Projecto Faraday

Textos de Apoio

Sistemas de Partículas

12º Ano de Escolaridade

Projecto Faraday

casa das ciências

Porto, Outubro de 2009

Ficha Técnica

Projecto de intervenção no ensino da Física no secundário.

Financiamento

Fundação Calouste Gulbenkian.

Execução

Departamento de Física, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto.

Escolas Participantes

- ES Filipa de Vilhena
- ES Fontes Pereira de Melo
- ES Garcia de Orta
- ES da Maia
- ES de Santa Maria da Feira

Coordenação

- J. M. B. Lopes dos Santos
- Manuel Joaquim Marques

Portal

URL: `http://www.fc.up.pt/faraday`

Texto do 12º Ano

Redactor Principal

J. M. B. Lopes dos Santos

Colaboração e revisão

- Elisa Arieiro
- Carlos M. Carvalho
- Manuel Joaquim Marques
- Maria de Fátima Mota

Capítulo 7

Sistemas de partículas

Nas Olimpíadas de Los Angeles, em 1984, Greg Louganis, um jovem americano de 24 anos, espantou o público ao ganhar as medalhas de ouro de salto de plataforma e de trampolim, com um sucessão de saltos praticamente perfeitos, de uma elegância inexcedível. Quatro anos mais tarde, em Seul, repetiu a proeza, contra jovens de metade da sua idade mesmo depois de ter aberto a cabeça ao embater no trampolim, num salto de qualificação.

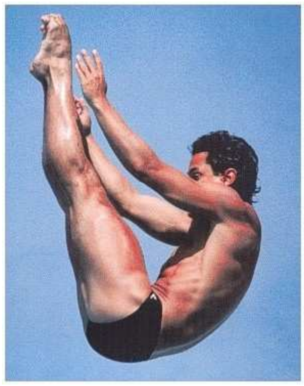


Figura 7.1: Apesar dos seus movimentos complexos, a única força externa significativa sobre um saltador é o seu peso.

Contudo, os saltos de Louganis e dos seus competidores, com as suas piruetas e cambalhotas, ou os famosos "voos" dos guarda-redes, decorrem sob acção de uma força externa constante, o seu peso, tal como no caso da queda de uma esfera. Como podem, então, os saltadores, os ginastas, os bailarinos, os atletas, executar em voo movimentos tão complexos? Que nos podem dizer a leis de Newton sobre esta questão?

O movimento de um sistema complexo, como o corpo humano, raramente se reduz a um movimento de translação em que todas as partes do corpo têm o mesmo deslocamento, a mesma velocidade e a mesma aceleração em todos os instantes. Partes diferentes do corpo têm acelerações diferentes em direcções variadas. Tal como no caso dos fluidos, as forças internas têm um papel muito importante na determinação de movimentos complexos de sistemas constituídos por muitas partes em interacção.

Em Física Newtoniana, modelam-se estas situações usando o conceito de **sistema de partículas**. Uma partícula é um sistema suficientemente simples para que o seu movimento se possa representar pelo deslocamento de um ponto. Um corpo arbitrário é representado como sendo um conjunto (sistema) de partículas actuadas quer por **forças internas**, derivadas da interacção com as outras partículas do sistema, quer por **forças externas**, resultantes da interacção com outros corpos.

Neste capítulo vamos considerar a seguinte questão:

> Que características do movimento de um sistema de partículas podemos obter do conhecimento das suas forças externas apenas?

A resposta a esta pergunta é muito simples e interessante.

Por mais complexo que seja um sistema e o seu movimento, as massas e as posições das partículas que o constituem permitem-nos calcular a posição de um ponto, o **centro de massa**, $\vec{r}_{\mathtt{cm}}$, cujo movimento é o de uma partícula material, com massa igual à massa total do sistema, sujeita à resultante das **forças externas** aplicadas ao sistema.

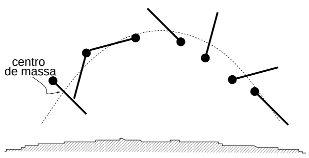


Figura 7.2: Embora o movimento de um corpo em voo possa ser complexo, o seu centro de massa tem o movimento parabólico habitual de uma queda livre.

Este resultado justifica, finalmente, por que razão podemos aplicar com tanto sucesso o modelo de partícula material aos movimentos de corpos muito complexos. Um aspecto do movimento, especificamente, o movimento do centro de massa, **é o movimento de uma partícula material**, em relação ao qual podemos ignorar as forças internas.

Por outras palavras, nem arte de Greg Louganis, nem o poder de Michael Jordan, nem a agilidade de Vítor Baía, podem impedir os respectivos centros de massa de cair com uma aceleração de 9,8 $\mathtt{m\,s}^{-2}$ na direcção vertical[1].

7.1 Momento linear

7.1.1 Colisão de dois carros

Quando estudámos colisões entre dois carros, no 10º ano, considerámos que cada um deles podia ser caracterizado pelo deslocamento de um ponto; uma vez que o movimento de cada carro era de translação, todos os pontos do carro tinham o mesmo deslocamento. Assim, neste sistema, em vez de uma partícula temos duas. Um bom sítio para começar.

Ignoremos por um momento as forças externas sobre os carros: o respectivo peso é anulado pela reacção normal da calha e, em

[1] Contudo, veremos que o centro de massa de um atleta não tem uma posição fixa no seu corpo. Depende da configuração do corpo, se está encolhido, estendido, membros flectidos, estendidos, etc.

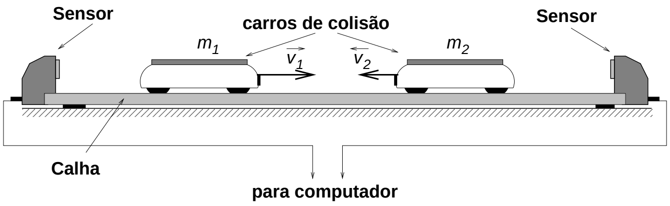


Figura 7.3: Colisão de dois carros. Na medida em que cada um deles tem um movimento de translação, este sistema é constituído por duas partículas.

primeira aproximação, o atrito é desprezável. Para o primeiro carro,

$$\vec{F}_1 = m_1\vec{a}_1,$$

em que $\vec{F}_1$ é a força que sobre ele exerce o segundo carro. Do mesmo modo,

$$\vec{F}_2 = m_2\vec{a}_2,$$

em que $\vec{F}_2$ é a força exercida no segundo carro pelo primeiro. A terceira lei de Newton diz-nos que estas duas forças, $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$, que são um par acção–reacção, têm resultante nula. Ou seja,

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$$

e, portanto,

$$m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 = 0.$$

Recordando que a aceleração é a derivada da velocidade, vem

$$m_1\frac{d\vec{v}_1}{dt} + m_1\frac{d\vec{v}_2}{dt} = 0. \qquad (t \text{ qualquer})$$

As propriedades da operação de derivação referidas no Capítulo 2 permitem-nos escrever esta equação na forma (as massas são constantes, independentes do tempo):

$$\frac{d}{dt}\left(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2\right) = 0 \qquad (t \text{ qualquer}).$$

Dizer que uma grandeza tem derivada temporal nula (em qualquer instante) é o mesmo que dizer que ela não varia, ou seja:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = \text{constante}.$$

Em conclusão: multiplicando a massa de cada carro pelo respectivo vector velocidade e somando os dois vectores, $m_1\vec{v}_1$ e $m_2\vec{v}_2$, os **momentos lineares de cada carro,** obtemos uma grandeza que não varia no tempo: essa grandeza é o **momento linear** do sistema. Repare-se que a única propriedade das forças internas que usámos foi a terceira lei de Newton. Esta lei de conservação de momento linear é, portanto, tão geral como a terceira lei de Newton.

$\mathcal{ETV}_1$: Na Actividade A7 do 10º ano estudámos duas colisões muito simples entre carros de igual massa, $m_1 = m_2 = m$. Um carro era lançado, com velocidade $\vec{v} = v_0\hat{\mathbf{i}}$, contra o outro, inicialmente parado. Numa colisão do primeiro tipo o carro lançado ficava parado após a colisão. No segundo tipo de colisão os carros seguiam juntos após a colisão. Usando a conservação de momento linear, responder às seguintes perguntas.

a) Qual é velocidade do carro que estava inicialmente parado após uma colisão do primeiro tipo?

b) Qual é a velocidade conjunta dos dois carros após a colisão do segundo tipo ?

7.1.2 Conservação de momento linear

O resultado anterior é facilmente estendido para qualquer sistema de partículas. Sobre cada partícula do sistema exercem-se:

- forças externas, devidas a corpos exteriores ao sistema;
- forças internas, resultantes das interacções com as outras partículas do sistema.

