Projecto Faraday

Textos de Apoio

Por que é que a Lua não cai?

11º Ano de Escolaridade

Projecto Faraday

casa das ciências

Porto, Outubro de 2009

Ficha Técnica

Projecto Faraday

Projecto de intervenção no ensino da Física no secundário.

Financiamento

Fundação Calouste Gulbenkian.

Execução

Departamento de Física, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto.

Escolas Participantes

- ES Filipa de Vilhena
- ES Fontes Pereira de Melo
- ES Garcia de Orta
- ES da Maia
- ES de Santa Maria da Feira

Coordenação

- J. M. B. Lopes dos Santos
- Manuel Joaquim Marques

Portal

URL: `http://www.fc.up.pt/faraday`

Texto do 11º Ano

Redactor Principal

J. M. B. Lopes dos Santos

Colaboração e revisão

- Elisa Arieiro
- Carlos M. Carvalho
- Manuel Joaquim Marques

Conteúdo

Lista de Figuras

Parte I

Movimento e Leis de Newton

Capítulo 5

Por que é que a Lua não cai?

5.1 Introdução

Todas as crianças (ou pelo menos aquelas que têm oportunidade de se desenvolverem em circunstâncias normais) passam por uma fase de intensa curiosidade sobre o mundo natural. Querem saber a razão de tudo, questionando sem parar os adultos do porquê das coisas. Ou seja, todos fomos cientistas numa altura das nossas vidas. Uma pergunta frequente nessa fase da vida é a seguinte:

Por que é que a Lua não cai para a Terra?

Esta pergunta volta a surgir, com alguma frequência, mais tarde, ao estudar a Lei da Gravitação Universal: se a Terra atrai a Lua, se o Sol atrai os planetas, por que é que a Lua não cai para a Terra e os planetas para o Sol?

A evolução para uma visão científica do mundo exige quase sempre uma nova maneira de ver aquilo que já nos é familiar. A resposta de Newton a este respeito foi clara: a Lua cai para a Terra e os planetas para o Sol. A maneira como Newton viu está ilustrada na Fig. 5.1, que surge nos *Principia* em 1687.

Nela se mostram várias trajectórias de projécteis, lançados do alto de uma montanha, com velocidades horizontais sucessivamente maiores. Os projécteis atingem a superfície da Terra a distâncias crescentes do ponto de lançamento (D, E, F, C, B, A). A figura sugere que, com velocidade suficiente, o projéctil poderá passar

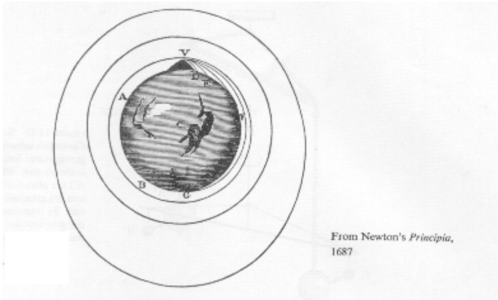

Figura 5.1: Uma ilustração dos *Principia* de Newton.

a orbitar a Terra, apesar de a sua trajectória se encurvar de um modo semelhante à dos projécteis que "acabam por cair".

Com esta maneira de ver Newton estava a raciocinar sobre o movimento dos astros (a Lua) e dos corpos na Terra, usando os mesmos conceitos. Hoje isso parece-nos inteiramente natural. No século XVII era ainda muito controverso. Na altura já era conhecido o modelo heliocêntrico de Copérnico. Kepler tinha mostrado que, num sistema de referência em que o Sol está em repouso, os movimentos dos planetas são elipses, ocupando o Sol um foco. Os movimentos dos planetas em relação à Terra (num sistema em que a Terra está em repouso) são muito mais complexos por causa do próprio movimento da Terra em relação ao Sol.

▷ **heliocêntrico:** com o Sol (Hélios em grego) no centro.

▷Actividade 5.1

Contudo, o modelo heliocêntrico não era de modo nenhum consensual. As autoridades religiosas, em particular, resistiram a abandonar as concepções geocêntricas de Ptolomeu e Aristóteles, que julgavam mais de acordo com algumas passagens da Bíblia. Os trabalhos de Newton contribuíram decisivamente para a ideia de que as **mesmas** leis governam o movimento na Terra e nos céus, um aspecto fundamental da visão do mundo que hoje partilhamos.

▷ **geocêntrico:** Terra no centro.

O movimento dos planetas no Sistema Solar foi muito importante na descoberta da Lei da Gravitação Universal e será o primeiro tópico deste capítulo. Depois, discutiremos os vários tipos de órbitas possíveis em torno de um astro, relacionando-as com o conceito de energia potencial gravítica. Finalmente, faremos uma breve introdução ao conceito de movimento assistido por gravitação, referido no capítulo 1 a propósito da viagem das *Voyager*.

