forma $u_n = u_1 + (n-1)r$. Portanto:

$$999 = 1 + (n-1)2 \qquad \therefore \qquad n = 500$$

Aplicando a fórmula da soma vem:

$$S_n = n \cdot \frac{u_1 + u_n}{2} = 500 \cdot \frac{1 + 999}{2} = 250\,000$$

▶ Calcule:

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \cdots + 512 + 1024$$

Note que:

$$1+2+4+8+16+32+\cdots+512+1024 = 1+(2+4+8+16+32+\cdots+512+1024)$$

e as parcelas entre parêntisis formam a soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica de razão $r=2$. A que é igual n? Como vimos, o último termo é da forma $u_n = u_1 \cdot r^{n-1}$. Portanto:

$$1024 = 2 \cdot 2^{n-1} \qquad \therefore \qquad 2^n = 1024 = 2^{10} \qquad \therefore \qquad n = 10$$

Aplicando a fórmula da soma vem:

$$S_n = 2 \cdot \frac{1-r^n}{1-r} = 2\frac{1-2^{10}}{1-2} = 2046$$

e a soma pretendida é pois igual a 2047.

▶ Numa circunferência de raio R inscrevo um quadrado. Neste quadrado inscrevo uma circunferência, e nesta volto a inscrever um quadrado. Prossigo sucessivamente desta forma para obter uma sucessão de circunferências e quadrados, como se ilustra no applet. Mostre que as áreas dos círculos estão em progressão geométrica assim como as áreas dos quadrados. Qual é a soma dos n primeiros termos de cada uma destas progressões?

O primeiro círculo tem área $a_1 = \pi R^2$, o segundo tem raio igual a $R\cos 45^o = R\frac{\sqrt{2}}{2}$ e portanto área igual a $a_2 = \pi R^2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$. O terceiro tem raio igual a $R\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 45^o = R\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$ e portanto área igual a $a_3 = \pi R^2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4$, e assim sucessivamente. O círculo de ordem n tem raio igual a $R\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$ e portanto área igual a $a_n = \pi R^2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2n}$.

A sucessão a_n é uma progressão geométrica de razão $r = 1/2$, uma vez que:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\pi R^2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2(n+1)}}{\pi R^2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2n}} = \frac{1}{2}$$

O primeiro quadrado tem lado $2R\cos 45^o = 2R\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}R$ e portanto tem área $b_1 = 2R^2$, o segundo tem lado igual a $2R\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$ e portanto área igual a $b_2 = R^2$. O terceiro tem lado igual a $2R\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3$ e portanto área igual a $b_3 = R^2/2$, e assim sucessivamente. O quadrado de ordem n tem lado igual a $2R\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}$ e portanto área igual a $b_n = \frac{R^2}{2^{n-1}}$.

A sucessão b_n é também uma progressão geométrica de razão $s = 1/2$, uma vez que:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\frac{R^2}{2^n}}{\frac{R^2}{2^{n-1}}} = \frac{1}{2}$$

APPLET <www.fc.up.pt/cmup/apoiomat>

▶ Quando é que se diz que uma sucessão u_n é convergente para um número real ℓ, quando $n \to \infty$?

Quando por mais pequenino que seja o intervalo aberto centrado em ℓ, todos os termos da sucessão estão lá dentro a partir de certa ordem. Simbolicamente:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \ell \quad \Longleftrightarrow \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists m \in \mathbb{N} : \quad |u_n - \ell| < \epsilon, \quad \forall n \geq m$$

▶ Qual a menor ordem m a partir da qual todos os termos da sucessão $u_n = \frac{1}{n}$ estão dentro do intervalo $]-0.01, +0.01[$?

$$\left|\frac{1}{n}\right| < 0.01 = \frac{1}{100} \quad \Leftrightarrow \quad n > \frac{1}{\frac{1}{100}} = 100 \quad \Leftrightarrow \quad n \geq m = 101$$

Logo, para $\epsilon = 0.01$ a menor ordem $m = 101$, a partir da qual todos os termos da sucessão estão dentro do intervalo $]-\epsilon, \epsilon[$, é $m = 101$.

Veja o applet seguinte. Comece por escolher um valor de $\epsilon > 0$ e veja qual a menor ordem m a partir da qual todos os termos da sucessão $u_n = \frac{1}{n}$ estão dentro do intervalo $]-\epsilon, \epsilon[$.

▶ Como provo que a sucessão $u_n = \frac{1}{n}$ converge para $\ell = 0$, quando $n \to \infty$?

Mostrando que dado um $\epsilon > 0$ arbitrário, existe uma ordem m (que vai depender de ϵ) a partir da qual todos os termos da sucessão estão dentro do intervalo $]-\epsilon, \epsilon[$.

Seja então $\epsilon > 0$ arbitrário. Então:

$$\left|\frac{1}{n}\right| < \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad n > \frac{1}{\epsilon} \quad \Leftrightarrow \quad n \geq m = \left[\frac{1}{\epsilon}\right] + 1$$

onde $[x]$ = maior inteiro inferior ou igual a x (por exemplo $[1234.5678] = 1234$).

Logo, dado um $\epsilon > 0$ arbitrário, existe uma ordem $m = \left[\frac{1}{\epsilon}\right] + 1$, a partir da qual todos os termos da sucessão estão dentro do intervalo $]-\epsilon, \epsilon[$, isto é, $\left|\frac{1}{n}\right| < \epsilon$.

▶ Quando é que se diz que uma sucessão u_n é divergente para $+\infty$, quando $n \to \infty$?

Quando por maior que seja o número $A \in \mathbb{R}$, todos os termos da sucessão estão à direita de A, a partir de certa ordem. Simbolicamente:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty \iff \forall A \in \mathbb{R} \quad \exists m \in \mathbb{N}: \quad u_n > A, \quad \forall n \geq m$$

▶ Quais as principais regras operatórias com sucessões convergentes?

Se $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ e $\lim_{n\to\infty} y_n = b$, com $a, b \in \mathbb{R}$, então:

- $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b$
- $\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = a - b$
- $\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = a \cdot b$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$ se $b \neq 0$ e $y_n \neq 0$

▶ Porque é que se diz que $\frac{0}{0}$ é uma indeterminação?

Porque posso arranjar sempre duas sucessões x_n e y_n, **ambas convergentes para zero** e tais que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}$$

ou não existe, ou é infinito ou é igual a um dado (mas arbitrário) um número real a. Não é pois válido neste caso que o "limite do quociente seja igual ao quociente dos limites", isto é:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} u_n}{\lim_{n\to\infty} v_n} = \frac{0}{0} \quad \textbf{não é válido}$$

Por exemplo, consideremos as sucessões $x_n = \frac{1}{n}$ e $y_n = \frac{1}{n^2}$, ambas convergentes para zero. Então:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

enquanto que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} n = +\infty$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a\, x_n}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{a}{n}}{\frac{1}{n}} = a$$

Já se, por exemplo, $z_n = \frac{(-1)^n}{n}$ então:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{z_n}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(-1)^n}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} (-1)^n \quad \text{não existe}$$

▶ Calcule os limites das sucessões seguintes:

1. $x_n = \frac{2n+1}{3n-5}$
2. $x_n = \frac{10n}{n^2+1}$
3. $x_n = \frac{n(n+2)}{(n+1)(n+3)}$
4. $x_n = \frac{2^n+1}{2^n-1}$

Soluções:

[1.] 2/3 [2.] 0 [3.] 1 [4.] 1

▶ Como provo que uma sucessão u_n crescente e limitada superiormente é convergente?

Uma prova plausível:

1. como, por hipótese, u_n é limitada superiormente, todos os termos estão à esquerda de um certo $M \in \mathbb{R}$. M é pois um majorante do conjunto $\mathcal{U} = \{u_n\}$ dos termos da sucessão. Claro que qualquer número maior do que M continua a ser um majorante de $\mathcal{U}$.
2. Intuitivamente deverá haver um majorante que é mais pequeno do que todos os outros. Seja ℓ esse majorante (supondo que existe).
3. sendo ℓ o majorante mais pequeno do que todos os outros, então, qualquer que seja $\epsilon > 0$, $\ell - \epsilon$ já não pode ser majorante.
4. isto significa existe pelo menos um termo da sucessão, digamos u_m, que está no intervalo $]\ell - \epsilon, \ell]$.
5. ainda não usámos a hipótese de u_n ser crescente. Chegou a hora - como u_n é crescente, se $n \geq m$ então todos os termos são maiores do que u_m e portanto estão também no intervalo $]\ell - \epsilon, \ell]$.
6. provámos então que, dado $\epsilon > 0$ arbitrário, existe uma ordem m a partir da qual todos os termos estão no intervalo $]\ell - \epsilon, \ell]$, e portanto também no intervalo $]\ell - \epsilon, \ell + \epsilon[$, o que significa que $u_n \to \ell$.

A única coisa que fica em suspenso é o ponto 2. - não é de todo evidente que $\mathcal{U}$ tenha um majorante mais pequeno do que todos os outros. Fica a discussão para o curso de cálculo...

Capítulo 7

Funções. Derivadas

7.1 Derivadas

▶ **Dada uma função $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, como se define a taxa média de crescimento (ou de variação) de f num ponto a, interior ao domínio de f?**

a é ponto interior ao domínio D de f, se a pertence a um intervalo aberto contido em D. Se $h \neq 0$ é suficientemente pequeno para que $a + h \in D$, a **taxa média de crescimento ou taxa média de variação de f no ponto a** define-se por:

$$\Delta_a f(h) \doteq \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

(depende de a e de h, portanto).

▶ **Se $f(x) = x^2 - 1$, qual a taxa média de variação de f no ponto $a = 1$?**

Como $f(1) = 1^2 - 1 = 0$, então se $h \neq 0$:

$$\Delta_1 f \doteq \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{(1+h)^2-1-0}{h} = \frac{1+h^2+2h-1}{h} = \frac{h^2+2h}{h} = h+2$$

▶ **Dada uma função $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, como se define a derivada de f num ponto a interior ao domínio de f**

A **derivada de f no ponto a** é a **taxa instantânea de variação de f no ponto a**, isto é:

$$f'(a) \doteq \lim_{h\to 0} \Delta_a f(h) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Pondo $x = a + h$, o que implica que $h = x - a$, e substituindo na definição anterior, podemos dar uma outra forma à definição de derivada de f no ponto a:

$$f'(a) \doteq \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

uma vez que $h \to 0 \Leftrightarrow x \to a$.

► Se $f(x) = x^2 - 1$, qual a derivada de f no ponto $a = 1$?

