Projecto Faraday

Textos de Apoio

Relatividade

12º Ano de Escolaridade

Porto, Outubro de 2009

Ficha Técnica

Projecto de intervenção no ensino da Física no secundário.

Financiamento

Fundação Calouste Gulbenkian.

Execução

Departamento de Física, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto.

Escolas Participantes

- ES Filipa de Vilhena
- ES Fontes Pereira de Melo
- ES Garcia de Orta
- ES da Maia
- ES de Santa Maria da Feira

Coordenação

- J. M. B. Lopes dos Santos
- Manuel Joaquim Marques

Portal

URL: `http://www.fc.up.pt/faraday`

Texto do 12º Ano

Redactor Principal

J. M. B. Lopes dos Santos

Colaboração e revisão

- Elisa Arieiro
- Carlos M. Carvalho
- Manuel Joaquim Marques
- Maria de Fátima Mota

Capítulo 12

Relatividade

Quando se eliminou o impossível, o que quer que reste,
por mais improvável que seja, tem de ser a verdade.

Sherlock Holmes

12.1 Duas revoluções, duas constantes

No último ano do século XIX, um respeitado académico e Professor de Física, já nos seus quarenta anos, iniciou, sem querer, uma das maiores revoluções do conhecimento humano.

Max Planck não podia prever que a sua proposta de que a transferência de energia entre a radiação e a matéria se processava em pacotes discretos de energia, os *quanta,* culminasse, um quarto de século mais tarde, na descoberta da Mecânica Quântica. Tanto mais que considerava a hipótese dos quanta como um mero expediente de cálculo, cujo objectivo era obter uma fórmula para descrever a distribuição experimental da energia da radiação térmica pelos vários comprimentos de onda. O nome de Planck ficou para sempre ligado a uma nova constante universal, h, a constante de Planck, que aparece pela primeira vez no seu artigo de 1900, e relaciona a frequência da radiação electromagnética, ν, com a energia dos pacotes transferidos de, e para, a matéria:

$$E = h\nu.$$

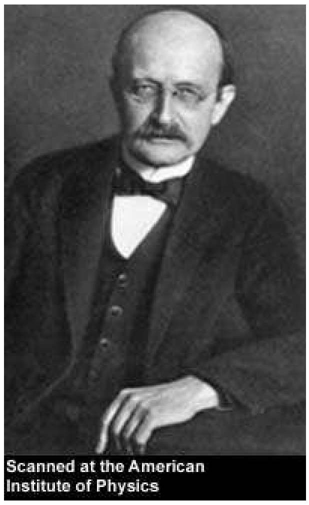


Figura 12.1: Max Planck, 1858–1947 [1]

A outra revolução da Física do século XX começou um pouco mais tarde, em 1905, pela pena de um obscuro funcionário de um escritório de patentes, que nunca tinha tido um posto universitário, e

■ Albert Einstein, 1879–1955 ■

Albert Einstein, por volta de 1905

Albert Einstein nasceu em Ulm na Alemanha em 1879. Passou a sua infância em Munique, onde começou a frequentar a escola. O mito de que Einstein era um fraco aluno não corresponde à verdade: as suas classificações eram boas e em matemática eram mesmo excepcionais. Mas desde muito cedo Einstein revelou uma profunda aversão ao autoritarismo e falta de liberdade de pensamento do sistema escolar alemão. Em 1896, ainda menor, conseguiu mesmo renunciar à cidadania alemã, tornando-se cidadão Suíço em 1901, um ano depois de obter o seu diploma na Escola Politécnica de Zurique. A sua independência não o tornava popular entre os seus professores e só em 1909 conseguiu o seu primeiro posto académico.

Foi em 1905, como funcionário de um escritório de patentes, que Einstein publicou cinco trabalhos sobre três temas distintos (efeito fotoeléctrico, relatividade restrita e movimento browniano), qualquer deles merecedor de Prémio Nobel.

Contudo, o seu trabalho mais excepcional estava ainda para vir. Em 1916, após 11 anos de labor intenso, Einstein publicou as equações da Relatividade Geral, que identificam a Gravitação com a geometria do espaço-tempo.

Einstein teve ainda uma influência notável no desenvolvimento da Mecânica Quântica, embora nunca a tivesse aceitado como teoria satisfatória.

Faleceu em Princeton em 1955. A sua contribuição para a Física só encontra paralelo em Isaac Newton.

Caixa 12.1: Albert Einstein, um ícone do século XX.

que se chamava Albert Einstein. Também estava relacionada com uma constante universal, mas desta vez não tinha sido descoberta por Einstein.

Em 1864, um físico escocês, James Clerk Maxwell, tinha conseguido reunir num conjunto de equações, que receberam o seu nome, todas as leis que regem as interacções eléctricas e magnéticas e a cuja investigação estavam ligados os nomes de Volta, Coulomb, Ampère, Lenz, Oersted, Biot, Savart e Faraday.

Figura 12.2: James Clerk Maxwell, 1831-1879.

Uma constante que aparecia nas suas equações, e cujo valor se podia obter a partir de medições de forças eléctricas e magnéticas, tinha as unidades de uma velocidade. Quando Maxwell a calculou e verificou que o seu valor era praticamente o da velocidade da luz, concluiu, e bem, que a luz era de facto um fenómeno electromagnético e a constante em causa, c, a sua velocidade.

As raízes da revolução iniciada e terminada por Einstein, estão precisamente neste facto: a existência de uma constante universal que é uma velocidade. Este simples facto deu origem a uma revisão profunda das nossas concepções mais básicas sobre natureza do espaço e do tempo.

A nossa tarefa neste capítulo é compreender esta relação entre a existência de uma velocidade que é uma constante universal e a natureza do espaço e tempo. Mas primeiro temos que entender o que é o Princípio da Relatividade, uma ideia tão antiga como a Física e já conhecida de Galileu e de Newton.

12.2 Princípio da Relatividade

Suponhamos que nos é proposto o seguinte desafio:

> Vamos ser colocados numa carruagem de comboio, sem janelas. O comboio vai percorrer uma trajectória plana, rectilínea, a velocidade uniforme. Podemos dispor de todos os instrumentos que quisermos, réguas, cronómetros, balanças, sensores de pressão, de som, de luz, fontes de alimentação, pilhas, amperímetros, voltímetros, osciloscópios, etc. O desafio é simples: determinarmos a velocidade do comboio, sem olhar para fora nem receber nenhuma informação do exterior, apenas através de experiências feitas na carruagem.

O Princípio de Relatividade afirma que esta tarefa é impossível!

Quaisquer experiências ou observações têm sempre implícito um **sistema de referência**. Quando fizemos experiências de colisões entre carros em calhas de alumínio, colocámos as calhas em cima de uma mesa de laboratório com sensores de movimento nas pontas. Todos estes objectos tinham posições fixas entre si e relativamente às paredes e soalho da sala. As distâncias e velocidades dos carros eram medidas relativamente a estes objectos. Se quisermos repetir uma tal experiência no comboio, a mesa, as calhas e os sensores terão posições fixas relativamente à carruagem e em conjunto com ela, constituem um novo **sistema de referência**, que pode estar em movimento relativamente ao anterior.

Grandezas físicas, como coordenadas de posição, ou componentes de velocidades, acelerações, forças, ou energias são sempre relativas a um dado sistema de referência. Um corpo, pousado numa mesa na carruagem do comboio, tem uma velocidade e energia cinética **nulas** no referencial do comboio; se este estiver em movimento, tem velocidade e energia cinética não nulas no referencial da sala da escola onde são feitas as experiências deste projecto.

Dito isto, o **Princípio de Relatividade** tem a seguinte expressão:

Princípio de Relatividade

As leis da Física são as mesmas em dois referenciais em movimento relativo uniforme e rectilíneo (velocidade constante).

Assim, a realização de experiências num dado sistema de referência, nada nos pode dizer sobre a sua velocidade (constante) em relação a outro referencial, pois os resultados dessas experiências são os mesmos qualquer que seja essa velocidade relativa.

12.2.1 O Princípio da Relatividade e a velocidade da luz

Suponhamos que viajamos numa carruagem do Metro do Porto e somos testemunha de um disparo feito do fundo da carruagem. As câmaras de vigilância do comboio registam o evento e a análise das respectivas imagens permite-nos determinar que a bala demorou

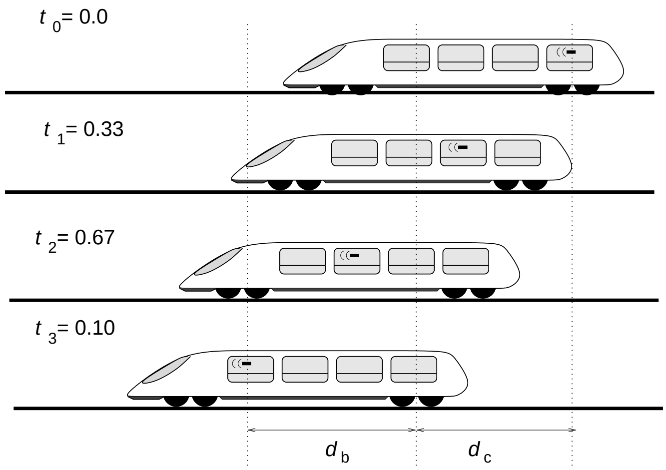


Figura 12.3: Um disparo dentro da carruagem filmado numa câmara exterior.

ΔT =0,1 s a viajar o comprimento da carruagem. Medindo essa distância, $\Delta X = 20\,\mathtt{m}$, calculamos a velocidade da bala:

$$V = \frac{\Delta X}{\Delta T} = \frac{20}{0{,}1} = 200\,\mathtt{m}\,\mathtt{s}^{-1}. \tag{12.1}$$

Todas estas medições foram (ou podem ser feitas) no referencial da carruagem: as câmaras, com o seu relógio interno, e as fitas métricas são instrumentos relativos a este referencial.

Imaginemos agora que o mesmo acontecimento foi registado por uma câmara fixa no solo. Os tempos e as distâncias são agora medidos por outro conjunto de instrumentos ligados a este referencial. Neste capítulo vamos muitas vezes ter necessidade de escrever grandezas em dois referenciais; passaremos a distinguir as grandezas nos dois referenciais usando maiúsculas num deles e minúsculas no outro. Por isso usámos na equação 12.1 X, T e V em vez dos símbolos mais usuais, x, t e v; estes ficam reservados para o referencial do solo.

Até Einstein, todo o mundo achou óbvio que o filme registado no exterior tinha exactamente o aspecto da figura 12.3:

- O intervalo de tempo Δt que a bala demora a atingir a frente da carruagem é o mesmo que o intervalo correspondente, ΔT, medido no referencial da carruagem:

$$\Delta t = \Delta T. \tag{12.2}$$

Isto é, as câmaras dos dois referenciais registam exactamente o mesmo número de imagens entre o início e o fim do processo.

- A distância que a bala avançou relativamente à carruagem, na perspectiva da câmara exterior, d_b, tem o mesmo valor que a distância que foi medida no referencial da carruagem:

$$d_b = \Delta X = V\Delta T. \tag{12.3}$$

Sendo assim, a velocidade da bala medida no referencial do solo é:

$$\begin{aligned} v = \frac{\Delta x}{\Delta t} &= \frac{d_b + d_c}{\Delta t} = \\ &= \frac{V\Delta T}{\Delta t} + u = V + u \end{aligned}$$

em que u é a velocidade do comboio no referencial do solo.

Em resumo:

> Dados dois referenciais $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$, e u a velocidade de $\mathcal{R}'$ em $\mathcal{R}$, numa dada direcção; um corpo com velocidade v em $\mathcal{R}$ na mesma direcção que u, tem uma velocidade V em $\mathcal{R}'$ dada por:
>
> $$V = v - u. \tag{12.4}$$

No caso referido acima $V = 200\,\mathrm{m\,s^{-1}}$; se a velocidade u da carruagem for $20\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ na direcção de movimento da bala,

$$v = 220\,\mathrm{m\,s^{-1}}.$$

A bala viajou $22\,\mathrm{m}$ no referencial do solo no mesmo tempo que viajou $20\,\mathrm{m}$ no do comboio, pois este avançou $2\,\mathrm{m}$ no mesmo intervalo de tempo, **no referencial do solo**.

Se a bala fosse disparada no sentido oposto ao do deslocamento do comboio teríamos $V = -200\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ e

$$v = -200 + 20 = -180\,\mathrm{m\,s^{-1}}.$$

A equação 12.4 generaliza-se facilmente a referenciais em movimento relativo de translação arbitrário, (ver Caixa 12.2 na página 12):

$$\vec{V} = \vec{v} - \vec{u} \tag{12.5}$$

Ao lidar com aplicações desta equação é muito fácil, e frequente, confundirmos as definições e trocarmos os sinais. Talvez seja útil notar o seguinte:

- Duas das velocidades são **medidas no mesmo referencial**: a velocidade de um corpo, $\vec{v}$, e a velocidade de um outro referencial, $\vec{u}$. Ou, alternativamente, $\vec{V}$ e $\vec{U}$; como é óbvio $\vec{U} = -\vec{u}$;

Com esta convenção de capitalização, a seguinte regra dá sempre a fórmula correcta:

- As velocidades do corpo estão em membros opostos da equação com o sinal positivo;

- A velocidade do referencial é escrita no mesmo membro que a outra velocidade medida no mesmo referencial ($\vec{u}$ no mesmo membro que $\vec{v}$, ou $\vec{U}$ no mesmo membro de $\vec{V}$) com o sinal negativo. Ou seja,
$$\vec{V} = \vec{v} - \vec{u}$$
ou
$$\vec{v} = \vec{V} - \vec{U}.$$

Se o corpo se move com a mesma velocidade que o referencial, $\vec{v} = \vec{u}$ ou $\vec{V} = \vec{U}$, a sua velocidade no outro referencial deve ser nula.

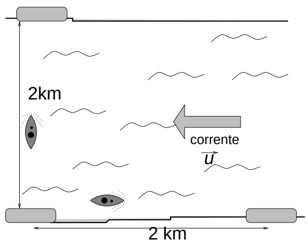


Figura 12.4: Os barcos demoram o mesmo tempo na viagem de ida e volta?