■ Copérnico e Kepler ■

Nicolaus Copernicus (1473-1543) Johannes Kepler(1571-1630)

Nicolaus Copernicus (ou Mikolaj Kopernik na forma original do seu nome) nascido em Frauenburg, na actual Polónia, publicou em 1543, no ano da sua morte, a obra *De revolutionibus orbium coelestium* (Sobre as revoluções dos corpos celestes) em que defendia que o movimento de rotação da Terra explicava o movimento diário aparente das estrelas (incluindo o Sol); que o ciclo anual de movimentos do Sol, se devia à revolução da Terra em torno dele; e que a aparente inversão dos movimentos dos planetas no céu (movimento retrógrado), se devia igualmente ao movimento da Terra de onde eram observados.
Johannes Kepler, matemático e astrónomo, nascido em 1571, em Wurttemberg, na actual Alemanha, usando dados observacionais do astrónomo Tycho Brahe, mostrou que o modelo heliocêntrico de Copérnico implicava órbitas planetárias elípticas com foco no Sol. Quando observadas relativamente à Terra essas órbitas parecem curvas muito mais complexas.
Outro ardente defensor da hipótese de Copérnico, como representação do real e não apenas hipótese de cálculo, foi Galileu. Por essa razão entrou em conflito com a Igreja, que defendia que a visão ptolomaica e aristotélica (Terra no centro do Universo) era a única compatível com certas passagens bíblicas. Galileu foi julgado e condenado pelo tribunal da Inquisição, tendo sido obrigado a renunciar publicamente às suas ideias, e proibido de as ensinar.

Caixa 5.1: Nicolau Copérnico e Johannes Kepler.

5.2 Movimentos planetários e gravitação

Para simplificar a nossa discussão, vamos supor que as órbitas dos planetas são circulares. Na realidade, trata-se de uma excelente aproximação para quase todos os planetas do Sistema Solar, pois os semi-eixos maiores e menores das elipses são quase iguais. No caso da órbita da Terra, por exemplo, a razão entre os semi-eixos menor e maior da órbita é

$$\frac{b}{a} = 0{,}99986,$$

ou seja $b \approx a$.

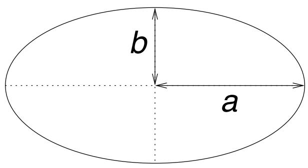

Figura 5.2: Se os semi-eixos menor, b, e maior, a, da elipse forem iguais esta é uma circunferência.

Uma outra simplificação importante resulta do facto de a massa do Sol, $M_\odot$, ser muitas vezes superior à massa combinada de todos os planetas do Sistema Solar. Embora a força que o Sol exerce num planeta e a que este exerce sobre o Sol tenham a mesma intensidade, pela terceira lei de Newton, a aceleração do Sol é muito menor que a dos planetas, devido à sua grande massa. É, pois, uma boa aproximação supor que o Sol não se move por efeito das forças exercidas pelos planetas. Uma situação semelhante ocorre para órbitas de satélites, ou mesmo da Lua, em torno da Terra.

5.2.1 Aceleração dos planetas

Afinal, por que andam os planetas à volta do Sol? Naturalmente, por que ele está lá! Que outra razão, que não a presença do Sol, pode explicar que todos os planetas se movimentem em órbitas (quase) circulares, centradas, precisamente, no centro do Sol? A presença de uma estrela no centro do sistema solar determina esta *dança* dos planetas.

E se o Sol não existisse? Se desaparecesse de repente, isto é, se desligássemos a sua interacção com os planetas? O que aconteceria aos seus movimentos? Parariam? Manter-se-iam inalterados?

O que Newton respondeu, com base na primeira lei de movimento, foi que os planetas passariam a deslocar-se em linha recta, segundo a tangente à sua órbita. A sua velocidade seria a que tinham no momento de desaparecimento da interacção gravítica.

A Fig. 5.3 ilustra o pensamento de Newton. Imaginemos um sistema de eixos Oxy com origem num ponto qualquer da órbita. A direcção Ox é tangente à trajectória em O e Oy é a direcção radial. Se o Sol desaparecesse quando o planeta está em O, ao fim de

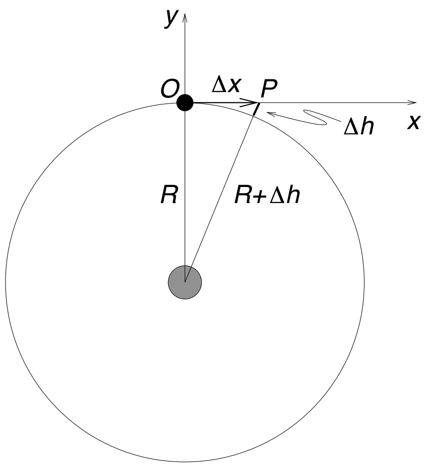

Figura 5.3: Se o Sol desaparecesse quando o planeta está em O, este passaria a deslocar-se ao longo de uma recta; ao fim de 1 segundo teria andado uma distância igual à que estava a percorrer na órbita em cada segundo.

algum tempo, ele estaria em P e não sobre a órbita. A distância ao Sol seria $R + \Delta h$. A atracção do Sol fez com que a distância seja R (órbita circular). Logo, a queda foi de Δh.

Ao passar em O, a velocidade do Planeta tem a direcção do eixo Ox, tangente à trajectória. A sua componente v_y é nula. Um pouco mais à frente, no ponto Q, a velocidade rodou ligeiramente e já tem uma componente negativa segundo Oy. Se v_y é nula em O e negativa em Q, então há uma aceleração na direcção negativa do eixo Oy no ponto O da órbita.

