

Projecto Faraday

Textos de Apoio

Descrição do Movimento

11º Ano de Escolaridade



casa das ciências

Porto, Outubro de 2009

Ficha Técnica

Projecto Faraday

Projecto de intervenção no ensino da Física no secundário.

Financiamento

Fundação Calouste Gulbenkian.

Execução

Departamento de Física, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto.

Escolas Participantes

- ES Filipa de Vilhena
- ES Fontes Pereira de Melo
- ES Garcia de Orta
- ES da Maia
- ES de Santa Maria da Feira

Coordenação

- J. M. B. Lopes dos Santos
- Manuel Joaquim Marques

Portal

URL: <http://www.fc.up.pt/faraday>

Texto do 11^o Ano

Redactor Principal

J. M. B. Lopes dos Santos

Colaboração e revisão

- Elisa Arieiro
- Carlos M. Carvalho
- Manuel Joaquim Marques

Conteúdo

Ficha Técnica	i
I Movimento e Leis de Newton	9
2 Descrição do Movimento	11
2.1 Posição e coordenadas	14
2.1.1 Sistemas de Coordenadas	14
2.1.1.1 Folha A4	14
2.1.1.2 Plano	14
2.1.1.3 Esfera	15
2.1.2 Localização com sistema GPS	16
2.2 Deslocamento	17
2.2.0.1 Uma analogia	19
2.2.1 Coordenadas do deslocamento	21
2.3 Velocidade média	23
2.3.1 Variação por unidade de tempo	23
2.3.2 Velocidade média de deslocamento	25
2.3.2.1 Vector velocidade média	26
2.3.2.2 Movimento no plano	26
2.3.3 Velocidades negativas?	27
2.3.4 Movimento Uniforme	28
2.3.4.1 Equação do movimento uniforme rectilíneo.	29
2.4 Velocidade instantânea	30

2.4.1	Movimento com velocidade variável	31
2.4.2	Vector velocidade instantânea	35
2.4.2.1	Norma da velocidade instantânea	36
2.5	Aceleração	37
2.5.1	Aceleração média	37
2.5.1.1	Acelerações negativas	39
2.5.2	Movimento Uniformemente Variado	40
2.5.3	Direcção e sentido do vector aceleração	41
2.6	Sumário	42
2.7	Questões, actividades e problemas	43
2.7.1	Actividades	43
2.7.2	Questões	44
2.7.3	Problemas	46
2.7.4	Desafios	51

Lista de Figuras

2.1	Aristóteles (384 AC-322 AC) e Galileu (1564-1642). Aristóteles foi um filósofo macedónio, cujas obras marcaram profundamente todo o pensamento da Idade Média. Galileu, dezassete séculos depois de Aristóteles, deu início à ciência moderna ao sujeitar a validade das ideias e conceitos sobre a natureza à experiência e observação cuidadas. Deste modo, efectuou um corte radical com as ideias de Aristóteles.	12
2.2	Coordenadas cartesianas de um ponto sobre uma folha de papel A4.	14
2.3	A longitude, θ , e a latitude, ϕ , definem a posição de um ponto sobre a esfera.	15
2.4	Sistema de Coordenadas na Terra. Note-se a deformação necessária para representar a Terra num plano. Os Polos são representados por linhas. [1] .	16
2.5	Sabendo a distância a três pontos de posição conhecida ficamos a conhecer a nossa posição.	16
2.6	Movimento de uma moeda: (a) sem rotação; (b) com rotação.	17
2.7	A sucessão de dois deslocamentos é representada pela soma dos vectores respectivos.	18
2.8	Posições de um projectil, lançado da direita, registadas em vídeo. Intervalo de tempo entre posições sucessivas, $\Delta t = 0,1 \text{ s}$	22
2.9	O declive da recta é a velocidade média de $A(t)$ entre t_i e t_f	24

2.10	Se o deslocamento de A para B demorou $\Delta t = 3$ s, o deslocamento por unidade de tempo é o dos segmentos menores, <i>se o deslocamento for igual para intervalos de tempo iguais</i>	25
2.11	Se o vector velocidade média for constante, deslocamentos em intervalos de tempo iguais são iguais e o movimento é rectilíneo.	29
2.12	Se $x = mt + b$ o declive da recta, é $m = (x_2 - x_1)/(t_2 - t_1) = \Delta x/\Delta t$	30
2.13	Os círculos são os pontos experimentais; a linha tem como finalidade facilitar a visualização do gráfico. A velocidade média nos dois intervalos representados é a mesma, pois $\Delta x_1 = \Delta x_2$ e os dois intervalos de tempo também são iguais. Os três primeiros pontos estão sobre uma recta.	31
2.14	Gráfico de tempo-posição para movimento numa calha linear inclinada.	32
2.15	À medida que consideramos intervalos de tempo cada vez menores, a velocidade média aumenta. Os valores parecem tender para o valor marcado no gráfico que pode ser identificado com a <i>velocidade no instante</i> $t = 0$	33
2.16	Se imaginarmos B a deslizar sobre a curva até A , as secantes têm um limite que é a tangente à curva em A	33
2.17	A velocidade instantânea tem a direcção da tangente à trajectória.	36
2.18	Movimento com aceleração constante.	38
2.19	O vector velocidade, tangente à trajectória, roda quando a trajectória curva. O vector $\Delta \vec{v}$ aponta sempre para o lado para onde curva a trajectória. O vector aceleração média tem a direcção e sentido de $\Delta \vec{v}$	41
2.20	Gráficos de x em função de t	45
2.21	Órbita da Terra.	45
2.22	Dois gráficos de velocidade (a) e (d) e dois de posição (b) e (c) para quatro movimentos.	46
2.23	Que movimento é este?	49

2.24	Que movimento é este?	50
2.25	Velocidade em função do tempo para um corpo em queda com abertura de para quedas.	51
2.26	Trajectória de uma bola de futebol	51
2.27	Meio círculo.	52
2.28	Qual é o comprimento, d , da corda?	52

Lista de Tabelas

2.1	Posições de uma esfera lançada ao ar, obtidas de um clip de vídeo.	21
2.2	Tabela de tempos e posições do movimento de um carro sobre uma calha linear.	25
2.3	Movimento linear numa calha inclinada.	31
2.4	Velocidades médias para intervalos de tempo sucessivamente decrescentes e com início em $t = 0$	32

Parte I

Movimento e Leis de
Newton

Capítulo 2

Descrição do Movimento

A filosofia está escrita neste grande livro, o Universo, permanentemente aberto ao nosso olhar. Mas o livro não pode ser compreendido antes de aprendermos a perceber a linguagem e a ler os caracteres em que está escrito. Está escrito na linguagem da matemática e os caracteres são triângulos, círculos e outras figuras geométricas, sem os quais é humanamente impossível compreender uma única palavra do livro; sem estes vagueamos num labirinto escuro.

Galileo Galilei

O nascimento da Física como ciência moderna está associado aos nomes de Galileu e Newton. Ambos contribuíram decisivamente para a formulação de conceitos precisos para a **descrição** matemática do movimento.

No tempo de Galileu (século XVI-XVII), o ensino nas universidades era ainda fortemente influenciado pelas obras de Aristóteles, redescobertas na Idade Média após terem sido traduzidas do grego antigo por sábios árabes, por volta do século XI.

Aristóteles, um filósofo macedônio do século III AC, discípulo e depois professor na Academia de Platão, deixou uma obra verdadeiramente fenomenal que cobria todas as áreas do conhecimento, desde a Matemática (Lógica), a Física e Astronomia, as Ciências Naturais, a Ética, a Política, a Teologia, etc.

Aristóteles propunha uma visão global das causas de todos os movimentos. Era defensor da ideia de que a Terra ocupava o centro

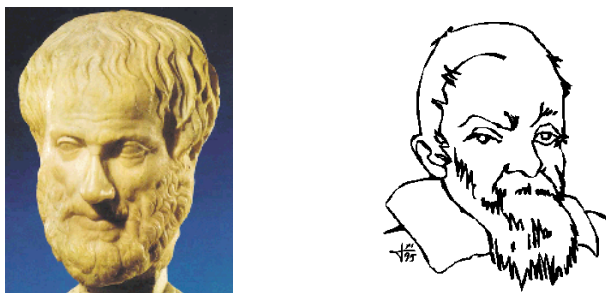


Figura 2.1: Aristóteles (384 AC-322 AC) e Galileu (1564-1642). Aristóteles foi um filósofo macedônio, cujas obras marcaram profundamente todo o pensamento da Idade Média. Galileu, dezassete séculos depois de Aristóteles, deu início à ciência moderna ao sujeitar a validade das ideias e conceitos sobre a natureza à experiência e observação cuidadosas. Deste modo, efectuou um corte radical com as ideias de Aristóteles.

do Universo e achava que os corpos eram constituídos por diferentes quantidades de quatro essências: terra, água, fogo e ar. Corpos pesados, feitos sobretudo de terra e água, tinham um lugar próprio no centro da Terra e para lá tendiam no seu movimento natural, até serem impedidos pelo solo. Corpos mais leves (fogo ou ar quente), pelo contrário, afastavam-se do centro da Terra. Aristóteles admitia ainda outro tipo de causas a que chamava movimento “violento”, como quando alguém dispara uma flecha para o ar. As causas violentas “gastam-se” porque como os corpos se movem em meios materiais como o ar, acabarão por ter o seu movimento natural: o movimento final da flecha é vertical, em direcção ao centro da Terra. O movimento dos corpos celestes era visto por Aristóteles como revelando a existência de uma quinta-essência no Céu (além das quatro da Terra: fogo, ar, água e terra), à qual correspondia um movimento natural circular.

A oposição de Galileu aos ensinamentos de Aristóteles, no que respeita ao movimento, não tomou a forma de uma explicação global alternativa das causas de todos os movimentos. A observação e experimentação, e a possibilidade de medir tempos com muito maior precisão, permitiram a Galileu uma *descrição* muito mais detalhada de certos movimentos particulares (a queda livre, o movimento em plano inclinado, o movimento de projecteis) que, claramente, não correspondia à de Aristóteles.

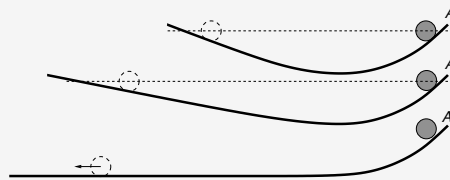
Neste capítulo, vamos estudar alguns dos conceitos matemáticos fundamentais para a descrição do movimento:

- Posição e coordenadas;

■ Galileu e Aristóteles ■

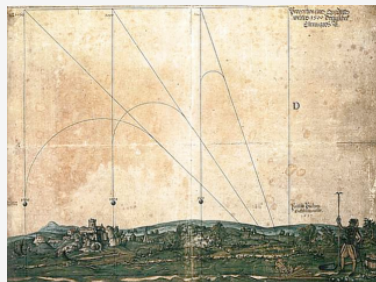
A Física de Aristóteles era muito influenciada pela observação de situações de atrito elevado.

Em estudos de plano inclinado, Galileu reparou que, quando o atrito era reduzido, um corpo descendo de uma dada altura numa rampa inclinada, seguida de uma rampa ascendente com diferente inclinação, subia até quase à altura de partida na rampa ascendente. Daqui concluiu que, se a rampa ascendente tivesse uma inclinação cada vez menor, o corpo percorreria uma distância cada vez maior para chegar à mesma altura. No limite do plano horizontal, sem atrito, o corpo não deveria parar nunca, em contradição com a ideias de Aristóteles, que acreditava que um corpo sem acção exterior tendia para um estado natural de repouso.



Se a bola rola até à altura inicial, não deveria rolar sem parar no plano horizontal?

Outro ponto de discordância dizia respeito ao movimento de projecteis. Aristóteles acreditava que este movimento tinha uma primeira parte, dita violenta, em que o corpo gastava o seu ímpeto inicial, seguida de uma parte final em que o corpo caía na vertical, o seu movimento natural, em direcção ao centro da Terra. Galileu notou que em situações de baixo atrito a trajectória é uma parábola e não tem uma secção vertical.