$\mathcal{ETV}_1$: A velocidade máxima de dois barcos de transporte de passageiros relativamente às águas de um rio é de $25\,\mathtt{km\,h}^{-1}$. Um dos barcos faz serviço entre duas plataformas a dois quilómetros de distância na mesma margem. O outro entre plataformas em margens opostas, uma em frente à outra, também a dois quilómetros de distância. Quando a velocidade das águas do rio é de $5\,\mathtt{km\,h}^{-1}$, qual é a diferença de tempos das viagens de ida e volta dos dois barcos?

12.2.2 O tempo e espaço Newtonianos

A equação de transformação de velocidades, eq. 12.5, era bem conhecida de Galileu. Newton, nos *Principia,* explicitou as noções de tempo e espaço que suportam esta relação:

■ Transformação de Galileu entre referenciais com movimento relativo de translação ■

Medir coordenadas num referencial $\mathcal{R}$ requer a definição de um sistema de eixos. Além disso existe sempre implícita a suposição que podemos determinar o instante de tempo t, nesse referencial, para qualquer acontecimento, em qualquer ponto do espaço. Imaginemos um outro referencial, com eixos paralelos e cuja origem, O', tem vector de posição $\vec{r}_{O'}$ em $\mathcal{R}$. O vector de posição de qualquer partícula em $\mathcal{R}$ pode escrever-se **com grandezas relativas apenas ao referencial** $\mathcal{R}$ como

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_{O'}(t) + \vec{r}_1(t),$$

em que $r_1(t) = \vec{r}(t) - \vec{r}_{O'}(t)$ é o vector que une a origem O' à partícula.
Se supusermos que no referencial $\mathcal{R}'$,

- O tempo T é o mesmo que em $\mathcal{R}$, $T = t$,
- o vector de posição da partícula é $\vec{R}(T) = \vec{r}_1(t)$,

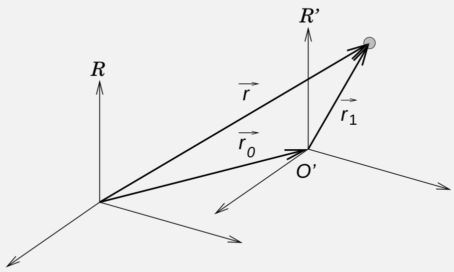
podemos concluir a seguinte transformação:

$$\vec{R}(T) = \vec{r}(t) - \vec{r}_{O'}(t).$$

Derivando e usando $\Delta T = \Delta t$, obtemos a lei de transformação de velocidades entre os dois referenciais,

$$\vec{V}(T) = \vec{v}(t) - \vec{v}_{O'}(t),$$

em $\vec{v}_{O'}(t)$ é a velocidade de $\mathcal{R}'$ em $\mathcal{R}$. A equação 12.4 na página 10 é um caso particular de uma componente desta equação.



Caixa 12.2: Transformação de Galileu.

> *O **espaço absoluto**, na sua natureza, sem qualquer relação com alguma coisa externa, permanece sempre idêntico e imutável.*
>
> *O **tempo absoluto**, na sua natureza, flui uniformemente sem qualquer relação com alguma coisa externa.*

Estas grandiosas palavras exprimem conceitos que estão na base das equações 12.2 e 12.3 na página 9:

> A distância entre dois pontos é um **invariante**; dois referenciais diferentes medem entre os mesmos pontos a mesma distância;

▷ **invariante:** uma grandeza cujo valor não varia ao mudar de referencial.

> O intervalo de tempo entre dois acontecimentos é um **invariante**: dois referenciais diferentes medem entre os mesmos acontecimentos o mesmo intervalo de tempo.

Estas duas leis implicam a lei de transformação da velocidade, $\vec{v} \to \vec{V}$, que não é um **invariante** entre referenciais em movimento relativo:

$$\vec{V} = \vec{v} - \vec{u}. \tag{12.6}$$

Aqui reside o problema que preocupou Einstein em 1905: esta lei de transformação implica que o Princípio da Relatividade não é válido para fenómenos electromagnéticos.

A descoberta de Maxwell é que as leis dos fenómenos eléctricos e magnéticos determinam a velocidade c de um sinal luminoso, independentemente do modo como é emitido. Mas, de acordo com a análise de Galileu e Newton, a velocidade da luz não pode ser a mesma no referencial do comboio e no referencial do solo.

Suponhamos que as equações de Maxwell são válidas no referencial do comboio. A velocidade de um sinal luminoso neste referencial será c, a constante universal das equações de Maxwell. Mas, se o sinal viajar da traseira para a frente do comboio, **no referencial do solo** a sua velocidade será:

$$v = c + u$$

Se viajar na direcção oposta a velocidade do solo será

$$v = c - u$$

A velocidade da luz não só não é c, como é variável com a direcção de propagação.

Em resumo:

As leis de Maxwell não podem ser válidas nos dois referenciais, ou seja, as leis das interacções eléctricas e magnéticas são diferentes em referenciais em movimento relativo uniforme e rectilíneo. O Princípio da Relatividade não pode valer para fenómenos eléctricos e magnéticos, se a lei de transformação de velocidades for dada pela transformação de Galileu (equação 12.5 na página 10).

12.2.3 Princípio da Relatividade e a Física Newtoniana.

Dicionário de cinemática

Para apreciar melhor a maneira como Einstein abordou o problema referido, fazemos aqui um pequeno interlúdio para ver como as leis de Newton são compatíveis com o Princípio da Relatividade e a transformação de Galileu.

Consideremos então dois referenciais, $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$, em movimento relativo e tentemos estabelecer um dicionário entre grandezas medidas em $\mathcal{R}$ (minúsculas) e $\mathcal{R}'$ (maiúsculas). Admitimos que os dois sistemas de eixos são paralelos, e que a origem de $\mathcal{R}'$ tem um vector de posição $\vec{r}_{O'}(t)$ em $\mathcal{R}$: o movimento relativo dos dois referenciais é apenas de translação. A velocidade e aceleração de $\mathcal{R}'$ são:

$$\begin{aligned} \vec{u}_{O'}(t) &= \frac{d\vec{r}_{O'}(t)}{dt} \\ \vec{a}_{O'}(t) &= \frac{d\vec{u}_{O'}(t)}{dt}. \end{aligned}$$

O nosso dicionário tem as seguintes entradas:

Grandeza	$\mathcal{R}$	$\mathcal{R}'$
Distância entre dois pontos	d	$D = d$
Intervalo de tempo entre acontecimentos	Δt	$\Delta T = \Delta t$
Vector de posição	$\vec{r}(t)$	$\vec{R}(T) = \vec{r}(t) - \vec{r}_{O'}(t)$
Vector velocidade	$\vec{v}(t)$	$\vec{V}(T) = \vec{v}(t) - \vec{u}_{O'}(t)$
Vector aceleração	$\vec{a}(t)$	$\vec{A}(T) = \vec{a}(t) - \vec{a}_{O'}(t)$

Contudo, a cinemática não é suficiente para formular as leis da dinâmica Newtoniana. Precisamos dos conceitos de massa e força. Comecemos pela massa: como se transforma entre referenciais?

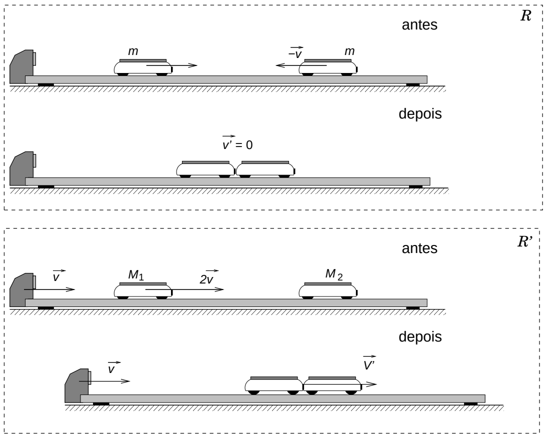


Figura 12.5: Uma colisão inelástica analisada em dois referenciais mostra que dois corpos com massas iguais em $\mathcal{R}$ têm massas iguais em $\mathcal{R}'$. No primeiro caso, como as massas são iguais e as velocidades são opostas, a velocidade final é nula. Se o referencial $\mathcal{R}'$ tiver uma velocidade $\vec{u} = -\vec{v}$, igual ao do carro da direita, este está parado em $\mathcal{R}'$ e o outro tem velocidade $\vec{V} = \vec{v} - \vec{u} = 2\vec{v}$. Após a colisão o conjunto, parado em $\mathcal{R}$, tem velocidade $\vec{V'} = -\vec{u} = \vec{v}$ em $\mathcal{R}'$. Logo a conservação de momento implica $M_1 \times 2\vec{v} = (M_1 + M_2)\,\vec{v}$, ou seja, $M_1 = M_2$. Este argumento pode ser generalizado para qualquer razão entre massas.

Massa como invariante

Suponhamos que observamos uma colisão entre duas partículas de massas m_1 e m_2 **em** $\mathcal{R}$; a conservação de momento linear implica:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2' \tag{12.7}$$

em que no primeiro membro temos o momento total antes da colisão e no segundo depois da colisão.

A lei de conservação de momento no referencial $\mathcal{R}'$ terá a forma:

$$M_1\vec{V}_1 + M_2\vec{V}_2 = M_1\vec{V'}_1 + M_2\vec{V}_2' \tag{12.8}$$

em que, de acordo com a nossa convenção, designamos as massas no novo referencial por maiúsculas. Usando o dicionário acima referido,

$$\begin{aligned}
\vec{V}_1 &= \vec{v}_1 - \vec{u} \\
\vec{V}_2 &= \vec{v}_2 - \vec{u} \\
\vec{V}_1' &= \vec{v}_1' - \vec{u} \\
\vec{V}_2' &= \vec{v}_2' - \vec{u},
\end{aligned}$$

para substituir na equação 12.8, obtém-se,

$$M_1\vec{v}_1 + M_2\vec{v}_2 = M_1\vec{v}_1' + M_2\vec{v}_2', \tag{12.9}$$

visto que os termos em $\vec{u}$ cancelam nos dois lados da equação. As duas equações 12.7 e 12.9 só podem ser ambas válidas se a razão entre as massas for a mesma nos dois referenciais[1]

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{M_1}{M_2}.$$

Em resumo: as razões entre as massas de dois quaisquer corpos são as mesmas nos dois referenciais, se a conservação de momento linear se verificar em ambos. Escolhendo o mesmo corpo para unidade de massa em ambos os referenciais (por exemplo, um $\mathtt{dm}^3$ de água), esta relação implica que a massa é um invariante:

$$M = m.$$

$\mathcal{ETV}_2$: Numa experiência de colisão entre dois carros, um deles tem massa 0,5 kg e o outro 0,25 kg. O primeiro carro colide como segundo, que está parado, com uma velocidade de $v = 2\,\mathtt{m\,s}^{-1}$.

a) Qual é velocidade do centro de massa do sistema?

b) Quais são as velocidades iniciais dos dois carros **no referencial** do centro de massa?

c) Supondo que a colisão é elástica, calcular as velocidades dos dois carros no referencial do centro de massa, após a colisão.

d) Calcular as velocidades finais dos dois carros no referencial do laboratório.

Referenciais inerciais

No caso de dois referenciais em movimento relativo uniforme, $\vec{u}_{O'}(t) = \mathtt{constante}$, $\vec{a}_{O'} = 0$, a aceleração é um **invariante:**

$$\vec{A}(t) = \vec{a}(t) \qquad (\vec{u}_{O'}(t) = \mathtt{constante})$$

[1] Isso vê-se facilmente, pondo em evidência uma das massas nas duas equações.

Se a massa e a aceleração são as mesmas, $m\vec{a}$ tem o mesmo valor e a segunda Lei de Newton será válida nos dois referenciais se as **forças** forem as mesmas!

Por exemplo, a lei da Gravitação Universal especifica uma força que depende da massa das partículas em interacção e da distância entre elas: como são ambas grandezas que não variam, a força gravítica é invariante na mudança de referencial. Se todas as leis de força tiverem esta propriedade, o Princípio da Relatividade será válido e as leis de Newton terão a mesma forma em referenciais em movimento relativo uniforme.

Se imaginarmos, por um momento, que conhecemos todas as leis de força, podemos, pelo menos em princípio, certificarmos-nos que a força total sobre uma certa partícula é nula. De acordo com a lei da inércia, o movimento desta partícula deve ser uniforme, $\vec{a} = 0$. Se isso acontecer num dado referencial, $\mathcal{R}$, acontecerá em qualquer outro que esteja em movimento uniforme relativamente a $\mathcal{R}$; mas não em relação a um referencial $\mathcal{R}'$ acelerado em relação a $\mathcal{R}$, em que:

$$\vec{A} = \vec{a} - \vec{a}_{O'}(t).$$

e portanto

$$m\vec{A} = m\vec{a} - m\vec{a}_{O'}$$

Há duas maneiras, diferentes na perspectiva, de resumir esta situação:

à La Newton

> As forças newtonianas são invariantes na mudança de referencial,
>
> $$\vec{f} \quad \text{em } \mathcal{R} \rightarrow \vec{F} = \vec{f} \quad \text{em } \mathcal{R}';$$
>
> a segunda lei de Newton só é válida numa classe de referenciais chamados **referenciais inerciais**, nos quais uma partícula livre de forças (de acordo com as leis que determinam as forças newtonianas) se move com velocidade uniforme. Os referenciais inerciais tem movimento relativo uniforme e rectilíneo. Num referencial acelerado em relação a um referencial inercial a segunda lei não é válida.

à La Einstein

A segunda lei de Newton é válida em qualquer referencial,

$$\begin{aligned} \vec{f} &= m\vec{a} \qquad \text{em } \mathcal{R} \\ \vec{F} &= m\vec{A} \qquad \text{em } \mathcal{R}', \end{aligned}$$

mas entre referenciais com aceleração mútua ($\mathcal{R}'$ com aceleração $\vec{a}_{O'}$ em $\mathcal{R}$) as forças não são invariantes:

$$\vec{f} \quad \text{em } \mathcal{R} \rightarrow \vec{F} = \vec{f} - m\vec{a}_{O'} \quad \text{em } \mathcal{R}';$$

Assim, as forças no referencial $\mathcal{R}'$, acelerado em relação a $\mathcal{R}$, diferem das forças em $\mathcal{R}$ de um termo $-m\vec{a}_{O'}$. Esta força adicional tem as seguintes características:

- actua indistintamente sobre qualquer corpo;
- é proporcional à massa de cada corpo.