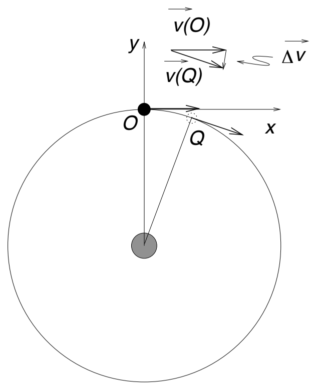

Figura 5.4: A velocidade do planeta rodou entre O e Q. v_y é nula em O e negativa em Q, logo há uma aceleração na direcção do centro da órbita.

Esta ideia, apesar de muito simples, é uma maneira totalmente nova de pensar sobre o movimento circular dos planetas. O movimento livre, natural, seria em linha recta com velocidade uniforme. Mas o Sol atrai os planetas e estes, sob a acção dessa atracção, encurvam o movimento em direcção ao Sol. O movimento circular implica uma “queda” em direcção ao Sol.

Na próxima secção vamos apresentar um argumento baseado em geometria elementar que permite mostrar que o módulo desta aceleração, dita **centrípeta**, vale

$$a_c = \frac{v^2}{R} \tag{5.1}$$

em que v é o módulo da velocidade do planeta e R o raio da trajectória circular[1]. O argumento ilustra o modo como se desenvolvem

[1]Esta fórmula vale, também, para outros tipos de trajectória, se R for

raciocínios teóricos em física, mas pode ser omitido sem prejuízo do material que se segue. Na actividade 5.2 explora-se o conceito de aceleração centrípeta com um método gráfico.

▷ Actividade 5.2

5.2.1.1 Aceleração centrípeta

Um pouco de geometria elementar permite-nos saber quanto cai a Terra num intervalo de tempo Δt em direcção ao Sol. Atentemos na Fig. 5.3 da página 11. Pelo teorema de Pitágoras:

$$(R + \Delta h)^2 = R^2 + (\Delta x)^2,$$

o que dá, desenvolvendo o quadrado do primeiro membro,

$$(\Delta h)^2 + 2R\Delta h + R^2 = R^2 + (\Delta x)^2$$

ou seja,

$$(\Delta h)^2 + 2R\Delta h = (\Delta x)^2. \tag{5.2}$$

O raio da órbita da Terra é conhecido e pode ser lido numa tabela de dados astronómicos, $R = 1{,}5 \times 10^{11}\,\mathtt{m} \equiv 1\,\mathtt{UA}$. Por outro lado, uma vez que Δx é o deslocamento que a Terra teria se a sua velocidade passasse a ser uniforme ao passar em O, temos

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \Delta x = v\Delta t$$

em que v é o módulo da velocidade orbital da Terra (ver Caixa 5.2).

Conhecidos Δx e R, poderíamos calcular Δh resolvendo a Eq. 5.2, uma equação de segundo grau para Δh. Mas nem isso é necessário. Para intervalos de tempo, Δt, muito menores que um ano, a Terra percorre distâncias muito menores que o raio da sua órbita. Num segundo, por exemplo, percorre menos de $30\,\mathtt{km}$, uma fracção pequeníssima do raio da órbita da Terra, $1,5 \times 10^{11}\,\mathtt{m}$ (150 milhões de quilómetros). A distância de queda, Δh, é ainda menor que Δx, logo muito menor que R, o raio da órbita da Terra:

$$\Delta h \ll R.$$

Multiplicando ambos os membros por Δh, obtemos

$$(\Delta h)^2 \ll \Delta h R$$

---

interpretado como o *raio de curvatura da trajectória*. Contudo, este conceito não será discutido nestas notas.

■ Velocidade orbital da Terra ■

O módulo da velocidade orbital da Terra pode determinar-se a partir do período da sua órbita e da sua distância média ao Sol. Neste cálculo estamos a considerar que a órbita é circular, que como vimos acima, é uma excelente aproximação. O período da órbita é de um ano:

$$T = 1\,\text{ano} = 365,3 \times 24 \times 60 \times 60 = 3,16 \times 10^7\,\texttt{s}.$$

A distância percorrida nesse intervalo de tempo é o perímetro da órbita. Como o raio da órbita é $1{,}5 \times 10^{11}\,\texttt{m}$:

$$\Delta s = 2\pi R = 9,42 \times 10^{11}\,\texttt{m}$$

O módulo da velocidade é então

$$v = \frac{2\pi R}{T} = \frac{9,42 \times 10^{11}}{3,16 \times 10^7} = 2,98 \times 10^4\,\texttt{m s}^{-1}.$$

Em cada segundo a Terra percorre quase $30\,\texttt{km}$ ao longo da sua órbita.

