Oscilações

Michael Fowler 3/24/07

Introdução

Neste texto estudaremos uma grande variedade de fenómenos oscilatórios. Após uma breve revisão de osciladores harmónicos não amortecidos prosseguiremos com o oscilador fortemente amortecido. Seguimos esta ordem pois a matemática necessária para o amortecimento fraco é um pouco mais complexa que a do amortecimento forte – para o amortecimento forte não são necessários números complexos. Mas eles aparecem naturalmente no caso do amortecimento fraco e são muito importantes para perceber o oscilador forçado e o problema da ressonância.

Breve revisão do oscilador harmónico simples

O nosso modelo base de oscilador harmónico simples é uma massa m a mover-se para trás e para diante ao longo de uma linha numa superfície horizontal suave ligada a uma mola horizontal com constante k e com a outra ponta da mola presa a uma parede. A mola exerce uma força restauradora igual a $-kx$ na massa quando esta se encontra a uma distância x do ponto de equilíbrio. Por ponto de equilíbrio queremos dizer o ponto que corresponde ao comprimento natural da mola, ou seja, ao ponto onde a mola não exerce força na massa. A realização experimental deste modelo consistiu num carruagem com uma mola acima da calha (de facto, foram usadas duas molas em direcções opostas pois verificou-se que usando apenas uma, esta arrastava-se pela calha quando a mola se encontrava comprimida, mas usando duas em direcções opostas, manter-se-iam sempre minimamente esticadas. As duas molas juntas actuam como um única mola com constante igual à soma das duas).

A lei de Newton dá-nos:

$$F = ma, ou\; m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

Resolvendo esta equação diferencial obtemos a posição da massa (carruagem) relativamente à posição de repouso como função do tempo:

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi)$$

A é o descolamento máximo e é denominada **amplitude** do movimento. $\omega_0 t + \phi$ é chamada a **fase**. ϕ é chamada constante de fase: depende de onde começa o ciclo, isto é, onde o oscilador se encontra em $t = 0$.

A velocidade e a aceleração são obtidas diferenciando $x(t)$ uma e duas vezes:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -A\omega_0 \operatorname{sen}(\omega_0 t + \phi)$$

e

$$a(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = -A\omega_0^2 \cos \omega_0 t + \phi$$

De imediato vemos que este $x(t)$ satisfaz a Lei de Newton providenciando que

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

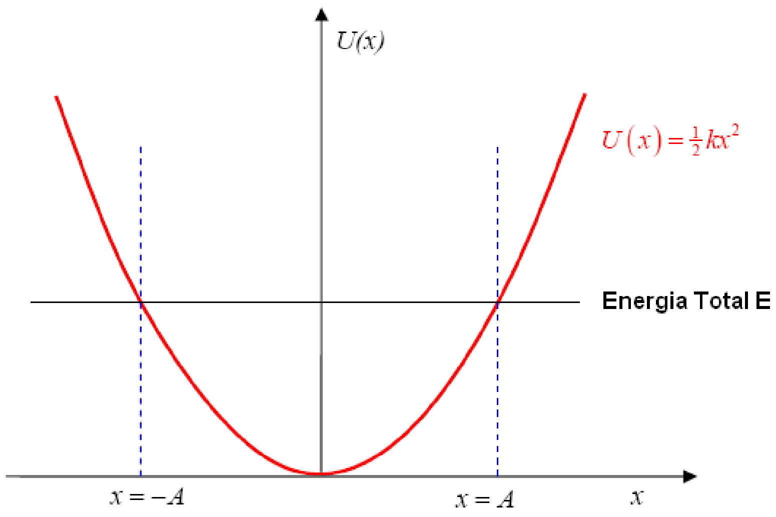
Exercício: Verifique que, a menos de uma constante, a expressão de ω_0 podia ter sido obtida usando análise dimensional.

Energia

A mola armazena *energia potencial*: se se puxar uma ponta da mola de uma extensão x para $x + dx$ (com a outra ponta da mola fixa, claro) a força $-kx$ opõe o movimento natural, por isso é necessário puxar com uma força de $+kx$, e portanto realizar trabalho $kxdx$. Para encontrar a energia potencial *total* armazenada pela mola quando a ponta se encontra afastada de x_0 da posição de equilíbrio (comprimento natural) temos de encontrar o trabalho total necessário para esticar a mola do seu tamanho natural até uma extensão de x_0. Isto significa somar todos os bocados de trabalho $kxdx$ necessários para levar a mola de uma extensão nula até uma extensão de x_0. Por outras palavras, precisamos de fazer um integral para encontrar a energia potencial $U(x_0)$:

$$U(x_0) = \int_0^{x_0} kxdx = \frac{1}{2}kx_0^2$$

Portanto traçamos o gráfico da energia potencial em função da distância ao equilíbrio e obtemos uma parábola:



Energia Potencial $U(x)$ para um **oscilador harmónico simples**. Para energia **total** E, o oscilador oscila entre $x = -A$ e $x = +A$.

O oscilador tem energia *total* igual a $Energia\ Cinética + Energia\ Potencial$,

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

quando a massa se encontra na posição x. Substituindo os valores de $x(t)$ e $v(t)$ das equações acima, é fácil verificar que E é independente do tempo e igual a $\frac{1}{2}kA^2$, sendo A a amplitude do movimento, ou seja, o deslocamento máximo. Claro que quando o oscilador se encontra em A, este encontra-se momentaneamente em repouso e não tem energia cinética.