Como veremos, esta segunda perspectiva foi muito importante para Einstein, quando estendeu a Teoria da Relatividade para incluir as forças gravíticas. Mas estamos a adiantar-nos: inicialmente Einstein só se preocupou com referenciais em movimento relativo uniforme.

12.3 Os postulados da Relatividade Restrita

12.3.1 Três ideias incompatíveis

Temos então três ideias claramente em contradição:

12.1. A lei de transformação de velocidades entre referenciais em movimento relativo, baseada nas ideias Newtonianas de espaço e tempo:
$$\vec{V} = \vec{v} - \vec{u}.$$

12.2. O Princípio da Relatividade abrangendo todos os fenómenos, incluindo os electromagnéticos.

12.3. As equações de Maxwell, uma descrição completa de todas as leis das interacções electromagnéticas com a sua constante universal, c, a velocidade da luz.

Uma pelo menos tem que cair! Qual?

No final do século XIX e princípio do século XX, a opinião maioritária dos físicos inclinava-se para deixar cair a segunda ideia, excluindo os fenómenos electromagnéticos, propagação de luz incluída, do âmbito do Princípio da Relatividade.

Havia boas razões para acreditar na síntese de Maxwell. Ela culminava pelo menos dois séculos de investigações de fenómenos eléctricos e magnéticos; reunia várias leis bem conhecidas e testadas da electricidade e magnetismo numa formulação única; tinha previsto, brilhantemente, o carácter electromagnético da luz, que Hertz confirmara experimentalmente, gerando, deliberadamente, ondas electromagnéticas.

Quanto à lei de adição de velocidades ela baseia-se na nossa experiência diária. Quando viajamos entre Lisboa e Porto e acertamos o relógio pelo da Gare do Oriente, ao chegar ao Porto, podemos conferir que o nosso relógio está certo pelo da Estação de Campanhã (isto supondo que a CP mantém os relógios certos entre si). De igual modo, se medirmos o comprimento de uma carruagem em movimento, fotografando-a de fora, encontramos o mesmo comprimento que se a medirmos a partir do interior, no referencial da mesma.

Claro que há também boas razões para acreditar no Princípio da Relatividade aplicado aos fenómenos electromagnéticos. Ao fim ao cabo, essas são a interacções que dominam toda a Física e Química da matéria vulgar. Não era nada agradável se essas leis mudassem tanto que o nosso coração deixasse de bater num referencial com velocidade de $60\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ em relação ao solo.

Seja como for, havia uma consequência óbvia de manter as hipóteses 1 e 3: as Leis de Maxwell só seriam válidas num referencial determinado e em qualquer outro em movimento relativo a esse referencial, a velocidade da luz seria diferente de c e variaria com a direcção. A própria Terra constitui um laboratório onde seria possível medir variações da velocidade da luz. Ao fim ao cabo, a Terra tem uma velocidade em relação ao Sol de $30\,\mathrm{km\,s^{-1}}$, ainda por cima de direcção variável ao longo do ano. A experiência deste tipo mais famosa foi realizada por Albert Michelson e Edward Morley, dois físicos americanos, na Universidade de Case Western Reserve em 1887.

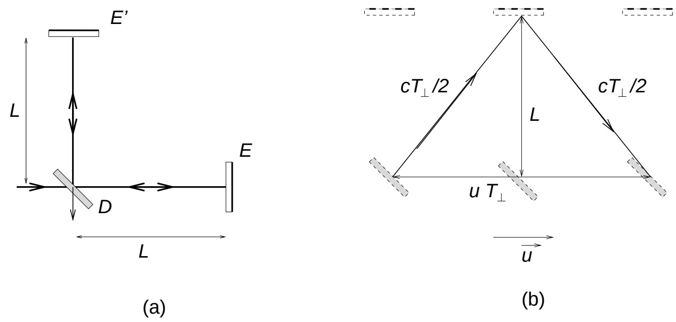


Figura 12.6: A experiência de Michelson-Morley consiste em medir a diferença de tempos de propagação da luz em dois trajectos perpendiculares de igual comprimento, $2L$. O dispositivo usa um espelho semi-transparente, D, para dividir um feixe de luz em dois feixes perpendiculares que são reflectidos em dois espelhos, E e E', colocados a igual distância, L, de D. Se a velocidade da luz for a mesma na duas direcções, c, os tempos de viagem são iguais e valem $2L/c$. A figura (b) ilustra o cálculo do tempo na direcção perpendicular se o dispositivo tiver uma velocidade $\vec{u}$ em relação ao referencial onde a velocidade da luz é c. A determinação da diferença de tempos é conseguida observando a interferência entre os dois feixes.

12.3.2 A experiência de Michelson-Morley

O princípio da experiência de Michelson e Morley é o de uma corrida entre dois feixes de luz em dois trajectos perpendiculares de igual distância (fig. 12.6)[2]. Se a velocidade da luz for a mesma em todas as direcções, c, ou seja, se o dispositivo estiver no referencial onde as equações de Maxwell são válidas, os tempos serão iguais:

$$T_\perp = T_\parallel = \frac{2L}{c}.$$

Suponhamos agora que o dispositivo tem uma velocidade $\vec{u}$ na direcção DE, no referencial onde a velocidade da luz é c. A velocidade da luz no sentido DE é $c-u$ e no sentido oposto $c+u$. O tempo para ir a E e voltar é

$$T_\parallel = \frac{L}{c-u} + \frac{L}{c+u} = \frac{2cL}{c^2-u^2} = \frac{2L}{c}\frac{1}{1-u^2/c^2}.$$

O cálculo de $T_\perp$ está ilustrado na figura 12.6[3]; enquanto o divisor se desloca de $uT_\perp$ a luz viaja uma distância $cT_\perp$ que pelo teorema

[2] É uma corrida inteiramente análoga ao problema dos dois barcos no $\mathcal{ETV}_1$!

[3] Este cálculo também pode ser feito referencial do dispositivo, usando a lei de transformação de velocidades de Galileu: ver a resposta ao $\mathcal{ETV}_1$.

de Pitágoras vale:

$$\left(\frac{cT_\perp}{2}\right)^2 = \left(\frac{uT_\perp}{2}\right)^2 + L^2.$$

Resolvendo em ordem a $T_\perp$, vem

$$T_\perp = \frac{2L}{c}\frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}.$$

Como vemos, se $u \neq 0$, $T_\parallel \neq T_\perp$.

Tomando como exemplo o valor de $u = 30\,\mathtt{km\,s}^{-1}$, a velocidade orbital de Terra, temos um efeito deveras pequeno:

$$\frac{T_\parallel - T_\perp}{T_\parallel} = 1 - \sqrt{1-u^2/c^2} \approx 0{,}5 \times 10^{-8}!$$

Contudo, a observação da interferência entre os dois feixes permite medir esta diferença sem problemas. A experiência foi realizada cuidadosamente; a possibilidade de os dois braços não terem o mesmo comprimento foi levada em conta, rodando o dispositivo de 90º e trocando as duas direcções. A experiência foi realizada em várias alturas do ano de modo a variar a direcção da velocidade orbital da Terra. Michelson e Morley nunca detectaram qualquer diferença entre os tempos $T_\parallel$ e $T_\perp$.

O referencial privilegiado em que as leis de Maxwell seriam válidas é referido na literatura como o referencial do Éter. O Éter seria uma misteriosa substância, presente em todo o Universo, no qual se propagariam as ondas electromagnéticas, à semelhança do que acontece com onda mecânicas, como o som, que se propagam num meio material. Só um referencial em repouso em relação ao Éter mediria uma velocidade da luz idêntica em todas as direcções. Nesse sentido, a experiência de Michelson e Morley não detectou qualquer movimento da Terra em relação ao Éter.

12.3.3 Os dois postulados

Não há registo que Einstein tivesse conhecimento de Sherlock Holmes, ou do seu autor, Arthur Conan Doyle, mas a sua lógica faz eco da citação do famoso detective, reproduzida no início deste capítulo.

No seu artigo de 1905 com o título, *Sobre a Electrodinâmica dos Corpos em Movimento*[4], menciona de passagem a falta de qualquer evidência de que o Princípio de Relatividade não se aplique ao Electromagnetismo e assume-o como princípio universal:

[4] Zur Electrodynamik bewegter Körper, *Annalen de Physik*, **17** (1905)

Princípio de Relatividade

As leis da Física, incluindo as do Electromagnetismo são as mesmas em dois referenciais em movimento relativo uniforme e rectilíneo (velocidade constante).

Seguidamente, assume que a velocidade da luz é a mesma em todos os referenciais em movimento relativo uniforme, abrindo deste modo a possibilidade que as equações de Maxwell terem validade numa classe de referenciais que têm movimento relativo uniforme.

Princípio de constância da velocidade da luz

Existe uma classe de referenciais, ditos inerciais, com movimento relativo uniforme e rectilíneo, e nos quais luz tem a mesma velocidade, c: isto é a velocidade da luz é um **invariante nesta classe de referenciais**.

A **Relatividade Restrita** acaba aqui. São estes dois princípios e mais nada.

Chama-se **Restrita**, porque aborda apenas uma classe de referenciais, que se movem uns em relação aos outros com velocidade uniforme. Onze anos mais tarde Einstein verificou que, ao incluir no Princípio da Relatividade (agora com nome diferente) **todos** os referenciais, obteve a teoria relativista das interacções gravíticas.

O nome **Relatividade** não foi escolhido por Einstein e é um pouco infeliz, pois estes dois postulados referem, exclusivamente, coisas que não são relativas:

- As leis da Física (todas) são as mesmas em todos os referenciais inerciais;
- A velocidade da luz é um invariante, a mesma em todos os referenciais inerciais.

Das três ideias incompatíveis referidas acima, Einstein deixou cair a primeira ao sugerir que existe uma velocidade **invariante**: a velocidade da luz. Ao fazê-lo pôs em cheque os conceitos Newtonianos de espaço e de tempo, que, como vimos, estão por trás da lei de transformação das velocidades. Com que é que os substituiu?

12.4 O Espaço e Tempo em Relatividade Restrita

12.4.1 Uma corrida, dois filmes

Para explorar a natureza do espaço e tempo que decorre dos postulados fundamentais da relatividade vamos recorrer à ajuda de dois animais bem habituados a corridas de alta velocidade: o *Coiote* e o *Road Runner* (figs. 12.7 e 12.8).

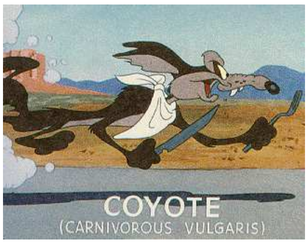


Figura 12.7: Um animal habituado a corridas de alta velocidade.

Figura 12.8: Pode o Road Runner correr à velocidade da luz?

Quem conhece os desenhos animados desta dupla, criada pela imaginação delirante de Chuck Jones, deve ter reparado que o *Road Runner* parece ter sempre a mesma velocidade relativamente ao *Coiote*, independentemente da velocidade deste. É uma boa metáfora para a velocidade da luz! Para simplificar as contas e não carregarmos com muitas potências de dez, vamos imaginar que no universo onde vivem $c = 300\,\mathtt{m\,s}^{-1}$ e que o *Road Runner* se move a esta velocidade.

Como é comum na sua existência, estes personagens vão fazer uma corrida ao longo de uma longa recta pontuada por um fiada regular de postes, que, desta vez contêm relógios. A distância entre os postes é de $150\,\mathtt{m}$ (a luz demora meio segundo a percorrer essa distância) e os dois *toons* partem do mesmo poste no mesmo instante $t = 0$. A velocidade do *Coiote* é $c/2$ e a do *Road Runner* é c. O nosso objectivo é analisar esta corrida de dois pontos de vista:

- do referencial do solo, $\mathcal{S}$;
- do referencial do *Coiote*, $\mathcal{C}$;

Comecemos pelo primeiro.

Referencial do Solo, $\mathcal{S}$

A situação neste referencial é a seguinte:

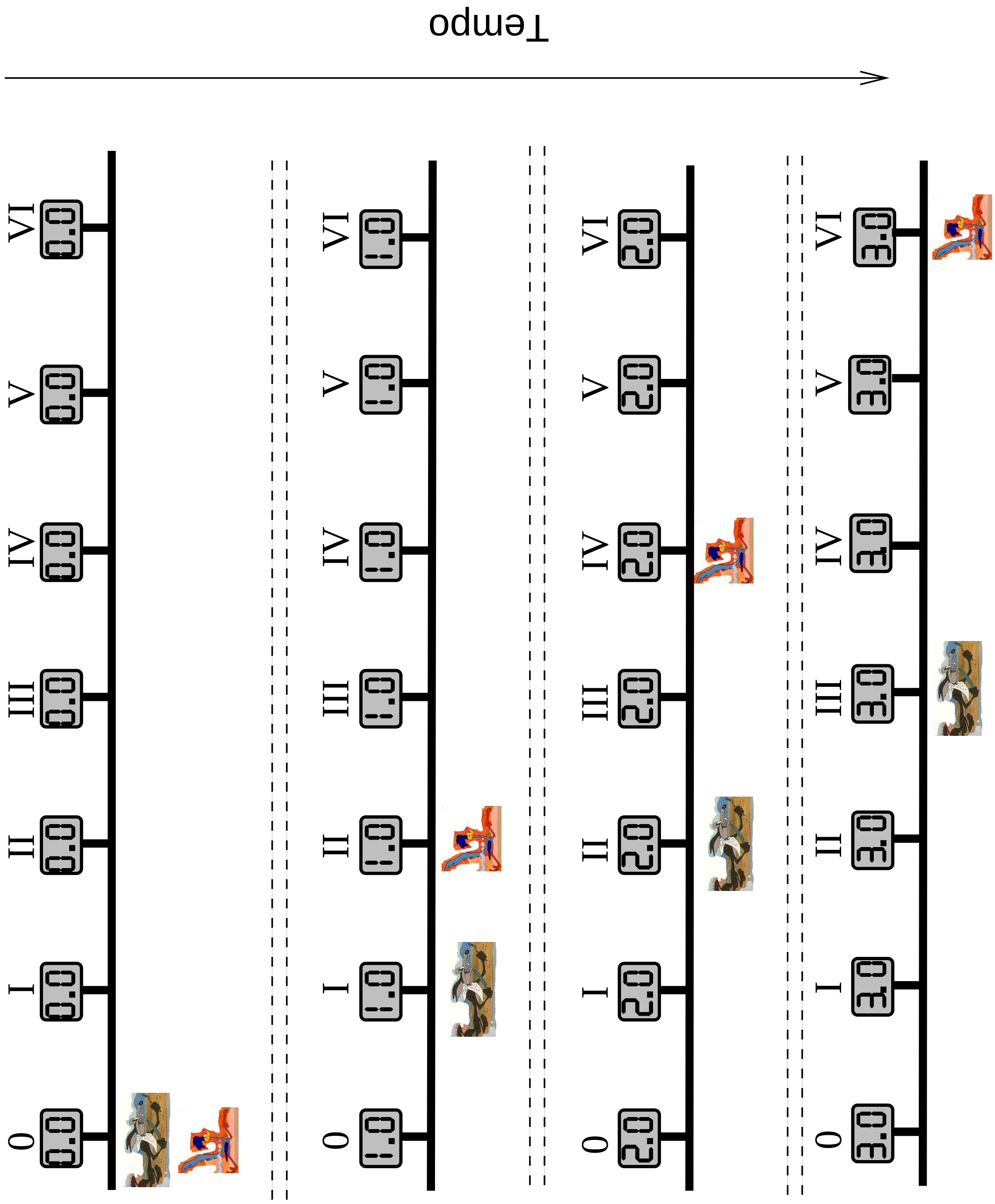


Figura 12.9: Filme da corrida no referencial do solo. Nota: virar a página a 90º.