Caixa 5.2: Cálculo da velocidade orbital da Terra

Portanto, podemos desprezar na Eq. 5.2 o termo em $(\Delta h)^2$ comparado com $2\Delta hR$, e resolver em ordem a Δh:

$$\Delta h = \frac{(\Delta x)^2}{2R}. \tag{5.3}$$

Mas por que razão estamos a considerar valores pequenos de Δx ou Δt? A verdade é que velocidades ou acelerações instantâneas envolvem sempre o limite $\Delta t \to 0$. Como o nosso objectivo é calcular a aceleração instantânea do corpo no ponto O podemos considerar valores pequenos de Δt e, consequentemente, de Δx.

Usando $\Delta x = v\Delta t$,

$$\Delta h = \frac{v^2}{2R}(\Delta t)^2.$$

Para Δt pequeno ($\Delta t \to 0$), a direcção do deslocamento Δh confunde-se com a direcção do eixo Oy e podemos escrever

$$\Delta y = -\frac{1}{2}\frac{v^2}{R}(\Delta t)^2. \tag{5.4}$$

Voltemos agora à comparação com o movimento de um projéctil lançado na horizontal à superfície da Terra, conforme ilustrado na figura 5.1 dos *Principia* (página 8).

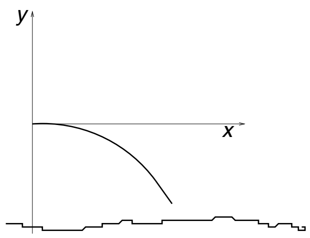

Figura 5.5: Movimento de um projéctil à superfície da Terra.

Com a escolha de eixos representada na figura 5.5 o movimento do projéctil pode ser escrito na forma:

$$\begin{aligned} \Delta x &= v\Delta t \\ \Delta y &= -\frac{1}{2}a(\Delta t)^2 \end{aligned} \tag{5.5}$$

em que v é a velocidade do projéctil na direcção horizontal e $-a$ a aceleração na direcção vertical.

▷ Actividade 5.3.

Reparemos, como Newton, na semelhança entre as equações 5.5 e 5.4. Newton concluiu que um movimento circular de raio R com módulo da velocidade v, tem uma aceleração, dita aceleração centrípeta, dirigida para o centro da trajectória, de módulo

$$a_c = \frac{v^2}{R}.$$

Em resumo, o movimento circular uniforme é acelerado porque a **direcção** da velocidade varia. A aceleração é dirigida para o centro da trajectória.

Pela segunda lei e Newton, uma aceleração implica um força: os planetas têm que ser atraídos em direcção ao Sol para se manterem nas suas órbitas. A correcta análise do movimento circular foi um passo decisivo na descoberta da Lei da Gravitação Universal

Exercício: Calcular Δh para um intervalo de tempo $\Delta t = 1\,\mathtt{s}$ e verificar que, tal como previmos, $(\Delta h)^2 \ll 2hR$.

A velocidade orbital da Terra é aproximadamente

$$v = 30\,\mathtt{km}\,\mathtt{s}^{-1}$$

e o raio da órbita, $R = 1{,}5 \times 10^{11}\,\mathtt{m}$; a aceleração é

$$a_c = \frac{\left(30 \times 10^3\right)^2}{1{,}5 \times 10^{11}} = 6 \times 10^{-3} = 6\,\mathtt{mm}\,\mathtt{s}^{-2}$$

A "queda" da Terra em direcção ao Sol em cada segundo é

$$\Delta h = \frac{a_c}{2} \times 1^2 = 3\,\mathtt{mm}.$$

5.2.2 Aceleração dos Planetas e distância ao Sol

Recorrendo a uma tabela de dados astronómicos, podemos calcular as acelerações centrípetas de todos os planetas do Sistema Solar, conforme se sugere na Actividade 5.3. Esse estudo permite tirar a seguinte conclusão:

/home/jlsantos/trabalhos/cursos/faraday/figs/cap5_11_lua_terra.eps

Figura 5.6: haverá alguma relação entre a aceleração da gravidade à superfície da Terra e a aceleração centrípeta da Lua na sua órbita?

- os planetas do Sistema Solar têm uma aceleração, em direcção ao Sol, que não depende da massa de cada planeta, mas apenas da respectiva distância ao Sol;

- A aceleração de cada planeta é inversamente proporcional ao quadrado da respectiva distância ao Sol:

$$a_c = \frac{1,33 \times 10^{20}}{R^2} \, \mathtt{m\,s}^{-2}$$

  O produto $a_c \times R^2$ vale o mesmo para todos os planetas do Sistema Solar.

Este estudo sugere uma observação e uma questão:

- **Observação**: A aceleração da gravidade à superfície da Terra, é a mesma para todos os corpos. Acabamos de ver que este resultado vale, também, para o movimento dos planetas em relação ao Sol. A respectiva aceleração depende da distância ao Sol, não da massa dos planetas.

- **Questão**: um corpo à superfície da Terra e a Lua (ou um satélite) estão ambos sujeitos à atracção da Terra. Será que $a_c \times R^2$ é o mesmo para a queda dos graves na Terra e para a Lua na sua órbita? Será que a atracção da Terra segue a mesma lei que a do Sol?