Se somarmos **todas as forças**, sobre todas as partículas do sistema, podemos agrupar as forças internas em pares acção-reacção, cuja soma é zero. O par de uma força externa é exercido sobre partículas exteriores ao sistema e essas forças não são somadas (ver fig. 7.4). Assim a soma de **todas as forças** sobre **todas as partículas de um sistema**, é a resultante de todas as **forças externas**:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots = \vec{F}_{\texttt{ext}}$$

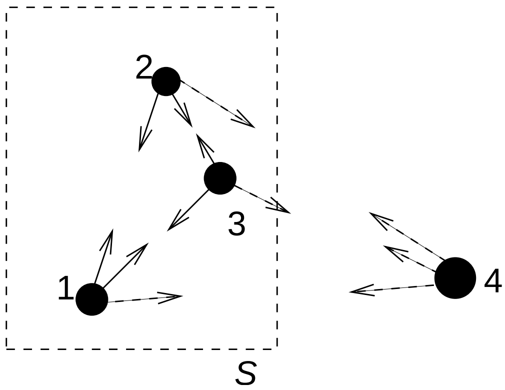


Figura 7.4: Se somarmos todas as forças que actuam nas partículas do sistema S, 1, 2 e 3, as forças internas (a cheio) cancelam, pois podem ser agrupadas em pares acção–reacção. Ficam apenas as forças externas (a tracejado), pois os pares destas são exercidos em partículas que não pertencem a S.

Usando a segunda lei,

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots = m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 + \ldots,$$

vem

$$m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 + \cdots = \vec{F}_{\texttt{ext}}.$$

Ora,

$$\begin{aligned} m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 + \ldots &= \frac{d}{dt}\left(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \ldots\right) \\ &= \frac{d\vec{p}_{\texttt{sist}}}{dt} \end{aligned}$$

em que $\vec{p}_{\texttt{sist}}$ é o momento linear total do sistema:

$$\vec{p}_{\texttt{sist}} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \ldots. \tag{7.1}$$

Assim:

$$\frac{d\vec{p}_{\texttt{sist}}}{dt} = \vec{F}_{\texttt{ext}}. \tag{7.2}$$

No caso em que as forças **externas** têm resultante nula, obtemos a lei de conservação do momento linear,

$$\vec{p}_{\texttt{sist}} = \text{constante} \qquad (\vec{F}_{\texttt{ext}} = 0).$$

As forças internas de um sistema, **em circunstância alguma**, podem alterar o seu momento linear total. Este só varia por acção de forças externas ao sistema.

$\mathcal{ETV}_2$: É possível variar as massas dos carros usados na Actividade A7 usando duas barras metálicas, de massa igual à dos carros. Deste modo podemos duplicar ou triplicar a massa de um dos carros relativamente ao outro. Suponha que o carro com massa $2m$ está parado. O outro, de massa m e velocidade inicial $\vec{v} = v_0\hat{\mathbf{\imath}}$, colide com ele e fica parado, após a colisão.

a) Qual é a velocidade do carro de massa $2m$ após a colisão?

b) A energia cinética total dos dois carros manteve-se?

7.1.3 Momento linear e impulso

A derivada temporal do momento linear é o valor instantâneo da força externa:

$$\frac{d\vec{p}_{\texttt{sist}}}{dt} = \vec{F}_{\texttt{ext}}(t).$$

Podemos também definir uma força média num intervalo de tempo Δt, a partir da taxa média de variação do momento:

$$\frac{\vec{p}_{\texttt{sist}}(t+\Delta t) - \vec{p}_{\texttt{sist}}(t)}{\Delta t} = \left(\vec{F}_{\texttt{ext}}\right)_{\texttt{med}}$$

e

$$\vec{p}_{\texttt{sist}}(t+\Delta t) - \vec{p}_{\texttt{sist}}(t) = \left(\vec{F}_{\texttt{ext}}\right)_{\texttt{med}} \times \Delta t.$$

O produto

$$\vec{I} = \left(\vec{F}_{\texttt{ext}}\right)_{\texttt{med}} \times \Delta t$$

é o **impulso** da força externa no intervalo de tempo t a $t + \Delta t$. Com esta definição

$$\vec{p}_{\texttt{sist}}(t+\Delta t) - \vec{p}_{\texttt{sist}}(t) = \vec{I}$$

Estas definições são úteis no tratamento de forças impulsivas, forças que actuam durante intervalos de tempo muito curtos: por exemplo, a força de um taco de golfe ou basebol na respectiva bola, ou de uma arma na bala durante o disparo. Em tais situações é muito complicado saber exactamente como varia a força instantânea, $\vec{F}_{\texttt{ext}}(t)$, com o tempo. A variação de momento permite-nos calcular o impulso. Se tivermos uma ideia do intervalo de tempo da interacção, o valor da força média dá uma ideia da ordem de grandeza das forças envolvidas.

No texto do $11^{\underline{o}}$ ano, capítulo 4, secção 4.3.1, tratámos alguns exemplos de forças impulsivas.

7.1.4 Momento linear e velocidade do centro de massa

Suponhamos que a massa total do nosso sistema de partículas está fixa:

$$M = m_1 + m_2 + \dots. \tag{7.3}$$

Esta equação e a definição de momento linear,

$$\vec{p}_{\texttt{sist}} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \dots, \tag{7.4}$$

sugerem uma definição natural de uma velocidade global de um sistema de partículas. Do mesmo modo que para uma partícula o momento $\vec{p}$ é o produto $m\vec{v}$, podemos definir [2]

$$\vec{p}_{\texttt{sist}} = M\vec{v}_{\texttt{cm}},$$

em que $\vec{v}_{\texttt{cm}}$, por razões que se vão tornar claras dentro em pouco, é designada por **velocidade do centro de massa**.

Por que é que esta definição é útil?

Se as forças externas sobre o nosso sistema tiverem resultante nula, $\vec{p}_{\texttt{sist}}$ = constante. Logo:

> A velocidade de centro de massa, $\vec{v}_{\texttt{cm}}$, de um sistema de partículas de massa total M fixa, mantém-se constante se a resultante das forças externas que actuam nesse sistema for nula.

▷ Primeira lei de Newton.

Se repararmos na equação 7.2 e a aplicarmos a um corpo de massa fixa, obtemos:

$$\frac{d\vec{p}_{\texttt{sist}}}{dt} = M\frac{d\vec{v}_{\texttt{cm}}}{dt} = \vec{F}_{\texttt{ext}}.$$

> A aceleração do centro de massa de um sistema de partículas, multiplicada pela massa total M (fixa) do sistema é igual à resultante das forças externas aplicadas ao sistema.

▷ Segunda lei de Newton.

[2] Como já sabemos o que são $\vec{p}_{\texttt{sist}}$ e M, esta equação é uma **definição** de $\vec{v}_{\texttt{cm}}$.

Estes dois resultados são a primeira e segunda leis de Newton aplicadas a um qualquer sistema de partículas.

A descoberta das leis de Newton não resultou do estudo de movimentos de partículas. Planetas como a Terra ou a Lua, ou estrelas como o Sol, são sistemas de muitas partículas! Qualquer dos carrinhos que usámos nas nossas experiências tem da ordem de um número de Avogadro de átomos; todos eles exercem forças uns nos outros. Mas, por mais complexo que seja o sistema de partículas, podemos associar-lhe **uma velocidade**,

$$\vec{v}_{\texttt{cm}} \equiv \frac{1}{M}\left(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \ldots\right),$$

cuja variação é determinada, exclusivamente, pela resultante das forças externas, de acordo com a segunda lei:

$$M\frac{d\vec{v}_{\texttt{cm}}}{dt} = \vec{F}_{\texttt{ext}}.$$

É importante notar que estes resultados não valeriam para um sistema de partículas sem a terceira lei de Newton. Se as forças internas não se cancelassem em virtude do princípio de acção – reacção, o momento linear não se conservaria, e um corpo poderia passar de um estado com $\vec{v}_{\texttt{cm}} = 0$ para $\vec{v}_{\texttt{cm}} \neq 0$ sem qualquer força externa. Newton nunca teria descoberto a primeira e segunda leis se a terceira não se verificasse!

$\mathcal{ETV}_3$: Consideremos de novo as duas colisões referidas na $\mathcal{ETV}_1$ da secção 7.1.2. Quais são as velocidades do centro de massa dos dois carros, antes e depois da colisão, nos dois casos?

7.1.5 O centro de massa

Os resultados da secção anterior justificam a utilização do modelo de partícula material no estudo de movimentos. Por mais complexo que seja um corpo, podemos associar-lhe uma velocidade, $\vec{v}_{\texttt{cm}}$, cuja variação é determinada pela segunda lei de Newton apenas com forças externas. É como se o corpo fosse substituído por uma partícula, com toda a massa do corpo, M, e velocidade $\vec{v}_{\texttt{cm}}$;

■ Velocidades microscópicas e macroscópicas. ■

O mais pequeno volume à nossa escala macroscópica, $1\,\mathtt{mm}^3$, ou mesmo $1\,\mu\mathtt{m}^3$ (volume de um cubo de $10^{-3}\,\mathtt{mm}$ de lado) tem um enorme número de átomos ou moléculas. Aquilo que chamámos uma partícula de fluido é na realidade um sistema com enorme número de partículas. No caso de um líquido ou gás elas têm velocidades desordenadas, com todas as direcções.
Todavia, a velocidade de centro de massa de um volume macroscópico de fluido,

$$\vec{v}_{\mathtt{cm}} = \frac{1}{M}\left(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \dots\right)$$

(soma feita aos átomos desse volume) tem uma variação determinada apenas pelas forças externas exercidas sobre os mesmos. Podemos tratar essa partícula macroscópica de fluido como sendo um corpo de massa igual à soma das massas das partículas que a constituem e de velocidade $\vec{v}_{\mathtt{cm}}$, ao qual aplicamos a segunda lei de Newton.
Assim, aquilo que chamámos a velocidade de um fluido num ponto, $\vec{v}(\vec{r})$, é, de facto, a velocidade do centro de massa de um pequeno volume (pequeno, mas macroscópico, com muitos átomos) à volta desse ponto. Note-se que, se todas as partículas tiverem igual massa, $m = M/N$, em que N é o número de partículas, a velocidade de uma partícula macroscópica de fluido é a média das velocidades dos átomos que a constituem:

$$\vec{v}_{\mathtt{cm}} = \frac{1}{N}\left(\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \dots\right)$$

Se esta média de velocidades for nula em qualquer volume macroscópico, não há movimento do ponto de vista macroscópico: o fluido está em repouso, apesar de os seus átomos estarem em movimento permanente.