Teoria do ímpeto de Aristóteles. Aristóteles acreditava que a parte final do movimento era vertical.[2]

Caixa 2.1: Aristóteles e Galileu, separados de dezassete séculos, partilharam a vontade de compreender a Natureza.

- deslocamento;
- velocidade;
- aceleração.

É frequente os estudantes acharem este estudo um pouco árido. Mas, como diz Galileu na citação de abertura deste capítulo, sem conhecer os caracteres deste alfabeto não é possível entender uma única palavra deste livro que é o Universo. Não é uma coincidência que o nascimento da Física coincida com a descoberta destes conceitos: eles são fundamentais não apenas para descrever o movimento, como também para descrever a variação de qualquer grandeza física.

2.1 Posição e coordenadas

2.1.1 Sistemas de Coordenadas

Na disciplina de Matemática foi introduzida a *Geometria Cartesiana* que nos permite traduzir proposições geométricas (sobre pontos, linhas, superfícies, polígonos, círculos) em equações matemáticas, através da introdução de um *sistema de coordenadas*. Vejamos alguns exemplos.

2.1.1.1 Folha A4

Tomemos o exemplo de uma folha de papel A4. Um canto da folha pode ser a origem do sistema de coordenadas. Um dos lados maiores pode ser o eixo xx e um dos lados menores o eixo yy . Se usarmos a mesma unidade para os dois eixos, o centímetro, cada ponto da folha terá coordenadas (x, y) com $0 \leq x \leq 29,7$ e $0 \leq y \leq 21,0$ (as dimensões de uma folha A4 são 21,0 cm por 29,7 cm). Para atingir um ponto de coordenadas $(3, 4)$, partindo da origem deslocamo-nos 3 cm ao longo do eixo xx e depois movemo-nos 4 cm na direcção paralela ao eixo dos yy , na perpendicular a xx (ou na ordem inversa, é indiferente).

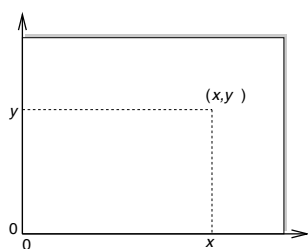


Figura 2.2: Coordenadas cartesianas de um ponto sobre uma folha de papel A4.

2.1.1.2 Plano

Se imaginarmos a folha prolongada em todas as direcções formando um plano infinito, as coordenadas dos pontos do plano serão da forma (x, y) com $-\infty < x < +\infty$ e $-\infty < y < +\infty$.

2.1.1.3 Esfera

A introdução de um sistema de coordenadas na superfície de uma esfera é um pouco mais complexa, mas também muito importante pelo facto de vivermos à superfície de um planeta aproximadamente esférico.

Os sistemas de coordenadas do plano são construídos com base em linhas rectas. Na superfície de uma esfera é conveniente usar *círculos máximos*: linhas correspondentes à intersecção da superfície da esfera com planos que passam no seu centro. O perímetro dos círculos máximos é $2\pi r$ em que r é o raio da esfera. Qualquer outro círculo na esfera tem um raio e um perímetro menores. Uma propriedade interessante da esfera é que o trajecto mais curto entre dois pontos sobre a sua superfície é um arco de círculo máximo.

No caso da Terra o sistema de coordenadas envolve o Equador (círculo máximo correspondente a um plano perpendicular ao eixo de rotação da Terra) e os *meridianos* (círculos máximos correspondentes a planos que contêm o eixo de rotação da Terra). A origem de coordenadas é determinada pela intersecção do equador com um meridiano particular que atravessa Greenwich, na Inglaterra. Partindo da origem, podemos atingir qualquer ponto da esfera do seguinte modo:

- deslocamo-nos para Oeste ou Este, ao longo do equador, até atingirmos o meio meridiano (arco entre o Polo Norte e Polo Sul) que contém o ponto desejado.
- deslocamo-nos para norte ou sul ao longo desse meridiano até atingirmos o ponto em causa.

O arco descrito ao longo do Equador subtende um ângulo que é a *longitude* do local em causa. Pode ser longitude **OESTE** ou **ESTE**, variando em ambos os casos entre 0 e 180° . Alternativamente, podíamos medir a longitude entre -180° e 180° , os valores negativos correspondendo a longitudes **ESTE**.

O arco descrito ao longo do meridiano é a *latitude*, que pode ser norte ou sul e varia entre 0 e 90° . Podíamos, igualmente, tomar a latitude como variando entre -90° e 90° , correspondendo os valores negativos a pontos do hemisfério Sul, por exemplo.

Estes exemplos mostram que os sistemas de coordenadas se podem ajustar aos espaços que pretendemos estudar. Não usamos

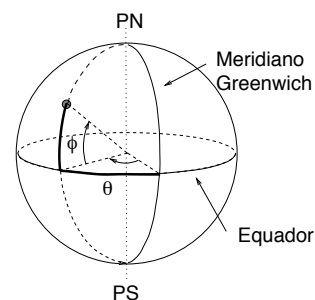


Figura 2.3: A longitude, θ , e a latitude, ϕ , definem a posição de um ponto sobre a esfera.

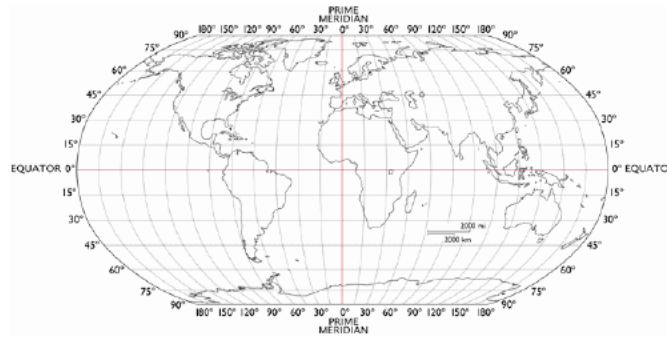


Figura 2.4: Sistema de Coordenadas na Terra. Note-se a deformação necessária para representar a Terra num plano. Os Polos são representados por linhas. [1]

as mesmas coordenadas numa esfera ou num plano. Neste curso, vamos-nos limitar a situações em que podemos usar sistemas coordenados, determinados a partir de eixos rectilíneos e mutuamente ortogonais. Todos os movimentos que vamos estudar se desenrolam num plano fixo. Por isso precisaremos apenas de dois eixos como nos dois primeiros exemplos considerados.

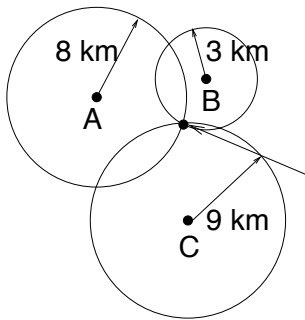


Figura 2.5: Sabendo a distância a três pontos de posição conhecida ficamos a conhecer a nossa posição.

2.1.2 Localização com sistema GPS

Imaginemos-nos perdidos num deserto. Temos na mão um mapa onde estão marcados três oásis, A , B e C . Suponhamos que temos uma maneira de calcular a distância a que estamos de cada um. Sabendo que a distância a A , por exemplo, é de 8 km, podemos marcar no mapa uma circunferência centrada em A que contém a nossa posição; mas continuamos sem saber onde estamos. Sabemos também a distância a B , por exemplo 3 km; as circunferências centradas em A de raio 8 km e em B de raio 3 km, terão, no máximo, dois pontos comuns. Se conhecermos a distância a um terceiro ponto C , a nossa posição fica determinada. Três distâncias a pontos conhecidos determinam univocamente a nossa posição no plano.

O sistema GPS (**G**lobal **P**ositioning **S**ystem) funciona com base neste princípio. É constituído por uma rede de satélites, tal que há sempre quatro acessíveis a comunicação por sinais de micro-ondas de qualquer ponto do planeta. Os satélites emitem sinais identificadores em tempos pré-determinados. Um receptor GPS contém um relógio sincronizado com o dos satélites e recebe o sinal de cada satélite um pouco depois da emissão devido à velocidade finita de propagação das micro-ondas. Esse atraso permite o cálculo

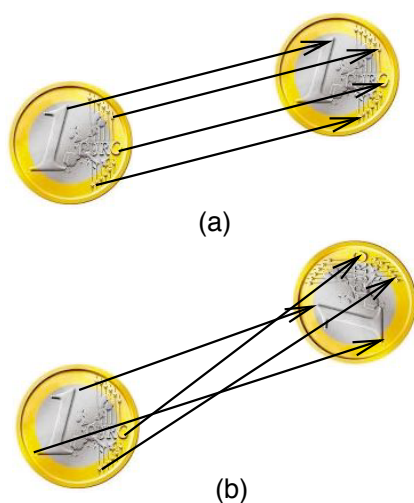


Figura 2.6: Movimento de uma moeda: (a) sem rotação; (b) com rotação.

da distância a cada satélite. A partir destas distâncias o receptor calcula a sua posição e exprime-a em coordenadas convencionais de latitude e longitude.

Esta descrição, muito breve, não faz justiça à complexidade do sistema GPS. No portal do Faraday encontra-se um artigo com mais informação sobre este tópico.

2.2 Deslocamento

Para esta experiência precisamos de uma moeda de um euro. Pousemos a moeda em cima de uma mesa. Desloquemos a moeda para outra posição. A posição final está rodada relativamente à inicial ou não?

A figura 2.6 mostra como podemos responder a esta pergunta comparando as posições inicial e final. Desenhando segmentos orientados, ligando posições iniciais a posições finais de pontos correspondentes da moeda, vemos que se todos tiverem o mesmo comprimento, forem paralelos e tiverem o mesmo sentido, a moeda não rodou. Estes segmentos dizem-se **equipolentes**.

Na disciplina de matemática do 10^o ano aprendemos que um conjunto de segmentos equipolentes é **um vector**. Por outras palavras, dois segmentos com a mesma direcção, sentido e comprimento, representam o *mesmo* vector, independentemente do respectivo ponto inicial.

▷ Definição de vector.
▷ ver Anexo A para um resumo sobre vectores

O movimento sem rotação designa-se por **translação** e é, então, caracterizado por um vector, designado por **vector deslocamento**.

O vector deslocamento define a variação de posição de um corpo numa translação e é representado por qualquer segmento orientado equipolente a um que una as posições inicial e final de um ponto do corpo.

Note-se que o deslocamento de um corpo extenso é especificado exactamente do mesmo modo que o de uma partícula material: a descrição de movimentos de translação pode ser feita usando o modelo de partícula material.

Vejamos algumas consequências desta definição de vector deslocamento ou, simplesmente, deslocamento.

A definição de deslocamento nada diz sobre o movimento que ocorreu entre os instantes inicial e final: só depende das posições antes e depois do movimento.

Correcto! Isto significa, por exemplo, que o deslocamento do Michael Schumacher, numa volta a um circuito de Fórmula 1, é nulo pois as posições inicial e final têm as mesmas coordenadas.

Se somarmos dois deslocamentos sucessivos, usando a regra de soma de vectores, obtemos o deslocamento total.

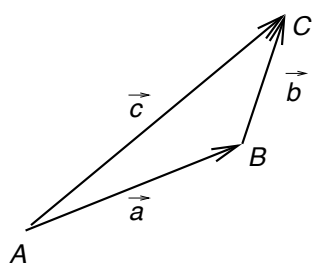


Figura 2.7: A sucessão de dois deslocamentos é representada pela soma dos vectores respectivos.

Se um corpo se desloca de A para B e depois de B para C , o deslocamento total é de A para C . Esta regra, mais que óbvia, da operação física de deslocamento, traduz-se na regra de soma de vectores. Com efeito a soma de um vector $\vec{a} = \vec{AB}$ (representado pelo segmento $[A, B]$) com $\vec{b} = \vec{BC}$ (representado pelo segmento $[B, C]$) é $\vec{c} = \vec{AC}$ (representado pelo segmento $[A, C]$).