Poste	*Coiote*	*Road Runner*
0	0,0	0,0
I	1,0	0,5
II	2,0	1,0
III	3,0	1,5
IV	4,0	2,0
V	5,0	2,5
VI	6,0	3,0

Tabela 12.1: O que marca o relógio de cada poste quando passa por ele cada um dos personagens.

- Partida no poste 0 na altura em que o respectivo relógio marca $t = 0{,}0\,\mathtt{s}$;
- o *Coiote* tem a velocidade $c/2 = 150\,\mathtt{m\,s}^{-1}$, ou seja, cobre a distância entre postes sucessivos num segundo;
- O *Road Runner* tem velocidade da luz, $c = 300\,\mathtt{m\,s}^{-1}$, cobrindo duas vezes a distância entre postes em cada segundo.

Assumindo que os relógios estão sincronizados, é evidente que quando o *Coiote* passa no primeiro poste este marca $t = 1{,}0\,\mathtt{s}$, no segundo, $t = 2{,}0\,\mathtt{s}$ e assim sucessivamente. Do mesmo modo para o *Road Runner* teremos $t = 0{,}5$ ao passar o primeiro poste, $t = 1{,}0$ ao passar o segundo *etc*.

A figura 12.9 mostra algumas imagens do filme da corrida. Repare-se que em cada tira da figura temos o que se passa num *"agora"* deste referencial; por isso, os relógios marcam todos o mesmo tempo. Para referência futura indicamos na tabela 12.1 as indicações dos relógios de cada poste quando cada um dos personagens passa por ele.

É extremamente importante para o que se segue notar o seguinte:

> *Esta tabela é válida em qualquer referencial!*

Quando o *Coiote* passa no poste I, olha para o respectivo relógio e regista o tempo que ele indica na sua memória, num papel, ou no que quiser. Este valor não pode depender do referencial de observação. O *Coiote* não pode ter na sua cabeça um valor para um referencial e um valor diferente para outro.

A tabela 12.1 regista o que Einstein chamou **eventos ou acontecimentos**. A coincidência de posições do *Coiote* e do poste I com o relógio a mostrar 1,0, ou do *Road Runner* com poste III com 1,5 no mostrador do respectivo relógio são eventos. Eventos são absolutos e todos os referenciais têm que concordar sobre eles; nenhum referencial pode observar o *Road Runner* a passar no poste III quando este marca 2,0; o animal lembrar-se-ia disso!

Referencial do *Coiote,* $\mathcal{C}$

Qual é o aspecto desta corrida no referencial do *Coiote*? Vamos supor que o *Coiote* tem consigo um relógio em tudo idêntico aos dos postes e que quando se encontra com o poste 0 marca exactamente o mesmo $T = 0{,}0\,\mathsf{s}$. Como habitualmente vamos usar maiúsculas pra nos referirmos aos tempos medidos pelo relógio do *Coiote*.

- O *Coiote* está parado e são os postes que se movem em direcção a ele. Se a velocidade do *Coiote* em relação aos postes é de $c/2$ a velocidade do postes em relação ao Coiote é de $-c/2$.
- Se o relógio do *Coiote* marcar $T_0\,\mathsf{s}$ quando o primeiro poste passar por ele, marcará $2T_0\,\mathsf{s}$ na passagem do segundo poste, $3T_0\,\mathsf{s}$ na passagem do terceiro e assim sucessivamente. Isto é, a distância entre postes é $cT_0/2$, já que eles se movem com velocidade $-c/2$.

Newton diria que $T_0 = 1$ pois, como podemos ver na tabela 12.1 na página anterior no **referencial do solo** decorre um intervalo $\Delta t = 1\,\mathsf{s}$ entre a partida do poste 0 e o cruzamento do poste I com o *Coiote*. $T_0\,\mathsf{s}$ é o intervalo de tempo ΔT entre estes dois eventos no **referencial** $\mathcal{C}$. Mas já vimos que, se seguirmos Newton, não conseguiremos garantir a segunda condição que Einstein escolheu como postulado:

- a velocidade do *Road Runner* neste referencial **também é** c, ou seja o dobro da velocidade dos postes. Isto é: ao fim de um tempo T, o *Road Runner* está a uma distância cT do *Coiote*.

Este ponto é **absolutamente crucial**: tudo o que se segue depende dele!

Passemos então ao filme no referencial $\mathcal{C}$.

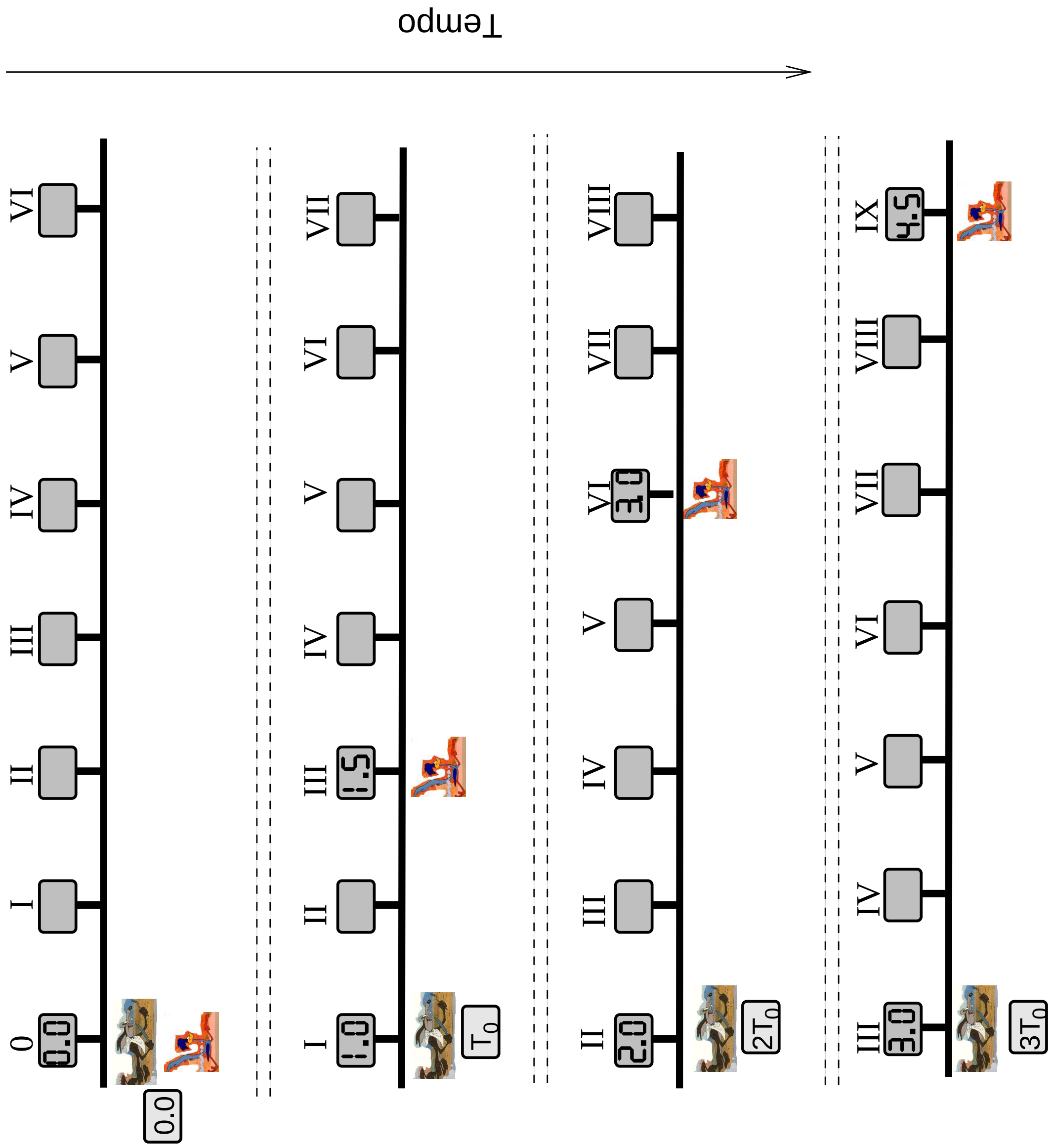


Figura 12.10: Filme da corrida no referencial do *Coiote*. Nota: virar a página a 90º.

Imagem 1 A primeira imagem do nosso filme não causa problemas: em $T = 0{,}0\,\mathtt{s}$ (marcado no relógio do *Coiote*) os dois animais estão juntos ao poste 0, que está a passar pelo *Coiote* com velocidade $-c/2$.

Imagem 2 Suponhamos que a segunda imagem é tomada em $T = T_0\,\mathtt{s}$, quando **o poste I passa pelo *Coiote***. Onde está nesse momento o *Road Runner*? Segundo Einstein, a uma distância do *Coiote* (e do poste I) igual a cT_0. Mas a distância entre postes é $cT_0/2$; logo o *Road Runner* está a cruzar o poste III, que marca $1{,}5\,\mathtt{s}$ (ver Tabela 12.1).

Usando o mesmo tipo de argumentos facilmente concluímos que a figura 12.10 na página precedente mostra correctamente o filme da corrida visto do referencial do *Coiote*, de acordo com os postulados da relatividade. O ponto fundamental que condiciona toda a representação é que a velocidade do *Road Runner* neste referencial ainda é c: a distância a que o *Road Runner* se encontra do *Coiote* tem que ser o dobro da distância percorrida por cada poste, desde o início do filme.

As figuras 12.9 e 12.10 contêm todas as surpresas relativistas da natureza do espaço e tempo. É só uma questão de olhar para elas atentamente.

12.4.2 Relatividade da Simultaneidade

O primeiro ponto que ressalta da análise das duas figuras é o seguinte.

Cada imagem é correspondente a um “agora” em cada referencial; ou seja a um dado instante nesse referencial.

- Assim, no referencial do solo, **quando** o *Coiote* está no poste I ($t = 1\,\mathtt{s}$) o *Road Runner* está no poste II;
- Todavia, no referencial do *Coiote*, **quando** este está no poste I ($T = T_0\,\mathtt{s}$) o *Road Runner* está no poste III, e portanto já passou há um bocado no poste II.

O eventos que estão na mesma tira num referencial (simultâneos) não estão na mesma tira no outro. Por exemplo, os dois eventos registados no instante $T = 2T_0\,\mathtt{s}$ (terceira tira) da figura na página anterior:

- *Coiote* no poste II;
- *Road Runner* no poste VI;

ocorrem com um segundo de diferença no referencial do solo.

Este mesmo facto está patente no facto de os relógios dos postes não estarem sincronizados no referencial do *Coiote*. À medida que caminhamos no sentido oposto ao movimento dos postes, verificamos que os relógios estão cada vez mais adiantados; O relógio VI marca 3,0 quando (referencial $\mathcal{C}$) o II marca 2,0: mas no referencial $\mathcal{S}$ o relógio VI só marca 3,0 um segundo depois de o relógio II marcar 2,0 (ou seja quando este marca $3,0$ também). Temos dois eventos em que:

$$\begin{aligned} \Delta T &= 0: \qquad \text{simultâneos em } \mathcal{C}; \\ \Delta t &= 1: \qquad \text{um mais tarde que o outro em } \mathcal{S}. \end{aligned}$$

Assim:

> O intervalo de tempo entre dois acontecimentos não é invariante. A simultaneidade de eventos é relativa! O "agora" é diferente em cada referencial.

Estranho? Certamente; mas apenas uma consequência necessária da invariância da velocidade da luz.

Sincronização de relógios

O resultado anterior resulta, como vimos, apenas de considerar que a velocidade da luz é um **invariante**. Repare-se que o filme feito no referencial $\mathcal{S}$, prova que os relógios estão bem sincronizados nesse referencial. O *Road Runner* parte da origem, onde o relógio marca 0 e ao passar no relógio I, a 150 m de distância este marca 0,5 s exactamente o tempo que ele demora a cobrir esta distância em $\mathcal{S}$: o mesmo se aplica aos outros relógios. Esta é uma maneira perfeitamente legítima de sincronizar relógios[5]. Existem muitas outras.

Vale a pena mencionar um outro procedimento de sincronização, por tornar muito clara a relatividade da simultaneidade (fig. 12.11).

[5]Esta maneira exige que se conheça o valor da velocidade da luz no referencial em causa. Mas esta pode ser medida com um único relógio medindo o tempo de ida e volta a um espelho a uma distância conhecida.