Caixa 7.1: O que é a velocidade de uma partícula macroscópica de fluido?

só nos falta mesmo determinar a posição dessa partícula, que representa o movimento global do corpo. Como

$$\vec{v}_{\texttt{cm}} = \frac{1}{M}\left(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \dots\right)$$

parece natural tentar

$$\vec{r}_{\texttt{cm}} = \frac{1}{M}\left(m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \dots\right).$$

Com efeito, não é difícil verificar que

$$\vec{v}_{\texttt{cm}} = \frac{d\vec{r}_{\texttt{cm}}}{dt}.$$

O ponto com vector de posição $\vec{r}_{\texttt{cm}}$, o **centro de massa do sistema,** desloca-se com uma velocidade $\vec{v}_{\texttt{cm}}$.

A expressão que dá a posição do centro de massa tem forma de uma média sobre as posições de cada partícula, ponderada pela respectiva massa. No caso de N partículas idênticas, $M = Nm$, e $\vec{r}_{\texttt{cm}}$ é a média simples de todas as posições.

$$\vec{r}_{\texttt{cm}} = \frac{1}{N}\left(\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \dots\right)$$

A verdadeira importância do conceito de centro de massa, contudo, resulta do facto de a respectiva velocidade definir o momento linear total do sistema de partículas, que é uma grandeza que **só** pode variar por efeito de forças externas; por mais complexo e elaborado que seja o sistema, o seu momento linear não varia na ausência de influências externas.

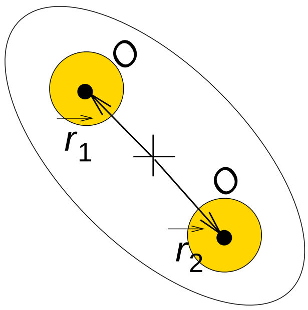


Figura 7.5: Se a origem for o ponto médio entre os dois núcleos $\vec{r}_2 = -\vec{r}_1$.

7.1.6 Determinação de centros de massa

Moléculas diatómicas

Uma molécula diatómica, homo-nuclear, como O_2, N_2 ou H_2, pode ser considerada como um sistema de duas partículas de massas idênticas, os núcleos de cada um dos átomos da molécula. A massa dos electrões é tão pequena comparada com a dos núcleos que pode ser desprezada.

É fácil ver que o centro de massa da molécula é o ponto médio da linha que une os dois núcleos.

Por definição, visto que as massas são iguais,

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{2}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2),$$

em que $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$ são os vectores de posição de cada núcleo. Se escolhermos como origem o ponto médio do segmento que une os dois núcleos, tem-se $\vec{r}_2 = -\vec{r}_1$, e $\vec{r}_{cm} = 0$. Ou seja, a origem do sistema de eixos coincide com a posição do centro de massa.

Quando uma molécula deste tipo se move entre duas colisões, num gás, pode rodar e vibrar. A trajectória de cada um dos núcleos pode ser complexa. Mas o centro de massa tem um movimento uniforme e rectilíneo enquanto a molécula não estiver sujeita a forças externas.

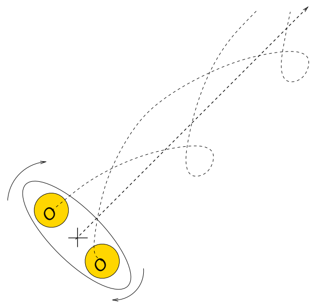


Figura 7.6: As trajectórias dos núcleos podem ser complexas, por causa da rotação e vibração da molécula; a do centro de massa é rectilínea, se não houver forças externas.

> $\mathcal{ETV}_4$: Recorrendo a uma tabela de dados físicos, estimar a razão entre a massa de todos os electrões e a massa total de uma molécula de oxigénio.

Corpos simétricos

Onde está o centro de massa de uma esfera homogénea? Será necessário fazer explicitamente a soma que define a posição do centro de massa?

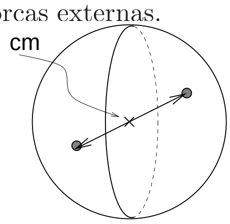


Figura 7.7: O centro de massa da esfera coincide com o seu centro geométrico. Podemos considerá-la constituída por partículas idênticas com vectores de posição simétricos, $\vec{r}$ e $-\vec{r}$, relativamente ao centro da esfera.

Um corpo com uma forma geométrica simples, como uma esfera, um cubo, uma placa rectangular, tem um centro de simetria único. Se escolhermos a origem do sistema de eixos nesse centro, para cada partícula (pequeno volume) com vector de posição $\vec{r}$, existe um idêntico, com a mesma massa, com vector de posição $-\vec{r}$. Ao fazer a soma sobre todas as partículas do corpo,

$$M\vec{r}_{cm} = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \ldots ,$$

os termos cancelam aos pares e o resultado é $\vec{r}_{cm} = 0$: o centro de simetria é a posição do centro de massa.

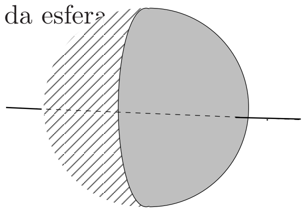


Figura 7.8: O centro de massa desta esfera está sobre o eixo representado tracejado, que passa pelo centro da esfera. Mas a sua posição sobre o eixo depende das massas volúmicas das metades direita e esquerda da esfera.

Se o corpo não for homogéneo, isso deixa de ser verdade. Por exemplo, numa esfera em que metade é de madeira e outra metade de aço, volumes idênticos diametralmente opostos não terão massas iguais.

Corpos compostos

Supondo que a Terra e o Sol são esferas sabemos onde estão os respectivos centros de massa. E o centro de massa do sistema Terra–Sol?

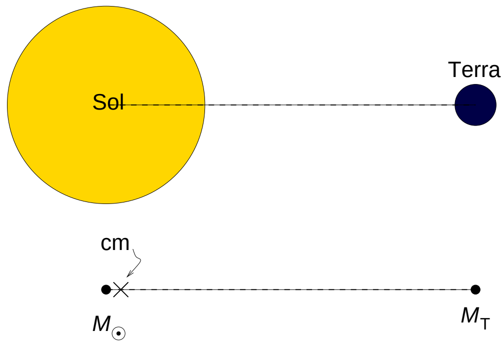


Figura 7.9: Para efeito de cálculo do centro de massa do sistema Terra-Sol cada um destes astros pode ser considerado uma partícula com toda a sua massa concentrada no respectivo centro de massa (o desenho não está à escala).

Ao fazer a soma do segundo membro da equação

$$M\vec{r}_{\mathtt{cm}} = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \ldots,$$

a todas as partículas da Terra **e** do Sol, $(M = M_T + M_\odot)$, podemos separar os termos relativos à Terra e ao Sol. A soma dos termos relativos à Terra é por definição $M_T\vec{r}_{\mathtt{cm}}^{(T)}$, em que $\vec{r}_{\mathtt{cm}}^{(T)}$ é o vector de posição do centro de massa da Terra. A soma dos termos relativos ao Sol dá $M_\odot\vec{r}_{\mathtt{cm}}^{(S)}$. Assim,

$$M\vec{r}_{\mathtt{cm}} = M_T\vec{r}_{\mathtt{cm}}^{(T)} + M_\odot\vec{r}_{\mathtt{cm}}^{(S)}$$

Esta expressão é exactamente o que se esperaria se o Sol e a Terra fossem duas partículas situadas nos respectivos centros de massa. Este resultado estende-se para qualquer sistema constituído por vários corpos. Para efeito do cálculo do centro de massa de um conjunto de corpos, cada corpo pode ser considerado como uma partícula situada no respectivo centro de massa.

> $\mathcal{ETV}_5$: Determinar a distância do centro de massa do sistema Terra–Sol ao centro do Sol. Comparar com o raio do Sol.

Geometria variável

Os aviões com asas retracteis, designam-se por aparelhos de geometria variável. O corpo de qualquer ave, o corpo humano, são também de geometria variável: não são rígidos.