5.2.3 A queda da Lua e de um corpo

Um corpo sujeito apenas ao seu peso, à superfície da Terra, cai com um aceleração constante. O seu deslocamento na vertical é dado pela lei do movimento uniformemente acelerado. Usando um eixo vertical, sentido ascendente podemos escrever, para uma velocidade inicial nula:

$$y = y_0 - \frac{1}{2}gt^2.$$

A aceleração, g, vale:

$$g = 9,81\,\mathtt{m\,s}^{-2}.$$

O raio da Terra é de vários milhares de quilómetros:

$$R_T = 6,38 \times 10^3\,\mathtt{km}.$$

Por isso, mais metro menos metro, podemos considerar que, para um corpo próximo da superfície da Terra, a distância ao centro da Terra é R_T e

$$g \times R_T^2 = 3,99 \times 10^{14}\,\mathtt{m}^3\,\mathtt{s}^{-2}. \tag{5.6}$$

De acordo com o raciocínio que fizemos acima, a Lua também acelera em direcção ao centro da Terra. A velocidade orbital da Lua é

$$v = \frac{2\pi R}{T} = 1,02 \times 10^3\,\mathtt{m\,s}^{-1},$$

sendo $R = 3,84 \times 10^8\,\mathtt{m}$ e T o período da órbita da Lua em torno da Terra (27, 3 dias). Assim sendo,

$$a_c = \frac{v^2}{R} = 2,71 \times 10^{-3}\,\mathtt{m\,s}^{-2},$$

e

$$a_c \times R^2 = 4{,}00 \times 10^{14}\,\mathtt{m}^3\,\mathtt{s}^{-2} \tag{5.7}$$

Foi a igualdade dos valores das equações 5.6 e 5.7 (a menos de inevitáveis erros de aproximação) que convenceu Newton da justeza das suas ideias:

> **Os movimentos da Lua e dos corpos à superfície da Terra são regidos pelas mesmas leis.**

Curiosamente, a publicação da Lei da Gravitação Universal foi atrasada de vários anos porque, no primeiro cálculo que fez, Newton usou um valor errado da distância Terra-Lua. Este resultado tem uma importância que não pode ser exagerada. Trata-se de grandezas relativas a movimento na Terra (Eq. 5.6) e no céu (Eq. 5.7). A sua igualdade simboliza a unificação entre o movimentos celestes e terrestres, que alterou para sempre a nossa maneira de ver e de nos situar no Universo.

5.2.4 Lei da Gravitação Universal

Podemos, então, concluir da análise dos movimentos nos campos gravíticos do Sol e da Terra os seguintes factos:

a) Os planetas, no seu movimento circular, têm uma aceleração na direcção do centro do Sol que é inversamente proporcional a R^2,

$$a_c = \frac{1{,}33 \times 10^{20}}{R^2}\,\mathtt{m\,s}^{-2} \quad \text{(campo grav}\textit{í}\text{tico do Sol)} \qquad (5.8)$$

b) A Lua e qualquer corpo sujeito predominantemente à atracção da Terra, têm uma aceleração dirigida para o centro da Terra dada por

$$a_c = \frac{4,00 \times 10^{14}}{R^2}\,\mathtt{m\,s}^{-2} \quad \text{(campo grav}\textit{í}\text{tico da Terra).} \qquad (5.9)$$

em que R é a distância ao centro da Terra.

Por que razão os numeradores destas duas leis têm valores diferentes? Segundo Newton, estas acelerações são diferentes porque a massa do Sol é superior à da Terra.

A lei da Gravitação Universal afirma que a força exercida pelo Sol num corpo de massa m, à distância R, tem a direcção do centro do Sol e módulo

$$F = \frac{GmM_\odot}{R^2}.$$

Esta força origina uma aceleração (segunda lei):

$$a_c = \frac{F}{m} = \frac{GM_\odot}{R^2} \qquad \text{(campo gravítico do Sol).}$$

No caso do campo gravítico da Terra

$$a_c = \frac{F}{m} = \frac{GM_T}{R^2} \qquad \text{(campo gravítico da Terra).}$$

Estas expressões correspondem exactamente às leis que obtivemos da análise dos movimentos em torno do Sol (Eq. 5.8) e da Terra (Eq. 5.9) . Devemos, então ter:

$$GM_\odot = 1{,}33 \times 10^{20}\,\mathtt{m}^3\,\mathtt{s}^{-2}$$

e

$$GM_T = 4{,}00 \times 10^{14}\,\mathtt{m}^3\,\mathtt{s}^{-2}$$

De facto, a razão entre a Massa do Sol e da Terra é

$$\frac{M_\odot}{M_T} = \frac{1,99 \times 10^{30}}{5,97 \times 10^{24}} = 3,33 \times 10^5$$

que é, muito aproximadamente, o valor da razão das constantes encontradas nas Eqs. 5.8 e 5.9:

$$\frac{1{,}33 \times 10^{20}}{4{,}00 \times 10^{14}} = 3,33 \times 10^5$$

A constante G, tanto quanto sabemos, descreve o movimento no campo gravítico do Sol, da Terra, ou de qualquer corpo e vale

$$G = \frac{1,33 \times 10^{20}}{M_\odot} = \frac{4{,}01 \times 10^{14}}{M_T} = 6,67 \times 10^{-11}\,\mathtt{m}^3\,\mathtt{s}^{-2}\,\mathtt{kg}^{-1}.$$

É conhecida como a **Constante de Gravitação Universal.**

O percurso que fizemos para chegar aqui foi, no essencial o do próprio Newton no século XVII.