Oscilador fortemente amortecido

Suponha agora que o movimento é amortecido, com uma força de atrito proporcional à velocidade. A equação do movimento fica então:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - b\frac{dx}{dt}$$

Embora esta equação pareça mais difícil, na realidade não o é! O importante é que os termos são apenas derivadas de x em ordem ao tempo, multiplicadas por *constantes*. Seria muito mais difícil se tivéssemos uma força de atrito proporcional ao quadrado da velocidade ou se a força exercida pela mola não fosse uma constante multiplicada por x (isto significa que não podemos esticar a mola demasiado!). De qualquer modo, é fácil encontrar funções exponenciais que são soluções da equação. Tentemos advinhar uma solução:

$$x = x_0 e^{-\alpha t}$$

Inserindo isto na equação e usando:

$$\frac{dx}{dt} = -\alpha x_0 e^{-\alpha t}, \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = \alpha^2 x_0 e^{-\alpha t}$$

verificamos que é uma solução providenciando que α satisfaz:

$$m\alpha^2 - \alpha b + k = 0$$

de onde vem que

$$\alpha = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4mk}}{2m}$$

Analisando esta expressão para α, notamos que para α ser real, necessitamos que

$$b^2 > 4mk$$

O que poderá isso significar? Lembre-se que b é o parâmetro de atenuação – estamos a encontrar que a solução exponencial só funciona para amortecimento *forte*! Analisemos o caso de amortecimento forte agora e posteriormente estenderemos a solução ao amortecimento fraco.

Interpretanto as duas soluções diferenciais diferentes

Vale a pena estudar o caso de amortecimento *muito* forte, onde as duas soluções exponenciais decaiem a taxas muito diferentes. Para b^2 *muito* maior que $4mk$ podemos escrever

$$\alpha = \frac{b \pm b\sqrt{a - \frac{4mk}{b^2}}}{2m} = \alpha_1, \alpha_2$$

E depois expande-se a raiz quadrada usando

$$(1-x)^{\frac{1}{2}} \cong 1 - \frac{1}{2}x$$

válida apenas para x pequeno de modo a encontrar aproximadamente que – para b grande – os dois valores possíveis para α são:

$$\alpha_1 = \frac{b}{m} \; e \; \alpha_2 = \frac{k}{b}$$

Existem então dois modos de amortecimento muito forte possíveis:

$$x = A_1 e^{-\alpha_1 t} \; e \; x = A_2 e^{-\alpha_2 t}$$

De notar que uma vez que o amortecimento b é grande, α_1 é *grande* o que significa um amortecimento *rápido* e α_2 é *pequeno* o que significa um amortecimento *lento*.

Pergunta: O que está a acontecer fisicamente nestes dois sistemas diferentes muito amortecidos? Consegue construir um cenário plausível de uma massa numa mola, tudo mergulhado em melaço para ver porque é que duas taxas de mudança de velocidade muito diferentes são possíveis?

Dica: olhe novamente para a equação de movimento deste oscilador amortecido. Note que em cada um destes decaimentos um termo não influencia mas este termo irrelevante é *diferente* para cada um destes decaimentos!

Resposta 1: para $\alpha = k/b$, onde a massa não influencia. O decaimento é o que se obtém quando se puxa a massa para um dos lados, se larga e depois esta move-se de um lado para o outro e muito lentamente vai diminuindo a amplitude de oscilação em torno do ponto de equilíbrio. A sua taxa de aproximação é determinada balançando a força da mola com a força de amortecimento dependente da velocidade para obter a velocidade. A taxa de variação da velocidade – a aceleração – é tão pequena que o termo *inercial* – a massa – é negligenciável.

Resposta 2: para $\alpha = b/m$, a mola é negligenciável. E este movimento é muito *rápido* ($b/m \gg k/b$, uma vez que dissemos que $b^2 \gg 4mk$). O modo de obter este movimento é puxando a massa para um dos lados e mandar-lhe um forte piparote em direcção ao ponto de equilíbrio. Se lhe dermos a velocidade exacta (velocidade alta), todo o momento que foi transferido para a massa será gasto a ultrapassar a força de amortecimento enquanto a massa se move para o centro – a força da mola será negligenciável.

*A solução mais geral para o oscilador fortemente amortecido

A equação do oscilador amortecido

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - b\frac{dx}{dt}$$

é uma equação linear. Isto significa que se $x_1(t)$ for uma solução e $x_2(t)$ for outra solução, isto é,

$$m \frac{d^2 x_1(t)}{dt^2} = -kx_1(t) - b\frac{dx_1(t)}{dt}$$

$$m \frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} = -kx_2(t) - b\frac{dx_2(t)}{dt}$$

então adicionando as duas equações obtemos:

$$m\,\frac{d^2\big(x_1(t)+x_2(t)\big)}{dt^2} = -k\big(x_1(t)+x_2(t)\big) - b\,\frac{d\big(x_1(t)+x_2(t)\big)}{dt}$$

Também é claro que *multiplicando uma solução por uma constante produz uma outra solução*: se $x(t)$ satisfizer a equação, então $3x(t)$ também.

Isto significa que, dadas duas soluções $x_1(t)$ e $x_2(t)$, e duas constantes arbitrárias A_1 e A_2, a função

$$A_1x_1(t) + A_2x_2(t)$$

também é solução da equação diferencial.