Como $f(1) = 1^2 - 1 = 0$, vimos já, se $h \neq 0$, $\Delta_1 f \doteq \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{(1+h)^2-1-0}{h} = h + 2$. Portanto:

$$f'(1) = \lim_{h\to 0}(h+2) = 2$$

► Se $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$, qual a derivada de f num ponto qualquer $x \in \mathbb{R}$?

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2(x+h)^2 - 3(x+h) + 1 - (2x^2 - 3x + 1)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2x^2 + 4xh + 2h^2 - 3x - 3h + 1 - 2x^2 + 3x - 1}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{4xh + 2h^2 - 3h}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}(4x + 2h - 3) \\
&= 4x - 3
\end{aligned}$$

► Dada uma função $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, suponha que existe a derivada de f num ponto a, interior ao domínio de f. Considere os pontos $A(a, f(a))$ e $B(a + h, f(a + h))$, com $h \neq 0$, ambos sobre o gráfico de f, e a recta que os une. Qual a equação cartesiana desta recta?

Como se sabe da geometria analítica plana, a equação da recta que une os pontos $A(a, f(a)$ e $B(a + h, f(a + h))$ é:

$$y - f(a) = \frac{f(a+h)}{(a+h)-a}(x-a)$$

ou:

$$y = f(a) + \Delta_a f(h)\,(x-a)$$

Portanto o declive desta recta, isto é, a tangente do ângulo positivo que esta recta faz com a parte positiva do eixo dos xx, é igual à taxa média de variação de f em a.

▶ Referindo-se à questão anterior, qual a posição limite da recta aí considerada, quando $h \to 0$?

Quando $h \to 0$ a taxa média de variação de f em a, $\Delta_a f$, converge para a taxa instantânea de variação de f em a, isto é, converge para a derivada $f'(a)$ de f em a (supondo que esta existe).

Portanto a recta que une A e B tem a posição limite que não é mais do que a recta tangente ao gráfico de f no ponto $A = (a, f(a))$. A respectiva equação é obtida a partir da equação referida em , fazendo $h \to 0$:

$$y = f(a) + f'(a)(x-a)$$

Portanto o declive da recta tangente ao gráfico de f no ponto $A = (a, f(a))$, é igual à derivada $f'(a)$ de f em a.

APPLET <www.fc.up.pt/cmup/apoiomat>

▶ Se $f(x) = x^2 + 1$, considere os pontos $A(1, f(1))$ e $B(1+h, f(1+h))$, com $h \neq 0$, ambos sobre o gráfico de f, e a recta que os une. Qual a equação cartesiana desta recta? Qual a posição limite dessa recta , quando $h \to 0$?

A recta que une os pontos $A(a, f(a) = (1, 2)$ e $B(a+h, f(a+h)) = (1+h, (1+h)^2+1)$ é:

$$y = f(1) + \frac{f(1+h) - f(1)}{h}(x-a) = 2 + \frac{(1+h)^2+1-1}{h}(x-1)$$

isto é:

$$y = 2 + (h+2)(x-1)$$

Quando $h \to 0$ esta recta tende para a posiição limite:

$$y = 2 + 2(x-1)$$

APPLET <www.fc.up.pt/cmup/apoiomat>

▶ Se $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$, qual a equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto $A = (-1, f(-1))$?

Como $a = -1$, $f(a) = f(-1) = 6$ e $f'(-1) = 4x - 3|_{x=-1} = -7$, essa equação é

$$y = f(-1) + f'(-1)(x+1) = 6 - 7(x+1)$$

O declive desta recta é igual à derivada $f'(-1) = -7$.

APPLET <www.fc.up.pt/cmup/apoiomat>

▶ Dada uma função $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, suponha que existe a derivada de f num ponto a. Em que sentido podemos afirmar que:

$$f(a+h) \approx f(a) + f'(a)h \,?$$

O sinal $\approx$ significa "aproximadamente igual".

Considere o gráfico de f e a recta tangente ao gráfico de f no ponto $A(a, f(a))$. Considere ainda os pontos seguintes:

- $B = (a+h, f(a+h))$ no gráfico de f
- $B' = (a+h, f(a) + f'(a)\,h)$ na recta tangente ao gráfico de f no ponto $A(a, f(a))$

A diferença das ordenadas destes dois pontos é igual a:

$$f(a+h) - [f(a) + f'(a)\,h]$$

e esta diferença é cada vez mais pequena quanto mais próximo de 0 estiver o "acréscimo"h. Neste sentido podemos pois dizer que o valor exacto $f(a+h$ é aproximadamente igual a $f(a) + f'(a)\,h$, sendo esta aproximação cada vez mais precisa quanto mais pequeno é o valor de h:

$$f(a+h) \approx f(a) + f'(a)h \,?$$

Mais concretamente: se definirmos o **erro** $e(a;h)$ através da diferença:

$$e(a;h) \doteq f(a+h) - [f(a) + f'(a)h] \,?$$

podemos dizer que:

$$\lim_{h\to 0} \frac{e(a;h)}{h} = 0$$

Diz-se então que o **erro** $e(a;h)$ **é um infinitésimo de ordem superior a** h.

Deve observar bem a animação "aproximacao".

APPLET <www.fc.up.pt/cmup/apoiomat>

▶ Se $f(x) = 2x^2 - 3$, calcule um valor aproximado para $f(1.005)$. Qual o erro?

Fazemos $a = 1$ e $h = 0.005$:

$$\begin{aligned} f(1.005) &\approx f(1) + f'(1) \times 0.005 \\ &= -1 + 4 \times 0.005 \\ &= -0.98 \end{aligned}$$

O erro é igual a:

$$e = e(1; 0.005) = f(1.005) - (-0.98) = 0.00005$$

▶ Quais as principais regras operatórias com derivadas?

Suponhamos que $u = f(x)$ e $v = g(x)$ são duas funções deriváveis. Então:

- **A derivada da soma é a soma das derivadas**:

  $$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

  ou, com outra notação mais simples:

  $$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

  $$(u + v)' = u' + v'$$

- **A derivada de um produto de duas funções é a derivada da primeira vezes a segunda mais a derivada da segunda vezes a primeira**:

  $$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

  ou, com outra notação mais simples:

  $$(uv)' = u'v + uv'$$

  Em particular, se $k \in \mathbb{R}$ fôr uma constante:

  $$(ku)' = ku'$$

- **A derivada de um quociente**:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}, \qquad g(x) \neq 0$$

ou, com outra notação mais simples:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$$

- **A derivada de uma potência**:

$$(f(x)^r)' = rf(x)^{r-1}f'(x), \quad r \in \mathbb{Q}$$

ou, com outra notação mais simples:

$$(u^r)' = ru^{r-1}u'$$

▶ Como se calcula a derivada de uma função composta?

Pela chamada **regra da cadeia**, que é sem dúvida a regra de derivação mais usada.

$$((f \circ g)(x))' = f'(g(x))g'(x)$$

ou, com outra notação:

$$(u \circ v)' = (u' \circ v)v'$$

A demonstração usual, que a seguir se reproduz, está errada:

Suponhamos que f é derivável em $g(x)$ e g é derivável em x. Claro que podemos escrever:

$$\frac{(f \circ g)(x+h) - (f \circ g)(x)}{h} = \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

Aparentemente se tomar os limites de ambos os membros, quando $h \to 0$, obtem-se o que se pretende - o primeiro membro tende para $(f\circ)'(x)$ e o segundo para $f'(g(x)) \cdot f'(x)$.

No entanto há um problema - o quociente $g(x+h)-g(x)$, na primeira fracção do segundo membro, pode ser 0 mesmo, quando $h \neq 0$. Esta fracção pode por isso ter um quociente nulo e, sendo assim, não está definida. Há pois que ser mais preciso na demonstração, o que será feito no curso de Cálculo.

▶ Calcular as derivadas das funções seguintes

- 1. $f(x) = \left(\frac{x-4}{x+2}\right)^3$
- 2. $g(x) = \sqrt{3x+4}$
- 3. $h(x) = e^{x^2-3x}$
- 4. $k(x) = \ln(x^2+1)$
- 5. $m(x) = \sqrt[3]{2x^2 - x}$
- 6. $p(x) = e^{\frac{x+1}{x}}$

Soluções:

1. $f'(x) = \frac{18(x-4)^2}{(x+2)^4}$, 2. $g'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+4}}$, 3. $h'(x) = (2x-3)e^{x^2-3x}$

4. $k'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$, 5. $m'(x) = \frac{4x-1}{3\sqrt[3]{(2x^2-x)^2}}$, 6. $p'(x) = \frac{-e^{\frac{x+1}{x}}}{x^2}$

▶ É verdade que uma função derivável num ponto a é contínua nesse ponto? E o recíproco ?

É verdade:

diferenciabilidade $\Longrightarrow$ continuidade

Mas **o recíproco é falso**.

De facto, suponhamos que f é derivável em a. Então, como $h \neq 0$:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}(f(a+h) - f(a)) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \cdot h \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \cdot \lim_{h\to 0} h \\
&= f'(a) \cdot 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Portanto $\lim_{h\to 0} f(a+h) = f(a)$ o que significa que f é contínua em a.

O recíproco é falso. Por exemplo, a função $f(x) = |x|$ é contínua em $a = 0$ mas não é derivável em $a = 0$.

Capítulo 8

Máximos e mínimos com cálculo diferencial

▶ Problema 1. Calcule o rectângulo de área máxima inscrito num triângulo dado, como se indica na figura 8.1.

▶ **Dados**

Um triângulo $\triangle ABC$.

Um rectângulo variável, inscrito no triângulo dado, como se indica na figura.

▶ **Pede-se** As dimensões (comprimento e largura) do rectângulo de área máxima inscrito no triângulo dado.

▶**Resolução:** ...

▶**Escolha um referencial adaptado à resolução do problema** ... Na figura 8.1 escolhemos um referencial com origem em A e com o eixo dos xx contendo o lado AB.