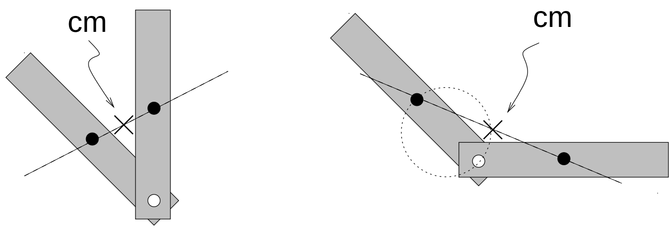


Figura 7.10: A posição do centro de massa deste sistema varia com o ângulo entre as duas barras. Se uma girar sobre a outra o centro de massa do sistema tem uma trajectória circular.

Nessas circunstâncias a posição do centro de massa depende da configuração. Vejamos um exemplo simples: duas barras homogéneas, idênticas, articuladas na extremidade (fig. 7.10). O centro de massa de cada barra coincide com o seu centro geométrico. Para calcular o centro de massa do sistema das duas barras, podemos considerar cada uma como sendo uma partícula, com toda a sua massa concentrada no respectivo centro de massa. Como as massas são iguais estamos num situação semelhante à da molécula diatómica: o centro de massa é o ponto médio do segmento que une os centros de massa de cada barra. Este ponto desloca-se relativamente às barras se o ângulo entre elas variar.

De modo semelhante, no voo de um saltador como Greg Louganis, a posição do centro de massa não está fixa relativamente a qualquer parte do seu corpo. Mas em qualquer instante podemos, pelo menos em princípio, determinar $\vec{r}_{\mathtt{cm}}$ a partir da distribuição de massa do corpo: a trajectória desse ponto é a parábola habitual de uma partícula em queda livre. Nenhuma quantidade de treino pode alterar esse facto.

> $\mathcal{ETV}_6$: No sistema de duas barras da figura 7.10 uma está fixa e a outra roda em torno do ponto de articulação das duas barras. Este movimento é possível na ausência de forças externas aplicadas a este sistema?

7.1.7 Propulsão de foguetões

Uma ave pode voar, não porque bata as asas, mas porque o ar exerce sobre ela uma força que cancela o seu peso!

Esta afirmação é verdadeira no sentido em que, sem uma força externa além do peso, a ave não poderia evitar que o seu centro de massa caísse com uma aceleração de 9,8 $\mathtt{m\,s^{-2}}$. Por outro lado, se não "empurrar" o ar com as suas asas, este não pode exercer uma força de reacção sobre a ave.

Contudo, no espaço não há ar. Apesar disso, é possível manobrar uma nave, fazê-la mudar de direcção, corrigir a órbita, aumentar ou diminuir a respectiva velocidade. Como é isto possível sem uma força externa aplicada à nave? Como pode o centro de massa da nave ter uma aceleração diferente da aceleração gravítica local?

A nave consegue isto descartando parte da sua massa. Quando uma nave quer acelerar numa dada direcção, liga foguetões que ejectam gás a alta velocidade na direcção oposta. Estando o conjunto inicialmente parado ($\vec{v}_{\mathtt{cm}} = 0$), se uma massa m de gás for ejectada com uma velocidade $\vec{u}$, o momento linear do sistema, $\vec{p}_{\mathtt{sist}} = (m\vec{u} + M\vec{v}) = (m + M)\vec{v}_{\mathtt{cm}}$, continuará a ser nulo (M é massa da nave já sem o gás ejectado). Portanto

$$M\vec{v} + m\vec{u} = 0,$$

em que $\vec{v}$ é a velocidade da nave. Assim,

$$\vec{v} = -\frac{m}{M}\vec{u}.$$

Mesmo que a nave ejecte uma fracção pequena da sua massa total, $m \ll M$, a velocidade que adquire pode ser apreciável porque a velocidade de ejecção do gás é muito alta.

$\mathcal{ETV}_7$: uma esfera de massa $m = 30\,\mathtt{g}$ e velocidade $v = 50\,\mathtt{m\,s^{-1}}$ desintegra-se em voo em dois fragmentos. Um deles, de massa $m = 30\,\mathtt{g}$, tem uma velocidade $v_1 = 20\,\mathtt{m\,s^{-1}}$ segundo um ângulo de 30º com a direcção original de movimento da esfera.

a) Qual é o módulo da velocidade do segundo fragmento e que ângulo faz com a direcção da velocidade original da esfera?

b) Qual foi a variação da energia cinética do sistema?

7.2 Energia e centro de massa

7.2.1 Energia potencial gravítica

Qual é a energia potencial gravítica de um corpo de forma arbitrária à superfície da Terra?

Usando como direcção vertical ascendente a do eixo Oz, estamos habituados a escrever,

$$E_p = mgz.$$

Que valor de z devemos usar se se tratar de um corpo com muitas partículas (como são todos)?

Representando o corpo como um sistema de partículas, parece natural somar as energias potenciais de cada partícula:

$$\begin{aligned} E_p &= m_1 g z_1 + m_2 g z_2 + \dots \\ &= g\left(m_1 z_1 + m_2 z_2 + \dots\right). \end{aligned}$$

A soma $m_1 z_1 + m_2 z_2 + \dots$, não é mais que a coordenada z do vector $m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots = M \vec{r}_{\mathtt{cm}}$. Ou seja,

$$E_p = M g z_{\mathtt{cm}}$$

em que M é a massa total do corpo e $z_{\mathtt{cm}}$ a coordenada z do centro de massa. Em conclusão, as expressões que usámos anteriormente estão correctas, **se a altura do corpo for entendida como sendo a altura do centro de massa.**

7.2.2 Energia cinética

Será que a energia cinética de um sistema de partículas tem uma expressão análoga à da energia potencial,

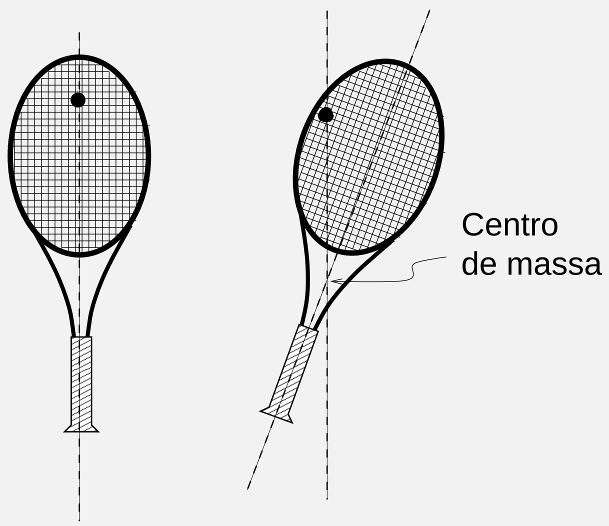
$$E_c = \frac{1}{2} M v_{cm}^2?$$

Um minuto de reflexão mostra que este resultado está **errado**. Pensemos por exemplo nas experiências de colisões entre dois carros ao longo de uma calha. Se lançarmos carros da mesma massa m, com velocidades simétricas, $\vec{v}$ e $-\vec{v}$, um contra o outro, o momento linear total é

$$\vec{p}_{\mathtt{sist}} = 2m\vec{v}_{\mathtt{cm}} = m\vec{v} + m\left(-\vec{v}\right) = 0.$$

■ Determinação de centros de massa pelo método da suspensão. ■

Quando suspendemos um sólido rígido num ponto em torno do qual pode rodar livremente, a posição de equilíbrio do centro de massa fica na vertical do ponto de suspensão. Nessa configuração a altura do centro de massa, z_{cm}, é a menor possível compatível com o ponto de suspensão. Logo a energia potencial gravítica, $E_p = Mgz_{\mathtt{cm}}$, é mínima. Se deslocarmos o corpo dessa posição e o largarmos, ele oscilará em torno dessa configuração, até que a energia que fornecemos ao deslocá-lo se dissipar.
Este resultado permite uma determinação muito expedita da posição do centro de massa de formas planares (uma placa de metal ou madeira, por exemplo). Se suspendermos o corpo por dois pontos distintos e traçarmos as verticais que passam pelos dois pontos de suspensão o centro de massa encontra-se no cruzamento das duas linhas.



Método de determinação de centro de massa.

Caixa 7.2: Determinação de centros de massa

Logo, $\vec{v}_{cm} = 0$ e $Mv_{cm}^2/2 = 0$. Contudo, a energia cinética do sistema dos dois carros é

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mv^2 = mv^2.$$

Que relação existe então entre a energia cinética total e

$$\frac{1}{2}Mv_{cm}^2?$$

Podemos sempre decompor a velocidade de cada partícula num termo igual à velocidade do centro de massa e um segundo termo que é a diferença entre a velocidade da partícula e a do centro de massa:

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= \vec{v}_{\mathtt{cm}} + \vec{u}_1 \\ \vec{v}_2 &= \vec{v}_{\mathtt{cm}} + \vec{u}_2 \\ &\vdots \end{aligned} \tag{7.5}$$

As velocidades $\vec{u}_1 = \vec{v}_1 - \vec{v}_{\mathtt{cm}}$ e $\vec{u}_2 = \vec{v}_2 - \vec{v}_{\mathtt{cm}}$, são as velocidades das partículas num referencial em que a origem coincide com a posição do centro de massa (ver Caixa 7.3, na página 23).