De facto, todos os movimentos do oscilador fortemente amortecido têm esta forma. A maneira de compreender isto é aperceber-mo-nos que o movimento do oscilador está *completamente determinado* se especificarmos num instante inicial a posição *e* a velocidade do oscilador. A equação do movimento dá-nos a aceleração como função da posição e da velocidade, então, pelo menos em princípio podemos determinar como a massa se move em cada instante. Tecnicamente, estamos a integrar a equação do movimento, quer matematicamente quer numericamente usando uma folha de cálculo. Ajustando as duas constantes arbitrárias A_1 e A_2, podemos ajustar a soma das soluções para qualquer posição inicial e velocidade dadas.

Em resumo, para o oscilador fortemente amortecido qualquer solução é da forma:

$$x(t)A_1e^{-\alpha_1 t} + A_2e^{-\alpha_2 t} = A_1e^{\frac{b+b\sqrt{1-\frac{4mk}{b^2}}}{2m}t} + A_2e^{\frac{b-b\sqrt{1-\frac{4mk}{b^2}}}{2m}t}$$

Exercícios sobre oscilações fortemente amortecidas

1. Se o oscilador é puxado do ponto de equilíbrio uma distância x_0 e largado do repouso em $t=0$, quais são A_1 e A_2? Descreva o movimento subsequente, especialmente a parte inicial: qual é a aceleração inicial? (*Dica*: pense cuidadosamente em como é importante o termo de amortecimento imediatamente após ser largado do repouso – deveria conseguir adivinhar a aceleração inicial.)
2. Se o oscilador está inicialmente no ponto de equilíbrio $x_0 = 0$ mas é-lhe dado um empurrão instantâneo até uma velocidade v_0, encontre A_1 e A_2 e descreva o movimento.

*O princípio da sobreposição para equações diferencias lineares

A equação para osciladores fortemente amortecidos é uma equação diferencial linear, isto é, uma equação da forma (em notação mais usual):

$$c_0 f(x) + c_1 \frac{df(x)}{dx} + c_2 \frac{d^2 f(x)}{dx^2} = 0$$

onde c_0, c_1 e c_2 são constantes, isto é, independentes de x.

Para uma tal equação diferencial linear, se $f_1(x)$ e $f_2(x)$ são soluções, então $A_1 f_1(x) + A_2 f_2(x)$ também é para qualquer constantes A_1, A_2. Este é o chamado ***Princípio da Sobreposição***, e é provado em geral tal como foi provado para o oscilador fortemente amortecido na secção anterior.

Ainda mais importante, este Princípio da Sobreposição é válido, usando argumentos análogos, para equações diferenciais lineares de *mais que uma variável*, tal como as equações de onda que consideraremos brevemente. Neste caso, é possível perceber como é que as ondas passam umas pelas outras e saiem inalteradas.

Um oscilador fracamente amortecido

Podemos fazer exactamente o mesmo tratamento matemático para resolver a equação do movimento como fizemos para o caso do amortecimento forte: procuramos soluções da forma

$$x = x_0 e^{-\alpha t}$$

tal como anteriormente, aqui encontramos soluções com

$$\alpha_1, \alpha_2 = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4mk}}{2m}$$

Mas a diferença é que para o amortecimento *fraco* ($b^2 < 4mk$) a expressão dentro da raiz quadrada é negativa! Vamos ter de trabalhar com a raiz quadrada de um número negativo. Fazemos isto formalmente escrevendo:

$$\sqrt{b^2 - 4mk} = i\sqrt{4mk - b^2}$$

com $i^2 = -1$ como habitualmente. Isto fornece as duas soluções exponenciais possíveis:

$$x_1(t) = e^{-\frac{bt}{2m}} e^{-\frac{i\sqrt{4mk-b^2}}{2m}t}, \qquad x_2(t) = e^{-\frac{bt}{2m}} e^{+\frac{i\sqrt{4mk-b^2}}{2m}t}$$

e a solução geral

$$x(t) = A_1 e^{-\frac{bt}{2m}} e^{-\frac{i\sqrt{4mk-b^2}}{2m}t} + A_2 e^{-\frac{bt}{2m}} e^{+\frac{i\sqrt{4mk-b^2}}{2m}t}$$

Claro que a posição da massa tem de ser um número real! Temos de escolher A_1 e A_2 de modo a ter a certeza disto. Se escolhermos

$$A_1 = \frac{1}{2}Ae^{-i\delta}, A_2 = \frac{1}{2}Ae^{+i\delta}$$

onde A e δ são reais, e relembrando que

$$\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{+i\theta} + e^{-i\theta})$$

obtemos

$$x(t) = Ae^{-\frac{bt}{2m}}\cos\left(\sqrt{4mk - \frac{b^2}{2m}}t + \delta\right)$$

Esta é a solução real mais geral do oscilador fracamente amortecido – as duas constantes arbitrárias são a amplitude A e a fase δ. Então para b pequeno, obtemos uma oscilação cosinusoidal multiplicada por uma função gradualmente decrescente, $e^{-\,bt/2m}$.