O módulo ou norma do deslocamento é a distância entre as posições final e inicial,

$$d = \|\vec{AB}\|.$$

A norma ou módulo de um vector é o comprimento de um segmento que o represente, ou seja a distância entre os extremos do segmento. Dois deslocamentos só são iguais se, além do mesmo módulo, tiverem a mesma direcção e sentido.

Mas, atenção: a distância entre o ponto final e inicial de um deslocamento não é, necessariamente, a distância *percorrida*. No caso do Michael Schumacher acima referido, depois de uma volta ao circuito, a distância entre o ponto final e inicial é nula! Por outro lado, a distância percorrida é o perímetro do circuito.

Para que serve, então, esta definição? Um pessoa pode dar a volta ao mundo e um físico diz-lhe que o seu deslocamento foi nulo? Que coisa mais tola!

Parece tola, à primeira vista, mas não é. O que torna a definição de deslocamento muito útil é a maneira como podemos representar deslocamentos consecutivos. Podemos sempre dividir um dado intervalo de tempo em intervalos mais pequenos. Somando os deslocamentos nesses intervalos obtemos o deslocamento total. Por outras palavras, usando este conceito de deslocamento, podemos analisar um movimento com todo o detalhe necessário. Voltando ao exemplo do Michael Schumacher, se registarmos o seu movimento de segundo a segundo, a sequência de deslocamentos nesse intervalos já contém muito mais informação sobre o seu movimento do que as posições no início e fim de uma volta.

2.2.0.1 Uma analogia

A seguinte analogia pode ser útil para entender este conceito de deslocamento. Imaginemos que comprávamos 1000 acções de uma dada companhia a 10,5 euros por acção em Janeiro. Um ano depois vendíamos a 11 euros por acção. O lucro seria

$$1000 \times (11 - 10,5) = 500 \text{ euros.}$$

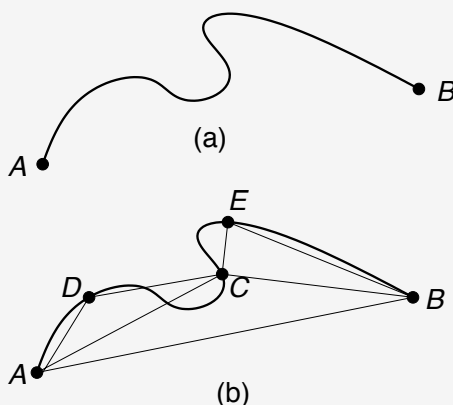
Pouco importa que as acções valessem 15 euros em Julho. A variação entre os instantes de compra e venda é que é relevante para as nossas finanças; não o que se passa no meio. Contudo, se quisermos seguir o preço das acções, podemos ver a sua *variação* mês a mês, dia a dia, hora a hora ou mesmo minuto a minuto. Repare-se também que não é o módulo da variação que é importante. Se tivéssemos vendido a 10 euros, o módulo da variação seria o mesmo mas o “lucro” seria

$$1000 \times (10 - 10,5) = -500 \text{ euros.}$$

■ Distância percorrida ■

O que é a distância percorrida por um corpo no seu movimento entre A e B ?

Imaginemos que a curva da figura representa a sua trajetória. Queremos saber qual o comprimento desta curva. Intuitivamente poderíamos pensar em pousar um fio sobre a curva, seguindo todas as suas convoluções: esticando o fio poderíamos depois medir o comprimento da curva com um régua ou fita métrica. Será possível transformar esta ideia num conceito mais preciso?



O comprimento do segmento $[A, B]$, d_{AB} , é o módulo do deslocamento do corpo. Será certamente uma má medida do comprimento da curva, pois corresponderia a esticar o fio entre os pontos inicial e final:

$$S_1 = d_{AB}$$

Mas podemos melhorar: escolhendo um ponto intermédio da trajetória, C , teremos uma nova aproximação para o comprimento da curva, somando os módulos dos deslocamentos \vec{AC} e \vec{CB} ,

$$S_2 = d_{AC} + d_{CB}.$$

Subdividindo as curvas de A a C e de C a B , teremos uma ainda melhor aproximação:

$$S_4 = d_{AD} + d_{DC} + d_{CE} + d_{EB}.$$

Este processo pode continuar, e, à medida que cresce o número de pontos intermédios, aproximamo-nos da situação que consiste em colocar um fio flexível sobre a curva.

Sendo então S_n a soma de comprimentos de n segmentos, construídos com os pontos inicial e final, e $n - 1$ pontos intermédios, distribuídos sobre a curva, podemos definir o comprimento desta como sendo o valor limite de S_n quando n tende para infinito.

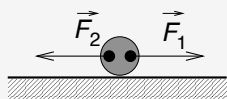
Note-se que precisamos apenas do conceito de deslocamento para definir deste modo o comprimento de uma curva. No desafio 2.1 aplica-se este conceito para calcular o perímetro do círculo.

Caixa 2.2: O comprimento de uma curva.

■ Forças como vectores ■

A representação de deslocamentos por vectores é muito natural. Podemos até dizer que a definição de adição de vectores é exactamente a que é necessária para representar a sucessão de deslocamentos.

O conceito de força também está naturalmente associado a um módulo (intensidade da força) e a uma direcção e um sentido. Mas o que realmente nos permite representar forças por vectores é o facto de a adição de forças seguir a mesma lei que a adição de vectores. Por exemplo, actuando num corpo com forças de igual intensidade, mesma direcção e sentidos opostos este mantém-se em equilíbrio. Isto é, o efeito das duas forças é o mesmo que o da sua soma vectorial, que é zero.



Este aspecto do conceito de força será retomado no capítulo 4.

Caixa 2.3: Forças como vectores

O sinal, neste caso, é crucial para o nosso bem estar!

O vector deslocamento caracteriza a variação de posição, tal como a diferença do preço de venda e compra define o lucro da transacção. Note-se, contudo, que, para caracterizar uma posição, são necessárias três coordenadas; o preço de uma transacção é dado por um único número. As analogias são sempre isso mesmo: analogias.

2.2.1 Coordenadas do deslocamento

O movimento de um projectil estudado na Actividade 2.4 é um exemplo de movimento plano.

A figura 2.8 mostra os pontos sucessivos de uma trajectória deste tipo, obtidos a partir de um registo vídeo como na Actividade 2.4. A figura mostra também os eixos coordenados que usámos para fixar as coordenadas de cada ponto, listadas na tabela 2.1.

Na figura 2.8 representámos, com um segmento orientado, o deslocamento entre as posições ocupadas em $t = 0,1 \text{ s}$, coordenadas $(1,69; 0,87) \text{ m}$, e $t = 0,2 \text{ s}$, coordenadas $(1,40; 1,14) \text{ m}$.

t/s	x/m	y/m
0,0	1,94	0,51
0,1	1,68	0,87
0,2	1,40	1,14
0,3	1,12	1,32
0,4	0,83	1,38
0,5	0,55	1,35
0,6	0,26	1,22

Tabela 2.1: Posições de uma esfera lançada ao ar, obtidas de um clip de vídeo.

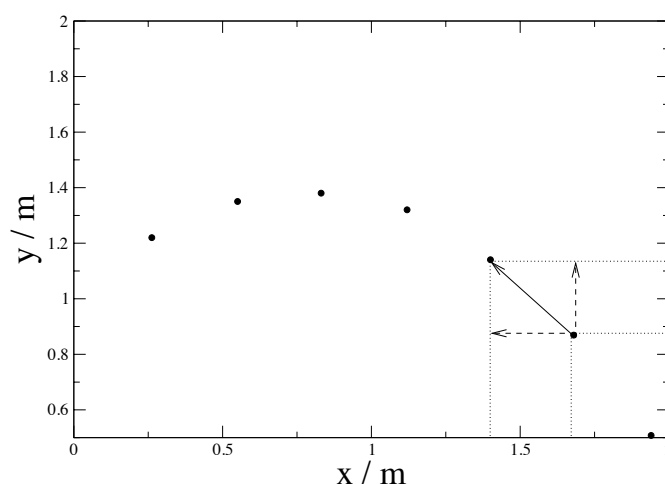


Figura 2.8: Posições de um projétil, lançado da direita, registadas em vídeo. Intervalo de tempo entre posições sucessivas, $\Delta t = 0,1$ s.

As variações de coordenadas entre os pontos inicial e final do deslocamento são¹:

$$\begin{aligned}\Delta x &= 1,40 - 1,68 = -0,28 \text{ m}; \\ \Delta y &= 1,14 - 0,87 = 0,27 \text{ m}.\end{aligned}\tag{2.1}$$

As projecções do deslocamento segundo os eixos coordenados definem dois deslocamentos, um ao longo de Ox e outro ao longo de Oy . Como Δx é negativo, o deslocamento segundo x tem o sentido negativo do eixo Ox e módulo igual a $|\Delta x| = 0,28 \text{ m}$. O deslocamento segundo y tem o sentido positivo do eixo Oy e módulo dado por $|\Delta y| = 0,27 \text{ m}$.

Se recordarmos a definição de produto de um escalar por um vector (ver Anexo A), vemos que podemos decompor o deslocamento na forma:

$$\Delta \vec{r} = \Delta x \hat{i} + \Delta y \hat{j}$$

em que \hat{i} e \hat{j} são os vectores de norma unitária com as direcções e sentidos dos eixos Ox e Oy , respectivamente. Como Δx é negativo $\Delta x \hat{i}$ tem sentido oposto a \hat{i} .

Usa-se também a seguinte notação, que indica apenas as **coordenadas** do vector $\Delta \vec{r}$, deixando implícita a indicação do sistema de eixos:

$$\Delta \vec{r} = (\Delta x, \Delta y).$$

▷ **implícito:** algo que se entende como fazendo parte de uma frase, expressão ou situação, embora não seja directamente afirmado ou não esteja manifestamente presente.

¹Recordemos uma notação que já usámos no 10^o ano. O símbolo ΔA representa sempre a variação de uma grandeza A , isto é, a diferença entre os valores final e inicial numa transformação, $\Delta A = A_f - A_i$.

Então, definimos²:

As coordenadas do vector deslocamento num dado sistema de eixos são as diferenças das coordenadas dos pontos inicial e final do deslocamento,

$$\Delta \vec{r} = (\Delta x, \Delta y) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1).$$

O teorema de Pitágoras permite exprimir a norma do deslocamento em termos das suas coordenadas:

$$\|\Delta \vec{r}\| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

Dois deslocamentos só são iguais se tiverem as mesmas coordenadas Δx e Δy .

2.3 Velocidade média

2.3.1 Variação por unidade de tempo

Consideremos as seguintes frases:

- Esta impressora imprimiu 8 páginas por minuto.
- O Sr. Joaquim facturou 300 euros por dia.
- Na etapa de hoje, o pelotão fez uma média de $41,2 \text{ km h}^{-1}$.

Em todos estes casos temos uma quantidade, $A(t)$, que varia no tempo: o número de páginas impressas, a quantidade de dinheiro facturada, a distância percorrida pelo pelotão; temos, também, uma referência a unidade de tempo (minuto, dia e hora).

Estas afirmações não significam que a impressora tenha trabalhado um minuto, que o Sr. Joaquim tenha facturado exactamente 300

²Em muita literatura de Física, usa-se, neste contexto, a designação **componente** em vez de **coordenadas**. A notação que estamos a usar coincide com a dos textos de matemática do 10º ano.

euros em cada dia de trabalho, ou que o pelotão tenha pedalado durante uma hora. Os valores referidos são obtidos dividindo a variação da grandeza, $\Delta A = A(t_f) - A(t_i)$, pelo intervalo de tempo em que esta ocorreu, $\Delta t = t_f - t_i$:

$$v_m = \frac{\Delta A}{\Delta t}.$$

Exemplo: Se em meia hora ($\Delta t = 0,5 \text{ h}$) o pelotão percorreu $20,6 \text{ km h}^{-1}$, a sua velocidade foi

$$\frac{20,6}{0,5} = 41,2 \text{ km h}^{-1}.$$

Ao dividir a variação da grandeza, ΔA , pelas Δt unidades de tempo em que ocorreu, obtemos um número que seria a variação de A na unidade de tempo, *se essa variação fosse a mesma em intervalos de tempo iguais*. Isto é o que chamamos uma velocidade média. É neste sentido que dizemos:

a velocidade média de uma grandeza é sua variação por unidade tempo.