▶**Escolha uma variável x que determina univocamente a posição do rectângulo variável inscrito no triângulo.** :

$$x = \overline{AP} = \text{distância do ponto } A \text{ ao ponto } P$$

▶ **Experimentação** ... Desloque com o rato o ponto P, fazendo variar desta forma o rectângulo inscrito, e observe o gráfico da função:

$$\mathscr{A}(x) = \text{área do rectângulo inscrito, como função de } x = \overline{AP}$$

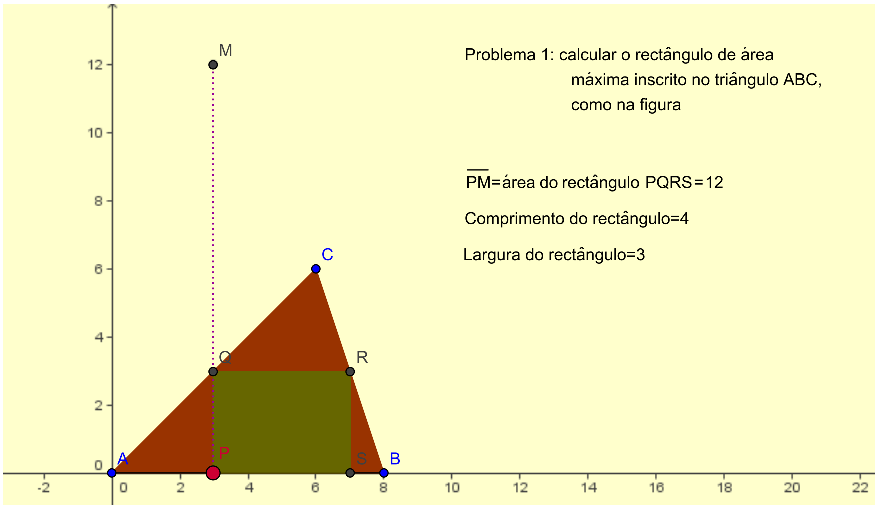


Figura 8.1: Problema 1

Tente adivinhar quais as dimensões (comprimento e largura) do rectângulo de área máxima inscrito no triângulo dado.

APPLET <www.fc.up.pt/cmup/apoiomat>

▶ **Cálculos** ... Resolva agora o problema, usando cálculo diferencial, na situação concreta em que os vértices do triângulo dado, são respectivamente:

$$A = (0, 0), \qquad B = (8, 0), \qquad C = (6, 6)$$

Resolução do Problema 1. com cálculo diferencial

- **Escolha de um referencial adaptado**

$$A = (0, 0), \qquad B = (8, 0), \qquad C = (6, 6)$$

- **Variável** : $x = \overline{AP} =$ abcissa do ponto P

- **Largura do rectângulo** :

  A equação da recta AC é $y = x$. Portanto a largura do rectângulo é igual a x.

- **Comprimento do rectângulo** :

  A equação da recta CB é $Y = -3(X-8)$. Queremos a abcissa X do ponto desta recta cuja ordenada é x. Calculamos:

  $$x = -3(X-8)$$

  Resolvendo em ordem a X vem:

  $$X = \frac{6x - 8x + 48}{6}$$

  Portanto o comprimento do rectângulo é:

  $$\frac{6x - 8x + 48}{6} - x = \frac{48 - 8x}{6} = 8 - \frac{4}{3}x$$

  Note que é sempre positiva para $0 < x < 6$.

- **Área do rectângulo**, como função de x :

  $$\mathscr{A}(x) = \left(8 - \frac{4}{3}x\right) \cdot x = 8x - \frac{4}{3}x^2$$

  Note que é sempre positiva para $0 < x < c$.

- **Cálculo da derivada $\mathscr{A}'(x)$** :

  $$\mathscr{A}'(x) = 8 - \frac{8}{3}x$$

- **Cálculo dos zeros da derivada** :

  $$\mathscr{A}'(x) = 8 - \frac{8}{3}x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3$$

Conclusão: **Fazendo o estudo do sinal de $\mathscr{A}'$ à esquerda e à direita de $c/2$ (faz esse estudo como exercício), concluímos que o rectângulo de área máxima é aquele em que $P = (3,0)$. O comprimento é 4 e a altura é 3. A área máxima é $\mathscr{A}(3) = 12$. Nota que para este rectângulo os vértices E e F são os pontos médios dos lados AC e CB, respectivamente.**

▶ **Problema 2. Entre todos os triângulos rectângulos com a mesma hipotenusa, calcule o que tem área máxima. Ver a figura 8.2.**

▶ **Dados**

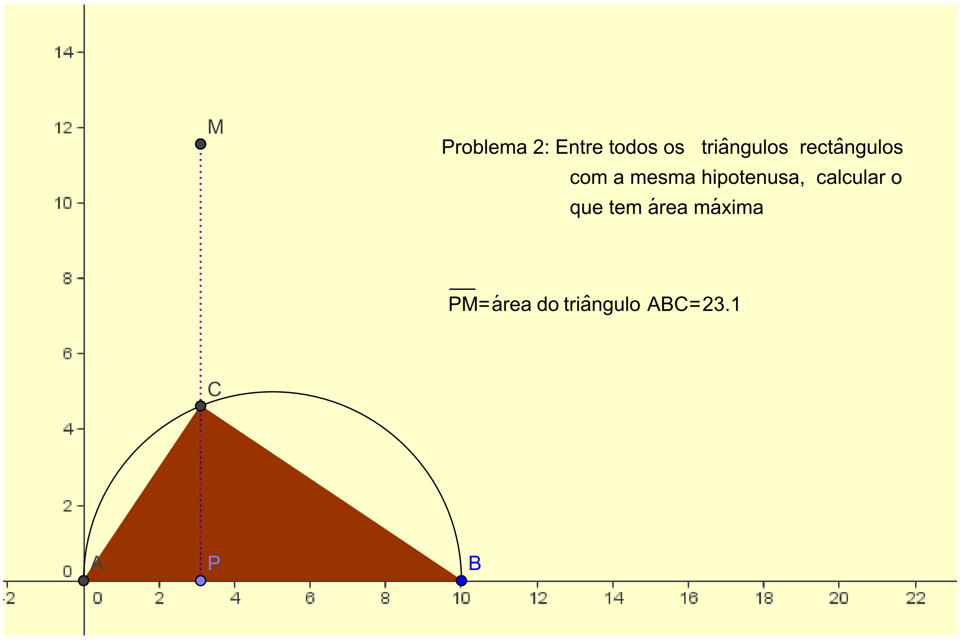


Figura 8.2: Problema 2

um valor fixo h para a hipotenusa dos triângulos rectângulos.

Um triângulo rectângulo variável cuja hipotenusa tem comprimento h.

▶ **Pede-se** o triângulo de área máxima.

▶**Resolução:**

▶ **Escolha de um referencial adaptado** O vértice do triângulo tem que estar sobre uma circunferência cujo diâmetro é h (sabe porquê?).

Escolhemos então um referencial em que o eixo dos xx contem o diâmetro da circunferência que é também a hipotenusa do triângulo rectângulo variável. Veja a figura 8.2.

▶ **Variável escolhida**

$$x = \overline{OP} = \text{abcissa do vértice } C \text{ do triângulo}$$

▶ **Experimentação** Desloque com o rato o ponto P, fazendo variar desta forma o triângulo rectângulo, e observe o gráfico da função:

$$A(x) = \text{área do triângulo como função de } x$$

Tente adivinhar qual é o triângulo de área máxima.

APPLET <www.fc.up.pt/cmup/apoiomat>

▶ **Cálculos** ... Resolva agora o problema, usando cálculo diferencial, na situação concreta em que a hipotenusa é igual a:

$$h = 10$$

Resolução do Problema 2. com cálculo diferencial

Põe $h = 10$ e considera a circunferência de diâmetro 10. O vértice C tem que estar sobre esta circunferência (porquê?).

- **Escolhe um referencial adaptado.** Por exemplo, escolhe um referencial como na figura - o centro da circunferência $O = (5, 0)$ e raio $R = 5$.

  A equação da circunferência é:

$$(x-5)^2 + y^2 = 25$$

- **variável** : $x = \overline{OP} =$ abcissa do ponto P.

- **Altura do triângulo** :

  A equação da circunferência é $(x-5)^2 + y^2 = 25$ e portanto a altura do triângulo é:

$$\sqrt{25 - (x-5)^2}$$

  Nota que é sempre positiva para $|x| < 5$

- **Área do triângulo** :

$$A(x) = 5 \cdot \sqrt{25 - (x-5)^2}$$

- **Cálculo da derivada $A'(x)$** :

$$A'(x) = \frac{-5(x-5)}{\sqrt{25 - (x-5)^2}}$$

- **Cálculo dos zeros da derivada** :

$$A'(x) = \frac{-5(x-5)}{\sqrt{25 - (x-5)^2}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 5$$

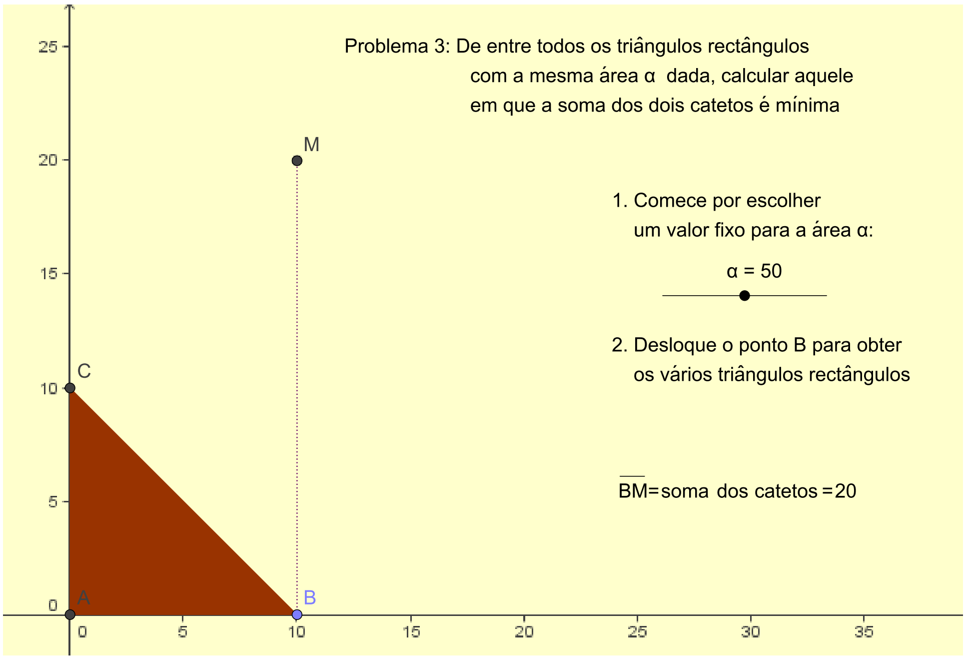


Figura 8.3: Problema 3

Conclusão: Faz o estudo do sinal de A' à esquerda e à direita de $x = 5$ para concluíres que o triângulo de área máxima é aquele em que $C = (5, 5)$. Nota que este triângulo é isósceles.

► **Problema 3. Entre todos os triângulos rectângulos com a mesma área igual a $50\,cm^2$, calcular aquele em que a soma dos dois catetos é mínima. Ver a figura 8.3.**

► **Dados**

o valor fixo $50\,cm^2$ - a área comum a todos os triângulos rectângulos considerados.