Isto é habitualmente escrito em termos da **constante de tempo** τ definida por

$$\tau = \frac{m}{b}$$

A amplitude de oscilação A decai no tempo com $e^{-t/2\tau}$ e a energia do oscilador (proporcional a A^2) decai com $e^{-t/\tau}$. Isto significa que no tempo τ a energia decresce por um factor de $1/e$, com $e = 2.71828$ ...

A solução é por vezes escrita como

$$x(t) = Ae^{-\frac{bt}{2m}}\cos(\omega' t + \delta)$$

onde

$$\omega'^2 = \frac{4mk - b^2}{4m^2} = \frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2} = \omega_0^2 - \frac{b^2}{4m^2}$$

Note que para amortecimento pequeno, a frequência de oscilação não varia muito do valor sem amortecimento: a variação é proporcional ao *quadrado* do amortecimento.

O factor Q

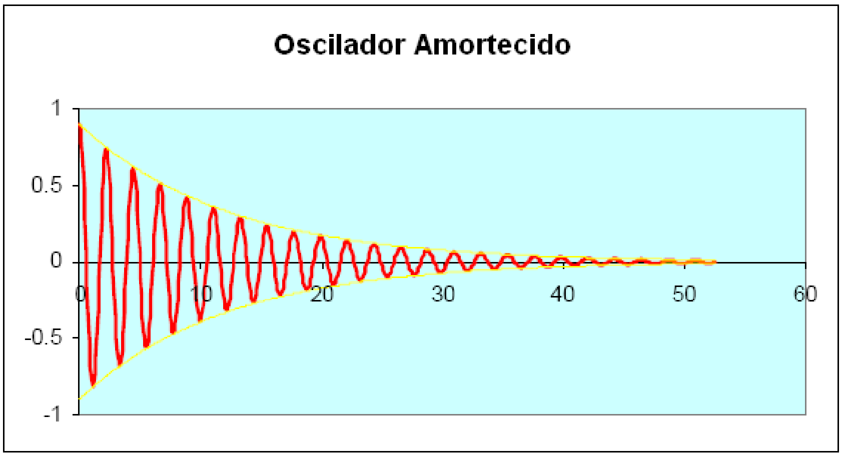
O factor Q (factor de qualidade) é uma medida da qualidade de um oscilador (tal como uma campaínha): durante quanto tempo continuará a tocar depois de lhe batermos. Essencialmente é uma medida de quantas oscilações ocorrem no intervalo de tempo que a energia demora a decair por um factor de $1/e$.

Q é definido por:

$$Q = \omega_0 \tau$$

portanto podemos dizer que é uma medida de quantos radianos o oscilador roda num tempo τ. Para uma campaínha típica, τ seria de poucos segundos, se a frequência fosse de 256 Hz, daria $\omega_0 = 2\pi \times 256$, e portanto Q seria da ordem de poucos milhares.

Exercício: estime Q para o seguinte oscilador (e não se esqueça que a energia é proporcional ao *quadrado* da velocidade):



As curvas a amarelo no gráfico acima são os pares de funções $+e^{-bt/2m}$, $-e^{-bt/2m}$, denominadas de *envelope* da curva oscilatória pois rodeiam a curva por cima e por baixo.

*Amortecimento Crítico

Existe apenas um caso que ainda não discutimos, é o chamado "amortecimento crítico": o que acontece quando $b^2 - 4mk$ é exactamente zero? À primeira vista, parece fácil responder: existe apenas uma solução

$$x(t) = Ae^{-\frac{bt}{2m}}$$

Mas não é suficiente – diz-nos que se começarmos em $t = 0$ com a massa em x_0, teria de ter velocidade dx/dt igual a $-x_0 b/2m$. De facto, podemos por a massa em x_0 e impulsioná-la para qualquer velocidade que queiramos! Então o que aconteceu à outra solução?

Obtemos uma pista examinando o comportamento das duas soluções exponenciais para o caso sobre-amortecido assim que nos aproximamos do amortecimento crítico:

$$x(t) = A_1 e^{-\frac{b+b\sqrt{1-\frac{4mk}{b^2}}}{2m}t} + A_2 e^{-\frac{b-b\sqrt{1-\frac{4mk}{b^2}}}{2m}t}$$

Ao aproximar-mo-nos do amortecimento crítico, a pequena quantidade

$$\epsilon = \frac{\sqrt{b^2 - 4mk}}{2m}$$

aproxima-se de zero. A solução geral da equação tem a forma

$$x(t) = e^{-\frac{bt}{2m}}\left(A_1 e^{-\delta t} + A_2 e^{+\delta t}\right)$$

Esta solução é válida para quaisquer A_1,A_2 reais. Para encontrar a solução que nos falta, o truque é tomar $A_2 = -A_1$. No limite de pequenos ϵ, podemos tomar $e^{\delta t} = 1 + \epsilon t$, e encontramos a solução

$$x(t) = -e^{-\frac{bt}{2m}} 2\epsilon t$$

Como é habitual, podemos sempre multiplicar a solução de uma equação diferencial linear por uma constante e obter uma nova solução, por isso escrevemos a nova solução como

$$x(t) = A_2 t e^{-\frac{bt}{2m}}$$

A solução geral do oscilador criticamente amortecido tem então a forma:

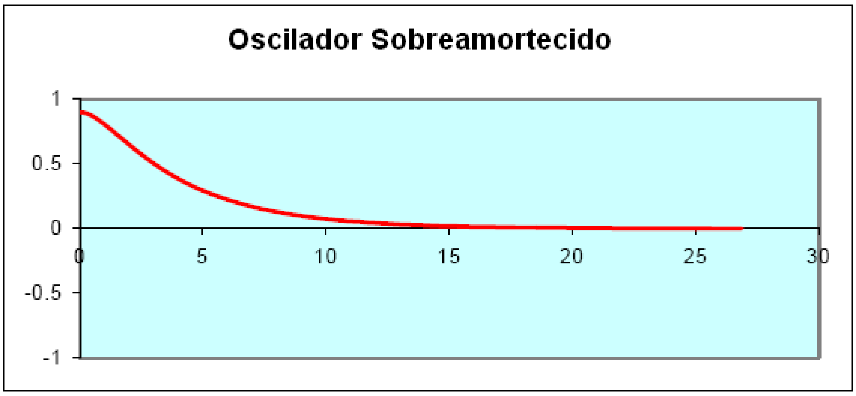
$$x(t) = (A_1 + A_2 t)e^{-\frac{bt}{2m}}$$

Exercício: verifique que esta é a solução do caso de amortecimento crítico e verifique que as soluções da forma *t* vezes uma exponencial *não* funcionam para os outros (amortecimentos não críticos) casos.

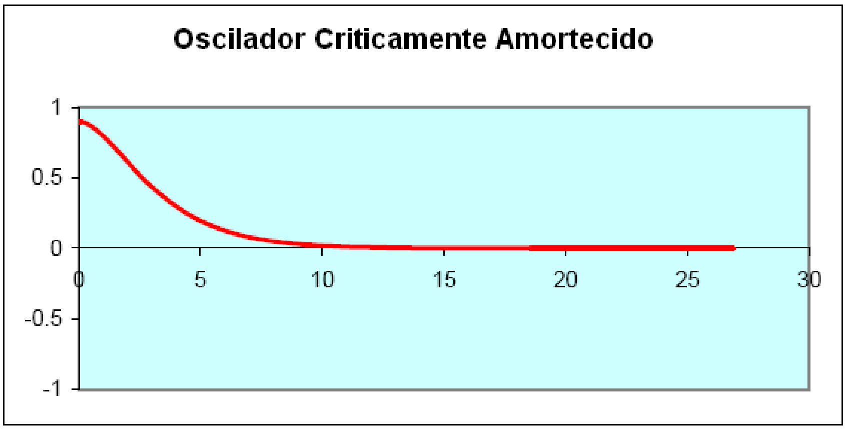
Absorsores de choque e amortecimento crítico

Um absorsor de choque é basicamente um oscilador de mola amortecido , o amortecimento provém de um pistão a mover-se dentro de um cilindro com óleo. Obviamente, se o óleo for pouco viscoso o amortecimento será pequeno e qualquer buraco fará com que o seu carro salte umas quantas vezes até estabilizar. Por outro lado, se o óleo for muito viscoso, ou o pistão demasiado apertado, o absorsor de choque estará demaiado preso – não absorverá o choque, quem o fará será você! Precisamos de afinar o amortecimento para que o carro responda suavemente a um buraco ou lomba na estrada, mas não continue a saltar posteriormente.

Claramente, o gráfico "Oscilador amortecido" na secção do factor Q acima corresponde a amortecimento insuficiente para obter conforto de um absorsor de choque. Um oscilador assim é chamado **sobamortecido**. O caso oposto, **sobreamortecimento**, é tal que:

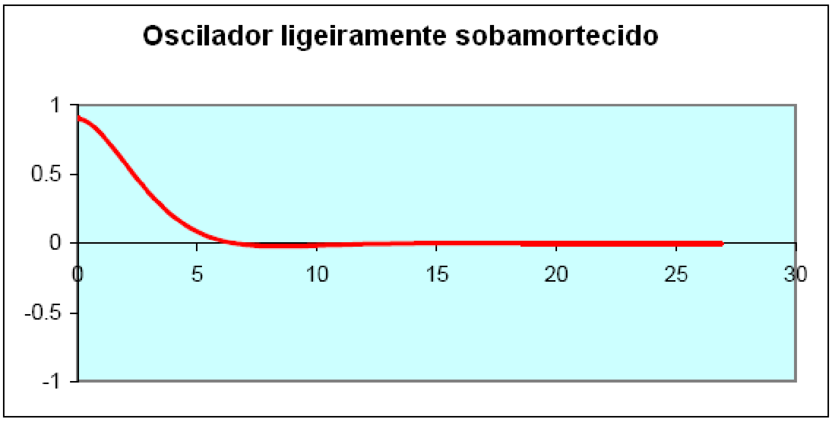


A linha divisora entre sobreamortecimento e sobamortecimento é chamada **amortecimento crítico**. Mantendo tudo constante excepto a força de amortecimento, o amortecimento crítico é tal que:



Isto corresponde a $\omega' = 0$ na equação para $x(t)$ acima, por isso é uma curva puramente exponencial. De notar que o oscilador se move mais rapidamente para zero do que no caso de sobreamortecimento (óleo mais viscoso).

Poder-se-ia pensar que o amortecimento crítico é a melhor solução como absorsor de choque mas de facto um pouco menos de amortecimento seria melhor: haveria um pouco de oscilação mas uma resposta mais rápida:



Pode descobrir como é que os absorsores de choque se comportam exercendo pressão num dos cantos do carro e largando. Se o carro se balanceia claramente, o amortecimento é demasiado pequeno e necessita de novos absorsores.