É possível mostrar que a soma das energias cinéticas de toda as partículas, $m_1v_1^2/2 + m_2v_2^2/2 + \ldots$, tem a forma[3]:

$$E_c = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + E_c'$$

em que E_c', a **energia cinética de movimento relativo ao centro de massa**, tem a expressão:

$$E_c' = \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2 + \ldots$$

O termo dependente da velocidade do centro de massa é designado por **energia cinética de translação**.

A separação destes dois termos não é apenas uma questão de conveniência. Como vimos, se não houver forças externas, a velocidade do centro de massa não varia. Logo a **energia cinética total de translação de um sistema** conserva-se em **qualquer interacção**, na ausência de forças externas. Esta lei é aliás uma

[3]Este assunto será abordado de novo quando discutirmos as relações entre grandezas em referenciais em movimento relativo.

simples consequência da lei de conservação de momento linear já que, como $\vec{p}_{\mathtt{sist}} = M\vec{v}_{\mathtt{cm}}$,

$$\frac{1}{2}Mv_{\mathtt{cm}}^2 = \frac{P^2}{2M}.$$

Mas as leis de Newton não colocam qualquer restrição à energia cinética de movimento relativo, que pode variar como resultado das interacções entre as partículas do sistema.

7.2.3 Energia cinética em colisões

O que é uma colisão?

Um carro choca contra outro; isso é uma colisão. Uma bola de bilhar bate noutra e põe-na em movimento, desviando-se da sua direcção original de movimento: outra colisão. Na actividade 7.2 estudámos também colisões entre carrinhos. Nos túneis do CERN, aceleram-se partículas a velocidades próximas da luz, dirigem-se umas contra as outras em "zonas de interacção" e observam-se os resultados dessas colisões de alta energia.

Reflectindo sobre estas situações, chega-se à conclusão que o que caracteriza estes processos de interacção é a existência de um "antes" e um "depois" cuja descrição é relativamente simples. "Antes" dois ou mais objectos estão separados e movimentam-se sem interagir uns com os outros; "durante" surgem forças entre os objectos em interacção, devido à sua aproximação, e algo que pode ser muito complicado acontece; "depois" os mesmo objectos, ou reagrupamentos dos originais, afastam-se deixando, de novo, de estar em interacção.

Se ignorarmos as forças externas ao sistema de objectos em interacção, a energia total do sistema, quer antes quer depois da colisão, terá a forma,

$$E = E_c + U,$$

em que:

- $E_c = Mv_{cm}^2/2 + E_c'$ é a energia cinética total;
- U é a soma das energias internas dos objectos em colisões.

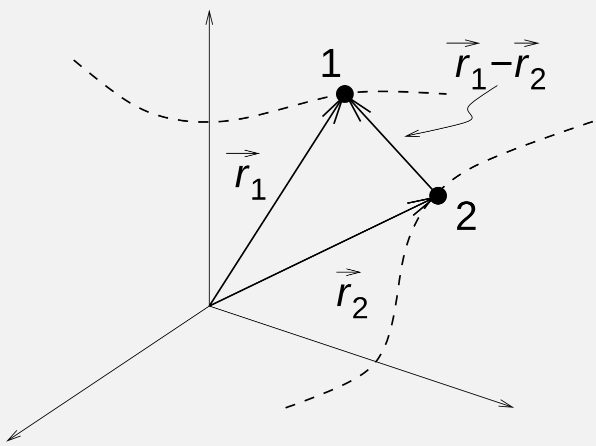
Repare-se que, se quiséssemos considerar os estados do sistema "durante" a colisão, teríamos que incluir a energia potencial da interacção entre eles.

■ **Velocidade relativa** ■

Consideremos duas partículas com movimentos arbitrários, com vectores de posição $\vec{r}_1(t)$ e $\vec{r}_2(t)$. O vector $\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)$ liga a posição da partícula 2 à da partícula 1; é o vector de posição da partícula 1 para uma origem coincidente com a partícula 2.
Por outro lado,

$$\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \frac{d}{dt}\vec{r}_1(t) - \frac{d}{dt}\vec{r}_2(t) = \frac{d}{dt}\left(\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)\right)$$

Isto significa que $\vec{v}_1 - \vec{v}_2$ é a velocidade da partícula 1 **relativamente à partícula 2.** Ou seja a velocidade da partícula 1 num referencial em que a origem coincide com a posição da partícula 2.



O vector $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$ liga a posição da partícula 2 à da partícula 1.

Caixa 7.3: Velocidade relativa de duas partículas.

A conservação de energia de um sistema isolado é uma lei universal, válida para todas as interacções. Por isso podemos afirmar com segurança:

$$\left(\frac{1}{2}Mv_{\mathtt{cm}}^2 + E'_c + U\right)_{\text{antes}} = \left(\frac{1}{2}Mv_{\mathtt{cm}}^2 + E'_c + U\right)_{\text{depois}}$$

Por outro lado, já vimos que a energia cinética de translação é constante (não apenas igual antes e depois, mas também durante). Então

$$\left(E'_c + U\right)_{\text{antes}} = \left(E'_c + U\right)_{\text{depois}}.$$

Coeficiente de restituição

Define-se o **coeficiente de restituição** de uma colisão, e, pela equação:

$$e^2 \equiv \frac{(E'_c)_{\text{depois}}}{(E'_c)_{\text{antes}}} \tag{7.6}$$

em que E'_c é a energia cinética de movimento relativo ao centro de massa. Para uma **colisão elástica** $(E'_c)_{\text{depois}} = (E'_c)_{\text{antes}}$ e $e = 1$. Nestas colisões há conservação da energia cinética macroscópica.

Se houver dissipação de energia, $(E'_c)_{\text{depois}} < (E'_c)_{\text{antes}}$ e $e < 1$: a colisão diz-se inelástica. A máxima dissipação de energia mecânica ocorre se $e = 0$, que corresponde a $(E'_c)_{\text{depois}} = 0$. Isso implica que $\vec{u}_1 = \vec{u}_2 = \cdots = 0$, ou seja, todas as partículas se deslocam com a mesma velocidade que o centro de massa: no caso da colisão dos dois carros é o que acontece se estes se deslocarem juntos após a colisão.

Naturalmente, esta diminuição de energia cinética macroscópica é compensada por um aumento da energia interna dos corpos que colidem. Esse aumento pode manifestar-se, por exemplo, por uma deformação de estrutura ou por um aumento de temperatura. Repare-se, contudo, que se $\vec{v}_{\mathtt{cm}} \neq 0$, a energia cinética não pode ser totalmente dissipada. A energia cinética de translação conserva-se, tal como o momento linear total.

Colisões entre duas partículas

É frequente encontrar em livros de texto uma definição de coeficiente de restituição aparentemente diferente da que foi dada acima na equação 7.6. Numa colisão entre dois corpos de velocidades $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ define-se:

$$e = \frac{\|\vec{v}_1 - \vec{v}_2\|_{\text{depois}}}{\|\vec{v}_1 - \vec{v}_2\|_{\text{antes}}} \tag{7.7}$$

Note-se que $\vec{v}_1 - \vec{v}_2$ é a velocidade da partícula 1 relativamente à partícula 2. Por isso $\|\vec{v}_1 - \vec{v}_2\|_{\text{antes}}$ é a velocidade de aproximação das duas partículas e $\|\vec{v}_1 - \vec{v}_2\|_{\text{depois}}$ a velocidade de afastamento.

Esta definição não evidencia imediatamente a relação entre o coeficiente de restituição e a dissipação de energia mecânica. Contudo, ela é exactamente equivalente à definição da equação 7.6. Para os curiosos segue-se a demonstração.

Recordemos a definição das velocidades relativas ao centro massa

$$\begin{aligned}\vec{v}_1 &= \vec{v}_{\texttt{cm}} + \vec{u}_1 \\ \vec{v}_2 &= \vec{v}_{\texttt{cm}} + \vec{u}_2. \\ &\vdots\end{aligned} \tag{7.8}$$

Como

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{v}_{\texttt{cm}},$$

temos que ter a seguinte relação entre $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$, as velocidades de cada partícula relativamente ao centro de massa:

$$m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2 = 0.$$

Isto permite-nos exprimir $\vec{u}_2$ em termos de $\vec{u}_1$:

$$\vec{u}_2 = -\frac{m_1}{m_2}\vec{u}_1.$$

Com esta relação, a energia cinética de movimento relativo ao centro de massa pode exprimir-se na forma:

$$E_c' = \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2 = \frac{1}{2}m_1u_1^2\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)$$

Como as massas não variam, antes e depois da colisão, obtemos

$$e^2 = \frac{(E_c')_{\text{depois}}}{(E_c')_{\text{antes}}} = \frac{(u_1)^2_{\text{depois}}}{(u_1)^2_{\text{antes}}},$$

o que dá

$$e = \frac{(u_1)_{\text{depois}}}{(u_1)_{\text{antes}}}$$

($u_1 = \|\vec{u}_1\|$). Por outro lado, como

$$\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{u}_1 - \vec{u}_2 = \vec{u}_1 \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right),$$

vem

$$e = \frac{(u_1)_{\text{depois}}}{(u_1)_{\text{antes}}} = \frac{\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)(u_1)_{\text{depois}}}{\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)(u_1)_{\text{antes}}} = \frac{\|\vec{v}_1 - \vec{v}_2\|_{\text{depois}}}{\|\vec{v}_1 - \vec{v}_2\|_{\text{antes}}}.$$

Esta segunda definição permite, em geral, um cálculo mais expedito do coeficiente de restituição.