Num gráfico de $A(t)$ em função de t , a velocidade média entre t_i e t_f é dada pelo declive da recta que passa nos pontos do gráfico de abscissas t_i e t_f : quanto maior for este declive maior é a velocidade média (fig 2.9).

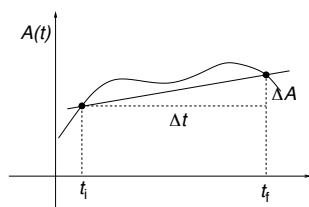


Figura 2.9: O declive da recta é a velocidade média de $A(t)$ entre t_i e t_f .

Em alguns contextos é mais frequente usar a designação “taxa média de variação”, em vez de “velocidade média”. Neste curso estamos particularmente interessados em variações de posição, caso em que esta segunda designação é muito mais frequente. Seja como for, este conceito é muito geral, como se vê.

Exemplo: Um corredor desloca-se 100 m em 10 s . Um ciclista desloca-se 38 km numa hora. Qual é o mais rápido?

Para responder a esta pergunta temos de comparar deslocamentos que se referem ao mesmo intervalo de tempo. Se os seus deslocamentos em cada segundo fossem iguais, o corredor teria um deslocamento por segundo dado por

$$v_m = \frac{100}{10} = 10 \text{ m s}^{-1}$$

e o ciclista,

$$v_m = \frac{38 \times 10^3}{3600} = 10,5 \text{ m s}^{-1}.$$

Ou seja, temos de comparar as velocidades médias dos dois movimentos. O ciclista foi (marginalmente) mais rápido.

2.3.2 Velocidade média de deslocamento

Vamos começar por aplicar este conceito ao movimento de um carro numa calha linear (Actividade 2.1)

A tabela 2.2 regista valores de posição do carro em diferentes instantes, obtidos com um sensor de movimento. O eixo Ox coincide com a direcção da calha: as outras coordenadas não variam e, por isso, podemos ignorá-las. O movimento é de **translação** e a posição do carro pode ser determinada por uma única coordenada.

A grandeza cuja velocidade queremos considerar é a coordenada $x(t)$.

A velocidade média da coordenada $x(t)$ de um corpo, num intervalo de tempo $[t_1, t_2]$, é dada pela sua variação, $\Delta x = x(t_2) - x(t_1)$, a dividir pelo intervalo de tempo, $\Delta t = t_2 - t_1$.

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (2.2)$$

Exemplo: No exemplo da tabela 2.2, a variação de $x(t)$ entre $t = 0 \text{ s}$ e $t = 3,0 \text{ s}$,

$$\Delta x = 1,15 - 0,32 = 0,83 \text{ m}$$

e a velocidade média

$$v_m = \frac{0,83}{3,0} = 0,277 \text{ m s}^{-1}.$$

(o resultado desta conta foi arredondado para dois algarismos significativos).

Repare-se que não estamos a afirmar que, neste movimento particular, o deslocamento em cada segundo foi exactamente de $0,277 \text{ m}$. Não foi! no primeiro segundo foi de $0,30 \text{ m}$ (ver tabela 2.2). O que estamos a dizer é que, *se os deslocamentos em intervalos iguais fossem iguais, o deslocamento em cada unidade de tempo seria expresso pelo valor da velocidade média no intervalo.*

O sinal de v_m é o mesmo que o de Δx já que a diferença de tempos, $\Delta t = t_f - t_i$, é positiva (o instante inicial é anterior ao

▷ Actividade 2.1

t/s	x/m
0,00	0,32
0,50	0,47
1,00	0,62
1,50	0,76
2,00	0,89
2,50	1,02
3,00	1,15
3,50	1,25

Tabela 2.2: Tabela de tempos e posições do movimento de um carro sobre uma calha linear.

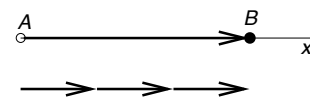


Figura 2.10: Se o deslocamento de A para B demorou $\Delta t = 3 \text{ s}$, o deslocamento por unidade de tempo é o dos segmentos menores, *se o deslocamento for igual para intervalos de tempo iguais.*

final, $t_i < t_f$). Se o movimento for no sentido positivo do eixo, $x(t)$ aumenta e Δx e v_m são positivos; se o movimento for no sentido negativo, $x(t)$ diminui e Δx e v_m são negativos.

2.3.2.1 Vector velocidade média

O vector deslocamento define a **variação** de posição. A velocidade média associada à variação de posição é também um vector.

Exemplo: No movimento registado na tabela 2.2, a variação de posição entre $t = 0 \text{ s}$ e $t = 3 \text{ s}$ é dada pelo vector deslocamento

$$\Delta \vec{r} = 0,83\hat{\mathbf{i}} \text{ (m)}.$$

Para obter o vector velocidade média neste intervalo, temos de dividir a variação de posição, o vector deslocamento, por $\Delta t = 3 \text{ s}$, ou seja, multiplicá-lo pelo escalar $1/3$:

$$\vec{v}_m = \frac{1}{3} \times 0,83\hat{\mathbf{i}} = 0,28\hat{\mathbf{i}} \text{ (m s}^{-1}\text{)}$$

A velocidade média relativa à coordenada $x(t)$, acima definida, é, então, a coordenada de um vector, tal como Δx é a coordenada do vector deslocamento:

$$\vec{v}_m = v_m \hat{\mathbf{i}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \hat{\mathbf{i}} \quad (2.3)$$

2.3.2.2 Movimento no plano

Em movimentos no plano, o vector velocidade média tem duas coordenadas, tal como o deslocamento, que são as velocidades médias das coordenadas $x(t)$ e $y(t)$:

$$\vec{v}_m = \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}, \frac{\Delta y}{\Delta t} \right) = \frac{\Delta x}{\Delta t} \hat{\mathbf{i}} + \frac{\Delta y}{\Delta t} \hat{\mathbf{j}}$$

Exemplo: No caso de movimento de projectil, considerado na secção 2.2.1, página 21, no exemplo da equação 2.1, o deslocamento, num intervalo de tempo de $0,1 \text{ s}$, tem componentes

$$\vec{\Delta r} = (-0,28; 0,27) \text{ (m)}$$

A velocidade média no mesmo intervalo é

$$\vec{v}_m = \left(\frac{0,28}{0,1}, \frac{0,27}{0,1} \right) = (-2,8; 2,7) = 10\vec{\Delta r}$$

Em resumo:

O vector velocidade média, deslocamento por unidade de tempo, num intervalo de tempo Δt , tem coordenadas,

$$\vec{v}_m = \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}, \frac{\Delta y}{\Delta t} \right) = \frac{\Delta x}{\Delta t} \hat{\mathbf{i}} + \frac{\Delta y}{\Delta t} \hat{\mathbf{j}}. \quad (2.4)$$

A sua direcção e sentido são os mesmos que os do vector deslocamento pois $\vec{v}_m = \lambda \vec{\Delta r}$, em que $\lambda = 1/\Delta t$ é um escalar positivo.

O módulo ou norma do vector velocidade média é

$$\begin{aligned} \|\vec{v}_m\| &= \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{\Delta t^2} (\Delta x^2 + \Delta y^2)} \\ &= \frac{1}{\Delta t} \sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2)} \end{aligned}$$

ou seja, é a norma do deslocamento, $\|\vec{\Delta r}\|$ (distância entre as posições inicial e final), sobre o intervalo de tempo ($\Delta t > 0$):

$$\|\vec{v}_m\| = \frac{\|\vec{\Delta r}\|}{\Delta t} \quad (2.5)$$

2.3.3 Velocidades negativas?

Alguma vez ouvimos alguém dizer:

*Do Porto a Lisboa fiz uma velocidade média de 140 km h^{-1} .
No regresso fiz **menos** 140 km h^{-1} (-140 km h^{-1}).*

Certamente que não. Só os Físicos falam em velocidades negativas! Porquê?

Quando estamos a lidar com movimentos de automóveis, comboios, *etc.*, raramente estamos preocupados com a respectiva direcção e sentido (excepto quando não são os desejados). Se um carro se desloca na direcção Norte-Sul medimos os deslocamentos com valores de coordenada de posição a crescer de Norte para

Sul. O movimento é no sentido positivo do eixo e Δx e v_m são positivos. Quando o carro começa a mover-se de Sul para Norte, invertamos o eixo e começamos a medir posições no sentido inverso. Agora, a coordenada cresce de Sul para Norte. De novo, Δx e v_m são positivos. Na linguagem corrente a “velocidade” é sempre positiva!

Que “velocidade” é esta, então?

No início de uma viagem de automóvel pomos o conta-quilómetros a zero. Em cada instante, a sua indicação é aquilo a que atrás chamámos a **distância percorrida**, ou seja, o comprimento da trajectória descrita pelo automóvel (ver Caixa 2.2 na página 20). Esta distância aumenta com o tempo que decorreu desde o início da viagem, t , e é representada por uma função crescente do tempo, $s(t)$. A “velocidade média” desta grandeza, entre dois instantes t e $t + \Delta t$ é, como sempre,

$$\text{“velocidade média”} = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}.$$

Esta grandeza é sempre positiva, pois $s(t)$ cresce com o tempo: $s(t + \Delta t) > s(t)$ se $\Delta t > 0$ (a distância indicada no conta-quilómetros continua a aumentar, ainda que o carro volte para trás).

Esta “velocidade média” **não** é o módulo do vector velocidade média, tal como foi aqui definido (eq. 2.5):

$$\|\vec{v}_m\| = \frac{\|\vec{\Delta r}\|}{\Delta t},$$

pois, em geral, o módulo do deslocamento, $\|\vec{\Delta r}\|$, é diferente do comprimento da trajectória, Δs : veja-se, por exemplo, qualquer movimento com regresso à posição inicial, em que o módulo do deslocamento é sempre nulo.

Os conceitos de física aplicam-se a uma variedade de situações muito mais vasta do que a da nossa experiência corrente. Têm que ser adequados à descrição de movimentos de carros e comboios, mas também de planetas, sondas espaciais, moléculas, átomos, electrões etc. Nem sempre sabemos de antemão a trajectória, para que baste indicar a distância percorrida para sabermos onde está um corpo.

2.3.4 Movimento Uniforme

Que tipo de movimento obtemos se todas as coordenadas do vector velocidade média forem constantes? A trajectória pode ser curva?

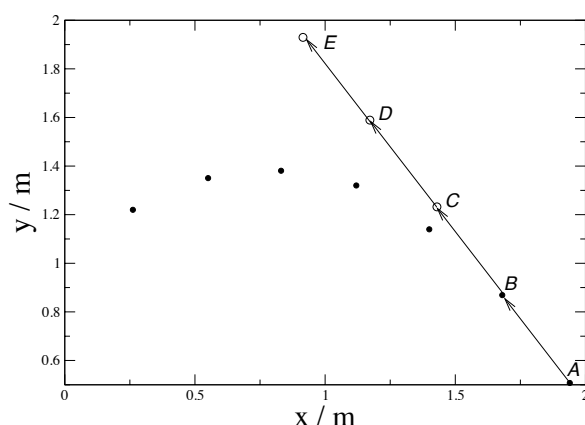


Figura 2.11: Se o vector velocidade média for constante, deslocamentos em intervalos de tempo iguais são iguais e o movimento é rectilíneo.

Reparemos novamente no movimento registado na tabela 2.1 da página 21.

Na figura 2.11 os pontos a cheio pertencem à trajectória e estão separados por intervalos de tempo de $\Delta t = 0,1 \text{ s}$. O vector \vec{AB} é o deslocamento entre $t = 0 \text{ s}$ e $t = 0,1 \text{ s}$. A velocidade média nesse intervalo é

$$\vec{v}_m = \frac{1}{0,1} \vec{AB} = 10 \vec{AB}.$$

Se a velocidade média em cada intervalo não variasse, os deslocamentos seguintes seriam idênticos a \vec{AB} : os pontos da trajectória seriam C, D, E, \dots : a trajectória seria rectilínea.