Um oscilador forçado com amortecimento: a equação de movimento

Estamos agora prontos para examinar um caso muito importante: o oscilador forçado com amortecimento. Por isto, queremos dizer um oscilador amortecido como analisado em cima mas com uma força externa periódica aplicada. Se a força aplicada tem o mesmo período do oscilador, a amplitude pode crescer e tomar proporções desastrosas como no famoso caso da Ponte de Tacoma Narrows.

A equação de movimento para o oscilador forçado com amortecimento é:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = F_0 \cos \omega t$$

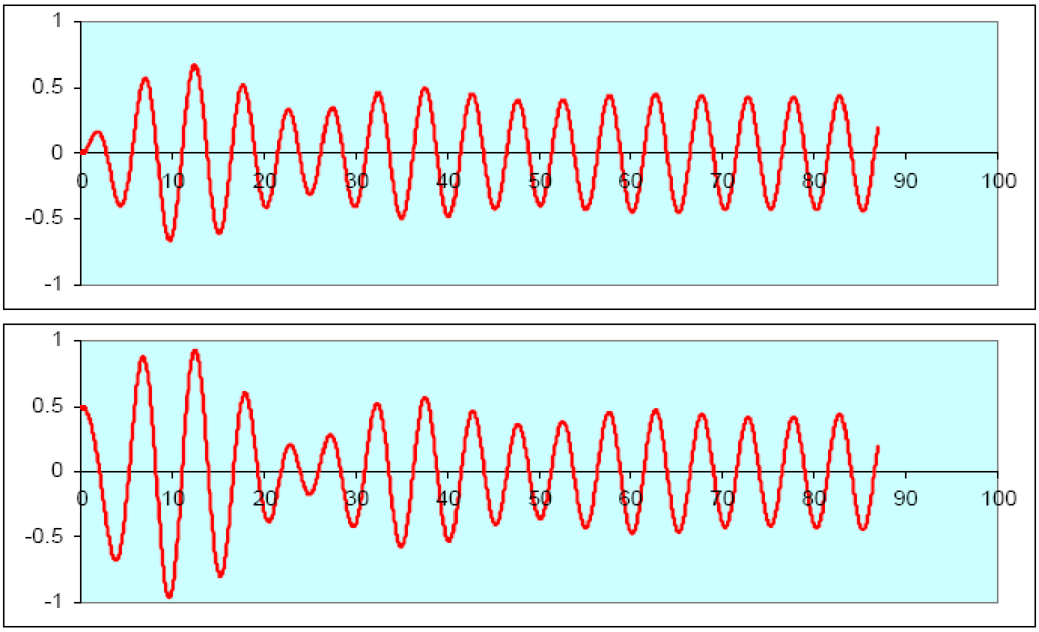
Utilizaremos ω para a frequência da força aplicada e ω_0 para a frequência natural do oscilador se o amortecimento for ignorado, $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

O solução do estado estacionário e comportamento transitório inicial

A solução desta equação diferencial não é única: tal como em qualquer equação de segunda ordem diferencial existem duas constantes de integração que são determinadas especificando a posição e velocidade iniciais.

No entanto, provaremos adiante usando números complexos que a equação tem uma solução *única* para o estado estacionário com x a oscilar à mesma frequência que a força externa. Como pode isto ser aplicado a condições iniciais arbitrárias? A chave é que podemos adicionar à solução estacionária qualquer solução da equação do *oscilador não* *forçado* $m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0$, e mesmo assim obteremos uma solução do oscilador forçado com amortecimento. Sabemos como se comportam estas soluções não forçadas: todas elas morrem com o tempo. Podemos então adicionar uma tal solução para poder satisfazer as condições iniciais e após algum tempo, o sistema perderá a memória dessas condições e estbilizará no estado estacionário forçado. Os desvios iniciais deste estado estacionário necessários para satisfazer as condições iniciais são os chamados *transientes*.

Aqui está um par de exemplos: o mesmo oscilador forçado com amortecimento, começado com velocidade nula, uma vez da origem e outra de 0.5:



Note que após cerca de 70 segundos, as duas curvas são iguais, tanto em amplitude como em fase.

Usar números complexos para resolver a equação do estado estacionário facilmente

Começamos por escrever:

$$força\ externa = F_0 e^{i\omega t}$$

com F_0 real, e portanto a força externa *real* é apenas a parte real disto, $F_0 \cos \omega t$.