> $\mathcal{ETV}_8$: Na $\mathcal{ETV}_2$, da secção 7.1.1, descreve-se uma colisão em que um carro de massa m colide com outro com massa $2m$, inicialmente em repouso. O primeiro carro fica parado após a colisão. Qual é o coeficiente de restituição desta colisão?
> Nota: Fazer o cálculo usando as duas definições dadas no texto, eqs. 7.6 e 7.7.

Colisão com estrutura fixa

A colisão de um projéctil com uma estrutura fixa, como uma parede, pode ser incluída na discussão anterior do seguinte modo.

Uma estrutura fixa funciona como um corpo de massa M muito superior à massa m do projéctil e com velocidade inicial nula. O projéctil incide com um velocidade $\vec{v}_i$ e emerge da colisão com um velocidade $\vec{v}_f$; a velocidade final é menor ou igual que a inicial, a não ser que haja uma aumento de energia cinética (uma explosão, por exemplo). A variação de quantidade de movimento tem, então, um módulo da ordem de grandeza de mv_i. Por conservação de momento, o momento final da estrutura, Mv_2, é da ordem de mv_i. Como $M \gg m$, a velocidade da estrutura é muito menor que v_i:

$$v_2 \sim \frac{m}{M} v_i \ll v_i.$$

A velocidade do centro de massa também é muito menor que v_i :

$$v_{\texttt{cm}} = \frac{m}{M+m} v_i \sim \frac{m}{M} v_i$$

Até aqui nada de supreendente: não esperamos que uma bola de ténis, lançada contra um parede a $1\,\mathtt{m\,s}^{-1}$, lhe comunique uma velocidade perceptível. Mas note-se que o momento da estrutura **não é desprezável em relação ao do projéctil**: é da mesma ordem de grandeza. Ao contrário, a energia cinética da estrutura será da ordem

$$\frac{1}{2}Mv_2^2 \sim \frac{1}{2}M\left(\frac{m}{M}\right)^2 v_i^2 = \left(\frac{m}{M}\right)\frac{1}{2}mv_i^2,$$

ou seja, um factor m/M menor que a energia cinética típica do projéctil. O mesmo acontece com a energia cinética de translação:

$$\frac{1}{2}(M+m)v_{\mathtt{cm}}^2 \sim \frac{1}{2}M\left(\frac{m}{M}\right)^2 v_i^2 \sim \left(\frac{m}{M}\right)\frac{1}{2}mv_i^2$$

Assim, a energia cinética de movimento relativo é praticamente igual à energia cinética do projéctil e

$$e^2 = \frac{E_f}{E_i} = \frac{mv_f^2/2}{mv_i^2/2} = \frac{v_f^2}{v_i^2},$$

O coeficiente de restituição é

$$e = \frac{v_f}{v_i}.$$

Voltamos a obter a equivalência das duas definições de e: como a velocidade da estrutura é muito menor que a do projéctil a velocidade relativa é praticamente a velocidade do projéctil.

7.3 Conclusões

Neste capítulo introduzimos o conceito importante de momento linear de um sistema de partículas:

$$\vec{p}_{\mathtt{sist}} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \ldots. \tag{7.9}$$

Em virtude da terceira lei de Newton, esta grandeza é constante se as forças externas tiverem resultante nula. A sua derivada temporal é precisamente a resultante das forças externas:

$$\frac{d\vec{p}_{\mathtt{sist}}}{dt} = \vec{F}_{\mathtt{ext}}. \tag{7.10}$$

A partir desta grandeza definimos uma velocidade global para um sistema de partículas,

$$\vec{v}_{\mathtt{cm}} = \frac{\vec{p}_{\mathtt{sist}}}{M},$$

cuja variação satisfaz a segunda lei de Newton com as forças externas apenas,

$$M\frac{d\vec{v}_{\tt cm}}{dt} = \vec{F}_{\tt ext}.$$

Estes resultados justificam o sucesso do modelo de partícula material no estudo de corpos extensos: a velocidade de um corpo é a velocidade do seu centro de massa e para calcular a respectiva aceleração não precisamos de considerar as forças internas. Claro que este processo só nos dá o movimento global do corpo, caracterizado pelo deslocamento do centro de massa.

O movimento de translação de um sistema, caracterizado por $\vec{v}_{\tt cm}$, tem uma energia cinética de translação associada, $Mv_{\tt cm}^2/2$. Mas a energia cinética de um sistema de partículas tem também uma componente de movimento relativo ao centro de massa, que, ao contrário da energia de translação, pode variar mesmo na ausência de forças externas.

7.4 Respostas aos $\mathcal{ETV}'s$

7.1. O momento total é

$$\vec{p}_{\tt sist} = mv_0\hat{\mathbf{i}}$$

pois um dos carros tem velocidade nula antes da colisão.

(a) Se um carro fica parado, o outro, que tem a mesma massa, tem que ter a velocidade $v_0\hat{\mathbf{i}}$ para que o momento linear antes e depois da colisão seja o mesmo.

(b) Se os dois carros se movem com a mesma velocidade, $v\hat{\mathbf{i}}$, o momento total é $2mv\hat{\mathbf{i}}$. Como o momento se conserva na colisão:

$$2mv\hat{\mathbf{i}} = mv_0\hat{\mathbf{i}},$$

ou seja

$$v = \frac{v_0}{2}.$$

7.2. O momento total é, novamente,

$$\vec{p}_{\tt sist} = mv_0\hat{\mathbf{i}},$$

em que $v_0\hat{\mathbf{i}}$ é a velocidade do primeiro carro antes da colisão.

(a) Após a colisão o carro com massa $2m$ move-se com velocidade $v\hat{\mathbf{i}}$ e o outro está parado. O momento linear é $2mv\hat{\mathbf{i}}$. Como o momento antes e depois da colisão é o mesmo,

$$2mv\hat{\mathbf{i}} = mv_0\hat{\mathbf{i}},$$

ou

$$v = \frac{v_0}{2}.$$

(b) A energia cinética antes da colisão é

$$(E_c)_a = \frac{1}{2} m v_0^2$$

e após

$$(E_c)_d = \frac{1}{2}(2m)v^2 = \frac{1}{2}(2m)\left(\frac{v_0}{2}\right)^2 = \frac{(E_c)_a}{2}.$$

Esta colisão não conserva a energia cinética: metade foi dissipada em formas microscópicas de energia.

7.3. Por um lado, $\vec{p}_{\mathtt{sist}} = m v_0 \hat{\mathbf{i}}$; como a massa total é $2m$ e $\vec{p}_{\mathtt{sist}} = 2m\vec{v}_{\mathtt{cm}}$ temos, antes ou depois da colisão,

$$\vec{v}_{\mathtt{cm}} = \frac{v_0}{2}\hat{\mathbf{i}}.$$

7.4. A massa atómica do oxigénio é 16,0 u.m.a. Logo a massa de uma molécula de O_2 é $32/(6{,}02 \times 10^{23}) = 5{,}3 \times 10^{-23}\,\mathtt{g}$. A massa de todos os electrões é $16 \times m_e = 16 \times 0{,}91 \times 10^{-30} = 14{,}6 \times 10^{-30}\,\mathtt{kg}$. A razão massa dos electrões/massa da molécula é $2{,}8 \times 10^{-4}$.

7.5. Usando um sistema de eixos com origem no centro do Sol e eixo Ox a passar no centro da Terra temos:

$$\vec{r}^{(S)}_{\mathtt{cm}} = 0; \quad \vec{r}^{(T)}_{\mathtt{cm}} = r_0\hat{\mathbf{i}},$$

em que $r_0 = 1{,}5 \times 10^{11}\,\mathtt{m}$ é o raio da órbita da Terra. Assim,

$$(M_\odot + M_T)\vec{r}_{\mathtt{cm}} = M_T r_0 \hat{\mathbf{i}}.$$

A distância do centro de massa do sistema Terra–Sol ao centro do Sol é

$$\|\vec{r}_{\mathtt{cm}}\| = \frac{M_T}{M_\odot + M_T} \times r_0 = 4{,}5 \times 10^5\,\mathtt{m}.$$

O raio do Sol por sua vez, é $6{,}96 \times 10^8\,\mathtt{m}$, ou seja cerca de 1500 vezes superior a $\|\vec{r}_{\mathtt{cm}}\|$.

7.6. Não. O centro de massa tem um movimento circular centrado num ponto da barra fixa a uma distância da extremidade articulada de cerca de 1/4 do comprimento da barra. Se a força externa fosse nula, o movimento do centro de massa teria que ser uniforme e rectilíneo (aceleração nula).