No **movimento uniforme rectilíneo** o vector velocidade média é o mesmo em qualquer intervalo de tempo. A trajectória é uma linha recta.

2.3.4.1 Equação do movimento uniforme rectilíneo.

A velocidade média da coordenada $x(t)$, num intervalo entre dois instantes t_1 e t_2 , não é mais do que o declive da recta que une os dois pontos com estas abcissas no gráfico de $x(t)$,

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t_f) - x(t_i)}{t_f - t_i}.$$

Este valor é o mesmo para quaisquer dois valores das abscissas t_i e t_f se, e só se, o gráfico de $x(t)$ for uma linha recta.

Recordemos a equação da recta da geometria cartesiana,

$$y = mx + b.$$

Para um gráfico de x (ordenada) em função de t (abscissa), a equação tem a forma

$$x = mt + b.$$

A constante b é a ordenada na origem, isto é, o valor de x para $t = 0$. Muitas vezes designa-se por x_0 .

Por outro lado, como o declive é a coordenada x da velocidade do movimento em qualquer intervalo de tempo, podemos escrever:

$$\boxed{x(t) = v_x t + x_0} \quad (2.6)$$

Se o movimento for uniforme e rectilíneo, todas as coordenadas terão velocidades médias constantes e, portanto:

$$\boxed{y(t) = v_y t + y_0} \quad (2.7)$$

Estas equações caracterizam um movimento rectilíneo e uniforme de velocidade:

$$\vec{v}_m = (v_x, v_y).$$

▷ Actividade 2.1

A fig. 2.13 mostra um exemplo de um movimento de um carro sobre uma calha horizontal, em que o movimento é quase uniforme: o gráfico de $x(t)$ é próximo de uma recta, o que significa que a velocidade variou pouco neste movimento.

2.4 Velocidade instantânea

Um filósofo grego chamado Zenão (495?-435? A.C.)³ sustentava que o movimento é impossível. Dava o exemplo de um flecha. Em cada instante a flecha ocupa uma dada posição. Nesse instante não se move: não pode ocupar duas posições no mesmo instante. Mas

³A obra de Zenão só chegou até nós através de outros autores, como Aristóteles. Zenão pertencia a uma escola de pensamento que defendia que a realidade era uma e imutável. O tempo e a mudança são ilusões. Zenão tornou-se famoso por uma série de paradoxos que pretendiam mostrar a inconsistência lógica do movimento.

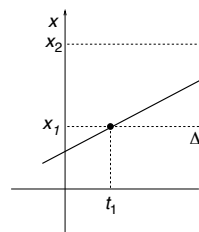


Figura 2.12: Se $x = mt + b$ o declive da recta, é $m = (x_2 - x_1) / (t_2 - t_1) = \Delta x / \Delta t$.

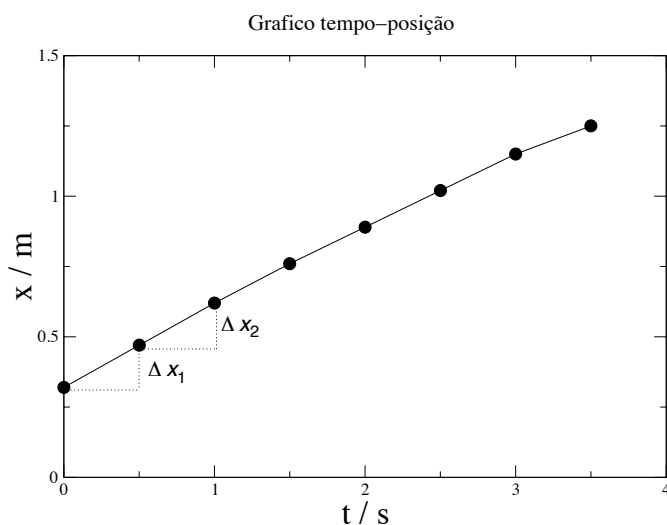


Figura 2.13: Os círculos são os pontos experimentais; a linha tem como finalidade facilitar a visualização do gráfico. A velocidade média nos dois intervalos representados é a mesma, pois $\Delta x_1 = \Delta x_2$ e os dois intervalos de tempo também são iguais. Os três primeiros pontos estão sobre uma recta.

se em nenhum instante se move, nunca se move! O movimento é impossível.

Se pensarmos um pouco, vemos que, até agora, associamos a cada instante uma posição, mas o conceito de velocidade média está apenas definido para um intervalo finito de tempo. Imaginemos que tiramos uma fotografia no preciso momento em que Michael Schumacher ultrapassa um adversário. Olhamos para a fotografia e vemos os dois carros a par. Podemos dizer que um deles, *naquele instante*, tem velocidade superior ao outro? Ou será que Zenão tem razão?

2.4.1 Movimento com velocidade variável

Vamos responder a Zenão, começando por analisar um exemplo concreto. Como de costume, olhamos primeiro para um movimento rectilíneo que envolve apenas uma coordenada.

Na Actividade 2.1, agora com o carro a subir uma calha inclinada, foram obtidos os resultados da tabela 2.3. O gráfico correspondente está na Fig. 2.14.

O gráfico mostra, claramente, que o movimento não é uniforme pois os pontos experimentais (t_i, x_i) não definem uma recta. Se

t/s	x/m
0,00	0,58
0,5	0,69
1,00	0,77
1,50	0,84
2,00	0,87
2,50	0,88

Tabela 2.3: Movimento linear numa calha inclinada.

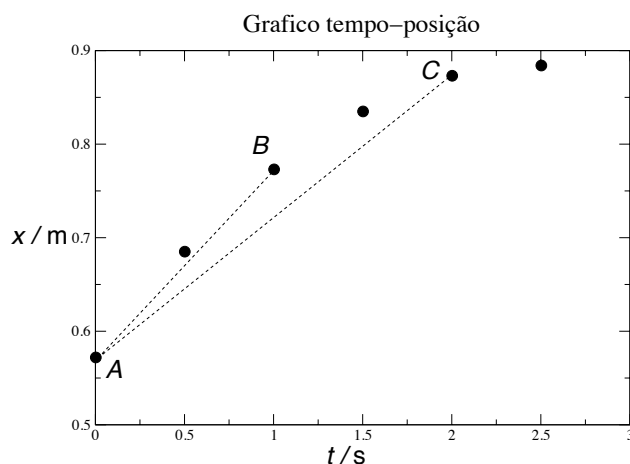


Figura 2.14: Gráfico de tempo-posição para movimento numa calha linear inclinada.

t_i/s	t_f/s	$v_m/\text{m s}^{-1}$
0,0	2,5	0,12
0,0	2,0	0,15
0,0	1,5	0,17
0,0	1,0	0,19
0,0	0,5	0,22
0,0	0,0	?

Tabela 2.4: Velocidades médias para intervalos de tempo sucessivamente decrescentes e com início em $t = 0$.

o movimento entre $t = 0\text{ s}$ e $t = 2,0\text{ s}$ (A e C) fosse uniforme, os pontos intermédios ocorreriam sobre a linha a tracejado entre A e C . Ora o deslocamento no primeiro segundo, por exemplo, foi superior ao que seria nesse caso (ordenada de B acima da linha). Conclusão: neste movimento a velocidade da coordenada $x(t)$ variou.

Usando os dados da Tabela 2.3, podemos calcular a velocidade média de $x(t)$ para intervalos de tempo sucessivamente *decrescentes*. Os resultados estão na Tabela 2.4: à medida que o intervalo vai diminuindo, a velocidade média vai aumentando.

Exercício: usando os valores da Tabela 2.3, calcular os valores da Tabela 2.4.

Se imaginássemos continuar este processo para intervalos de tempo cada vez menores, o que aconteceria aos valores da coluna das velocidades médias?

Um gráfico dos valores de v_m em função de $\Delta t = t_f - t_i$ (Fig. 2.15) *sugere* a resposta. Parece que, para $\Delta t \rightarrow 0$, $v_m \rightarrow v \approx 0,24\text{ m s}^{-1}$. Esse valor poderia ser identificado com a velocidade *no instante* $t = 0$. Contudo, sejamos honestos: dos dados da tabela 2.4, nunca poderíamos calcular este valor, pois não temos qualquer informação sobre o que se passa para intervalos de tempo inferiores a $0,5\text{ s}$.

Mas podíamos ter! É possível medir com intervalos de tempo cada vez menores e nada nos impede de supor que conhecemos a posição do carro em cada instante, $x(t)$, e não apenas nos valores indicados na Tabela 2.3.

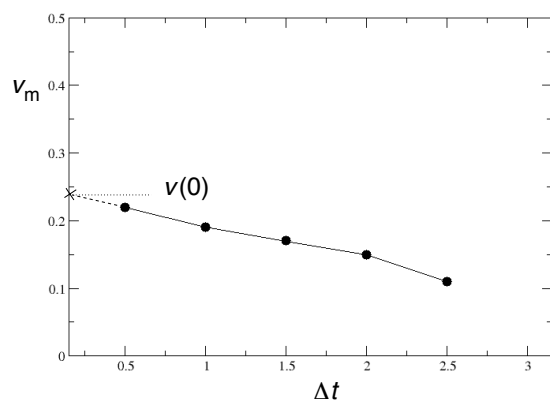


Figura 2.15: À medida que consideramos intervalos de tempo cada vez menores, a velocidade média aumenta. Os valores parecem tender para o valor marcado no gráfico que pode ser identificado com a *velocidade no instante $t = 0$* .

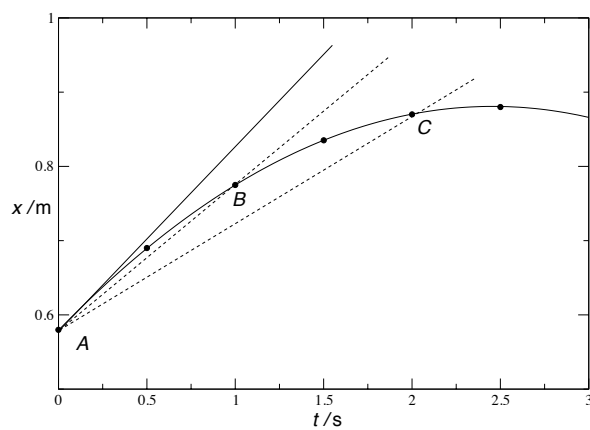


Figura 2.16: Se imaginarmos B a deslizar sobre a curva até A , as secantes têm um limite que é a tangente à curva em A .

Imaginemos que $x(t)$ era representado pela curva do gráfico da figura 2.16. A linha recta que une A a C representa um movimento uniforme com uma velocidade igual à velocidade média no intervalo $[t_A, t_C]$. Se considerarmos intervalos menores $[t_A, t_B], \dots$, obtemos rectas com declives crescentes que representam movimentos com velocidades superiores. É claro do gráfico que, se fizermos o intervalo tender para zero (podemos imaginar B a deslizar sobre a curva em direcção a A), estas rectas vão tender para a *tangente* ao gráfico no ponto A . Ou seja, se tomarmos o limite

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t_A + \Delta t) - x(t_A)}{\Delta t},$$

obtemos o declive da tangente à curva no ponto A .

Podemos agora responder a Zenão. É verdade que num dado instante t só temos uma posição. Com uma única posição não podemos definir nem deslocamento nem velocidade. Mas, considerando intervalos de tempo $[t, t + \Delta t]$ com Δt a tender para zero, o limite

$$v_x(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \quad (2.8)$$

é a velocidade da coordenada $x(t)$ no instante t . Ao contrário da velocidade média, $v_x(t)$ não está associada a nenhum intervalo de tempo particular. Em cada instante, o movimento na direcção Ox é caracterizado por uma posição, $x(t)$, e por uma velocidade *instantânea*, $v_x(t)$, definida por este processo de limite.