Um triângulo rectângulo variável de área $50\,cm^2$.

► **Pede-se** o triângulo rectângulo cuja soma dos dois catetos é mínima.

►**Resolução:**

► **Escolha de um referencial adaptado** Escolhemos um referencial como na figura - o vértice A, correspondente ao ângulo recto, como a origem das coordenadas e os eixos contendo os catetos do triângulo. Veja a figura 8.3.

▶ **Variável escolhida**

$$x = \overline{AB} = \text{o comprimento do cateto } AB$$

▶ **Experimentação** Desloque com o rato o ponto B, fazendo variar desta forma o triângulo rectângulo, e observe o gráfico da função:

$$A(x) = \text{área do triângulo como função de } x$$

Tente adivinhar qual é o triângulo de área mínima.

APPLET <www.fc.up.pt/cmup/apoiomat>

Resolução do Problema3. com cálculo diferencial

- **Escolha de um referencial adaptado**

$$A = (0,0), \qquad B = (x,0)$$

- **variável** : $x = \overline{AB}$ = abcissa do ponto B.

- **Altura do triângulo** :

  Como a área é conhecida e igual a 50, e como a área de um triângulo é igual a $\frac{1}{2}$ (base x altura), deduzimos que:

$$\text{altura} = h = \frac{100}{x}$$

- **Soma dos comprimentos dos dois catetos** :

$$S(x) = \overline{AB} + \overline{AC} = x + \frac{100}{x}$$

- **Cálculo da derivada $S'(x)$** :

$$S'(x) = 1 - \frac{100}{x^2}$$

- **Cálculo dos zeros da derivada** :

$$S'(x) = 1 - \frac{100}{x^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 10$$

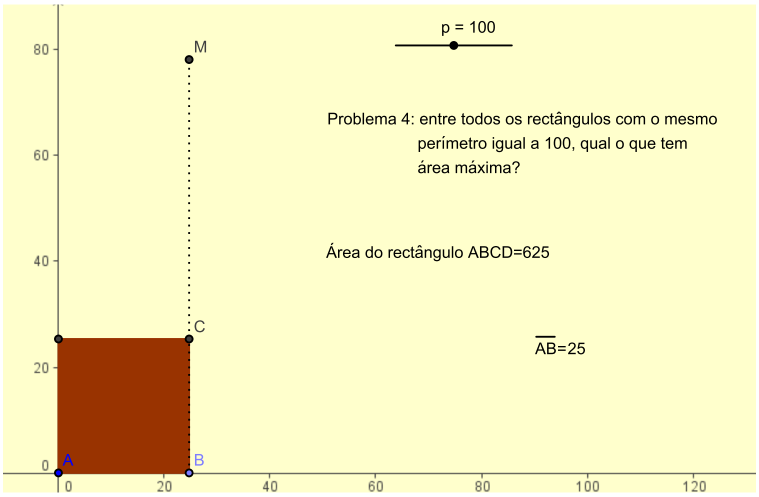


Figura 8.4: Problema 4

Conclusão: O triângulo rectângulo de área igual a $50\,cm^2$, em que a soma dos dois catetos é mínima, é aquele que é isósceles com comprimento dos catetos ambos iguais a 10 cm.

▶ Problema 4. De entre todos os rectângulos com perímetro igual 100 cm calcule aquele que tem área máxima. Ver a figura 8.4.

▶ **Dados**

o valor fixo $100\,cm$ - o perímetro comum a todos os rectângulos considerados.

Um rectângulo variável de perímetro $100\,cm$.

▶ **Pede-se** o rectângulo cuja área é máxima.

▶ **Escolha de um referencial adaptado** Escolhemos um referencial como na figura - o vértice A como a origem das coordenadas e os eixos contendo dois dos lados do rectângulo. Veja a figura 8.4.

▶**Resolução:**

▶ **Variável escolhida**

$$x = \overline{AB} = \text{o comprimento do lado } AB$$

▶ **Experimentação** Desloque com o rato o ponto B, fazendo variar desta forma o rectângulo, e observe o gráfico da função:

$$\mathscr{A}(x) = \text{área do rectângulo } ABCD \text{, como função de } x$$

Tente adivinhar qual é o rectângulo de área máxima.

APPLET <www.fc.up.pt/cmup/apoiomat>

Resolução do Problema 4. com cálculo diferencial

- **Escolha de um referencial adaptado**

$$A = (0,0), \qquad B = (x,0)$$

- **variável** : $x = \overline{AB}$ = abcissa do ponto B = comprimento do rectângulo.

- **Largura ℓ do rectângulo** :

  Como o perímetro é conhecido e igual a 100, e como esse perímetro é igual a 2× (comprimento + largura), deduzimos que:

$$2 \times (x + \ell) = 100$$

  donde se tira ao valor da largura:

$$\text{largura} = \ell = 50 - x$$

- **Área do rectângulo** :

$$\mathscr{A}(x) = \text{comprimento} \times \text{largura} = x \cdot (50 - x) = 50x - x^2$$

- **Cálculo da derivada $\mathscr{A}'(x)$** :

$$\mathscr{A}'(x) = 50 - 2x$$

- **Cálculo dos zeros da derivada** :

$$\mathscr{A}'(x) = 50 - 2x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 25$$

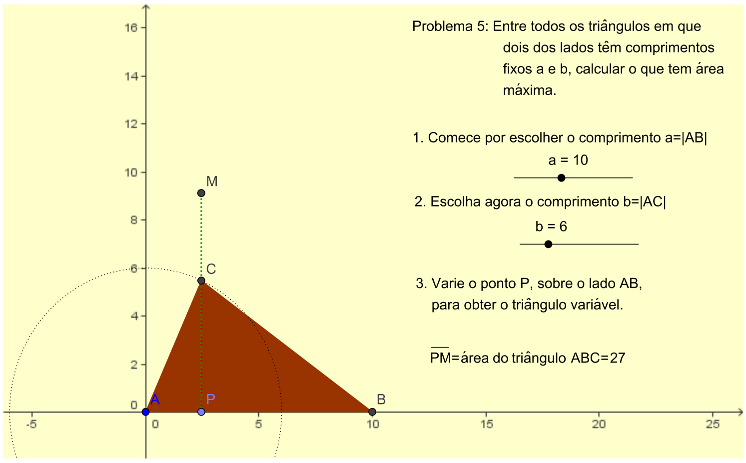


Figura 8.5: Problema 5

Conclusão: Entre todos os rectângulos com perímetro 100 o que tem área máxima é o quadrado de lado 25. A sua área é 625 cm^2.

▶ Problema 5. Entre todos os triângulos em que dois dos lados têm comprimentos iguais a $8\,cm$ e a $6\,cm$, respectivamente, calcule aquele que tem área máxima. Ver a figura 8.5.

- ▶ **Dados**

  os valores fixos, $8\,cm$ e $6\,cm$, respectivamente, do dois dos lados de um triângulo variável.

- ▶ **Pede-se** o triângulo cuja área é máxima.

▶Resolução:

- ▶ **Escolha de um referencial adaptado** Escolhemos um referencial como na figura - o vértice A como a origem das coordenadas e o eixo do xx contendo o lado AB do triângulo. Veja a figura 8.5.

- ▶ **Variável escolhida**

$\theta =$ ângulo que o vector $\overrightarrow{AC}$ faz com a parte positiva do eixo dos xx

▶ **Experimentação** Desloque com o rato o ponto θ, sobre o selector, fazendo variar o ângulo θ, e portanto o triângulo, e observea o gráfico da função:

$\mathscr{A}(x) =$ área do triângulo ABC, como função de θ

Tente adivinhar qual é o triângulo de área máxima.

APPLET <www.fc.up.pt/cmup/apoiomat>

Resolução do Problema 5. com cálculo diferencial

- **Escolha de um referencial adaptado** Suponha que o lado de comprimento 8 é o lado AB e escolha um referencial tal que:

$$A = (0,0), \quad \text{e} \quad B = (8,0)$$

- **variável** : suponha agora que o lado de comprimento 6 é o lado AC. O vértice C tem pois que estar sobre uma circunferência de raio 6 centrada em A. Como variável escolhemos por exemplo:

$\theta =$ ângulo que o vector $\overrightarrow{AC}$ faz com a parte positiva do eixo dos xx

É claro que basta considerar os valores de θ entre 0 e π:

$$0 < \theta < \pi$$

Veja a figura.

- **Altura h do triângulo** :

$$\text{altura} = h = 6 \cdot \sin\theta$$

- **Área do triângulo** :

$$\mathscr{A}(\theta) = \frac{1}{2}\text{base} \times \text{altura} = 24 \cdot \sin\theta$$

- **Cálculo da derivada $\mathscr{A}'(x)$** :

$$\mathscr{A}'(\theta) = 24 \cdot \cos\theta$$

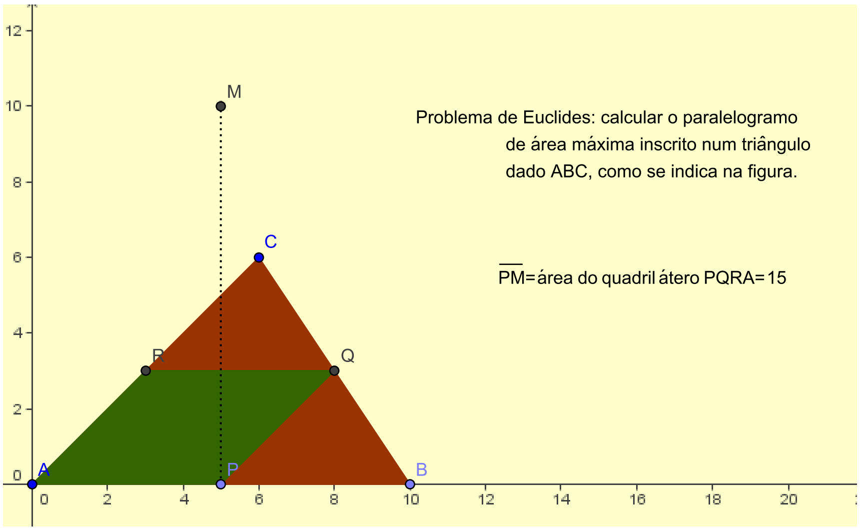


Figura 8.6: Problema 6. Problema de Euclides.

- **Cálculo dos zeros da derivada** :

$$\mathscr{A}'(\theta) = 48 \cdot \cos\theta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \theta = \pi/2$$

(é claro que basta considerar os valores de θ entre 0 e π).

Conclusão: Entre todos os triângulos em que dois dos lados têm comprimentos iguais a $8\,cm$ e a $6\,cm$, respectivamente, o que tem área máxima é o triângulo rectângulo. A sua área é $24\,cm^2$.