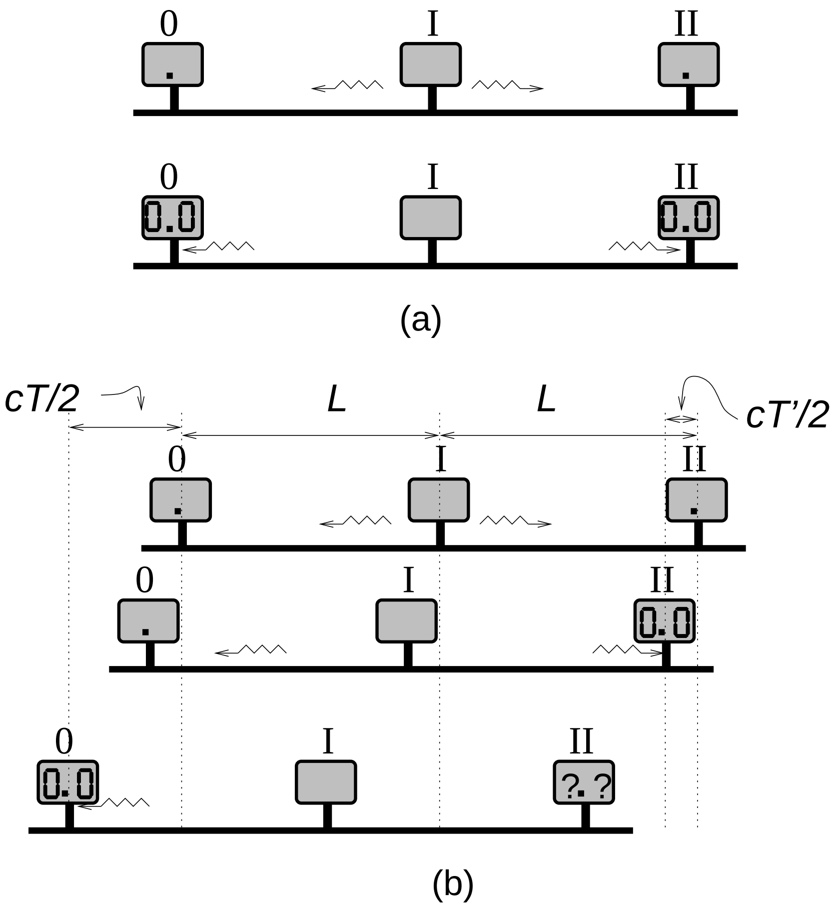


Figura 12.11: (a) Sincronização de relógios no referencial do solo; (b) no referencial do *Coiote* os relógios não ficam sincronizados, porque a velocidade da luz continua a ser a mesma nos dois sentidos.

Suponhamos que o relógio I manda dois sinais luminosos ao mesmo tempo em direcções opostas. Os relógios 0 e II estão a zero e começam a contar quando o sinal lhes chegar. Como a velocidade da luz não depende do sentido de propagação, os relógios 0 e II estarão, obviamente, sincronizados.

Sim, no referencial do solo, mas não no do *Coiote*. No referencial do *Coiote* os relógios movem-se com velocidade $-c/2$ e o sinal luminoso **continua a ter velocidade idêntica nos dois sentidos**, c. Neste referencial, no tempo T em que a luz viaja até chegar ao poste 0, este afasta-se uma distância $cT/2$ do poste emissor. Por isso a distância viajada pela luz, cT, é

$$cT = \frac{c}{2}T + L \Rightarrow T = \frac{2L}{c}.$$

em que L é a distância entre relógio no referencial $\mathcal{C}$. Ao contrário, o poste II move-se em direcção ao emissor; então,

$$cT' = L - \frac{c}{2}T' \Rightarrow T' = \frac{2L}{3c}.$$

Ou seja, neste referencial, o relógio do poste 0 começa a trabalhar depois do do poste II, mais precisamente depois de decorrer um tempo,

$$\Delta T = \frac{4L}{3c}.$$

Em resumo, na nossa corrida, quanto maior o número do poste, mais adiantado está o respectivo relógio no referencial $\mathcal{C}$. Repare-se que isto só acontece porque a velocidade da luz é a mesma nos dois sentidos, **nos dois referenciais.**

$\mathcal{ETV}_3$: Com referência à figura 12.11, mostrar que se a velocidade de luz satisfizer a lei Galileana de composição de velocidades, os dois relógios ficam sincronizados nos dois referenciais.

12.4.3 Dilatação dos tempos

Relógios em movimento andam mais devagar, é uma da frases que muitas vezes se houve a propósito da Relatividade. Vejamos exactamente o que quer dizer.

No referencial $\mathcal{S}$, do solo, o relógio do *Coiote* marca 0,0 s quando o *Coiote* está junto ao poste 0 e marca T_0 s quando ele passa no poste I, um **segundo mais tarde**. Ou seja,

Afirmação 1: no referencial $\mathcal{S}$, um relógio em movimento com velocidade $c/2$ avança T_0 s por cada segundo de um relógio parado.

Assim, quando um relógio do solo regista uma passagem de tempo de Δt, o relógio em movimento com velocidade $c/2$ regista um intervalo[6]

$$\Delta T = T_0 \Delta t$$

Mas quanto vale T_0?

Reparemos novamente no filme da corrida do ponto de vista do referencial $\mathcal{C}$ (fig. 12.10 na página 27), em particular na segunda e quarta imagens:

- No instante $T = T_0$ s o relógio do poste III marca 1,5;
- No instante $T = 3T_0$ s, o relógio do poste III, a passar pelo *Coiote*, marca 3,0 s.

Ou seja,

Afirmação 2: no referencial $\mathcal{C}$, do Coiote, um relógio em movimento com velocidade $-c/2$ (o do poste III) avança $\Delta t_{\text{III}} = 3{,}0 - 1{,}5 = 1{,}5$ s, quando passam $\Delta T = 3T_0 - T_0 = 2T_0$ s num relógio parado (o do *Coiote*).

O **Princípio da Relatividade** implica que o referencial $\mathcal{C}$ é "tão bom" como $\mathcal{S}$. Por outro lado, $c/2$ e $-c/2$ são velocidades equivalentes, pois as direcções positiva e negativa do eixo Ox são certamente equivalentes. Por isso a **Afirmação 1** implica que:

> O relógio do poste III avança T_0, por cada segundo do relógio do *Coiote*.

Ou seja,

$$\Delta t_{\text{III}} = T_0 \Delta T \tag{12.10}$$

[6] T_0 é um tempo (de relógio em movimento) por unidade de tempo (de relógio em repouso); por isso é uma grandeza sem dimensões.

em que Δt_{III} é o tempo marcado pelo relógio III em movimento no referencial do *Coiote*, e ΔT o tempo que decorreu entre os mesmos eventos no referencial do *Coiote*. Mas a **Afirmação 2** significa:

$$\Delta t_{\mathrm{III}} = 1{,}5, \quad \text{quando } \Delta T = 2T_0. \tag{12.11}$$

Portanto,

$$1{,}5 = T_0 \times (2T_0)$$

ou seja,

$$T_0^2 = \frac{3}{4},$$

e

$$T_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}866.$$

O Princípio da Relatividade (equivalência de referenciais) e o da constância da velocidade da luz dizem-nos então que:

> Um relógio em movimento com velocidade $c/2$ (ou $-c/2$) apenas anda 0,866 **s** por cada segundo de um relógio parado.

Este efeito chama-se **dilatação dos tempos**. Repare-se na simetria entre os dois referenciais: o relógio do *Coiote* atrasa-se em relação aos relógio do Solo, e estes (como o do poste III) **atrasam-se exactamente o mesmo** em relação aos relógios do referencial do *Coiote*.

$\mathcal{ETV}_4$: *Hei, calma Stôra,* disse o aluno. *Isto não bate certo! Não pode o relógio do Coiote andar mais devagar que os dos postes e os dos postes mais devagar que o do Coiote. Aliás repare: logo na segunda imagem do filme se vê isso. Quando o Coiote parte, o relógio dele marca o mesmo que o do poste 0,* 0,0. *Quando cruza o poste I este marca* 1,0 e o dele só 0,866. *Isto é, o do poste andou mais depressa o dele. Não é o que ele tem de concluir?*
Como responder a este aluno?

Tudo isto pode, à primeira vista, parecer um absurdo. Como é que um relógio A se atrasa em relação a B e B se atrasa relação a A?

De facto não há nenhuma contradição. Quando queremos medir a taxa do relógio do *Coiote* em relação ao referencial $\mathcal{S}$, comparamos as suas leituras em dois relógios do Solo, C e D sincronizados em $\mathcal{S}$. Ao passar no segundo relógio do Solo, D, o relógio do *Coiote* avançou menos que a diferença das leituras que fez em C e D; para um observador do Solo isso significa que o relógio do *Coiote* se atrasa. Contudo, o *Coiote* não pode tirar essa conclusão pois, no seu referencial, os relógios C e D não estão sincronizados; como vimos, D está adiantado relativamente a C. Para tirar conclusões sobre a taxa dos relógios de $\mathcal{S}$, o *Coiote* tem que fazer exactamente o mesmo que um observador do referencial do Solo: comparar um relógio do referencial do Solo com dois relógios sincronizados no seu referencial. Por esta razão, ambos chegarão exactamente à mesma conclusão: os relógios do outro referencial atrasam-se! De acordo com o Princípio da Relatividade não poderia ser de outro modo.

Repare-se, também, que não precisamos de dizer que tipo de relógio se trata. Seja digital, analógico, seja um pêndulo ou o nosso coração, qualquer processo de medir o tempo terá que dar o mesmo resultado para que a velocidade da luz seja um invariante. E todos os processos físicos decorrem exactamente segundo as mesmas leis nos dois referenciais. A dilatação do tempo não pode afectar apenas certos tipos de relógios: isso violaria o Princípio da Relatividade. É o **tempo** que anda mais devagar!

O filme completo

Estamos agora em posição de determinar o que mostram todos os relógios no filme feito no referencial $\mathcal{C}$ (fig. 12.10 na página 27). Vejamos, por exemplo, o relógio do poste I:

- entre o instante inicial, $T = 0\,\mathtt{s}$, e $T = T_0\,\mathtt{s}$, quando passa pelo *Coiote*, o relógio do poste avança $\Delta t = T_0 \times \Delta T = T_0^2\,\mathtt{s}$;
- Em $T = T_0\,\mathtt{s}$, ao passar no *Coiote,* este relógio marca $t = 1$.

Destes dois resultados podemos concluir que, em $T = 0$, o relógio indicava

$$1 - \Delta t = 1 - T_0^2 = \frac{1}{4}.$$

Não é difícil ver que o relógio do poste n, que passa pelo Coiote em $T = nT_0\,\mathtt{s}$, marcava em $T = 0$,

$$n - T_0 \times (\Delta T) = n - T_0\,(nT_0) = n\left(1 - T_0^2\right) = \frac{n}{4}.$$

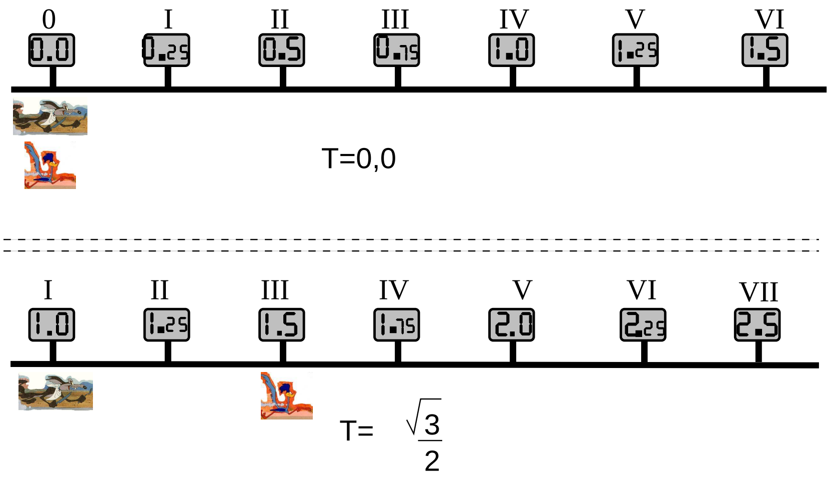


Figura 12.12: O tempo indicado pelos relógios de $\mathcal{S}$ no mesmo instante do referencial $\mathcal{C}$, aumenta linearmente com a distância na direcção oposta ao do movimento dos postes em $\mathcal{C}$.

O mesmo raciocínio pode ser repetido para cada instante do referencial $\mathcal{C}$. A conclusão é a mesma. O tempo t marcado por cada relógio aumenta de $1 - T_0^2 = 1/4$ por poste (ver figura 12.12).

Tal como tínhamos concluído, do ponto de vista do *Coiote*, nos relógios de $\mathcal{S}$ há um adiantamento que cresce na direcção oposta ao do seu movimento em $\mathcal{C}$.

12.4.4 Contracção dos espaços

A distância entre os postes, no referencial do Solo é, por hipótese, $d = c/2 \times 1 = 150\,\mathtt{m}$. No referencial do *Coiote* passa um poste por ele de T_0 em T_0 segundos e os postes movem-se com velocidade $-c/2$. Ou seja, a distância entre os postes é

$$D = \frac{cT_0}{2} = T_0 d = \frac{\sqrt{3}}{2} d \approx 130\,\mathtt{m}!$$

> A distância entre dois postes no referencial do *Coiote* é menor que no referencial do Solo.

Se tivermos um avião de $150\,\mathtt{m}$ de comprimento estacionado entre os postes, o *Coiote* dirá que o seu comprimento é apenas de $130\,\mathtt{m}$; um carro de $5\,\mathtt{m}$ de comprimento medirá para o *Coiote* $0{,}866 \times 5 = 4{,}33\,\mathtt{m}$! Note-se que 30 destes carros, topo a todo, medem para o *Coiote* 130 m. Todas as distâncias, todos os objectos, terão no referencial em que se movem com velocidade $-c/2$ um comprimento, **na direcção do movimento**, inferior: apenas 86,6% do que têm no referencial em que estão em repouso: isto é a contracção dos espaços.