7.7. Escolhendo o eixo Ox com a direcção e sentido da velocidade da esfera antes da desintegração (fig. 7.11):

$$\vec{p}_{\mathtt{sist}} = 0{,}03 \times 50\hat{\mathbf{i}} = 1{,}5\hat{\mathbf{i}} \quad (\mathtt{kg\,m\,s^{-1}}).$$

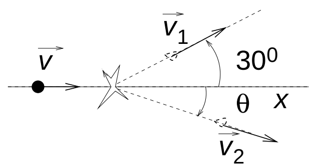


Figura 7.11: Qual é velocidade do segundo fragmento?

(a) A conservação de momento implica:

$$\begin{aligned} m_1 v_1 \cos(30^{\text{o}}) + m_2 v_2 \cos\theta &= 1{,}5 \\ m_1 v_1 \text{sen}(30^0) - m_2 v_2 \text{sen}\,\theta &= 0. \end{aligned}$$

Assim:

$$\begin{aligned} v_2 \cos\theta &= \frac{1{,}5 - 0{,}02 \times 30 \times \sqrt{3}/2}{0{,}01} = 98\,\mathtt{m\,s}^{-1} \\ v_2 \text{sen}\,\theta &= \frac{0{,}02 \times 30 \times 1/2}{0{,}01} = 30\,\mathtt{m\,s}^{-1} \end{aligned}$$

Destas equações tiramos:

$$\begin{aligned} \tan\theta &= \frac{30}{98} \Rightarrow \theta = 17^0, \\ v_2 &= \sqrt{98^2 + 30^2} = 102\,\mathtt{m\,s}^{-1}. \end{aligned}$$

(b) Conhecidas as velocidades de todos os fragmentos, antes e depois da colisão, é fácil calcular:

$$\begin{aligned} (E_c)_a &= 37{,}5\,\mathtt{J}, \\ (E_c)_d &= 61\,\mathtt{J}. \end{aligned}$$

A energia cinética aumentou de $(E_c)_d - (E_c)_a = 23{,}5\,\mathtt{J}$. A energia interna da esfera diminui do mesmo valor.

7.8. Antes da colisão as velocidades são:

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= v_0 \hat{\mathbf{i}} \\ \vec{v}_2 &= 0. \end{aligned}$$

Depois da colisão:

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= 0 \\ \vec{v}_2 &= \frac{v_0}{2}\hat{\mathbf{i}}. \end{aligned}$$

A velocidade do centro de massa é

$$\vec{v}_{cm} = \frac{1}{3m} \times m v_0 \hat{\mathbf{i}} = \frac{v_0}{3}\hat{\mathbf{i}}.$$

Antes da colisão,

$$\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = v_0 \hat{\mathbf{i}};$$

depois,

$$\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = -\frac{v_0}{2}\hat{\mathbf{i}}.$$

Logo

$$e = \frac{\|\vec{v}_1 - \vec{v}_2\|_{\text{depois}}}{\|\vec{v}_1 - \vec{v}_2\|_{\text{antes}}} = \frac{v_0/2}{v_0} = \frac{1}{2}.$$

Para usar a definição em termos de energia cinética, temos que calcular $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$. Antes da colisão,

$$\begin{aligned}\vec{u}_1 &= \left(v_0 - \frac{v_0}{3}\right)\hat{\mathbf{i}} = \frac{2v_0}{3}\hat{\mathbf{i}}\\ \vec{u}_2 &= \left(0 - \frac{v_0}{3}\right)\hat{\mathbf{i}} = -\frac{v_0}{3}\hat{\mathbf{i}};\end{aligned}$$

depois

$$\begin{aligned}\vec{u}_1 &= \left(0 - \frac{v_0}{3}\right)\hat{\mathbf{i}} = -\frac{v_0}{3}\hat{\mathbf{i}}\\ \vec{u}_2 &= \left(\frac{v_0}{2} - \frac{v_0}{3}\right)\hat{\mathbf{i}} = \frac{v_0}{6}\hat{\mathbf{i}};\end{aligned}$$

A energia cinética,

$$\begin{aligned}(E_c')_{\text{antes}} &= \frac{1}{2}m\left(\frac{2v_0}{3}\right)^2 + \frac{1}{2}(2m)\left(\frac{v_0}{3}\right)^2 = \frac{mv_0^2}{3}\\ (E_c')_{\text{depois}} &= \frac{1}{2}m\left(\frac{v_0}{3}\right)^2 + \frac{1}{2}(2m)\left(\frac{v_0}{6}\right)^2 = \frac{mv_0^2}{12}.\end{aligned}$$

O coeficiente de restituição é dado por

$$e^2 = \frac{1}{4}$$

e obtemos o mesmo resultado, $e = 0{,}5$.

7.5 Actividades questões e problemas

7.5.1 Actividades

7.1. **Método de suspensão para determinação de centros de massa.**

Usando o método indicado na caixa 7.2 da página 20 determinar a posição do centro de massa de uma raqueta de ténis.

7.2. **Colisões entre carros de massas variadas em calha linear**.

Ver ficha de Actividade A44.

7.5.2 Questões

7.1. Ao disparar uma arma, o atirador sente um “coice” (recuo) da arma. Porquê?

7.2. Dois astronautas estão juntos, parados no espaço, a dez metros de distância da respectiva nave. Se um dos astronautas puder chegar à nave, pode salvar o outro recorrendo aos foguetes da nave. Contudo, os astronautas não dispõem de qualquer modo de propulsão, pelo que não podem mudar a posição do respectivo centro de massa em relação à nave. Como se podem salvar?

7.3. Para ganhar um prémio numa feira, um rapaz tem que derrubar um tijolo, atirando-lhe uma bola. Dispõe de bolas de ténis e de plasticina com massas iguais. O rapaz sabe que a bola de plasticina provavelmente ficará colada ao tijolo e que a de ténis fará ricochete. Qual das bolas deve escolher? Justificar.

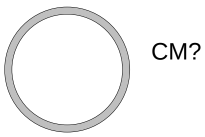


Figura 7.12: Onde está o centro de massa do anel?

7.4. Onde está o centro de massa de um anel homogéneo?

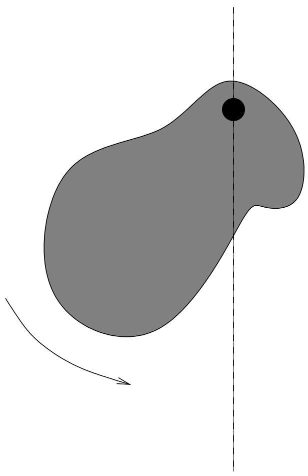


Figura 7.13: Só há um ponto de fixação para o qual a cartolina não oscila.

7.5. Suponhamos que recortamos uma forma arbitrária de cartolina e que a fixamos com um pionés a um quadro de corticite. Se o ponto de fixação estiver um pouco solto a cartolina poderá rodar em torno do pionés. Em geral terá uma configuração de equilíbrio única e, se rodada dessa posição, oscilará. Só há um ponto de fixação para o qual isso não acontece.

(a) Que ponto é esse?
(b) Por que é que a cartolina não oscila, se estiver fixa nesse ponto?
(c) Como pode ser determinado esse ponto?

7.6. Quais das seguintes grandezas são conservadas numa colisão (mesmo valor antes e depois da interacção):

(a) momento linear de cada partícula;
(b) momento linear total;
(c) energia total;
(d) energia cinética de translação;
(e) energia cinética de movimento relativo ao centro de massa.

7.7. Quais das seguintes grandezas são conservadas numa colisão **elástica**:

(a) momento linear de cada partícula;

(b) momento linear total;
(c) energia total;
(d) energia cinética de translação;
(e) energia cinética de movimento relativo ao centro de massa.

7.8. Quais das seguintes grandezas são constantes também durante o processo de interacção de uma colisão **elástica**:

(a) momento linear de cada partícula;
(b) momento linear total;
(c) energia total;
(d) energia cinética de translação;
(e) energia cinética de movimento relativo ao centro de massa.

7.9. As colisões entre automóveis são praticamente perfeitamente inelásticas. A energia cinética de movimento relativo é totalmente transformada em energia de deformação das estruturas dos automóveis e dos seus ocupantes. Considerem-se as duas seguintes situações:

(i) Um carro com velocidade de $100\,\mathtt{km\,h}^{-1}$ colide com um carro idêntico, inicialmente parado.

(ii) Os dois carros movem-se, cada um em direcção ao outro, com velocidades de $50\,\mathtt{km\,h}^{-1}$.

(a) Em qual das situações é maior a energia cinética do sistema dos dois carros?
(b) Qual das colisões causa mais danos nos dois veículos? Ou são equivalentes a esse respeito?

7.10. Quais são as unidades do coeficiente de restituição?

7.11. A figura 7.14 é um esboço de uma colisão entre dois automóveis. A Polícia conseguiu estabelecer os seguintes factos:

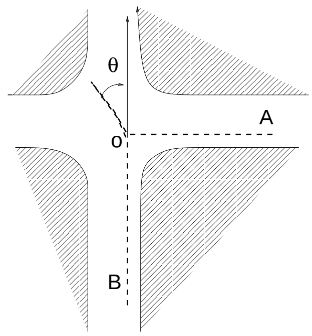


Figura 7.14: Esboço policial de uma colisão entre dois automóveis.