▶ Problema 6 [Problema de Euclides]. Calcule o paralelogramo de área máxima inscrito num triângulo dado, como se indica na figura ??.

▶ **Dados**

Um triângulo $\triangle ABC$.

Um paralelogramo variável, inscrito no triângulo dado, como se indica na figura.

▶ **Pede-se** As dimensões do paralelogramo de área máxima inscrito no triângulo dado.

▶Resolução: ...

▶**Escolha um referencial adaptado à resolução do problema** ... Na figura escolhemos um referencial com origem em A e com o eixo dos xx contendo o lado AB.

▶**Escolha uma variável x que determina univocamente a posição do paralelogramo variável inscrito no triângulo.** :

$$x = \overline{AP} = \text{distância do ponto } A \text{ ao ponto } P$$

▶ **Experimentação** ... Desloque com o rato o ponto P, fazendo variar desta forma o paralelogramo inscrito, e observe o gráfico da função:

$$\mathscr{A}(x) = \text{área do paralelogramo inscrito, como função de } x = \overline{AP}$$

Tente adivinhar quais as dimensões do paralelogramo de área máxima inscrito no triângulo dado.

APPLET <www.fc.up.pt/cmup/apoiomat>

▶ **Cálculos** ... Resolva agora o problema, com cálculo diferencial, na situação concreta em que os vértices do triângulo dado, são respectivamente:

$$A = (0, 0), \qquad B = (10, 0), \qquad C = (6, 6)$$

Resolução do Problema 6. com cálculo diferencial

- **Escolha de um referencial adaptado**

$$A = (0, 0), \qquad B = (10, 0), \qquad C = (6, 6)$$

- **Variável** :

$$x = \overline{AP} = \text{abcissa do ponto } P = \text{comprimento do paralelogramo}$$

Basta considerar valores de x entre 0 e 10: $0 < x < 10$.

- **Altura do paralelogramo** :

A equação da recta BC é:

$$y = -\frac{3}{2}(x - 10)$$

Portanto a altura do rectângulo é igual a $h = \frac{3}{2}(10 - x)$. Repare que é sempre positiva uma vez que $0 < x < 10$.

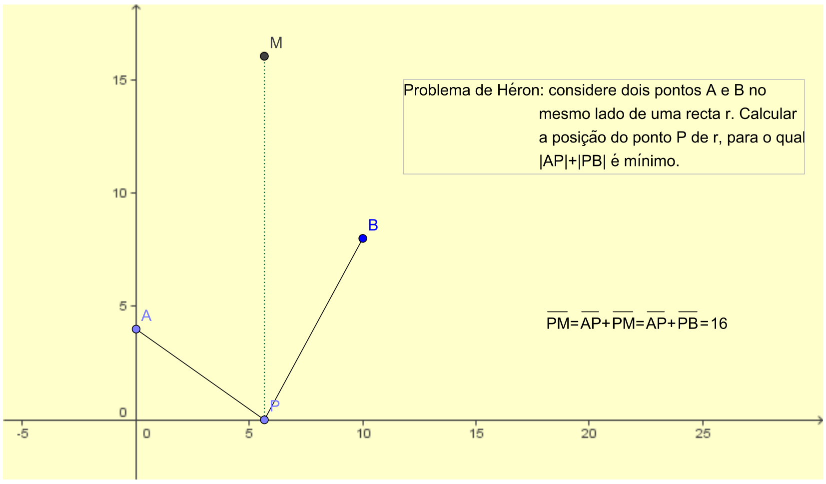


Figura 8.7: Problema 7. Problema de Héron.

- **Área do c**, como função de x :

$$\mathscr{A}(x) = \text{compriemnto} \times \text{altura} = x \cdot \frac{3}{2}(10 - x) = 15x - \frac{3}{2}x^2$$

- **Cálculo da derivada $\mathscr{A}'(x)$** :

$$\mathscr{A}'(x) = 15 - 3x$$

- **Cálculo dos zeros da derivada** :

$$\mathscr{A}'(x) = 15 - 3x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 5$$

Conclusão: Fazendo o estudo do sinal de A' à esquerda e à direita de $c/2$ (faz esse estudo como exercício), concluímos que o paralelogramo de área máxima é aquele em que $P = (5, 0)$ - o ponto médio do lado AB. O comprimento é 5 e a altura é $15/2$. A área máxima é $\mathscr{A}(5) = 75/2$.

▶ **Problema 7 [Problema de Heron]. Considere dois pontos A e B no mesmo semiplano determinado por uma recta r, como se indica na figura. Considere agora um ponto $P \in r$, variável sobre a recta r, e calcule a posição deste ponto P para a qual a soma das distâncias $\overline{AP} + \overline{PB}$ é mínima. Ver a figuraproblema7.**

▶ **Dados**

dois pontos A e B no mesmo semiplano determinado por uma recta r.

um ponto $P \in r$, variável sobre a recta r,, como se indica na figura.

▶ **Pede-se** a posição do ponto P para a qual a soma das distâncias $\overline{AP} + \overline{PB}$ é mínima.

▶**Resolução:** ...

▶**Escolha um referencial adaptado à resolução do problema** ... Na figura escolhemos um referencial com o eixo dos xx igual à recta r e o eixo dos yy passando pelo ponto A.

▶**Escolha uma variável x que determina univocamente a posição do ponto variável P.** :

$$x = \overline{OP} = \text{abcissa do ponto } P$$

▶ **Experimentação** ... Desloque com o rato o ponto P, fazendo variar desta forma a soma das distâncias $S(P) = \overline{AP} + \overline{PB}$, e observe o gráfico da função:

$$S(x) = \text{soma das distâncias } \overline{AP} + \overline{PB} \text{ como função de } x = \overline{OP}$$

Tente adivinhar qual é a posição do ponto P para a qual a soma das distâncias $S(P) = \overline{AP} + \overline{PB}$ é mínima.

APPLET <www.fc.up.pt/cmup/apoiomat>

▶ **Cálculos** ... Resolve agora o problema, com cálculo diferencial, na situação concreta em que:

$$A = (0, 4), \quad B = (10, 8)$$

Resolução do Problema 7. com cálculo diferencial

- **Escolha de um referencial adaptado**

$$A = (0, 4), \qquad B = (10, 8), \qquad \text{recta } r : y = 0$$

- **Variável** :

$$x = \overline{OP} = \text{abcissa do ponto } P$$

- **Soma das distâncias $S(P) = \overline{AP} + \overline{PB}$, como função de x** :

$$\begin{aligned} S(x) &= \overline{AP} + \overline{PB} \\ &= \sqrt{4+x^2} + \sqrt{64+(10-x)^2} \end{aligned}$$

- **Cálculo da derivada $S'(x)$** :

$$S'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{4+x^2}} + \frac{-2(10-x)}{2\sqrt{64+(10-x)^2}}$$

- **Cálculo dos zeros da derivada** :

$$\begin{aligned} S'(x) &= \frac{x}{\sqrt{4+x^2}} + \frac{-(10-x)}{\sqrt{64+(10-x)^2}} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 3x^2 + 4x - 20 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x = -10/3 \,\text{ou}\, x = 2 \end{aligned}$$

  – Para $x = -10/3$ obtemos o ponto $P = (-10/3, 0)$ e a soma das distâncias $\overline{AP} + \overline{PB}$ é, neste caso, igual a:

  ...

  – Para $x = 2$ obtemos o ponto $P = (2, 0)$ e a soma das distâncias $\overline{AP} + \overline{PB}$ é, neste caso, igual a:

  ...

Conclusão: **Fazendo o estudo do sinal de $S'(x)$ à esquerda e à direita de $x = -10/3$ e à esquerda e à direita de $x = 2$ (faz esse estudo como exercício), concluímos . As duas soluções correspondem às duas soluções geométricas representadas nas figuras seguintes:**

► **Problema 8. Considere dois pontos A e B no mesmo semiplano determinado por uma recta r, como se indica na figura. Considere agora um segmento $[PQ]$ de comprimento fixo, mas que se desloca sobre a recta r, e calcule a posição do ponto P para a qual a soma das distâncias $\overline{AP} + \overline{QB}$ é mínima. Ver a figura 8.8.**

► **Dados**

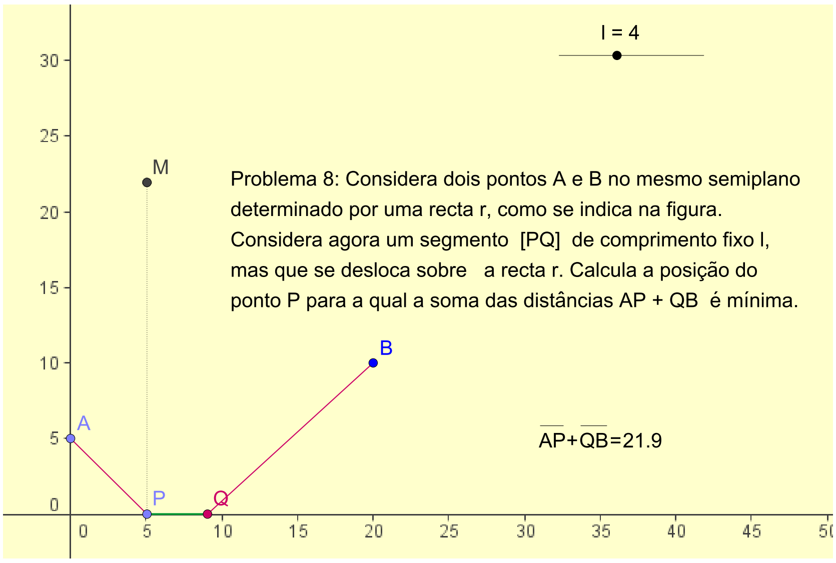


Figura 8.8: Problema 8.

dois pontos A e B no mesmo semiplano determinado por uma recta r.

um segmento $[PQ]$ de comprimento fixo, mas que se desloca sobre a recta r, como se indica na figura.

▶ **Pede-se** a posição do ponto P para a qual a soma das distâncias $\overline{AP} + \overline{QB}$ é mínima.

▶**Resolução:** ...

▶**Escolha um referencial adaptado à resolução do problema** ... Na figura escolhemos um referencial com o eixo dos xx igual à recta r e o eixo dos yy passando pelo ponto A.