Isto funciona, obviamente nos dois sentidos: os dois referenciais têm as mesmas leis. Por isso, se o *Coiote* conduzir um carro idêntico ao que está estacionado, ele terá um comprimento de 5 m no referencial do *Coiote* (onde está em repouso) mas do Solo parecerá encurtado, apenas com 4,33 m. Portanto:

> Um corpo com velocidade $c/2$ (ou $-c/2$) tem um comprimento l na direcção do seu movimento, menor que o seu comprimento L no referencial em que está em repouso,
>
> $$l = \frac{\sqrt{3}}{2}L.$$

Mas afinal, não quer isso dizer que a contracção dos espaços é uma ilusão? Um corpo só parece encurtar porque é visto de outro referencial. No referencial próprio em que está em repouso tem o seu *verdadeiro* comprimento?

Esta conclusão é atraente, mas errada. A contracção é real; acontece. Medir um comprimento de um objecto em movimento não causa qualquer dificuldade. Em todos os referenciais em que se move ele é mais curto que no seu referencial próprio.

Só que o comprimento de um objecto não é um **invariante**. Tal como a separação temporal entre eventos, a separação espacial entre dois pontos, ao contrário do que acontecia na concepção Newtoniana, não é um invariante. Mas isso não a torna menos *real.* A maior parte das grandezas físicas, quer em Relatividade, quer em Física Newtoniana, mudam de valor ao mudar de referencial. Nem por isso deixam de reflectir a realidade das coisas. Em Relatividade Restrita temos que incluir intervalos temporais e espaciais nessa classe de grandezas relativas.

$\mathcal{ETV}_5$: *Hei, Stôra,* disse o mesmo aluno. *Esta agora é que não passa. O Coiote vai a guiar um Cadillac de* 5 m *de comprimento e ultrapassa um carro igual, parado, que segundo ele só mede* 4,33 m. *Ora veja, quando as traseiras estão a par sobram* 67 cm *do carro do Coiote à frente, certo? Não me diga que o pessoal que está em Terra não nota isso! Segundo o que a Stôra disse, eles deviam ver que faltam* 67 cm *ao Cadillac do Coiote. Em que ficamos?*
Como responder a este aluno?

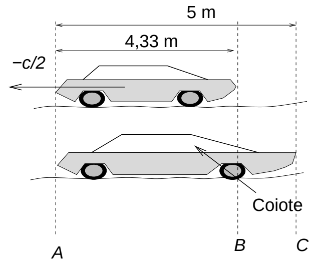


Figura 12.13: O Coiote acha que o seu carro é mais comprido. O pessoal de Terra não vai achar o mesmo?

12.4.5 Transformação de tempo e espaço para v arbitrário

Não é difícil generalizar os argumentos apresentados para uma mudança entre referenciais com velocidade relativa v, genérica, em vez de $c/2$. Isso está feito em apêndice. Os resultados são os seguintes:

Dilatação dos tempos

Um relógio em movimento uniforme com velocidade v demora um tempo Δt a passar entre dois pontos de um referencial inercial; o intervalo de tempo marcado pelo relógio, ΔT, ou seja o intervalo de tempo no referencial em que o relógio está em repouso, designado por **tempo próprio** do relógio, é inferior a Δt:

$$\Delta T = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\Delta t. \tag{12.12}$$

Contracção dos espaços

Um corpo em movimento num referencial $\mathcal{R}$, com velocidade v tem um comprimento na direcção do seu movimento l. O seu **comprimento próprio**, L, no referencial em que está em repouso, é maior que l:

$$L = \frac{l}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{12.13}$$

Acima escrevemos esta equação de modo diferente, mas exactamente com o mesmo significado:

$$l = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} L.$$

No caso de $v = c/2$, o factor $\sqrt{1 - v^2/c^2} = \sqrt{3/4} = \sqrt{3}/2$, conforme vimos acima.

Para as velocidades correntes no nosso dia-a-dia este factor é muito próximo da unidade. No caso de um avião à velocidade do som é tão próximo de um que nem todas as calculadoras o conseguem diferenciar da unidade:

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - \frac{340^2}{(3 \times 10^8)^2}} &\approx 1 - 0{,}64 \times 10^{-12} \\ &= 0{,}99999999999936. \end{aligned}$$

É por esta razão que na nossa experiência corrente os conceitos Newtonianos de espaço e tempo são perfeitamente adequados: as correcções relativistas são extremamente pequenas. Podemos continuar a usar a lei Galileana de composição de velocidades quando lidamos com carros, barcos, aviões ou mesmo planetas. Contudo, velocidades próximas da luz são correntes em física. Para começar, a própria luz, que é sempre relativista. Quer em aceleradores, quer na Natureza, por exemplo em fenómenos astrofísicos, é comum a ocorrência de feixes de partículas de alta energia com velocidade próximas da luz. Mas não é preciso ir para o espaço: as unidades de tratamento de médico de feixe de electrões usam electrões relativistas com velocidades muito próximas de c.

12.5 Energia e massa em Relatividade

12.5.1 Uma só grandeza conservada

A modificação profunda dos conceitos de espaço e tempo da Relatividade Restrita obrigou também a uma revisão da Dinâmica Newtoniana. Não é possível, no tempo disponível, abordar este aspecto da teoria, mas é conveniente comentar um resultado desta reformulação, que é considerado a equação mais famosa de toda a Física:

$$E = mc^2. \tag{12.14}$$

Em Física Newtoniana existem dois princípios de conservação distintos e independentes:

- a conservação de massa;
- a conservação de energia.

Note-se que **conservação** não é o mesmo que **invariância**:

- uma grandeza invariante tem o mesmo valor em referenciais diferentes;
- uma grandeza conservada, tem um valor constante no tempo, no mesmo referencial.

Einstein descobriu que em Relatividade estes dois princípios de conservação são substituídos por um só. Vejamos alguns exemplos.

- Suponhamos que medimos a massa de um corpo, usando a segunda lei de Newton, a partir da sua aceleração sob a acção de uma força conhecida. Se o corpo absorver uma quantidade de energia ΔE, segundo a Teoria da Relatividade a sua *massa aumenta* de

  $$\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2}.$$

  Se radiar energia, a sua massa diminui de um valor dado pela mesma relação.

- Um núcleo de número atómico Z e número de massa A tem Z protões e $A - Z$ neutrões. A massa destas partículas é

  $$Zm_p + (A - Z)m_n.$$

  Contudo, a massa do núcleo, $M(A, Z)$, é inferior a este valor. A energia de ligação do núcleo $E_b(A, Z)$ é a energia que é necessária para separar o núcleo nos seus constituintes. De acordo com a Relatividade,

  $$Zm_p + (A - Z)m_n = M(A, Z) + \frac{E_b(A, Z)}{c^2}$$

  Por outras palavras, ao formar o núcleo a partir das partículas que o constituem, o sistema liberta uma energia $E_b(A, Z)$ e a sua massa total diminui de $E_b(A, Z)/c^2$.

- Um electrão e a sua anti-partícula, o positrão podem aniquilar-se mutuamente e transformar-se em duas partículas de radiação, dois fotões γ:

  $$e^- + e^+ = \gamma + \gamma$$

> Este processo é muitas vezes referido como conversão de massa ($2m_e$) em energia. Contudo, se este processo ocorrer numa caixa de onde os fotões não possam sair, a massa total da caixa (medida, por exemplo, usando a segunda lei) não se altera.

Neste sentido, massa e energia são duas palavras diferentes (e duas unidades diferentes) para a mesma grandeza conservada. O factor c^2 na fórmula

$$E = mc^2$$

é essencialmente um factor de conversão entre a unidades convencionais de energia e de massa.

Isto significa que quando aceleramos uma partícula e aumentamos a sua energia, aumentamos também a sua massa: quando entramos num carro também entramos num automóvel. Que sentido tem, então, dizer que a massa do electrão é $m_e = 9{,}1 \times 10^{-31}\,\mathtt{kg}$, ou a do protão $m_p = 1{,}67 \times 10^{-27}\,\mathtt{kg}$?

Quando uma partícula está em repouso tem a menor massa (menor energia) possível. Essa massa é a massa em repouso, ou energia em repouso da partícula. É um invariante relativista, isto é, tem um valor idêntico em todos os referenciais inerciais. Também pode ser especificada em unidades de energia:

$$\begin{aligned} m_e c^2 &= 0{,}51\,\mathtt{MeV.} \\ m_p c^2 &= 9{,}3\times 10^3\,\mathtt{MeV.} \end{aligned}$$

A Relatividade inclui ainda, de um modo muito natural, a possibilidade de partículas de massa em repouso nula; têm em todos os referenciais a mesma velocidade c, a velocidade da luz, não estando em repouso em nenhum referencial; têm massa no sentido em que contribuem com um termo E/c^2 para a massa total de um sistema: são os fotões, as partículas de luz.

$\mathcal{ETV}_6$: O principal processo de produção de energia numa estrela como o Sol é a fusão de protões (núcleos de Hidrogénio) para formar Hélio. Embora a reacção tenha um conjunto de passos intermédios, podemos resumir os estados iniciais e final como

$$4p + 2e^- \to {}^4\mathrm{He}^{2+}.$$

As massas são $m_p = 1{,}008\,\mathtt{u.m.a}$, $m({}^4\mathrm{He}^{2+}) = 4{,}003\,\mathtt{u.m.a}$ e $m_e = 0,0005\,\mathtt{u.m.a}$. A unidade de massa atómica vale $1\,\mathtt{u.m.a} = 1{,}661 \times 10^{-27}\,\mathtt{kg}$.

a) Calcular em `Joule` e `eV` a energia libertada por núcleo de Hélio formado.

O Sol radia uma potência de $3{,}9 \times 10^{26}\,\mathtt{W}$ e tem uma massa de $1,99 \times 10^{30}\,\mathtt{kg}$.

b) Que fracção da sua massa radia por ano?

c) Cerca de 2/3 da massa do Sol são núcleos de Hidrogénio e cerca de 1/3 de núcleos de Hélio. Quanto tempo, à taxa actual, vai demorar a consumir o Hidrogénio?

12.5.2 O limite Newtoniano

A energia total de um sistema pode sempre escrever-se na forma

$$E = M_0 c^2 + E',$$

em que E' é **definida** como a diferença entre a energia total e a energia em repouso do conjunto de partículas do sistema.

Nos processos químicos habituais, ligação química, ionização, etc., as variações de energia por partícula são da ordem do `electrão-Volt`, em todo o caso muito menores que a energia em repouso da partícula mais leve da matéria, o electrão. Na ausência de reacções nucleares, que envolvem energias por núcleo na escala do `MeV`, e de processos de aniquilação partícula-antipartícula:

- Os números de electrões e dos vários tipos de núcleos não se alteram, pelo que M_0, a soma das massas em repouso das partículas de um sistema, é constante.

- Então E', o excesso de energia relativamente a M_0c^2, também é uma grandeza conservada.
- O valor de E', é em geral, muito menor que a energia em repouso, $E' \ll M_0c^2$ o que significa que

$$M = \frac{M_0c^2 + E'}{c^2} = M_0 + \frac{E'}{c^2} \approx M_0.$$

Reencontramos, neste limite a situação habitual da Física Newtoniana:

- conservação separada de massa (M_0) e energia $E' = E - M_0c^2$.
- Massa total praticamente igual à soma das massas (em repouso) das partículas constituintes do sistema.

12.6 Perguntas difíceis

12.6.1 Vivo mais se viajar numa nave?

> *Isto é real? Vivo mais se me puser em movimento? Ao fim ao cabo, se isto tudo for verdade, e eu me puser a mexer numa nave a metade da velocidade da luz, por cada ano que passa na Terra só passam* $0,866$ *anos para mim: será que isso aumentaria a minha vida em* $1/0,866 = 1{,}15$ *ou seja de 15%?*

É absolutamente real, mas atenção, a vida aumenta de 15% apenas no referencial da Terra. Todos os relógios, isto é todos os processos físicos no referencial da nave serão mais lentos exactamente do mesmo factor. O princípio da Relatividade garante que através de experiências realizadas apenas no referencial da nave não podemos determinar a respectiva velocidade: as leis Físicas são as mesmas. Portanto, não chegaremos a saber que vivemos mais. É a Relatividade novamente. A nossa vida é um intervalo de tempo. Os intervalos de tempo são relativos: dependem do referencial.

Mas o efeito é absolutamente real e pode ser e foi medido, com relógios, muitas vezes. O sistema GPS, por exemplo, exige relógios em satélites perfeitamente sincronizados com relógios na Terra (ao nível do nano segundo, 10^{-9} s). Como os relógios dos satélites estão em movimento relativamente aos da Terra, torna-se necessário levar em conta a dilatação do tempo relativista. Contudo, a análise deste caso é mais complexa, não só porque o movimento dos satélites não é de velocidade constante, mas, sobretudo, porque o campo gravítico também altera a taxa de um relógio. Outra descoberta de Einstein[7]!

Mas existe uma experiência famosa em que se demonstrou a extensão do tempo de vida pela dilatação relativista dos tempos; não com pessoas mas com muões.

A experiência dos Muões

Uma das mais famosas experiências de medição da dilatação dos tempo diz respeito a uma partícula instável, o muão ou mesão-μ. Esta partícula tem uma semi-vida de cerca de $t_{1/2} = 1{,}56\,\mu\mathtt{s}$, o que quer dizer que um feixe de muões, ao fim deste tempo $t_{1/2}$, fica reduzido a metade das partículas. Ora um muão, mesmo viajando a uma velocidade próxima da luz, numa semi-vida não anda mais do que

$$d_{1/2} = 1{,}56 \times 10^{-6} \times 3 \times 10^{8} = 468\,\mathtt{m};$$

Um feixe de muões, em menos de $468\,\mathtt{m}$, deve ficar reduzido a metade do fluxo.

Em 1941, Rossi e Hall mediram o fluxo de muões no topo do Monte Washington, no New Hampshire, a cerca de $2000\,\mathtt{m}$ de altitude e também na base da Montanha. Os muões são criados por raios cósmicos ao incidirem na atmosfera terrestre. Como

$$\frac{2000}{468} = 4{,}3,$$

o fluxo de muões na base da montanha deveria ser inferior de um factor $2^{-4{,}3} \approx 1/20 = 5\%$, cerca de 20 vezes inferior ao medido no topo. Em vez disso encontraram um fluxo no sopé superior a **metade** do fluxo no topo, 71% para ser preciso. Os muões estavam a ter uma semi-vida muito superior a $1{,}56\,\mu\mathtt{s}$! Porquê?