(a) O carro vindo de A viajava a $50\,\mathtt{km\,h}^{-1}$. A sua massa era de $1400\,\mathtt{kg}$.
(b) O carro vindo de B tinha uma massa de $1000\,\mathtt{kg}$.

(c) O ângulo θ da direcção comum dos dois carros após a colisão com a direcção inicial do carro vindo de B é inferior a $45^{\underline{o}}$.

O condutor do carro vindo de B afirma que não viajava a mais de $60\,\mathtt{km\,h^{-1}}$. A polícia afirma o contrário. Pode prová-lo?

7.5.3 Problemas

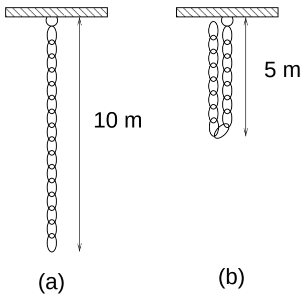


Figura 7.15: Qual é variação de energia potencial gravítica da corrente?

7.1. A molécula de Fluoreto de Hidrogénio, HF, tem um comprimento de ligação (distância entre os dois núcleos) de $d = 0{,}917\,\text{Å}$.

(a) Determine a posição do centro de massa relativamente aos dois núcleos.

(b) Se a molécula contiver um dos isótopos do hidrogénio, deutério ou trítio, em que o núcleo do hidrogénio tem um ou dois neutrões, além do protão, a posição do centro de massa da molécula varia?

7.2. A corrente da figura 7.15 tem uma massa total de $10\,\mathtt{kg}$. Qual é a variação de energia potencial gravítica entre a configuração (a), corrente estendida e (b), corrente dobrada?

7.3. Uma pessoa de $70\,\mathtt{kg}$ cai de uma altura de $1\,\mathtt{m}$.

(a) Se após o contacto com o solo o seu centro de massa demorar $0{,}1\,\mathtt{s}$ a parar, qual é o valor da força média exercida pelo solo nos seus pés, desde o início do contacto até à paragem do centro de massa?

(b) Quanto vale essa força se a pessoa, flectindo as pernas, aumentar o tempo de paragem para $0{,}5\,\mathtt{s}$?

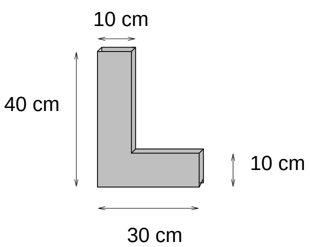


Figura 7.16: Onde está o centro de massa deste "L"?

7.4. O corpo da figura 7.16 é homogéneo. Determinar a posição do respectivo centro de massa.
Nota: Pode ser considerado como constituído por dois rectângulos.

7.5. Numa das colisões realizadas na Actividade A7 um dos carros está inicialmente parado e o outro tem uma velocidade inicial de $0{,}5\,\mathtt{m\,s^{-1}}$. A massa de cada carro é $m = 0{,}250\,\mathtt{kg}$. Os carros movem-se em conjunto após a colisão.

(a) Qual é a velocidade do centro de massa?
(b) Qual é a energia cinética de translação antes da colisão?
(c) Qual é a energia cinética de translação após a colisão?
(d) Qual é a energia de movimento relativo ao centro de massa após a colisão?
(e) Que percentagem da energia cinética inicial se dissipou na colisão?

7.6. Um revólver dispara projécteis de massa $m = 7{,}4\,\mathtt{g}$ com uma velocidade de saída da arma de $303\,\mathtt{m\,s}^{-1}$. O comprimento do cano é cerca de $10\,\mathtt{cm}$ e a arma tem uma massa de cerca de $600\,\mathtt{g}$.

(a) Qual é o valor do impulso exercido pela arma sobre o projéctil?
(b) Qual é a velocidade de recuo da arma?
(c) Se pudéssemos considerar que o movimento do projéctil no cano é uniformemente acelerado, qual seria o valor da força exercida pelo projéctil na arma?

7.7. A FIFA estabelece, nos testes a bolas de futebol, que uma bola, caíndo de uma altura de $2\,\mathtt{m}$ sobre uma placa de aço, deve ressaltar a uma altura entre $1{,}20\,\mathtt{m}$ e $1{,}65\,\mathtt{m}$.

(a) Que valores do coeficiente de restituição correspondem a estas alturas de ressalto?
(b) Num segundo ressalto a que altura subiria uma bola que ressaltou a 1,65 de altura?

Nota: Ignorar a resistência do ar.

7.8. Duas partículas com a mesma massa e velocidades com igual módulo, v, colidem segundo um ângulo de $\pi/2$ ($90\,^{\underline{\text{o}}}$). Após a colisão continuam a ter velocidades iguais em módulo, v', mas o ângulo entre elas é de 2θ (ver fig. 7.17).

a) Qual é a direcção do vector $\vec{p}_{\mathtt{sist}}$, momento linear total?

b) Mostrar que:

$$\frac{v'}{v} = \frac{\sqrt{2}}{2\cos\theta}.$$

c) Mostrar que o coeficiente de restituição é

$$e = \tan\theta.$$

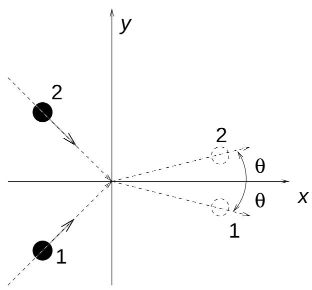


Figura 7.17: Colisão entre duas partículas de igual massa

d) Que interpretações se podem dar ao facto de

i) $e > 1$, se $\theta > \pi/4$.

ii) $e \to \infty$ se $\theta \to \pi/2$.

7.9. Uma esfera de massa 500 g está pousada num suporte de 1 m de altura. É atingida por uma bala de massa $m = 10\,\mathrm{g}$, com velocidade horizontal, que fica incrustada na esfera. A velocidade da esfera é horizontal, imediatamente após a colisão e ela atinge o solo a 6 metros na horizontal do suporte (ver fig. 7.18).

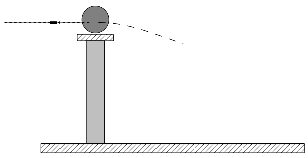


Figura 7.18: Qual é a velocidade da bala?

(a) Quanto vale o coeficiente de restituição desta colisão?

(b) Quanto tempo demora a esfera a atingir o solo?

(c) Qual era a velocidade da bala?

7.10. Um corpo de massa m e velocidade $v_0\hat{\mathbf{i}}$ colide com um corpo de massa $2m$, inicialmente parado. A colisão é frontal e as velocidades, após a colisão, são $v_1\hat{\mathbf{i}}$ e $v_2\hat{\mathbf{i}}$. A colisão é elástica.

(a) Mostrar que as velocidades após a colisão satisfazem as equações

$$\begin{aligned} v_1 + 2v_2 &= v_0 \\ v_1^2 + 2v_2^2 &= v_0^2. \end{aligned}$$

(b) Resolver estas equações (sugere-se quadrar a primeira) e determinar v_1 e v_2.

(c) Se a colisão fosse perfeitamente inelástica, a velocidade da partícula de massa $2m$, após a colisão seria maior ou menor?

7.11. Resolver o problema anterior trocando as massas: supondo que o corpo com velocidade inicial v_0 tem a maior massa, $2m$.

7.5.4 Desafios

7.1. Um esfera cai de uma altura h, com velocidade inicial nula, sobre uma placa de aço. A colisão tem um coeficiente de restituição $e < 1$.

(a) Mostre que o intervalo de tempo entre a colisão n e $n+1$, T_n, é dado pela expressão:

$$T_n = 2T_0 e^n.$$

em que T_0 é o tempo que a esfera demora a cair a primeira vez.

(b) Mostre que o tempo total que decorre desde que a esfera cai até à colisão de ordem N, no limite em que $N \to \infty$, é **finito** e vale

$$T = T_0 \frac{1+e}{1-e}.$$

(c) Seria possível medir um coeficiente de restituição usando apenas um cronómetro?

Conteúdo

Ficha Técnica 2

7 Sistemas de partículas **5**

7.1 Momento linear 6

7.1.1 Colisão de dois carros 6

7.1.2 Conservação de momento linear 8

7.1.3 Momento linear e impulso 10

7.1.4 Momento linear e velocidade do centro de massa 11

7.1.5 O centro de massa 12

7.1.6 Determinação de centros de massa 14

7.1.7 Propulsão de foguetões 17

7.2 Energia e centro de massa 19

7.2.1 Energia potencial gravítica 19

7.2.2 Energia cinética 19

7.2.3 Energia cinética em colisões 22

7.3 Conclusões 27

7.4 Respostas aos $\mathcal{ETV}'s$ 28

7.5 Actividades questões e problemas 31

7.5.1 Actividades 31

7.5.2 Questões 31

7.5.3 Problemas 34

7.5.4 Desafios 36