Portanto agora estamos a tentar resolver a equação

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = F_0 e^{i\omega t}$$

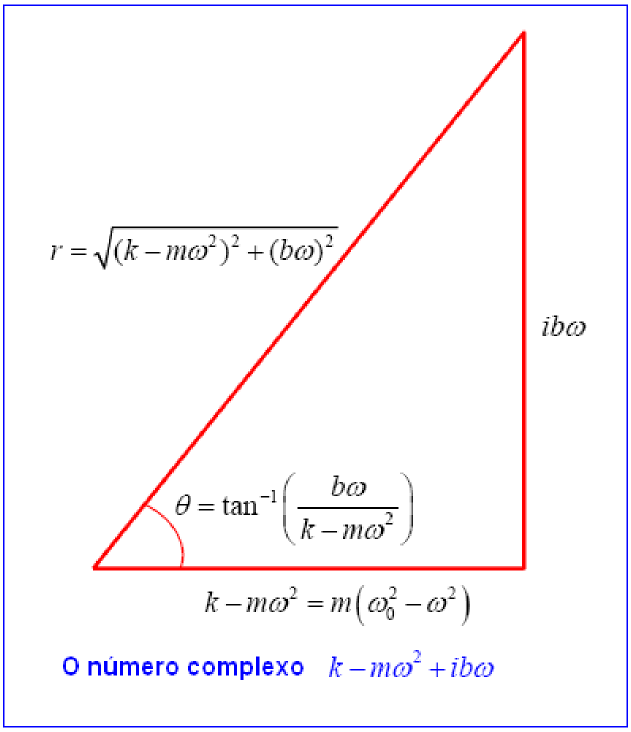
Experimentaremos a função complexa, $x(t) = Ae^{i(\omega t+\phi)}$, com A um número real e $x(t)$ a oscilar à mesma frequência da força externa. Podemos sempre tomar a amplitude A como real: isto não é uma restrição uma vez que adicionámos o factor de fase ajustável $e^{i\phi}$. Fisicamente, este factor permite à solução estar atrasada em relação à força, o que de facto acontece como iremos verificar. Se conseguirmos encontrar um $x(t)$ que satisfaz a equação, as partes reais de ambos os membros da equação têm de ser iguais:

Se $x(t) = Ae^{i(\omega t+\phi)}$ é a solução da equação com força externa complexa, $F_0 e^{i\omega t}$, a sua parte real, $A\cos(\omega t+\phi)$, será solução da equação com a força externa real, $F_0 \cos \omega t$.

É bastante fácil verificar que $x(t) = Ae^{i(\omega t+\phi)}$ é solução da equação com A e ϕ correctos!

É só substituir na equação e ver o que acontece. As derivadas são simples e obtemos:

$$-m\omega^2 Ae^{i(\omega t+\phi)} + ib\omega Ae^{i(\omega t+\phi)} + kAe^{i(\omega t+\phi)} = F_0 e^{i\omega t}$$



Para obtermos A e ϕ, começamos por cancelar o factor comum $e^{i\omega t}$, e posteriormente mudando $e^{i\phi}$ para o outro membro para obter

$$A = \frac{F_0 e^{-i\phi}}{k - m\omega^2 + ib\omega}$$

Agora A é um número real e o membro direito parece ser complexo. O que é que está a acontecer?

Comecemos a desvendar isto desenhando o número complexo do denominador,

$$k - m\omega^2 + ib\omega$$

Tem parte real $k - m\omega^2$ e parte imaginária $ib\omega$.

A sua fase é o ângulo θ: isto é,

$$k - m\omega^2 + ib\omega = re^{i\theta}$$

Colocando-a na equação nesta forma r, θ obtemos

$$A = \frac{F_0 e^{-i\phi}}{k - m\omega^2 + ib\omega} = \frac{F_0 e^{-i\phi}}{re^{i\theta}} = \frac{F_0}{r} e^{-i(\phi+\theta)}$$

Relembrando que F_0 e r são reais, vemos que A *será* real (como tem de ser) *se* $e^{-i(\omega t-\theta)}$ for real: portanto $\phi = -\theta$ e

$$A = \frac{F_0}{r} = \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (b\omega)^2}}, \qquad x(t) = Ae^{i(\omega t-\theta)}$$

onde escrevemos $k = m\omega_0^2$.

Resolvemos então a equação diferencial: a amplitude A é proporcional à intensidade da força externa e a razão é determinada pelos parâmetros do oscilador não forçado e pela frequência da força externa.

O importante a reter sobre a amplitude A é que se o amortecimento b for pequeno, A torna-se *muito grande* quando a frequência da força externa se aproxima da frequência natural do oscilador! Isto é a chamada *ressonância* e é o que aconteceu na Ponte de Tacoma Narrows. Claro que tem os seus aspectos positivos, desde começar um baloiço a ajustar uma estação num rádio.

O *atraso de fase* das oscilações em relação à força externa, $\theta = \tan^{-1}(b\omega/(k - m\omega^2))$, está completamente determinado pela frequência e pelas constantes físicas do oscilador não forçado: a massa, a constante da mola e a intensidade do amortecimento. Portanto quando a força externa $F_0e^{i\omega t}$ gera o movimento $x(t) = Ae^{i(\omega t+\phi)} = Ae^{i(\omega t-\theta)}$, o atraso θ é independente da intensidade da força externa: uma força maior não sincroniza as oscilações, apenas aumenta a amplitude das oscilações.

Note que a *baixas* frequências, $\omega \ll \omega_0$, o oscilador atrasa-se de um ângulo pequeno, mas na ressonância $\omega = \omega_0$ $\theta = \pi/2$ e para frequências da força externa acima de $\omega_0, \theta > \pi/2$.

De volta à realidade

Resumindo: acabámos de estabelecer que $x(t) = Ae^{i(\omega t-\theta)}$ com $A = F_0/\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (b\omega)^2}$ e $\theta = \tan^{-1}(b\omega/(k - m\omega^2))$ é uma solução da equação do oscilador forçado com amortecimento

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = F_0e^{i\omega t}$$

com a força externa complexa $F_0e^{i\omega t}$.