5.2.5 Terceira Lei de Kepler

Um das consequências que Newton imediatamente retirou da sua análise do movimento circular e da Lei da Gravitação Universal foi a relação entre o período e o raio das órbitas planetárias expressa pela terceira Lei de Kepler:

▷ **Terceira Lei de Kepler**

> O cubo do raio da órbita de um planeta, R^3, é proporcional ao quadrado do respectivo período, T^2:
>
> $$R^3 = KT^2 \tag{5.10}$$
>
> A constante K (constante de Kepler) é a mesma para todos os planetas do sistema solar.

Newton sabia que um planeta numa órbita de raio R com velocidade v, tem uma aceleração em direcção ao Sol,

$$a_c = \frac{v^2}{R}.$$

A segunda lei de movimento implica que o Sol exerça uma força sobre o planeta dada por

$$F = ma_c.$$

Esta força á dada pela lei de Gravitação Universal, pelo que

$$G\frac{mM_\odot}{R^2} = m\frac{v^2}{R}. \tag{5.11}$$

A massa do planeta cancela nos dois lados da equação e obtemos

$$v^2 R = GM_\odot \tag{5.12}$$

Para relacionar com o período da órbita recordemos que

$$v = \frac{2\pi R}{T} \Rightarrow v^2 = \frac{4\pi^2 R^2}{T^2},$$

que, substituído na equação anterior, dá:

$$\frac{4\pi^2 R^3}{T^2} = GM_\odot.$$

Resolvendo em ordem a R^3, obtemos a terceira lei de Kepler na forma:

$$R^3 = \frac{GM_\odot}{4\pi^2}T^2. \tag{5.13}$$

Kepler chegou à sua leis de movimento planetário através da procura de regularidades matemáticas nas observações astronómicas de Tycho Brahe. A análise de Newton levou-o muito mais longe:

- A constante de Kepler ficou determinada em termos de G e da massa do Sol:

  $$K = \frac{GM_\odot}{4\pi^2} \tag{5.14}$$

  No século XVIII, Cavendish, usando uma balança muito precisa, conseguiu medir directamente a atracção gravitacional entre duas esferas de massas conhecidas e determinar o valor de G. Usando a relação deduzida por Newton, Eq. 5.14, ficou a conhecer a massa do Sol.

- O raciocínio de Newton é universal: vale para órbitas em torno de qualquer corpo. Assim para órbitas em torno da Terra:

  $$\frac{R^3}{T^2} = \frac{GM_T}{4\pi^2}. \tag{5.15}$$

Em particular, esta relação permite-nos relacionar os períodos e raios das órbitas dos satélites da Terra.

Exercício: um satélite em órbita no plano do Equador, com um período orbital igual ao período de rotação da Terra, mantém uma posição fixa em relação a qualquer ponto da Terra. Estes satélites dizem-se geo-estacionários e são muito importante nas redes de comunicações por satélite. A que altura deve orbitar um satélite geo-estacionário?

Uma vez que $T = 24\,h$,

$$T^2 = (24 \times 60 \times 60)^2 = 7{,}5 \times 10^9\,\mathtt{s}^2$$

Usando a eq. 5.15

$$R^3 = \frac{GM_T}{4\pi^2}T^2$$

obtemos

$$\begin{aligned} R^3 &= \frac{6{,}7 \times 10^{-11} \times 6,0 \times 10^{24} \times 7{,}5 \times 10^9}{4\pi^2} \\ &= 7{,}6 \times 10^{22}\,\mathtt{m}^3 \end{aligned}$$

extraindo a raiz cúbica

$$R = 4{,}2 \times 10^7\,\mathtt{m} = 4{,}2 \times 10^4\,\mathtt{km}$$

Esta é a distância ao centro da Terra. Subtraindo o raio da Terra, $R_T = 6{,}4 \times 10^3\,\mathtt{km}$ obtemos uma altura relativamente à superfície da Terra:

$$h = 3{,}6 \times 10^4\,\mathtt{km}$$

ou seja, cerca de 36 000 quilómetros (quase seis vezes o raio da Terra).

5.2.6 Resumo

Quais foram as ideias principais introduzidas nesta secção? Por que não escrevê-las num papel, antes de ler para a frente, para depois comparar com o que se segue?

- O movimento circular uniforme tem uma aceleração dirigida para o centro da trajectória, de módulo:

$$a_c = \frac{v^2}{R}.$$

- Pela segunda lei de Newton, esta aceleração implica a existência de uma força atractiva exercida pelo Sol nos planetas do Sistema Solar e pela Terra na Lua e em todos os corpos na sua proximidade.