▶**Escolha uma variável x que determina univocamente a posição do ponto variável P.** :

$$x = \overline{OP} = \text{abcissa do ponto } P$$

▶ **Experimentação** ... Desloque com o rato o ponto P, fazendo variar desta forma a posição do segmento $[PQ]$ e, portanto, a soma das distâncias $\overline{AP} + \overline{QB}$, e observe o gráfico da função:

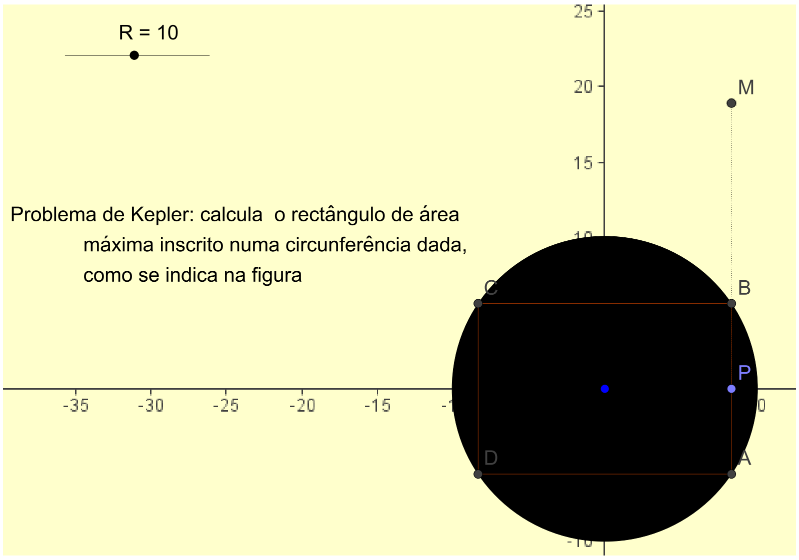


Figura 8.9: Problema 9. Problema de Kepler.

$S(x)$ = soma das distâncias $\overline{AP} + \overline{QB}$ como função de $x = \overline{OP}$

Tente adivinhar qual é a posição do ponto P para a qual a soma das distâncias $S(P) = \overline{AP} + \overline{QB}$ é mínima.

APPLET <www.fc.up.pt/cmup/apoiomat>

▶ **Cálculos** ... Resolve agora o problema, com cálculo diferencial, na situação concreta em que:

$$A = (0, 5), \quad B = (20, 10), \quad \overline{PQ} = 4$$

▶ **Problema 9 [Problema de Kepler]. Calcule o rectângulo de área máxima inscrito numa circunferência dada, como se indica na figura 8.9.**

▶ **Dados**

Uma circunferência.

Um rectângulo variável, inscrito nessa circunferência, como se indica na figura.

▶ **Pede-se** As dimensões (comprimento e largura) do rectângulo de área máxima inscrito na circunferência dada.

▶**Resolução:** ...

▶**Escolha um referencial adaptado à resolução do problema** ... Na figura escolhemos um referencial com origem em O, o centro da circunferência.

▶**Escolha uma variável x que determina univocamente a posição do rectângulo variável.** :

$$x = \text{abcissa do vértice } A \text{ do rectângulo variável}$$

▶ **Experimentação** ... Desloque com o rato o ponto P, fazendo variar desta forma o rectângulo inscrito, e observe o gráfico da função:

$$\mathscr{A}(x) = \text{área do rectângulo inscrito, como função de } x = \overline{OP}$$

Tente adivinhar quais as dimensões (comprimento e largura) do rectângulo de área máxima inscrito.

APPLET <www.fc.up.pt/cmup/apoiomat>

▶ **Cálculos** ... Resolve agora o problema, com cálculo deiferencial, na situação concreta em que a circunferência tem raio $R = 10$ cm.

Resolução com cálculo diferencial

- **Escolha de um referencial adaptado**

$$A = (0,4), \qquad B = (10,8), \qquad \text{recta } r : y = 0$$

- **Variável** :

$$x = \overline{OP} = \text{abcissa do ponto } P$$

- **Soma das distâncias $S(P) = \overline{AP} + \overline{PB}$, como função de x** :

$$\begin{aligned} S(x) &= \overline{AP} + \overline{PB} \\ &= \sqrt{4 + x^2} + \sqrt{64 + (10 - x)^2} \end{aligned}$$

- **Cálculo da derivada $S'(x)$** :

$$S'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{4+x^2}} + \frac{-2(10-x)}{2\sqrt{64+(10-x)^2}}$$

- **Cálculo dos zeros da derivada** :

$$\begin{aligned} S'(x) &= \frac{x}{\sqrt{4+x^2}} + \frac{-(10-x)}{\sqrt{64+(10-x)^2}} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 3x^2 + 4x - 20 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x = -10/3 \,\text{ou}\, x = 2 \end{aligned}$$

  - Para $x = -10/3$ obtemos o ponto $P = (-10/3, 0)$ e a soma das distâncias $\overline{AP} + \overline{PB}$ é, neste caso, igual a:

...

  - Para $x = 2$ obtemos o ponto $P = (2, 0)$ e a soma das distâncias $\overline{AP} + \overline{PB}$ é, neste caso, igual a:

...

Conclusão: **Fazendo o estudo do sinal de $S'(x)$ à esquerda e à direita de $x = -10/3$ e à esquerda e à direita de $x = 2$ (faça esse estudo como exercício), concluímos. As duas soluções correspondem a duas soluções geométricas, como pode ser comprovado como exercício.**

Capítulo 9

Linguagem. Provas

9.1 Linguagem. Provas

O aluno que inicia estudos matemáticos no ensino superior, sobretudo em cursos com forte componente Matemática, tem, em geral, grande dificuldade em compreender e escrever provas matemáticas. Isto deve-se, na minha opinião, ao facto de que o ensino da Matemática a nível secundário, omitir quase por completo a estrutura teórica subjacente, sendo pouco mais do que um amontado atabalhoado de resultados sem encadeamento lógico, precário de ideias, não se percebendo qual o fio da meada.

Ao pretender que o aluno desenvolva uma pretensa aprendizagem pela descoberta, ao mesmo tempo não lhes facultando os meios teóricos para tal, caiu-se no ridículo de formar alunos que conhecem conceitos tão nobres como a razão de ouro, números de Fibonnacci e outra maravilhas que tais, mas revelando carências difíceis de imaginar, cometendo erros inaceitáveis em operações elementares de aritmética ou cálculo algébrico, para além de uma grande inaptidão para compreenderem algoritmos e/ou raciocínios lógico-formais.

Para agravar a situação, estimula-se insistentemente o cálculo com recurso à calculadora, transformando a Matemática numa ciência experimental, validada com um mero olhar de relance para o ecran de uma máquina. Desapareceu o tempo de reflexão, a escrita manual com papel e lápis, o prazer do desenho da simbologia e das expressões com inegável beleza estética, tão características da Matemática.

Neste contexto, provocado por alguns iluminados que ainda detêm a possibilidade de decidir, diga-se, de forma doentiamente instável, sobre os conteúdos do ensino secundário, os professores de Matemática continuam ser uns verdadeiros heróis, a eles cabendo o exclusivo mérito de ainda conseguirem preparar alguns alunos de inegável talento.

O aspecto formal da Matemática, neste momento, está pois reduzido a uma expressão quase insignificante! E, no entanto, é exactamente através do seu conteúdo abstracto (axiomas, teoremas, teorias) que a Matemática

- estimula diversos modos de pensamento, ao mesmo tempo versáteis e potentes
- desenvolve o raciocínio lógico e dedutivo e as capacidades de generalização e abstracção
- permite a modelação de situações reais e, através do seu potencial de representação simbólica (fórmulas, equações, gráficos), facilita a sua simulação, medição e controlo
- desenvolve a capacidade de formular e resolver problemas de forma precisa, conduzindo rapidamente ao cálculo, controlo, decisão e resultados
- desenvolve a criatividade, a versatilidade de adaptação a novas situações e superação de novos desafios
- desenvolve a capacidade de comunicar de forma clara e não ambígua.

Que fique claro que não se está, de forma nenhuma, a negar o papel importante da intuição na compreensão dos conceitos, nem a utilidade das ferramentas de cálculo numérico ou algébrico, nem a importância educativa das aplicações (sérias e não ridiculamente trivializadas ou preguiçosamente fabricadas!). O que não se pode é sacrificar, em nome de nenhuma dessas coisas, o papel da abstracção e formalismo, sem os quais o resto não faz qualquer sentido.

É por tudo isto que o aluno do ensino superior deve dar uma grande importância à compreensão das demonstrações, desde logo nos primeiros cursos de Cálculo, Álgebra Linear, Geometria, etc. Neste sentido o aluno deve contrariar o equívoco da moda de que é apenas através das aplicações, ou de intuições, muitas vezes superficiais, que se consegue ter sucesso na aprendizagem da Matemática. Compreender a estrutura de uma demonstração e, mais importante, conseguir desenvolver a capacidade de construir as suas próprias demonstrações, é certamente um dos aspectos mais formativos da Matemática.

Há outro factor decisivo para o sucesso na aprendizagem da Matemática - adoptando uma frase célebre 5% *de inspiração e* 95% *de transpiração*. Por isso AO TRABALHO.

Nesta área vamos dar algumas indicações que esperamos possam vir a ser úteis para as disciplinas que agora inicia.

QED= quod erat demonstradum (como queríamos demonstrar).

▶ O que é uma proposição?

É uma afirmação ou declaração que é ou verdadeira (V) ou falsa (F) (e nunca as duas coisas ao mesmo tempo). O seu "valor lógico" é pois V ou F. Usamos as letras $\mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{R}, \ldots$ para designar proposições.

Exemplos:

São exemplos de proposições:

O mundo acabará na próxima segunda-feira.
$\sqrt{2} > 1.$
Não há nenhum número primo maior que $2^{1\,000\,000}$.
A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180º.
Todo o número inteiro é par.

Mas as frases seguintes **não são** proposições:

Que horas são?
Vai-te embora!
$x^2 > 8.$
$a^2 + b^2 = c^2.$

As duas últimas não são proposições porque não sabemos o que é x, nem a, b ou c.

▶ Quais são as principais operações que permitem combinar ou modificar proposições?

De facto, tal como em aritmética existem operações que permitem combinar ou modificar números, tais como $+$, $\times$, etc, em lógica existem operações que permitem combinar ou modificar proposições. As principais são:

- **não** - Se $\mathcal{P}$ é uma proposição, escreve-se simbolicamente $\sim \mathcal{P}$ para a proposição **não** $\mathcal{P}$.
- **e** - Se $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ são duas proposições, escreve-se simbolicamente $\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$ para a proposição $\mathcal{P}$ **e** $\mathcal{Q}$.
- **ou** - simbolicamente $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$ designa a proposição $\mathcal{P}$ **ou** $\mathcal{Q}$.
- **se** ... **então** - simbolicamente $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ designa a proposição **se** $\mathcal{P}$ **então** $\mathcal{Q}$. Também se lê $\mathcal{P}$ **implica** $\mathcal{Q}$.