Equacionando as partes reais de ambos os membros da equação, uma vez que m, b e k são todos reais,

$$x = A\cos(\omega t - \theta)$$

é a solução da equação com força externa <u>real</u> $F_0 \cos \omega t$.

Poderíamos ter descoberto isto sem usar números complexos, usando uma solução $A\cos(\omega t + \phi)$. No entanto não é assim tão simples – o membro esquerdo tornar-se-ia uma mistura de senos e cosenos e necessitaríamos de utilizar identidades trigonométricas para conseguir resolver. Com um pouco de prática, o método complexo é mais fácil e certamente mais directo.

A energia total do oscilador é

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

$$= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2$$

Substituindo

$$x(t) = A\cos(\omega t - \theta), \quad v(t) = -A\omega\,\mathrm{sen}(\omega t - \theta)$$

obtemos

$$E = \frac{1}{2}mA^2(\omega^2\,\mathrm{sen}^2(\omega t - \theta) + \omega_0^2\cos^2(\omega t - \theta)\,)$$

Note que isto *não* é constante durante a oscilação a não ser que o oscilador esteja em ressonância, $\omega = \omega_0$.

Podemos ver que à frequência de ressonância, $E = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2$, e pela secção anterior

$$A = \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (b\omega)^2}}$$

e portanto a energia do oscilador à frequência de ressonância é

$$E_{ressonância} = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2\frac{F_0^2}{b^2\omega_0^2} = \frac{1}{2}m\frac{F_0^2}{b^2} = \frac{Q^2}{2}\frac{F_0^2}{m\omega_0^2}$$

relembrando que $Q = \omega_0\tau = \omega_0 m/b$.

Então Q, o factor de qualidade, a medida de quanto tempo a oscilação perdura, também mede a intensidade de resposta de um oscilador a uma força externa à frequência de ressonância.

Mas o que acontece quando nos afastamos da frequência de ressonância? Vamos assumir que Q é grande e que a força externa se mantém constante. Não é necessária uma grande mudança de ω em relação a ω_0 para que o denominador $m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (b\omega)^2$ na expressão de E duplique em tamanho. De facto, para Q grande, é uma boa aproximação substituir $b\omega$ por $b\omega_0$ e depois é directo verificar que a energia do oscilador cai para metade do seu valor na ressonância para um valor de $\omega - \omega_0 \cong \pm\omega_0/2Q$.

Exercício: prove isto.

Em resumo, para Q crescente, a resposta à frequência de ressonância aumenta mas esta resposta apenas se verifica para um intervalo de frequências da força externa cada vez menor.

E agora ao trabalho...

E agora uma questão prática importante: quanto *trabalho* está a força externa a fazer para manter o sistema a oscilar?

É mais simples trabalhar com a solução real. Suponhamos que o oscilador se move de Δx num intervalo de tempo Δt, a força externa exerce trabalho $(F_0 \cos \omega t)\Delta x$, e portanto

$$taxa\ de\ trabalho\ no\ instante\ t = (F_0 \cos \omega t)(\Delta x/\Delta t) = (F_0 \cos \omega t)v(t)$$

O importante é a taxa *média* de trabalho da força externa, ou seja, a *potência média* que se encontra fazendo a média num ciclo completo:

De $x(t) = A\cos(\omega t - \theta), v(t) = -A\omega\,\mathrm{sen}(\omega t - \theta)$ e fazendo a média da potência (a barra acima significa a média sobre um ciclo completo) e denotando a potência média por P,

$$\begin{aligned} P &= F_0\overline{(\cos \omega t)v(t)} \\ &= -F_0 A\omega\,\overline{\cos \omega t\,\mathrm{sen}(\omega t - \theta)} \\ &= -F_0 A\omega\,\overline{\cos \omega t\,\mathrm{sen}\,\omega t}\cos\theta + F_0 A\omega\,\overline{\cos^2 \omega t}\,\mathrm{sen}\,\theta \\ &= \frac{1}{2}F_0 A\omega\,\mathrm{sen}\,\theta \end{aligned}$$

uma vez que a média sobre um ciclo $\overline{\cos^2 \omega t} = \frac{1}{2}$ e $\overline{\cos \omega t\,\mathrm{sen}\,\omega t} = \frac{1}{2}\overline{\mathrm{sen}\,2\omega t} = 0$ (relembrando que $\cos^2 \omega t + \mathrm{sen}^2\,\omega t = 1$ qualquer que seja t, e que o seno é apenas um co-seno transladado e portanto têm a mesma média num ciclo completo.)

Isto pode ser expresso apenas em função da força externa e da frequência. Uma vez que

$$A = \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (b\omega)^2}}, \quad \mathrm{sen}\,\theta = \frac{b\omega}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (b\omega)^2}}$$

$$
\begin{aligned}
P &= \frac{1}{2} F_0 A\omega \operatorname{sen}\theta \\
&= \frac{1}{2} \frac{b\omega^2 F_0^2}{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (b\omega)^2}
\end{aligned}
$$

Exercício 1: Prove que para um oscilador fracamente amortecido, é à ressonância que o oscilador extrai maior trabalho da força externa.

Exercício 2: Prove que qualquer solução da equação do oscilador amortecido (com $F = 0$) pode ser somada à solução do oscilador forçado para dar uma solução do oscilador forçado. Como é que se escolhe a "solução certa"?

Tradução/Adaptação **Casa das Ciências 2009**