- O estudo das acelerações dos planetas do Sistema Solar mostra que a respectiva aceleração é inversamente proporcional ao quadrado da respectiva distância ao Sol; de modo semelhante, a razão entre a aceleração da Lua e de um corpo à superfície da Terra é igual ao inverso da razão dos quadrados das respectivas distâncias ao centro da Terra:

$$\frac{a_{\texttt{lua}}}{g} = \frac{R_T^2}{R^2}.$$

- Estes resultados encontram a sua explicação natural na Lei da Gravitação Universal;
  - como a força gravitacional sobre um corpo, $\vec{F}$, tem um módulo proporcional à respectiva massa, a sua aceleração devida a essa força, $\vec{F}/m$, não depende dessa massa; é a mesma para qualquer corpo nessa posição.
  - A força gravitacional é inversamente proporcional ao quadrado da distância entre os corpos em interacção: logo, as respectivas acelerações também são.

5.3 Energia e órbitas

5.3.1 Órbitas fechadas e abertas

Por que razão são quase circulares as órbitas dos planetas do Sistema Solar? Será que as leis de Newton só permitem este tipo de órbitas?

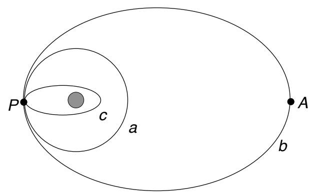

Figura 5.7: Órbitas possíveis em torno da Terra.

De modo nenhum. É fácil de ver que as leis de Newton permitem órbitas muito diferentes das circulares. Consideremos órbitas em torno da Terra como exemplo.

Imaginemos uma sonda na órbita circular a da figura 5.7; seja v a sua velocidade. Suponhamos que, ao passar em P, a sonda liga propulsores durante um curto intervalo de tempo e aumenta a sua velocidade, sem alterar a direcção. Que acontece à sua órbita?

A atracção da Terra não foi alterada, logo, a distância de "queda" em direcção à Terra, em cada segundo, é a mesma que na órbita a. Contudo, a distância percorrida no mesmo intervalo de tempo é maior, porque a velocidade é maior: o resultado é uma trajectória com menor curvatura; na linguagem do automobilismo, uma "curva menos apertada" em P. A órbita resultante será do tipo da órbita b: uma órbita elíptica. Por outro lado, se a sonda diminuir a sua velocidade em P, a trajectória terá maior "curvatura" e será do tipo da órbita c. Se a velocidade em P for suficientemente pequena, pode até acontecer que a órbita resultante intersecte a superfície da Terra. A sonda "cai"!

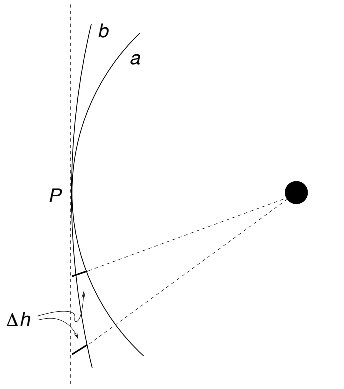

Figura 5.8: No mesmo intervalo de tempo, a "queda", Δh, é a mesma, mas a velocidade é maior na órbita b; a órbita tem menor curvatura.

> **Questão**: Por que é que um automobilista que entre numa curva com velocidade excessiva se pode despistar?
>
> Imaginemos que a curva é um arco de círculo de raio R. Para se manter na estrada, o carro terá que estar sujeito a uma força dirigida para o centro do círculo, de módulo
>
> $$F_c = m\frac{v^2}{R}.$$
>
> Essa força resulta do atrito entre os pneus do automóvel e o piso da estrada. Mas a força de atrito é limitada. Se v for demasiado grande, o valor de F_c excede o máximo valor possível da força de atrito. Se a força aplicada ao carro for inferior a F_c, o carro realiza uma trajectória mais aberta (raio de curvatura maior que o da estrada) e despista-se.

▷ **Perigeu e apogeu**: pontos de uma órbita em torno da Terra com distâncias à Terra mínima e máxima, respectivamente.

Quanto maior for o aumento de velocidade em P, maior será a distância máxima à Terra que a sonda atinge (ponto A, apogeu da órbita), antes de "voltar para trás" devido à atracção da Terra. Se a velocidade for suficiente, a sonda pode mesmo escapar à vizinhança da Terra e continuar a afastar-se. Na figura 5.9 mostra-se uma órbita deste tipo (d). Representa um corpo que, vindo de grande distância, é desviado pela atracção gravítica da Terra e que volta a afastar-se para sempre. Se o aumento de velocidade em P for suficiente, a sonda pode passar da órbita circular, a, para uma órbita aberta, deste tipo, d.

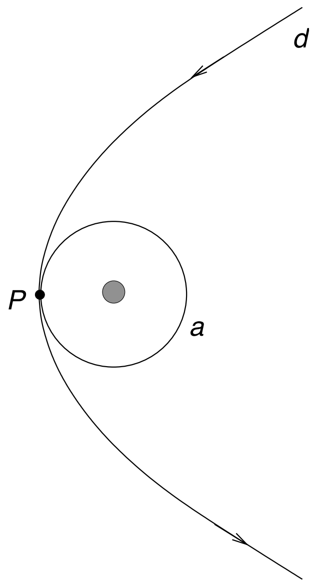

Figura 5.9: Uma órbita aberta.