Voltando ao exemplo da fotografia tirada a Schumacher no momento em que ultrapassa o adversário, podemos dizer que a fotografia pode não ter a informação necessária para sabermos quais as velocidades dos dois carros naquele instante (se o tempo de exposição for suficientemente rápido não terá). Mas o movimento de cada carro, naquele instante, é definido por uma posição (visível na foto) e *uma velocidade* (que pode não estar visível na foto).

Neste momento a Eq. 2.8 pode parecer um pouco intimidativa. Como é que se calcula aquele limite?

Em muitos casos estes limites podem-se calcular exactamente e em matemática estudam-se métodos para os determinar. Neste momento, o mais importante é perceber o sentido da definição da eq. 2.8. Com uma calculadora, e alguma paciência, podemos-nos convencer que estes limites existem e calculá-los de modo muito aproximado. A problema 2.8 sugere um cálculo deste tipo. O exemplo seguinte é um cálculo exacto, mas num caso muito simples.

Exemplo: vimos atrás que um movimento rectilíneo uniforme era representado por uma recta, num gráfico de x em função de t . A equação de movimento é :

$$x(t) = v_0 t + x_0, \quad v, x_0, \text{ constantes.}$$

A velocidade instantânea, $v_x(t)$, é

$$v_x(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(v_0 \times (t + \Delta t) + x_0) - (v_0 t + x_0)}{\Delta t}$$

ou seja,

$$v_x(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_0 \Delta t}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_0 = v_0.$$

Como v é uma constante, o limite é v . Ou seja, num movimento rectilíneo uniforme a velocidade é a mesma em qualquer instante e igual ao declive da recta de x em função de t .

2.4.2 Vector velocidade instantânea

Ao fim e ao cabo, podemos pensar na velocidade instantânea como sendo uma velocidade média num intervalo de tempo muito, muito curto. Podemos, então, definir um vector velocidade instantânea como sendo o vector cujas coordenadas são as velocidades instantâneas de cada coordenada de posição.

$$\begin{aligned} v_x(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \\ v_y(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} \\ \vec{v}(t) &= (v_x, v_y) = v_x \hat{\mathbf{i}} + v_y \hat{\mathbf{j}}. \end{aligned}$$

Esta definição decorre naturalmente da do vector velocidade média. (ver eq. 2.3 da página 27).

Qual é a direcção da velocidade instantânea?

Atentemos de novo no exemplo que temos vindo a considerar (Fig. 2.17). A linha recta que une o ponto A a B seria a trajectória de um movimento uniforme, com uma velocidade igual à velocidade média no intervalo entre t_A e t_B . Se considerarmos um intervalo menor, obtemos uma direcção diferente. Se imaginarmos o ponto C a aproximar-se de A ($\Delta t = t_C - t_A \rightarrow 0$), vemos que um movimento uniforme com velocidade igual à velocidade instantânea, em $t = t_A$, terá uma direcção tangente à trajectória em A . Assim:

A velocidade instantânea $\vec{v}(t)$ é um vector tangente à trajectória na posição do corpo no instante t .

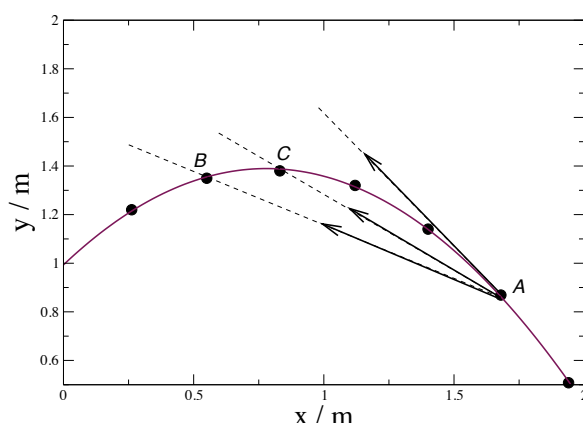


Figura 2.17: A velocidade instantânea tem a direcção da tangente à trajectória.

2.4.2.1 Norma da velocidade instantânea

Na secção 2.3.3 (página 27) chamamos a atenção para o facto de a norma do vector velocidade média

$$\|\vec{v}_m\| = \frac{\|\Delta \vec{r}\|}{\Delta t}$$

não ser aquilo que em linguagem comum chamamos velocidade média

$$\text{velocidade média} = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

A norma do vector deslocamento é a distância entre os pontos inicial e final, não a distância percorrida Δs .

Acontece que, quando o intervalo de tempo Δt tende para zero, estas duas grandezas têm o mesmo limite, que é a norma da velocidade instantânea:

$$\|\vec{v}(t)\| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\|\Delta \vec{r}\|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

A grandeza a que nos referimos na linguagem corrente, velocidade, aquilo que tem limites impostos pelo código da estrada, é então a **norma do vector velocidade instantânea**.

Na língua inglesa usa-se a palavra **speed** para distinguir este conceito do de **velocity**, palavra reservada para a grandeza vectorial. Em português foi proposto usar a palavra **celeridade** para significar o equivalente a **speed**.

No entanto, até hoje, ainda ninguém foi multado por excesso de *celeridade*!

2.5 Aceleração

O conceito de **aceleração** desempenha um papel fundamental nas leis do movimento. Mais uma vez esta palavra é usada em Física com um significado muito preciso.

Na linguagem corrente quando dizemos:

Ela está muito acelerada!

referimo-nos, talvez, a um estado de agitação fora do normal. Nesta frase está implícita a ideia que a pessoa em causa não está sempre assim, a sua agitação aumentou. Neste sentido há alguma relação (ténue) com o significado de **aceleração** em Física. Com efeito, a aceleração está relacionada com a *variação* de velocidade.

Felizmente já vimos atrás como podemos caracterizar variações de grandezas no tempo; só temos que aplicar esses conceitos à grandeza velocidade.

2.5.1 Aceleração média

Se a velocidade, $\vec{v}(t)$, variar, o movimento diz-se..., **variado**. Repare-se que estamos a falar do vector velocidade, não da sua norma (a celeridade); a variação pode ser de direcção, de sentido, ou de norma.

A maneira de caracterizar a variação da velocidade, $\vec{v}(t)$, é idêntica à que usámos para caracterizar a variação de posição. Assim as seguintes definições são simples de entender.

A **aceleração média** de uma coordenada $x(t)$ num intervalo de tempo $[t, t + \Delta t]$ é a variação da coordenada correspondente da velocidade dividida pelo intervalo Δt :

$$a_m = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{v_x(t + \Delta t) - v_x(t)}{\Delta t}.$$

A variação do vector velocidade entre dois instantes é, naturalmente, um vector:

$$\Delta \vec{v} = \vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1).$$

A variação por unidade de tempo do vector velocidade é o **vector aceleração**:

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \left(\frac{\Delta v_x}{\Delta t}, \frac{\Delta v_y}{\Delta t} \right) = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \hat{\mathbf{i}} + \frac{\Delta v_y}{\Delta t} \hat{\mathbf{j}}.$$

Repare-se que não se trata de um conceito novo. Tal como a velocidade média, v_m , é a variação de uma coordenada, $x(t)$, por unidade de tempo,

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t},$$

a **aceleração**, a_m , é a variação de *velocidade*, $v_x(t)$, por unidade de tempo:

$$a_m = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}.$$

De um modo simples:

a aceleração média a_m está para a velocidade $v_x(t)$, assim como a velocidade média v_m está para a posição $x(t)$.

Temos pois um dicionário: se numa definição ou expressão envolvendo posição e velocidade, substituímos:

$$\begin{aligned} x(t) &\rightarrow v_x(t) \\ v_m &\rightarrow a_m \end{aligned}$$

obtemos uma relação ou expressão válidas para velocidade e aceleração. Eis alguns exemplos:

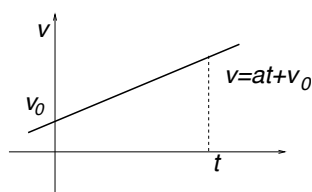


Figura 2.18: Movimento com aceleração constante.

- Uma aceleração média positiva significa que a velocidade aumenta entre os instantes inicial e final, $\Delta v_x > 0$. Uma aceleração negativa significa que $v_x(t)$ diminui entre o início e o fim do intervalo, $\Delta v_x < 0$.
- Se a velocidade for uma função linear do tempo (gráfico de v_x em função de t uma linha recta),

$$v_x(t) = mt + b \quad b, m \text{ constantes}, \quad (2.9)$$

a aceleração média é independente do intervalo considerado e é o declive da recta que representa $v_x(t)$ em função de t ,

$$a_m = m.$$

A constante b é a velocidade no instante $t = 0$, velocidade inicial (comparar com equação 2.6 da página 30): Ou seja,

$$v_x(t) = a_m t + v_0.$$

2.5.1.1 Acelerações negativas

Quando um atleta “acelera” para se destacar dos competidores, a coordenada da velocidade no eixo do movimento aumenta: a sua aceleração é positiva.

Mas ninguém “acelera” até parar, a não ser em Física. Nesse caso, a coordenada de velocidade está a diminuir. Na linguagem da Física é um movimento com aceleração... negativa.

Vejamos com mais cuidado os tipos de movimento que nos podem surgir. Para simplificar tomemos um corpo em deslocamento segundo o eixo Ox .

- Deslocamento, Δx , e velocidade, v_x , positivos: o corpo desloca-se no sentido positivo do eixo:
 - aceleração positiva: o valor de v_x está a crescer, movimento cada vez mais rápido (acelerado).
 - aceleração negativa: o valor de v_x está a diminuir em direcção a zero: movimento cada vez mais lento (retardado).
- Deslocamento, Δx , e velocidade, v_x , negativos: o corpo desloca-se no sentido negativo do eixo:

- aceleração positiva: o valor de v_x está a crescer. Como é negativo, está a crescer em direcção a zero. O módulo de v_x está a diminuir: movimento cada vez mais lento (retardado).
- aceleração negativa: o valor de v_x está a diminuir; como é negativo o seu módulo cresce. Movimento cada vez mais rápido (acelerado).

Se quisermos resumir, vemos que o que distingue um movimento em que o módulo da velocidade cresce (acelerado) ou diminui (retardado) é que no primeiro caso, o sinal das coordenadas de velocidade e aceleração são os mesmos; no segundo caso, são opostos.

2.5.2 Movimento Uniformemente Variado

O movimento de corpos sob acção do peso (em situações em que o atrito do ar não é importante) tem aceleração constante (movimento uniformemente variado) (ver Actividades 2.2 e 2.4). Vimos já que a equação da velocidade é

$$v_x(t) = a_x t + v_0. \quad (2.10)$$

Como é dada a dependência da posição em função do tempo?

Esta questão é respondida na Actividade 2.3 onde se conclui que

$$x(t) - x(0) = \frac{1}{2} a_x t^2 + v_0 t$$

ou

$$x(t) = \frac{1}{2} a_x t^2 + v_0 t + x_0 \quad (x_0 \equiv x(0)) \quad (2.11)$$

▷ Actividade 2.3

▷ Desafio 2.2

Será possível mostrar directamente que a equação da velocidade, Eq. 2.10, corresponde, de facto, ao movimento expresso na equação 2.11? Nisso consiste o desafio 2.2.

Exemplo: Se a equação de movimento da velocidade for

$$v_x(t) = -5t + 3$$

a equação para a coordenada correspondente será

$$x(t) - x_0 = -\frac{5}{2} t^2 + 3t.$$

É evidente que o conhecimento da velocidade só nos permite calcular o *deslocamento*, $x(t) - x_0$. Não permite determinar x_0 , a posição inicial. Um corpo pode ter a velocidade especificada com *qualquer* posição inicial.