Precisamente, por causa da dilatação de tempo relativista. Os muões têm uma semi-vida $t_{1/2} = 1,56\,\mu\mathtt{s}$ em repouso, ou seja no **referencial em que têm velocidade nula**. Quando passar nesse referencial uma semi-vida, passou no referencial onde foram feitas as medições de fluxo um tempo maior; por isso, a distância que os muões percorrem nesse referencial é superior a $468\,\mathtt{m}$. Os

[7]Feitas todas as contas os relógios dos satélites adiantam-se em relação aos da Terra.

resultados desta experiência permitiram obter a velocidade dos muões, $v \approx 0{,}994c$.

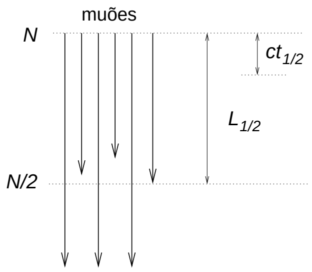


Figura 12.14: A distância em que um feixe de muões fica reduzido a metade, $L_{1/2}$ pode ser superior a $ct_{1/2}$, por causa da dilatação relativista dos tempos.

$\mathcal{ETV}_7$: Calcular a semi-vida de muões num referencial em que estes têm uma velocidade $v = 0,994c$ e calcular a distância em que um feixe de muões com esta velocidade tem o fluxo reduzido a metade.

12.6.2 Velocidades maiores que c. É possível?

O segundo postulado afirma que a velocidade da luz é um invariante, não que é uma velocidade limite. Por que é que se diz que não é possível ultrapassar a velocidade da luz?

Figura 12.15: Mais rápido que a luz cria muitos problemas...

Os físicos designam partículas com velocidade superior à da luz por *taquiões.* Taquiões surgem por vezes em certas propostas teóricas, mas não são bem vindos; são um aspecto indesejável da teoria, que os autores bem gostariam de varrer para baixo do tapete. Efectivamente colocam sérios problemas de interpretação em Relatividade.

Para ver porquê imaginemos um rato taquiónico (*Speedy Gonzalez*?) *a* participar na nossa corrida. Suponhamos que ele parte do poste I em $t = 1{,}0\,\mathtt{s}$ e chega ao poste III, em $t = 1{,}25\,\mathtt{s}$, onde fica sentado a deliciar-se com um bocado de queijo. O *Road Runner*, que viaja a velocidade c, demora um segundo a cobrir a mesma distância, pelo que estamos a falar de um rato com velocidade $4c$.

O problema surge quando tentamos descrever o seu movimento no referencial do *Coiote.* Como se vê na figura 12.10 na página 27, o evento "poste III a marcar $1,5\,\mathtt{s}$" é simultâneo, em $\mathcal{C}$ (mesmo T), com o evento correspondente à partida do rato taquiónico, "poste I a marcar $1{,}0\,\mathtt{s}$" . Ora, o nosso taquião chegou ao poste III quando este marcava $1{,}25\,\mathtt{s}$, ou seja, *antes de marcar* $1{,}5\,\mathtt{s}$! No referencial $\mathcal{C}$, o rato chegou *antes de partir.* Se levarmos em conta que n*o mesmo instante de* $\mathcal{C}$ o relógio de cada poste está adiantado relativamente ao do poste anterior de $1 - T_0^2 = 1/4\,\mathtt{s}$, podemos reconstruir a viagem do taquião vista do referencial $\mathcal{C}$. Que estranha que ela é (figura 12.16)!

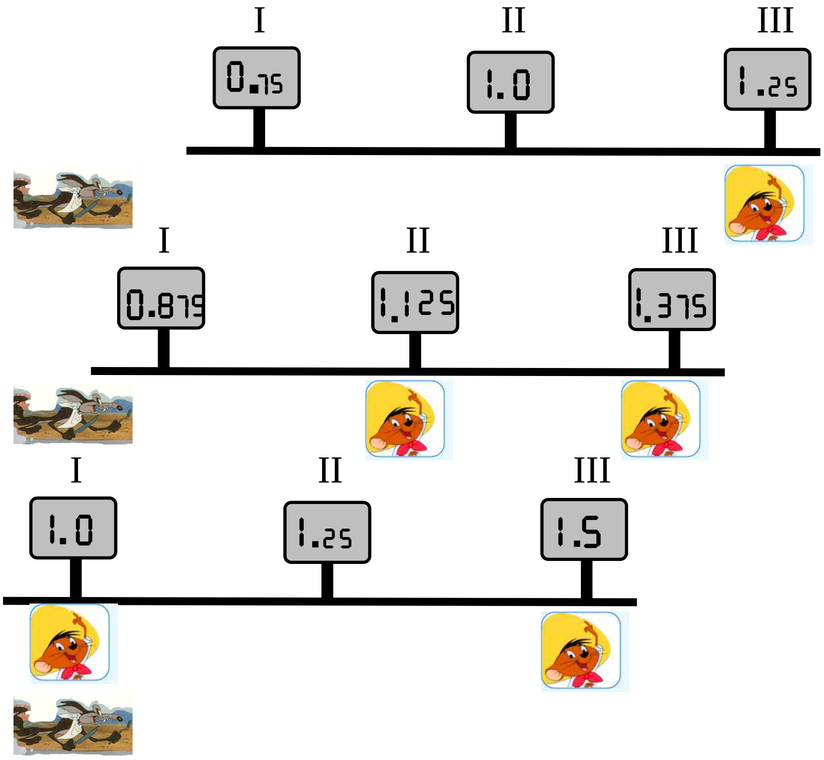


Figura 12.16: Viagem de um taquião do poste I em $t = 1{,}0\,\mathsf{s}$ para o poste III em $t = 1{,}25\,\mathsf{s}$, vista do referencial do *Coiote*. Chega primeiro do que parte, desdobra-se em dois, um dos quais fica no poste III e o outro viaja para o poste I, onde desaparece para $t > 1{,}0\,\mathsf{s}$.

- O primeiro acontecimento, segundo a cronologia de $\mathcal{C}$, é a chegada ao poste III: o rato materializa-se do nada!
- A seguir temos um rato descansar junto do poste III, mas temos outro a meio caminho entre o poste I e III; há dois ratos!?
- Finalmente, quando o poste I marca $t = 1{,}0\,\mathsf{s}$ ($T = T_0$) o taquião chega ao poste I, onde se esfuma. Para $T > T_0$ só temos o taquião a descansar junto ao poste III.

Este exemplo mostra o tipo de dificuldades que levantam sinais de velocidade superior à da luz. O intervalo de tempo Δt entre os eventos de emissão e recepção de um taquião não tem o mesmo sinal em todos os referenciais: a emissão pode ser posterior à recepção. Teremos referenciais em que há violação de causalidade: o efeito precede a causa. Esta situação pode dar origem a paradoxos sem fim como a estranha viagem do rato-taquiónico, que surge do nada onde termina(?) a viagem, se desdobra e anda para trás no tempo, da chegada para a partida.

Ao contrário, dois acontecimentos que possam ser ligados por um relógio de velocidade inferior à da luz, (um relógio coincidente no espaço com os dois eventos) tem um intervalo de tempo em qualquer referencial dado por

$$\Delta t = \frac{\Delta\tau}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

em que $\Delta\tau$ é o tempo próprio do relógio entre os dois eventos. Por isso Δt tem sempre o mesmo sinal em qualquer referencial.

> $\mathcal{ETV}_8$: No referencial $\mathcal{C}$ quais são os valores do tempo T correspondente a cada tira do filme da viagem do rato taquiónico (fig 12.16 na página anterior)?

12.6.3 Poderemos chegar às estrelas

> *Então a hipótese de viajar pela galáxia, está definitivamente posta de lado?*

Curiosamente não, pelo menos não são as limitações da Relatividade que nos restringem.

Ainda que uma viagem pela galáxia possa demorar um milhão de anos a uma velocidade sub-c, esse tempo, Δt, é o do referencial da Terra. Uma nave com velocidade v em relação à Terra terá um tempo próprio (o tempo dos tripulantes e passageiros da nave),

$$\Delta T = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Delta t.$$

Ainda que Δt possa ser 10^6 anos, o tempo próprio pode ser um ano, se a velocidade for suficientemente próxima de c. Claro, entretanto passaram um milhão de anos da Terra. E só teremos notícias da nave dois milhões de anos mais tarde.

Aliás não deixa de ser curioso que a limitação da velocidade luz, 300 mil quilómetros por segundo, preocupe tanta gente, quando no presente, conseguimos, no máximo, alguns quilómetros por segundo nos nossos veículos mais rápidos!

> $\mathcal{ETV}_9$: Para que o tempo próprio da nave fosse um milhão de vezes inferior ao tempo no referencial da Terra, que velocidade teria que ter a nave?

12.7 Conclusões

É muito comum um sentimento de incredulidade no primeiro contacto com a Relatividade. Figuras proeminentes da cultura do século XX, como o filósofo francês Henri Bergson, que muito discorreu sobre a natureza do tempo, acharam as propostas da Relatividade sobre a natureza do espaço e tempo inaceitáveis.

Neste texto tentou-se mostrar que elas são uma consequência inevitável de duas ideias muito simples e fortemente sustentadas pela experiência:

- o Princípio da Relatividade;
- O princípio da invariância da velocidade da luz.

Por outro lado, estranhas como possam parecer as conclusões da Relatividade, elas não contradizem a nossa experiência quotidiana, que envolve apenas velocidades $v \ll c$. Os efeitos relativistas são extremamente pequenos para velocidades muito inferiores às da luz.

Finalmente é preciso dizer que a Relatividade não é uma teoria em fase especulativa, à espera de confirmação. No dia-a-dia de um laboratório de partículas, os efeitos relativistas são enormes e presentes em todas as actividades e análises de experiências. Os atrasos relativistas de relógios em movimento foram medidos e tem que ser levados em conta em toda a tecnologia GPS.

A escolha então é esta: aceitar uma teoria formulada com enorme simplicidade e elegância, a partir de princípios solidamente fundados na experiência; que dá conta de toda a nossa experiência sobre o espaço e tempo; com previsões verificadas todos os dias em inúmeras experiências. Ou, em alternativa, manter os nossos preconceitos sobre o espaço e tempo constituídos a partir de uma experiência limitada a uma fracção ínfima da gama de velocidades possíveis e que está em contradição com inúmeras observações. Pronto a escolher?

12.8 Resposta aos $\mathcal{ETV}'s$

12.1. $\mathcal{ETV}_1$: Seja $\vec{v}$ a velocidade do barco no referencial da Terra. A velocidade **do** referencial do rio **no** referencial da Terra é $\vec{u} = (u, 0) = (-5, 0)$. Para a viagem ao longo da margem:

Na subida

$$\begin{aligned} V_x &= v_x - u \Rightarrow 25 = v_x + 5 \Rightarrow v_x = 20\,\mathtt{km\,h}^{-1}; \\ V_y &= 0. \end{aligned}$$

Na descida:

$$\begin{aligned} V_x &= v_x - u \Rightarrow -25 = v_x + 5 \Rightarrow v_x = -30\,\mathtt{km\,h}^{-1}; \\ V_y &= 0. \end{aligned}$$

O tempo total da viagem paralela à margem é

$$T_{\parallel} = \frac{2}{20} + \frac{2}{30} = 0,167\,\mathtt{h} = 10\,\mathtt{min}.$$

Para a viagem na perpendicular:

$$\begin{aligned} V_x &= 0 - u = -u = 5; \\ V_y &= v_y \end{aligned}$$

Como

$$V_x^2 + V_y^2 = V^2 = (25)^2.$$

$$v_y^2 + u^2 = V^2 \Rightarrow v_y^2 = V^2 - u^2 \Rightarrow v_y = 24{,}5\,\mathtt{km\,h}^{-1}.$$

O tempo de ida e volta

$$T_\perp = \frac{4}{24{,}5} = 0,163\,\mathtt{h} = 9{,}8\,\mathtt{min}.$$

12.2. $\mathcal{ETV}_2$:

(a) $0{,}75\, v_{\mathtt{cm}} = 0{,}5 \times 2 \Rightarrow v_{\mathtt{cm}} = 1{,}33\,\mathtt{m\,s}^{-1}$.

(b) $V_{1x} = 2 - 1{,}33 = 0{,}67\,\mathtt{m\,s}^{-1}$; $V_{2x} = -v_{\mathtt{cm}} = -1{,}33\,\mathtt{m\,s}^{-1}$.

(c) $0{,}5 \times V'_{1x} + 0{,}25 \times V'_{2x} = 0 \Rightarrow V'_{1x} = -V'_{2x}/2$.
Como

$$0{,}5 \times (V'_{1x})^2 + 0{,}25\,(V'_{2x})^2 = 0{,}5 \times (V_{1x})^2 + 0{,}25\,(V_{2x})^2$$

e

$$V_{1x} = -V_{2x}/2$$

obtemos:

$$\begin{aligned} (V'_{1x})^2 &= (V_{1x})^2 \\ (V'_{2x})^2 &= (V_{2x})^2 . \end{aligned}$$

As soluções são

$$V'_{1x} = V_{1x};\ V'_{2x} = V_{2x},$$

ou

$$V'_{1x} = -V_{1x};\ V'_{2x} = -V_{2x}.$$

A solução com sinal + corresponde à inexistência de colisão. A segunda solução é a correcta: as velocidades trocam de sinal.

(d)

$$v'_{1x} = V'_{1x} + v_{\mathtt{cm}} = -0,67 + 1{,}33 = 0{,}67\,\mathtt{m\,s}^{-1}.$$

$$v'_{2x} = V'_{2x} + v_{\mathtt{cm}} = 1{,}33 + 1{,}33 = 2{,}67\,\mathtt{m\,s}^{-1}.$$

12.3. $\mathcal{ETV}_3$: Os relógios ficam sincronizados no referencial do solo, se este for o referencial privilegiado, onde a velocidade da luz é a mesma em todas as direcções. Mas nesse caso, a velocidade da luz no referencial que se move relativamente ao solo com velocidade v da esquerda para a direita é:

- $c - v$ para o sinal que viaja para o poste II;
- $c + v$ para o sinal que viaja para o poste 0.