Note que pode não ser muito evidente a tradução destas operações usando linguagem comum. Por exemplo, qual é a negação da proposição:

"todos os triângulos são equiláteros" ?

Uma resposta comum é:

nenhum triângulo é equilátero

o que está errado! De facto a resposta certa é, como veremos, *existe pelo menos um triângulo que não é equilátero.*

▶ Qual o valor lógico da proposição $\sim \mathcal{P}$, como função do valor lógico de $\mathcal{P}$?

Por palavras: *$\sim \mathcal{P}$ é verdadeira quando $\mathcal{P}$ é falsa, e é falsa quando $\mathcal{P}$ é verdadeira.*

Numa tabela:

$\mathcal{P}$	$\sim \mathcal{P}$
V	F
F	V

▶ Qual o valor lógico da proposição $\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$, como função dos valores lógicos de $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$?

Por palavras: *Uma proposição do tipo $\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$ é verdadeira quando, e apenas quando, ambas as proposições, $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$, o forem. Dito de outro modo, a proposição $\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$ é falsa quando, e só quando, pelo menos uma das proposições $\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$ for falsa.*

Numa tabela:

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

▶ Qual o valor lógico da proposição $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$, como função dos valores lógicos de $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$?

Por palavras: *Uma proposição do tipo $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$ é verdadeira quando, e só quando, pelo menos uma das proposições, $\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$, o forem. Dito de outro modo, a proposição $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$ é falsa quando, e apenas quando, as proposições $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ forem ambas falsas.*

Numa tabela:

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

▶ Qual o valor lógico da proposição $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$, como função dos valores lógicos de $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$?

Por palavras: *Uma proposição do tipo "$\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$", que traduz o facto de a validade de $\mathcal{P}$ implicar a validade de $\mathcal{Q}$, é falsa quando e apenas quando a proposição $\mathcal{P}$ for verdadeira mas $\mathcal{Q}$ não o for.*

Numa tabela:

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

▶ Quando é que duas proposições $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ são equivalentes do ponto de vista lógico?

Quando $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ **e** $\mathcal{Q} \Leftrightarrow \mathcal{P}$. Por outras palavras, quando $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ têm o mesmo valor lógico. Nesse caso escreve-se $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$. A tabela de valores lógicos é obviamente:

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Por palavras: *$\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$ é verdadeira quando $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ são ambas verdadeiras ou ambas falsas, e é falsa quando uma das proposições $\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$ é verdadeira e a outra falsa.*

▶ Como posso provar a proposição:

(**se** *n é um número par* **então** *n^2 é também par*) **?**

Antes do mais, eu devo ter uma definição precisa do que é um número par. Como é sabido, é um número da forma $2k$ para algum inteiro k. Simbolicamente:

$$n \text{ é par quando e apenas quando (ou se e só se) } \exists k \in \mathbb{Z} : \quad n = 2k$$

Sei agora exactamente o que devo provar: supondo que n é da forma $2k$ para algum inteiro k quero provar que n^2 é também da forma $2m$ para algum inteiro m. Toda a gente é capaz de escrever a prova:

- se n é par, isto é, se $\exists k \in \mathbb{Z}: \quad n = 2k$ então:

$$n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2 \cdot \underbrace{(2k^2)}_{m}$$

- Logo $\exists m \in \mathbb{Z}: \quad n^2 = 2m$. De facto $m = 2k^2$ é um inteiro.
- Portanto n^2 é par QED.

▶ O que são os quantificadores universais?

São as expressões:

- **todo(s)**, ou **para todo(s)**. Simbolicamente $\forall$
- **existe**, ou **existe pelo menos um**. Simbolicamente $\exists$

▶ Como nego as proposições seguintes:

$\forall x \in S \;\; \mathcal{P}(x)$ **é válida, abreviadamente** $\forall x \in S, \;\; \mathcal{P}(x)$

e

$\exists x \in S$ **tal que** $\mathcal{P}(x)$ **é válida, abreviadamente** $\exists x \in S: \mathcal{P}(x)$?

Por palavras: a negação de (para todo o $x \in S$, é válida a proposição $\mathcal{P}(x)$) é (existe pelo menos um $x \in S$ tal que a negação de $\mathcal{P}(x)$ é válida).

Por palavras: a negação de (existe pelo menos um $x \in S$ tal que $\mathcal{P}(x)$ é válida) é (para todo o $x \in S$, é válida a negação de $\mathcal{P}(x)$).

Simbolicamente:

$$\sim (\forall x \in S, \quad \mathcal{P}(x)) \Leftrightarrow (\exists x \in S : \sim \mathcal{P}(x))$$

$$\sim (\exists x \in S : \mathcal{P}(x)) \Leftrightarrow (\forall x \in S, \quad \sim \mathcal{P}(x))$$

Exemplos:

Afirmação: (todas as maçãs são verdes). Negação: (existe pelo menos uma maçã que não é verde).

Afirmação: $(\forall x \in \mathbb{R}: \; f(x) > 5)$. Negação: $(\exists x \in \mathbb{R}: \; f(x) \leq 5)$.

Afirmação: $(\exists y > 0: \; 0 < g(y) \leq 1)$. Negação: $(\forall y > 0: \; g(y) \leq 0 \vee g(y) > 1)$.

Afirmação: $\forall \epsilon > 0, \underbrace{\exists m \in \mathbb{N} : \forall n \geq m : |x_n - 1| < \epsilon}_{\mathcal{P}(\epsilon)}$. Negação $(\exists \epsilon > 0 : \sim \mathcal{P}(\epsilon))$, isto é:

$$\exists \epsilon > 0 : \forall m \in \mathbb{N}, \exists n \geq m : |x_n - 1| \geq \epsilon$$

▶ **Qual o significado das seguintes proposições:**

$$(\forall n \in \mathbb{Z})\,(\exists k \in \mathbb{Z}) : \; n = 2k$$

$$(\exists n \in \mathbb{Z})\,(\exists k \in \mathbb{Z}) : \; n = 2k \quad ?$$

A primeira diz que *todo o inteiro n é par* - proposição falsa, é claro!

A segunda diz que *existe um inteiro n que é par* - proposição verdadeira, é claro!

▶ **Como mostro que:**

$$\sim (\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}) \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{P} \wedge (\sim \mathcal{Q}) \,?$$

Por exemplo, construindo uma tabela de valores lógicos e confirmando que $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ têm sempre o mesmo valor lógico:

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\sim \mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$	$\sim (\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q})$	$\mathcal{P} \wedge \sim \mathcal{Q}$
V	V	F	V	F	F
V	F	V	F	V	V
F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	F	F

Portanto *a negação de "**se** $\mathcal{P}$ **então** $\mathcal{Q}$" é equivalente a "$\mathcal{P}$ **e** **não** $\mathcal{Q}$"*.

▶ **Como mostro que:**

$$\sim (\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}) \quad \Leftrightarrow \quad (\sim \mathcal{P}) \vee (\sim \mathcal{Q})$$

e

$$\sim (\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \quad \Leftrightarrow \quad (\sim \mathcal{P}) \wedge (\sim \mathcal{Q}) \,?$$

Cosntruindo uma tabela de valores lógicos, como na questão anterior (faça isto).

▶ Negue a proposição seguinte:

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \; \underline{\textbf{se}} \; n \text{ é par } \underline{\textbf{então}} \; n^2 \text{ também é par}$$

Usamos $\sim (\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}) \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{P} \wedge (\sim \mathcal{Q})$. Para isso, isolemos as proposições que constituem a proposição dada:

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \; \underline{\textbf{se}} \; \underbrace{n \text{ é par}}_{\mathcal{P}(n)} \; \underline{\textbf{então}} \; \underbrace{n^2 \text{ também é par}}_{\mathcal{Q}(n)}$$

Mas $\mathcal{P}(n) \Leftrightarrow (n$ é um inteiro par$) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : n = 2k$, e analogamente $\mathcal{Q}(n) \Leftrightarrow (n^2$ é um inteiro par$) \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{Z} : n = 2m$.

A proposição dada pode pois ser posta na forma simbólica:

$$(\forall n \in \mathbb{Z})\,(\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{Q}(n))$$

Vamos negá-la:

$$\sim ((\forall n \in \mathbb{Z})\,(\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{Q}(n)))$$

usando a regra para negar um $\forall$ vem:

$$(\exists n \in \mathbb{Z}) \sim (\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{Q}(n))$$

(a negação de *"todas as maçãs são verdes"* é *"existe uma maçã que não é verde"*). Usando agora a questão anterior vem:

$$(\exists n \in \mathbb{Z})\,(\mathcal{P}(n) \wedge \sim \mathcal{Q}(n))$$

que é a negação da proposição dada.

Por palavras: *"existe pelo menos um inteiro n que é par* **e** *cujo quadrado não é par"*

Claro que esta proposição é falsa por ser a negação da proposição dada que sabemos já ser verdadeira.

▶ É verdade que $f(n) = n^2 + n + 17$ é um número primo, $\forall n \in \mathbb{N}$?

Os primeiros números são:

$$f(1) = 19; \quad f(2) = 23; \quad f(3) = 29; \quad f(4) = 37; \; ... \; f(8) = 89; \; ... \; f(12) = 173$$

De facto, para já são todos primos. Será que está provado? É claro que não. Verificamos apenas para alguns e não para todos. Infelizmente este continua a ser um erro comum - tomar a parte pelo todo.

Se $\mathcal{P}(n)$ designa a proposição $(n^2 + n + 17$ é primo), o que pretendo provar é que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \, \mathcal{P}(n)$$

O que se mostrei até agora é que:

$$\exists n \in \mathbb{N},\, \mathcal{P}(n)$$

(por exemplo, $n = 1, 2, 3...$). Como posso provar que a afirmação $\forall n,\, \mathcal{P}(n)$ é falsa? Mostrando que existe pelo menos um n tal que $n^2 + n + 17$ não é primo, isto é, exibindo um **contraexemplo**. De facto, para $n = 17$:

$$17^2 + 17 + 17 = 17 \cdot 19$$

não é primo, e a afirmação é pois falsa.

▶ Que outras expressões equivalentes são usadas em Matemática para:

$$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}\,?$$

se $\mathcal{P}$ **então** $\mathcal{Q}$	$\mathcal{Q}$ é válida desde que $\mathcal{P}$ o seja
$\mathcal{P}$ implica $\mathcal{Q}$	$\mathcal{Q}$ é válida sempre que $\mathcal{P}$ o seja
$\mathcal{P}$ **só se** $\mathcal{Q}$	$\mathcal{P}$ é uma **condição suficiente** para $\mathcal{Q}$
$\mathcal{Q}$ **se** $\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$ é uma **condição necessária** para $\mathcal{P}$

Na proposição (**se** $\mathcal{P}$ **então** $\mathcal{Q}$), $\mathcal{P}$ diz-se a **hipótese** (ou o antecedente), e $\mathcal{Q}$ a **tese** (ou o consequente, ou ainda, a conclusão). A hipótese é pois aquilo que é assumido e a tese aquilo que se pretende provar.