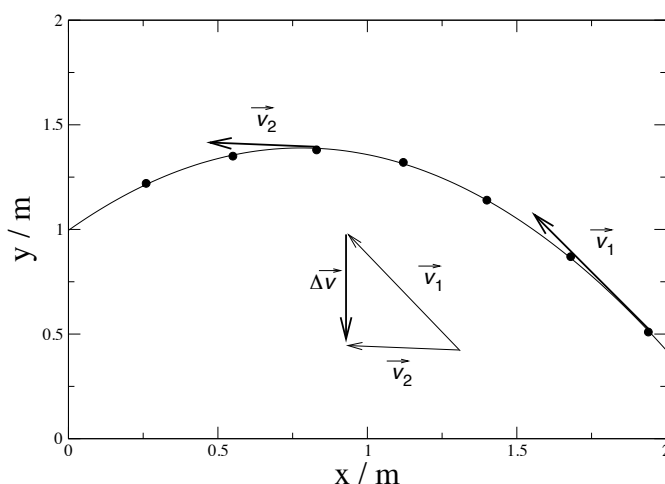


Figura 2.19: O vector velocidade, tangente à trajectória, roda quando a trajectória curva. O vector $\Delta\vec{v}$ aponta sempre para o lado para onde curva a trajectória. O vector aceleração média tem a direcção e sentido de $\Delta\vec{v}$.

2.5.3 Direcção e sentido do vector aceleração

O vector aceleração está sempre dirigido para o interior da curva da trajectória.

O exemplo do projectil ilustra bem este resultado (fig. 2.19). O vector variação de velocidade, $\Delta\vec{v}$,

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$$

somado ao primeiro valor de velocidade, \vec{v}_1 , dá a velocidade no final do intervalo

$$\vec{v}_1 + \Delta\vec{v} = \vec{v}_2.$$

A trajectória encurva, a tangente roda da direcção de \vec{v}_1 para a de \vec{v}_2 : O vector $\Delta\vec{v}$ e, consequentemente, o vector aceleração, que é $\Delta\vec{v}$ multiplicado por um escalar positivo, $1/\Delta t$, aponta no sentido da rotação da tangente.

Este exemplo mostra que a aceleração não é determinada apenas pela variação da norma da velocidade. A mudança de direcção numa trajectória curva implica sempre uma aceleração diferente de zero.

2.6 Sumário

Neste capítulo introduzimos os conceitos fundamentais para a descrição de qualquer movimento:

- deslocamento;
- velocidade;
- aceleração.

As afirmações seguintes resumem a nossa discussão, e o estudo deste capítulo deve conduzir a uma compreensão detalhada do seu significado. Não adianta decorá-las. Repetir com todas as vírgulas a definição de um conceito de Física nada tem a ver com a sua compreensão. Para compreender um conceito, como o de velocidade ou aceleração, temos que saber como se aplica, como se calcula, o que quer dizer, etc., em cada situação concreta em que possa ser evocado. Por isso, esta listagem destina-se apenas a recordar os principais momentos do desenvolvimento das ferramentas que introduzimos para descrever movimentos.

1. O movimento de translação de um corpo pode ser especificado por coordenadas, $(x(t), y(t))$ funções do tempo.
2. As variações de posição entre dois instantes definem o **vector deslocamento** nesse intervalo de tempo.
3. Deslocamentos em intervalos sucessivos somam-se para obter o deslocamento total.
4. A razão de um deslocamento pelo intervalo de tempo respectivo é a **velocidade média** nesse intervalo, isto é, o deslocamento por unidade de tempo.
5. Coordenadas de deslocamentos e velocidades podem ser positivas ou negativas conforme o movimento tem o sentido positivo ou negativo do eixo correspondente.
6. Se considerarmos intervalos sucessivamente mais pequenos, a velocidade média tende para um valor limite que é a **velocidade instantânea**.
7. A **aceleração** caracteriza a variação de velocidade com o tempo, do mesmo modo que a velocidade caracteriza a variação de posição. A **aceleração média** é a variação de velocidade por unidade de tempo num dado intervalo.

8. Um movimento em que uma coordenada da velocidade, $v_x(t)$, é constante

$$v_x(t) = v_0, \quad v_0, \text{ constante}$$

diz-se **movimento uniforme segundo esse eixo** e tem a seguinte lei de variação da coordenada correspondente com t

$$x(t) = v_0 t + x_0.$$

9. Um movimento de velocidade constante tem uma trajectória rectilínea e é uniforme segundo todos os eixos coordenados.
10. Um movimento em que uma coordenada da aceleração $a_x(t)$ é constante

$$a_x(t) = a_0, \quad a_0, \text{ constante}$$

diz-se **uniformemente** variado e tem velocidade e posição segundo esse eixo dadas, respectivamente, por

$$v_x(t) = a_0 t + v_0$$

e

$$x(t) = \frac{1}{2} a_0 t^2 + v_0 t + x_0$$

(x_0 e v_0 são constantes que não dependem do valor da aceleração e correspondem às coordenadas de posição e velocidade, segundo esse eixo, no instante $t = 0$).

2.7 Questões, actividades e problemas

2.7.1 Actividades

2.1. Movimentos numa calha linear

Ver ficha da Actividade A18.

2.2. Movimento de queda livre

Ver ficha de Actividade A19.

2.3. Movimentos de velocidade variável

Ver ficha de Actividade A20.

2.4. Movimento de projectil registado em vídeo

Ver ficha de Actividade A21.

2.7.2 Questões

- 2.1. A órbita da Terra em torno do Sol é praticamente circular e a Terra descreve arcos iguais em intervalos de tempo iguais. Quais das seguintes afirmações são verdadeiras? (nesta questão tomamos um trimestre como sendo $1/4$ e um semestre $1/2$ de um ano).
- (a) O deslocamento da Terra, no primeiro trimestre, é igual ao do segundo.
 - (b) O deslocamento da Terra, no primeiro semestre do ano, é igual ao do segundo semestre.
 - (c) O deslocamento da Terra, no primeiro semestre tem a mesma norma e direcção que no segundo.
 - (d) O deslocamento da Terra, num ano, vale $2\pi r$, em r é o raio da órbita.
 - (e) O deslocamento da Terra, num ano, é nulo.
- 2.2. Numa prova de atletismo, mede-se uma velocidade média ou instantânea? Justificar.
- 2.3. Justificar a seguinte afirmação:
Na prova dos 100 metros planos a coordenada do vector velocidade média, na direcção da pista, e a celeridade coincidem. Na prova de 400 m (uma volta à pista) são muito diferentes: uma delas é zero.
- 2.4. Num movimento rectilíneo:
- (a) A direcção do vector velocidade pode variar? E o sentido? Justificar.
 - (b) A aceleração pode ter uma direcção diferente da da trajectória? Justificar.
- 2.5. Um movimento com trajectória curva pode ter uma aceleração nula? Justificar.
- 2.6. Um estudante coloca a mão à frente de um sensor de movimento e realiza o seguinte movimento: aproxima a mão lentamente do sensor e depois, afasta-a, mais rapidamente, até à posição inicial.
- (a) Qual dos gráficos de x em função de t da figura 2.20, aparece no programa de aquisição? Justificar.

- (b) Escrever uma descrição verbal do tipo da indicada acima para os outros três gráficos.
- (c) Representar esquematicamente as velocidades e acelerações destes quatro movimentos, tendo particular atenção à determinação dos intervalos em que estas funções são positivas, negativas, crescentes ou decrescentes.

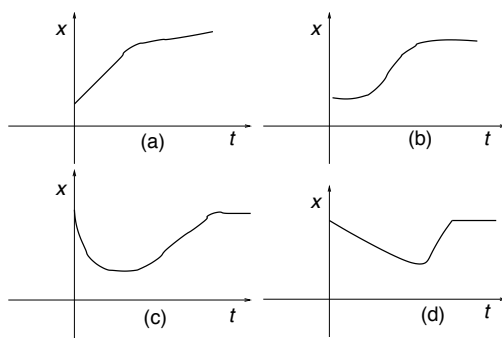


Figura 2.20: Gráficos de x em função de t .

- 2.7. Um corpo move-se ao longo do eixo Ox . Deslocou-se 10 m a uma velocidade média de 5 m s^{-1} e os seguintes 10 m a uma velocidade média de 2 m s^{-1} . Qual foi a sua velocidade média, neste deslocamento de 20 m :

- (a) 7 m s^{-1} ;
 (b) $20/7\text{ m s}^{-1}$;
 (c) $3,5\text{ m s}^{-1}$.

- 2.8. A fig. 2.21 mostra quatro posições (A a D) na órbita circular da Terra em torno do Sol. A norma da velocidade da Terra pode ser considerada constante em toda a órbita. Para o sistema de eixos indicado, responder, justificando às seguintes perguntas.

- (a) Quais as coordenadas de velocidade positivas, negativas ou nulas nos quatro pontos da órbita, A a D ?
- (b) Quais são as coordenadas da aceleração média que são positivas, negativas, ou nulas nos seguintes intervalos:
- Entre A e B .
 - Entre A e C .
- (c) Qual é a aceleração média no intervalo de um ano (período da órbita)?

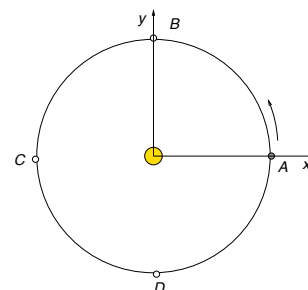


Figura 2.21: Órbita da Terra.

2.9. Na Fig. 2.22 estão representados gráficos referentes a quatro movimentos em uma dimensão, dois representando a velocidade, (a) e (d), os outros dois a posição, (b) e (c).

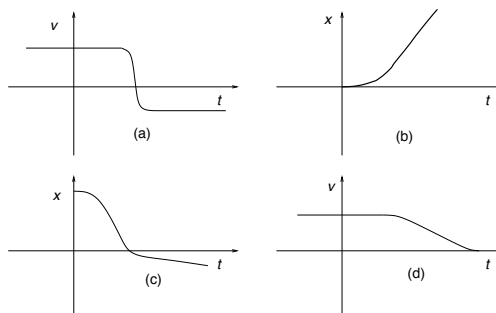


Figura 2.22: Dois gráficos de velocidade (a) e (d) e dois de posição (b) e (c) para quatro movimentos.

- (a) Identificar a qual dos seguintes movimentos corresponde cada gráfico:
- Um automóvel a arrancar quando o semáforo passa a verde
 - uma pedra a cair de uma certa altura, na vertical, para um lago;
 - um comboio que pára ao chegar a uma estação;
 - um carro PASCAR, equipado com magneto, que colide com outro em movimento.
- (b) Representar, esquematicamente, os gráficos de posição correspondentes a (a) e (d) e velocidade correspondentes a (b) e (c).

2.7.3 Problemas

2.1. Um homem persegue um trilho numa floresta. Desloca-se 500m para Este, 500m para Norte e 500m para Sudeste.

- A que distância está do ponto de onde partiu?
- Que deslocamento tem que fazer para voltar ao ponto de partida?

2.2. Considerar a Tabela 2.3, da página 31.

- Qual teria que ser o valor da coordenada x em $t = 1\text{ s}$ para que a velocidade média no intervalo de tempo entre $t = 0$ e $1,0\text{ s}$ fosse a mesma que entre $t = 1,0$ e $2,0\text{ s}$?

- (b) Qual teria sido, nesse caso, a velocidade média entre $t = 0,5 \text{ s}$ e $t = 1 \text{ s}$?
- 2.3. Foi considerada inconstitucional uma lei que permitia multar por excesso de velocidade os condutores cujo tempo de viagem entre duas portagens fosse inferior a um certo limite. O limite de velocidade é de 120 km h^{-1} .
- (a) Definir a grandeza velocidade a que se refere o código da estrada.
- (b) Para uma tolerância de 20 km h^{-1} acima do limite, e uma distância entre portagens de 300 km , qual é o tempo mínimo que um condutor poderia demorar sem ser multado?
- 2.4. Dois automóveis fazem uma viagem de 200 km seguindo o mesmo percurso. O primeiro demora duas horas, fazendo uma “média” de 120 km h^{-1} na primeira hora. O segundo fez a mesma média de 120 km h^{-1} nos primeiros 100 km da viagem.
- (a) Qual foi a velocidade (celeridade) média do primeiro automóvel na segunda hora?
- (b) O segundo automóvel fez a média determinada na alínea anterior nos segundos 100 km da viagem. Qual dos carros fez a viagem mais depressa? Por quanto tempo?
- 2.5. Um esfera move-se num calha linear horizontal e nos instantes $t = 1 \text{ s}$ e $t = 2,5 \text{ s}$ ocupa as posições de coordenadas $x = 0,78 \text{ m}$ e $x = 0,22 \text{ m}$, respectivamente. Supondo que o seu movimento é uniforme,
- (a) determinar a equação do movimento $x(t)$;
- (b) calcular a coordenada x da esfera em $t = 2 \text{ s}$.
- 2.6. Estou no início de um corredor. Começo a andar ($t = 0$), desloco-me 8 m em 5 s e páro nessa posição.
- (a) Qual é a minha velocidade média no intervalo entre $t = 0$ e $t = 5 \text{ s}$?
- (b) Qual é a minha velocidade média entre $t = 0$ e $t = 10 \text{ s}$?
- (c) Explicar os resultados anteriores usando um gráfico de posição em função do tempo. Traçar rectas cujos declives correspondam às respostas das alíneas anteriores.