O tempo que a Luz demora a atingir o poste II é

$$(c-v)T = L - vT \Rightarrow T = \frac{L}{c};$$

Para atingir o poste 0,

$$(c+v)T' = L + vT' \Rightarrow T' = \frac{L}{c}$$

Os relógios ficariam sincronizados nos dois referenciais.

12.4. $\mathcal{ETV}_4$: O aluno esqueceu-se do problema da relatividade da simultaneidade. O argumento seria válido se, no instante em que o relógio do *Coiote* marca 0 **no referencial do *Coiote***, o relógio do poste I marcasse 0,0. Mas não marca, marca mais que zero (ver figura 12.12 na página 35). Por isso, quando este poste passa pelo *Coiote* este pode vê-lo a marcar mais do que 0,866 e concluir que o relógio do poste anda **mais devagar** que o seu próprio relógio.

12.5. $\mathcal{ETV}_5$: O aluno voltou-se a esquecer da ...relatividade da simultaneidade. A imagem da figura 12.13 na página 37 é um "instante" do referencial do *Coiote*. Quando as traseiras estão em A a frente do Cadillac do *Coiote* está em C e a do carro parado no solo (com velocidade $-c/2$ em relação ao outro) está em B. Mas já vimos que eventos simultâneos num referencial, em dois locais diferentes, não são simultâneos no outro referencial. Se recordarmos o filme da figura 12.10 da página 27 vemos que eventos simultâneos no referencial do *Coiote* quanto mais para a frente estão, mais tarde ocorrem no referencial do Solo. Suponhamos que A, B e C são marcações na estrada. O Cadillac estacionado tem a traseira coincidente com A e a frente com B, sempre. Há um instante em a traseira do Cadillac do *Coiote* passa em A. **No referencial** $\mathcal{C}$, nesse momento, a frente está em C à frente de B e o seu carro é maior que o do Solo. Mas, **no referencial do** $\mathcal{S}$, o filme é diferente (fig. 12.17).Quando a traseira do Cadillac está em A, a frente ainda não chegou a B. Só passa em B e C mais tarde; por isso o Cadillac do Coiote é mais curto, no referencial $\mathcal{C}$, que o Cadillac parado. O **quando** é relativo!

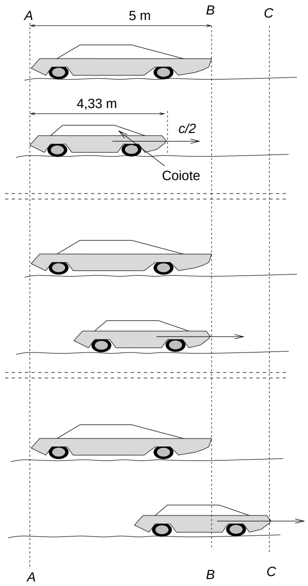


Figura 12.17: O "instante"da figura 12.13 da página 37 é este filme no referencial do solo.

12.6. $\mathcal{ETV}_6$:

(a)

$$\begin{aligned}\Delta m &= m(^4He^{2+}) - 4m_p - 2m_e = \\ &= 4{,}003 - 4\times 1,008 - 2\times 0{,}0005 \approx -0{,}03\,\texttt{u.m.a}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta E &= -0{,}03\times 1{,}661\times 10^{-27}\times \left(3\times 10^8\right)^2 = -0{,}4\times 10^{-11}\,\texttt{J}.\\ \Delta E &= -\frac{0{,}4\times 10^{-11}}{1{,}6\times 10^{-19}} = -0{,}25\times 10^8 = -25\,\texttt{MeV}.\end{aligned}$$

O Sol radia $0{,}4\times 10^{-11}\,\texttt{J} = 25\,\texttt{MeV}$, por cada núcleo de hélio formado.

(b)

$$\begin{aligned}\Delta m &= -\frac{3{,}9\times 10^{26}}{c^2}\times 365{,}3\times 24\times 3600\\ &= -1{,}4\times 10^{26-16+7} = -1{,}4\times 10^{17}\,\texttt{kg}.\end{aligned}$$

O Sol radia $1{,}4\times 10^{17}\,\texttt{kg}$ por ano, mas isso é uma fracção mínima da sua massa total

$$\frac{-\Delta m}{M_\odot} = 0{,}7\times 10^{-13}.$$

(c) Massa em Hidrogénio $\sim 0{,}67\times M_\odot = 1{,}3\times 10^{30}\,\texttt{kg}$; Massa de núcleos de Hidrogénio consumida por segundo:

$$\frac{3,9\times 10^{26}}{0{,}4\times 10^{-11}}\times 4m_p = 66\times 10^{26+11-27} = 6{,}6\times 10^{11}\,\texttt{kg}.$$

Duração do combustível do Sol em anos:

$$T = \frac{1{,}3\times 10^{30}}{6{,}6\times 10^{11}}\times\frac{1}{3{,}15\times 10^{7}} = 0{,}6\times 10^{11}\,\texttt{anos}.$$

12.7. $\mathcal{ETV}_7 : \sqrt{1-v^2/c^2} = \sqrt{1-0{,}994^2} = 0{,}11;$

$$\begin{aligned}\Delta t &= t_{1/2}/\sqrt{1-v^2/c^2} \approx 14{,}2\,\mu\texttt{s};\\ l &= v\Delta t = 0{,}994\times c\times 14{,}2\times 10^{-6} = 4{,}23\times 10^{3}\,\texttt{m} = 4{,}23\,\texttt{km}.\end{aligned}$$

12.8. $\mathcal{ETV}_8$. Já sabemos que a última tira corresponde a $T = T_0$. Se olharmos, por exemplo, para o relógio III, vemos que entre duas tiras passa $\Delta t = 0{,}125$; este é o tempo próprio deste relógio, que tem velocidade $c/2$ no referencial $\mathcal{C}$. Assim entre duas tiras sucessivas

$$\Delta t = T_0\Delta T \Rightarrow \Delta T = \frac{2}{\sqrt{3}}\times\frac{1}{8} = \frac{1}{4\sqrt{3}} = 0{,}144\,\texttt{s}.$$

Assim, temos os três instantes:

$$\begin{aligned}T_1 &= T_0 - \frac{2}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0{,}577\,\texttt{s}\\ T_2 &= T_0 - \frac{1}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{12} = \frac{5\sqrt{3}}{12} = 0{,}722\,\texttt{s}\\ T_3 &= T_0 = 0{,}866\,\texttt{s}\,.\end{aligned}$$

Note-se como em $\mathcal{C}$ o instante de chegada, $T = 0{,}577\,\texttt{s}$, é anterior ao de partida, $T = 0{,}866\,\texttt{s}$.

12.9. $\mathcal{ETV}_9$: O factor $\sqrt{1-v^2/c^2}$ teria que valer 10^{-6}.

$$\begin{aligned}1-\frac{v^2}{c^2} &= 10^{-12} \Rightarrow \frac{v}{c} = \sqrt{1-10^{-12}}\\ &\approx 0{,}9999999999995.\end{aligned}$$

12.8.1 Actividades, questões e problemas

12.1. Escrever pequenos ensaios sobre o seguintes temas:

(a) A invariância da velocidade da luz e a relatividade da simultaneidade.

(b) Verificação experimental da teoria da Relatividade Restrita.

(c) As razões de Einstein na escolha dos postulados fundamentais da Relatividade Restrita.

(d) Os conceitos Newtonianos de espaço e tempo e a transformação de Galileu entre referenciais em movimento uniforme e rectilíneo.

12.8.2 Questões

12.1. Numa experiência de colisão entre dois carros iguais, um deles tem velocidade $v_x = 4\,\mathtt{m\,s}^{-1}$, no referencial do centro de massa dos dois carros. Qual é a velocidade do outro carro?

12.2. Qual dos postulados da Relatividade é imediatamente incompatível com a transformação Galileana entre referenciais em movimento uniforme e rectilíneo?

12.3. Por que razão é que as equações de Maxwell não satisfazem o Princípio da Relatividade, se a transformação entre referenciais em movimento uniforme e rectilíneo for a transformação de Galileu?

12.8.3 Problemas

12.1. Um avião sobrevoa duas cidades A e B a 500 quilómetros de distância, com um intervalo de meia-hora, em dias sem vento. Se soprar um vento de com velocidade $100\,\mathtt{km\,h}^{-1}$ na direcção de A para B quanto demora o avião de $A \to B$ e de $B \to A$?

Nota: a velocidade do avião relativamente ao ar da atmosfera é sempre a mesma.

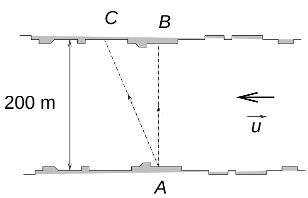


Figura 12.18: Como minimizar o tempo de travessia?

12.2. Um nadador tem que atravessar um rio de distância entre margens de $200\,\mathtt{m}$. A velocidade que consegue em águas paradas é de $1\,\mathtt{m\,s}^{-1}$. O rio tem uma corrente com velocidade $u = 0{,}5\,\mathtt{m\,s}^{-1}$.

(a) Se ele nadar segundo a perpendicular à margem ($A \rightarrow B$) quanto tempo demora a atravessar o rio?

(b) Qual é o tempo mínimo em que ele consegue atravessar o rio e a que distância do ponto B ele chegará se usar o trajecto em que o tempo de travessia é mínimo?

12.3. O seguinte resultado torna especialmente simples a análise de colisões de carros em movimento numa calha:

> Numa colisão elástica de dois corpos em movimento rectilíneo, as velocidade dos corpos no referencial do centro de massa trocam de sentido na colisão. Isto é:
>
> $$\begin{aligned} \vec{v}_1' &= -\vec{v}_1; \\ \vec{v}_2' &= -\vec{v}_2. \end{aligned}$$
>
> Demonstrar este resultado.

12.4. O automóvel da figura está a deslocar-se com velocidade de $140\,\mathtt{km\,h}^{-1}$ e o comboio a $100\,\mathtt{km\,h}^{-1}$.

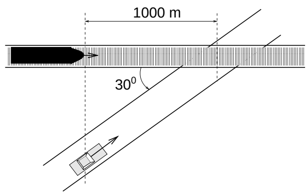


Figura 12.19: Passará a tempo?

(a) Escolher os eixos apropriadamente e obter as seguintes equações paramétricas (distâncias em metros e tempo em segundos):

$$\text{comboio} \begin{cases} x(t) &= 27{,}8\,t \\ y(t) &= 577 \end{cases}$$

$$\text{carro} \begin{cases} x(t) &= 33{,}7\,t \\ y(t) &= 19{,}4\,t \end{cases}.$$

(b) Escrever as equações paramétricas das coordenadas $X(T)$ e $Y(T)$ do comboio, no referencial do carro assumindo uma transformação Galileana de coordenadas.

(c) Ler das equações das coordenadas $X(T)$ e $Y(T)$ a velocidade do comboio no referencial do carro.

(d) Representar num gráfico X, Y a trajectória do comboio no referencial do carro.

12.5. Uma nave com comprimento próprio, no referencial em que está em repouso, $l = 200\,\mathtt{m}$ move-se com velocidade $3c/4$ no referencial de uma estação espacial. Duas explosões ocorrem em simultâneo no referencial da nave em extremos opostos da mesma.

(a) No referencial da estação, qual das explosões ocorre primeiro? A da frente ou a da traseira da nave?

(b) Qual é o comprimento da nave no referencial da estação espacial?

(c) Que intervalo de tempo decorre entre as duas explosões no referencial da estação orbital?

Nota: se um sinal de luz for emitido do ponto médio da nave atinge as extremidades ao mesmo tempo no referencial da nave, mas não no da estação orbital.

12.6. Qual é mais comprida: uma barra de $L = 1\,\mathtt{m}$, em repouso, ou uma barra com comprimento próprio de 1,20 $\mathtt{m}$ com velocidade (segundo o seu comprimento) $v = 2c/3$?

12.7. No livros do físico George Gamow, *As Aventuras de Mr. Tomkins,* Mr. Tomkins, um empregado bancário, depois de assistir a algumas palestras sobre Relatividade e Mecânica Quântica é afligido por pesadelos passados em universos em que a velocidade da luz não é mais que algumas dezenas de quilómetros por hora, seja $c = 80\,\mathtt{km\,h}^{-1}$. A mais trivial das viagens (comboio, ou mesmo bicicleta) é fortemente relativista. Na sua viagem diária para o emprego, Mr. Tomkins verifica que entre os relógios da estação de partida e chegada passam 30 minutos. Ao chegar, Mr. Tomkins verifica que há sempre uma diferença de 5 minutos entre o seu relógio e o da estação embora ele estivesse certo com o da estação de partida.

(a) O seu relógio está atrasado ou adiantado, relativamente ao da estação?

(b) Qual é a velocidade do comboio?

(c) Mr. Tomkins sabe qual é a distância entre estações (pode vê-la num mapa) e conhece a velocidade do comboio. Por isso, em casa, calcula que a viagem lhe demora 30 minutos. Como explica ele que a sua viagem lhe demore 25 minutos, em vez de 30?

Nota: Ignorar os efeitos de aceleração no início e fim da viagem.

/Users/manuelmarque/Dropbox/ProfLSantos/Faraday/figs/cap12_12_barco

Figura 12.20: Qual é velocidade máxima do barco, V, no referencial da Terra, quando $\vec{V}$ faz um ângulo θ com a margem?

12.8.4 Desafios

12.1. barco tem um velocidade máxima, relativamente às água do rio, igual a v_M. Sabemos que, se as águas do rio tiverem uma velocidade $\vec{u}$, paralela às margens do mesmo, a velocidade máxima do barco em relação à Terra deixa de ser igual em todas as direcções.

   (a) Usando a transformação de Galileu, deduzir a expressão da velocidade máxima do barco, em função do ângulo θ da sua direcção de deslocamento com a margem, no referencial da Terra.

Bibliografia

[1] American Institute of Physics. Center for history of physics. URL: `http://www.aip.org/history`, 2006.

Conteúdo