▶ Identifique a hipótese, e a tese de cada uma das proposições seguintes:

(a). *se n é um inteiro, então $2n$ é par.*

(b). *posso dar aulas só se tiver uma licenciatura.*

(c). *o carro não funciona sempre que não tenha gasolina.*

(d). *continuidade é uma condição necessária para diferenciabilidade.*

As proposições são equivalentes às seguintes:

(a). **se** n é um inteiro, **então** $2n$ é par.

(b). **se** posso dar aulas **então** tenho uma licenciatura.

(c). **se** o carro não tiver gasolina **então** não funciona .

(d). diferenciabilidade implica continuidade, ou **se** uma função for diferenciável **então** é contínua.

A proposição anterior permite agora identificar a hipótese e a tese. Note que as afirmações pode ser falsas ou verdadeiras.

▶ Como posso provar que uma proposição do tipo:

$$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$$

é verdadeira?

Por dois processos:

- directamente: suponho que $\mathcal{P}$ é verdadeira e provo que então $\mathcal{Q}$ também o é.
- por **redução ao absurdo**: suponho que $\mathcal{Q}$ é falsa e provo que então $\mathcal{P}$ também o é. Como? - em geral derivando uma "contradição" ou um "absurdo", isto é, algo incompatível com a veracidade de $\mathcal{P}$.

Uma prova directa para uma implicação do tipo $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ é constituída por uma cadeia de argumentos que, partindo da suposição que a hipótese $\mathcal{P}$ é verdadeira, permitem concluir a veracidade da tese $\mathcal{Q}$. Esses argumentos consistem de:

- definições
- afirmações e axiomas que são aceites como verdadeiros
- teoremas que previamente foram demonstrados
- afirmações que são logicamente implicadas por outras anteriormente demonstradas durante a prova

É claro que factores como **experiência**, **maturidade**, **paciência**, **intuição**, **criatividade**, **imaginação** e ...... **sorte**, são decisivos!

▶ Usando o método de redução ao absurdo como provo que:

$\sqrt{2}$ **é um número irracional** ?

Note que isto pode ser posto na forma **se** ... **então** ... - **se** $\sqrt{2}$ é um número **então** $\sqrt{2}$ é irracional. Suponho que $\sqrt{2}$ é um número racional e derivo uma contradição ou um absurdo.

Mas o que é um número racional? - é um numero da forma $\frac{m}{n}$ com $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$. De facto, e este é um elemento essencial na prova, podemos sempre supôr que a fracção $\frac{m}{n}$ é irredutível, isto é, que não existe qualquer inteiro $\neq 1$ que divide simultâneamente m e n.

Agora a prova prossegue sem dificuldade:

1. suponho que $\sqrt{2}$ é um número racional, isto é:
$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}$$
com $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$ e a fracção $\frac{m}{n}$ irredutível.

2. então $2 = \frac{m^2}{n^2}$ e portanto:
$$m^2 = 2n^2 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (*)$$
o que significa que m^2 é par.

3. m^2 sendo par, m também tem que ser par. Porquê? porque se m fosse ímpar também m^2 o seria (prove isto).

4. logo existe um inteiro $k \in \mathbb{Z}$ tal que:
$$m = 2k$$

5. Substituindo na equação (*) vem que:
$$(2k)^2 = 2n^2$$
isto é:
$$n^2 = 2k^2$$
o significa que n^2 é par.

6. sendo n^2 par n é também par

7. concluímos pois que m e n são ambos pares, isto é, são ambos divisíveis por 2.

8. mas isto é absurdo porque suposémos a fracção $\frac{m}{n}$ irredutível.

O absurdo resultou de termos suposto que $\sqrt{2}$ é um número racional. Logo $\sqrt{2}$ é um número irracional.

QED.

▶ Como é que Euclides provou que existem uma infinidade de números primos?

Note que isto pode ser posto na forma **se** ... **então** ... - **se** P é o conjunto dos números primos **então** P é infinito.

Mas, o que é um número primo? - *é um inteiro positivo > 1 que só é divisível por 1 e por si próprio.*

Euclides usou o método de **redução ao absurdo** - supondo que P é finito derivou uma contradição. Recorreu ainda a um teorema - o chamado Teorema Fundamental da Aritmética - que diz que um número inteiro pode ser decomposto num produto de factores primos.

1. suponhamos então que o conjunto P dos números primos é finito, digamos:

$$P = \{2, 3, 5, 7, 11, \cdots, p\}$$

2. consideremos o número N que se obtem multiplicando todos os primos que estão em P:

$$N = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot ... \cdot p$$

3. N é divisível por 2, 3, 5, ..., e p.

4. $N + 1$ tem que ter um factor primo (pelo Teorema Fundamental da Aritmética. Isto será estudado na disciplina de Tópicos de Matemática). Como todos os primos estão em P, esse factor primo tem que lá estar também. Chamemos-lhe q. Portanto $N + 1$ é múltiplo de q. Então q divide simultâneamente N, pelo que vimos no ponto 3, e $N + 1$. Isto é, existem inteiros k e k' tais que:

$$N = kq \wedge (N+1) = k'q \quad \Rightarrow \quad kq + 1 = k'q \quad \Rightarrow \quad (k' - k)q = 1$$

o que é absurdo!

▶ **O que é o recíproco de uma proposição do tipo:**

$$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}\,?$$

É a proposição:

$$\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$$

Atenção que **não é** logicamente equivalente a $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$. É possível que uma certa implicação seja falsa e, no entanto, o seu recíproco ser verdadeiro.

▶ **Qual o recíproco de cada uma das proposições seguintes:**

(a). *se n é um inteiro, então $2n$ é par.*

(b). *posso dar aulas só se tiver uma licenciatura.*

(c). *o carro não funciona sempre que não tenha gasolina.*

(d). *continuidade é uma condição necessária para diferenciabilidade.*

Solução:

(a). **se** $2n$ é par, **então** n é um inteiro.

(b). **se** tenho uma licenciatura **então** posso dar aulas.

(c). **se** o carro não funciona **então** não tem gasolina.

(d). **se** uma função fôr contínua **então** é diferenciável.

▶ **O que é o**

princípio de indução matemática ?

Para que serve?

Diz o seguinte - seja $\mathcal{P}(n)$ uma proposição que depende de um inteiro natural $n \in \mathbb{N}$. Então:

1. **se** $\mathcal{P}(1)$ é verdadeira, **e**
2. $\forall n \in \mathbb{N}$, **se** $\mathcal{P}(n)$ é verdadeira **então** $\mathcal{P}(n+1)$ também o é

a proposição $\mathcal{P}(n)$ é verdadeira $\forall n \in \mathbb{N}$. O princípio serve pois para provar proposições do tipo $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$.

Á maneira mais usual de visualizar este princípio é a da queda de peças de dominó em cadeia – **se** a primeira cai, **e** **se** cada peça provocar a queda da seguinte, **então** todas caiem. Mas se a primeira não cai, **ou** se existe na cadeia alguma peça que não provoque a cada da seguinte, nem todas caiem!

▶ **Usando o princípio de indução matemática, mostrar que:**

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Aqui $\mathcal{P}(n) : 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Portanto $\mathcal{P}(1) : 1 = \frac{1(1+1)}{2}$ e $\mathcal{P}(n+1) : 1 + 2 + 3 + \cdots + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

1. $\mathcal{P}(1) : 1 = \frac{1(1+1)}{2}$ que é verdadeira
2. suponhamos agora que $\mathcal{P}(n)$ é verdadeira - esta é a chamada hipótese de indução. Vamos mostrar que **então** $\mathcal{P}(n+1)$ é também verdadeira.

$$\begin{aligned}
1 + 2 + \cdots + n + (n+1) &= (1 + 2 + \cdots + n) + (n+1) \\
&= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1), \text{ pela hipótese de indução} \\
&= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)}{2}
\end{aligned}$$

QED.

▶ **Usando o princípio de indução matemática, mostrar que:**

$$17^n - 10^n$$

é múltiplo de 7, $\forall n \in \mathbb{N}$

1. $\mathcal{P}(1) : 17^1 - 10^1 = 7$ é múltiplo de 7 que é verdadeira
2. suponhamos agora que $\mathcal{P}(n)$ é verdadeira - esta é a chamada hipótese de indução. Vamos mostrar que **então** $\mathcal{P}(n+1)$ é também verdadeira.

$$\begin{aligned}
17^{n+1} - 10^{n+1} &= 17^n \cdot 17 - 10^n \cdot 10 \\
&= 17^n \cdot 17 - 10^n \cdot 10 - 17^n \cdot 10 + 17^n \cdot 10, \text{ um velho truque!} \\
&= 17^n \cdot 17 - 17^n \cdot 10 + 17^n \cdot 10 - 10^n \cdot 10 \\
&= 17^n \cdot (17 - 10) + 10 \cdot (17^n - 10^n) \\
&= 17^n \cdot 7 + 10 \cdot (\text{múltiplo de } 7), \text{ pela hipótese de indução} \\
&= \text{múltiplo de } 7
\end{aligned}$$

QED.

Notas:

Deve aqui ser observado que há por vezes algumas diferenças entre os conceitos usados em Matemática e os conceitos do quotidiano, dos quais aqueles são extraídos. Essas diferenças resultam de, em Matemática, ser fundamental haver uma completa precisão do significado da linguagem, enquanto que no quotidiano é importante haver alguma flexibilidade, recorrendo-se muitas vezes a sentidos multíplos ou subentendidos, com o objectivo de acelerar a comunicação, permitindo também essa multiplicidade expressar com o mesmo conjunto de palavras um maior número de ideias.

A concluir todas estas observações sobre as diferenças entre os conceitos matemáticos e os correspondentes conceitos do quotidiano, é necessário deixar bem claro que o uso correcto dos conceitos matemáticos correponde a um uso correcto dos correspondentes conceitos linguísticos dos quais eles foram "destilados", e que, apesar das simplificações acima descritas, os conceitos matemáticos são suficientemente ricos para exprimir uma enorme quantidade de situações bem complexas, tendo permitido obter importantíssimas informações e novas perspectivas sobre o Universo que nos rodeia, num processo que se iniciou há já alguns milénios e que continua hoje mesmo, num ritmo cada vez mais intenso!

******************** FIM ********************