2.7. Um automóvel acelera de 0 a 100 km h^{-1} em 6 s em linha recta.

- (a) Qual é a sua aceleração média neste intervalo de tempo?
- (b) Se a sua aceleração for constante, qual é o seu deslocamento entre $t = 0$ e $t = 6 \text{ s}$? Qual é a sua velocidade média neste intervalo?
- (c) Qual é sua velocidade ao fim de 3 s (aceleração constante)?
- (d) Em que intervalo de tempo foi maior a sua variação de energia cinética, nos primeiros 3 segundos ou nos últimos três (aceleração constante)?

2.8. **Cálculo de velocidade instantânea com calculadora.**

Suponhamos um movimento com a lei:

$$x(t) = 2t^2.$$

Queremos calcular a velocidade instantânea em $t = 1$. Ou seja:

$$v(1) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(1 + \Delta t) - x(1)}{\Delta t}. \quad (2.12)$$

- (a) Usando uma calculadora, calcular a razão que aparece nesta equação para valores cada vez mais pequenos de Δt : $1; 0,1; 0,01, \dots$. Estimar o valor do limite.
- (b) Este movimento tem a forma de um movimento uniformemente variado

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$$

a que corresponde uma velocidade

$$v(t) = at + v_0$$

Verificar se o valor obtido na alínea anterior é confirmado por esta expressão.

- (c) Representar graficamente $x(t)$. Traçar a recta que passa no ponto de abcissa $t = 1$ e ordenada $x = 2$ e tem o declive calculado na alínea (a).

2.9. Dois veículos iniciam um movimento rectilíneo, partindo do repouso, lado a lado, com uma aceleração de 4 m s^{-2} . O primeiro, ao fim de um segundo, passa a ter aceleração nula. A aceleração do segundo veículo mantém-se constante.

- (a) Qual é a velocidade dos veículos ao fim de 1 s ?
- (b) Escrever as equações que determinam as respectivas velocidades em função do tempo. Representá-las graficamente.
- (c) Determinar a distância entre a posição do primeiro veículo ao fim de dois segundos e a sua posição inicial.
- (d) Calcular a distância entre os dois veículos ao fim de dois segundos de movimento.
- 2.10. No movimento de um corpo ao longo do eixo dos xx , a coordenada de posição em função do tempo é dada pela equação:

$$x(t) = 5(t - 1)^2$$

(x em metros e t em segundos).

- (a) Determinar:
- a velocidade média entre $t = 0$ e $t = 1$.
 - A velocidade média entre $t = 1$ e $t = 2$.
 - O deslocamento entre $t = 1$ e $t = 3$.
- (b) Mostrar que este movimento tem aceleração constante e determiná-la. Calcular a velocidade e posições iniciais ($t = 0$).
- (c) Representar graficamente x em função de t entre $t = -2$ e $t = 2$. Inspeccionando o gráfico, determinar os intervalos de tempo em que a velocidade instantânea é negativa e aqueles em que é positiva.
- 2.11. O movimento de um corpo é determinados pelas seguintes equações para as suas coordenadas num sistema de eixos ortogonal:

$$\begin{aligned} x(t) &= 2t^2 + 5t \\ y(t) &= -2t^2 + 1. \end{aligned}$$

- (a) Quais são as equações que determinam as respectivas coordenadas de velocidade $v_x(t)$, $v_y(t)$?
- (b) Qual é a direcção da velocidade inicial $\vec{v}(0)$?
- (c) Qual é a direcção e norma da aceleração deste movimento?
- 2.12. O gráfico da figura 2.23 ao lado corresponde ao movimento de um carro numa calha.

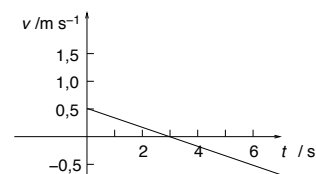


Figura 2.23: Que movimento é este?

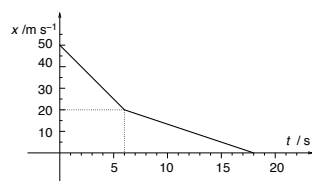


Figura 2.24: Que movimento é este?

- (a) Em que instante inverte o carro o sentido de movimento?
- (b) Em que instante volta o carro a estar na sua posição que ocupava no instante $t = 0$? Qual foi o seu deslocamento nesse intervalo?
- (c) Qual é a aceleração deste movimento?
- (d) A calha está horizontal e o carro desloca-se ligado por um fio, que passa numa roldana, a uma massa suspensa. A massa subiu ou desceu, neste movimento?
- 2.13. O gráfico da figura 2.24 representa a coordenada de posição de um disco que se desloca em linha recta sobre um lago gelado.
- (a) Este movimento é uniforme? Justificar.
- (b) Representar o correspondente gráfico de velocidade.
- (c) Qual foi a aceleração média entre o instante inicial e o instante final ($t = 18 \text{ s}$) ?
- (d) Se a velocidade do disco não se alterasse quando $t = 6 \text{ s}$, qual seria a sua posição ao fim dos 18 s ? Em que instante passaria na origem?
- 2.14. Um automóvel desloca-se numa recta à velocidade de 80 km h^{-1} . O condutor avista um obstáculo e trava. O tempo de reacção do condutor é de $0,2 \text{ s}$ (tempo que decorre entre o instante em que avista o obstáculo e inicia a travagem) e a aceleração do automóvel em travagem é de -4 m s^{-2} .
- (a) Quanto tempo demora o automóvel a imobilizar-se, desde que o condutor avista o obstáculo?
- (b) Qual é a sua velocidade ao fim de um segundo de travagem?
- (c) Que distância percorre o automóvel antes de se imobilizar?
- 2.15. O gráfico da Fig 2.25 representa a variação de velocidade de um corpo que é largado de uma altura h . Ao fim de cinco segundos de queda abre-se um pequeno para-quedas e a sua velocidade diminui bruscamente. Atinge o solo ao fim de 21 segundos de queda.
- (a) Qual foi a aceleração do corpo nos primeiros 5 s de queda?

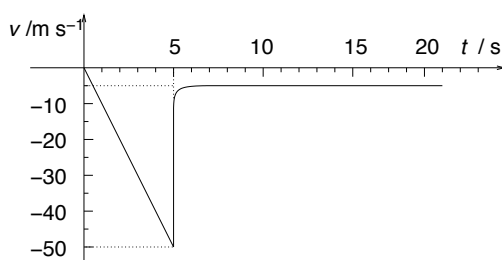


Figura 2.25: Velocidade em função do tempo para um corpo em queda com abertura de para quedas.

- (b) Determinar a equação que descreve a variação da velocidade com o tempo nos primeiros 5 s de queda.
 - (c) Qual foi a aceleração média nos 21 s de queda?
 - (d) De que altura h caiu o corpo? A que altura estava quando abriu o para quedas?
 - (e) Desenhar o gráfico da posição z do corpo (distância na vertical ao solo) em função do tempo.
- 2.16. A fig. 2.26 mostra a trajectória de uma bola de futebol após a marcação de um livre. No plano da trajectória a velocidade inicial da bola tem coordenadas (eixo Ox horizontal e Oy vertical):

$$\vec{v}_1 = (30, 5) \text{ m s}^{-1}$$

- (a) Qual é a norma da velocidade inicial da bola em quilómetros por hora?
- (b) Se a aceleração média do movimento no primeiro segundo de vôo, fosse a aceleração da gravidade,

$$\vec{a} = (0, -10) \text{ m s}^{-2},$$

qual seria o vector velocidade final ($t = 1 \text{ s}$)? Qual seria a respectiva norma?

- (c) A resistência do ar ao movimento da bola deve contribuir para reduzir velocidade da bola. Qual será o sinal da coordenada x da aceleração média? Justificar.



Figura 2.26: Trajectória de uma bola de futebol

2.7.4 Desafios

- 2.1. Como usar a definição da caixa 2.2, da página 20, para calcular o perímetro de um círculo? Para evitar trabalhar com um curva fechada consideremos meio círculo.

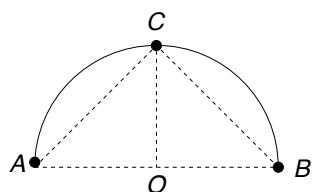
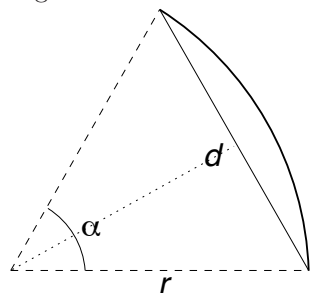


Figura 2.27: Meio círculo.

Figura 2.28: Qual é o comprimento, d , da corda?

- (a) Se aproximarmos o perímetro de meio círculo pelo comprimento do segmento entre A e B obtemos

$$S_2 = 2r.$$

Que valor obtemos se usarmos o ponto intermédio C e substituirmos o perímetro pela soma dos comprimentos AC e CB ?

- (b) Mostrar que perímetro de meio círculo pode ser dado pelo limite da seguinte expressão quando n tende para infinito:

$$S_n = 2rn \sin \left(\frac{180^\circ}{2n} \right).$$

Sugestão: ver a figura 2.28

- (c) Usando a máquina de calcular, estimar esta expressão para $n = 100, 1000, 10000$ e 100000 ($r = 1$). Comparar com o valor de π .

- 2.2. A coordenada $x(t)$ de um movimento uniformemente variado é dada pela equação (ver página 40):

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$$

- (a) Obter a seguinte expressão para a velocidade média desta coordenada $x(t)$ no intervalo $[t, t + \Delta t]$:

$$v_m = v_0 + at + \frac{a}{2}\Delta t$$

- (b) Usando a definição 2.8, obter a velocidade instantânea $v_x(t)$ e comparar com a equação 2.10.
- (c) Mostrar que, para um movimento uniformemente variado, a velocidade média num dado intervalo de tempo é igual à velocidade instantânea no ponto médio desse intervalo.

- 2.3. Numa das actividades do 10^o ano (Actividade A5) foi estudada a queda livre de um corpo, tendo-se verificado que a velocidade, ao fim de uma queda de uma distância h , era dada pela expressão

$$v^2 = 2gh.$$

- (a) Mostrar que as equações de $x(t)$ e $v(t)$ para movimento uniformemente acelerado com velocidade inicial nula, dão este resultado, desde que a aceleração seja g (na vertical, sentido descendente).

2.4. Considerar um corpo em movimento rectilíneo com aceleração constante $\vec{a} = a\hat{\mathbf{i}}$.

- (a) Usando as equações de movimento para $v_x(t)$ e $x(t)$ mostrar que a variação de energia cinética do corpo é dada por

$$\Delta E_c \equiv E_c(t) - E_c(0) = ma \times \Delta x(t)$$

- (b) Qual é o trabalho realizado sobre este corpo neste deslocamento? Qual é o valor da força correspondente?

Bibliografia

- [1] Greenwich 2000. The Prime Meridian of the World. URL:<http://greenwichmeridian.com/>, Junho 2004.
- [2] Michael Lahanas. Aristotle Physics. URL:<http://www.mlahanas.de/Greeks/AristotlePhysics.htm>, Outubro 2004.