Escusado será dizer que as mesmas considerações valem para órbitas no campo gravítico de qualquer outro planeta ou estrela. A força gravitacional e as leis de movimento apenas determinam a aceleração, isto é, a maneira como *varia* a velocidade. A posição e a velocidade de um corpo podem ser especificadas arbitrariamente num dado instante. As órbitas consideradas nesta secção têm em comum o ponto P, a direcção da velocidade (tangente à circunferência em P), mas diferem no módulo da velocidade no mesmo ponto P.

Voltando agora à questão no início desta secção, a razão das órbitas planetárias serem quase circulares não está nas leis de Newton, mas nas condições iniciais de formação do Sistema Solar. Será nos modelos de formação do Sistema Solar que, eventualmente, encontraremos resposta a essa pergunta. Saber se um determinado corpo está numa órbita aberta ou fechada é uma questão mais simples, que vamos abordar a seguir.

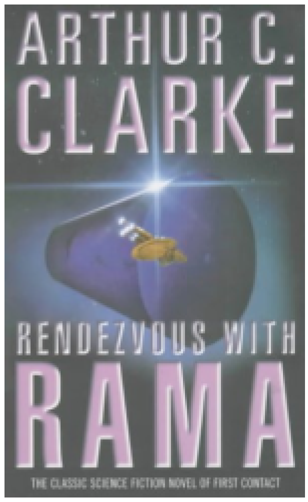

Figura 5.10: Capa da novela,*Rendez-Vous with Rama* uma novela de Arthur C. Clark.

5.3.2 Energia no campo gravítico

No início da novela *Rendez-vous with Rama*, de Arthur C. Clark, astrónomos na Terra detectam um enorme objecto (*Rama*, um fantástico cilindro construído por outra civilização) em movimento em direcção ao Sol. Facilmente determinam a sua posição e velocidade com alguns dias de observação. Com base nesses dados, poderiam determinar se a sua órbita, no campo gravítico do Sol, era fechada ou aberta? A nave estava de passagem ou ia ficar a orbitar o Sol?

A resposta a esta pergunta depende de um cálculo simples de energia. Para percebermos porquê temos que recordar alguns conceitos de 10º ano.

No ano passado discutimos a energia potencial de um corpo à superfície da Terra. Para elevarmos um corpo de massa m de uma altura h, sem o acelerar, temos que exercer uma força externa, $\vec{F}_e$, de módulo igual ao do peso, mg. O trabalho realizado por $\vec{F}_e$ é a variação de energia do corpo no campo gravítico da Terra:

$$W_e = \text{força x deslocamento} = mg\Delta h.$$

Como o corpo não é acelerado, só há variação de energia potencial,

$$\Delta E_P = mg \triangle h. \tag{5.16}$$

Depois de viajarmos com a *Voyager*, de discutirmos órbitas de planetas e satélites, sejamos atrevidos e continuemos a elevar o corpo até alturas comparáveis ou maiores que o raio da Terra.

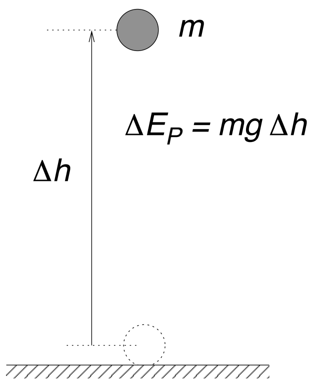

Figura 5.11: Para variações de altitude muito menores que o raio da Terra, o peso pode ser considerado constante.

Nesse caso, a expressão da equação 5.16 deixa de estar correcta, pois o peso do corpo varia com a distância ao centro da Terra.

Com efeito, para um corpo à distância R do centro da Terra, o peso, a força com que a Terra o atrai, vale em módulo,

$$P = \frac{GmM_T}{R^2}.$$

Como o raio da Terra á de $R_T = 6380\,\mathtt{km}$, em variações de altura até alguns quilómetros, a distância R quase não varia e

$$P \approx \frac{GmM_T}{R^2} = mg,$$

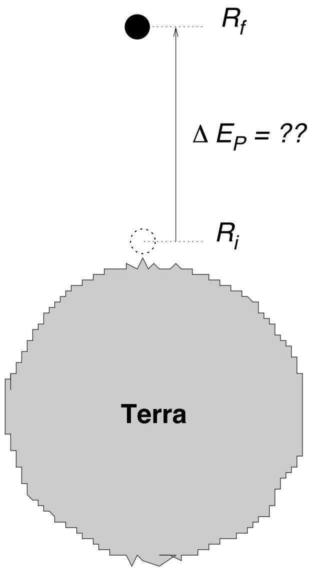

Figura 5.12: Para variações de altitude da ordem, ou superiores, ao raio da Terra, o peso não pode ser considerado um força constante.

com

$$g = \frac{GM_T}{R_T^2}.$$

Nestas situações a expressão da equação 5.16 está correcta.

Já um corpo a uma distância $2R_T$ (a uma altura de 6380 km acima da superfície) tem um peso, P'

$$P' = \frac{GmM_T}{(2R_T)^4} = \frac{GmM_T}{4R_T^2} = \frac{1}{4}mg,$$

apenas um quarto do seu peso à superfície da Terra. Sendo assim, o trabalho necessário para elevar um corpo de R_T para $2R_T$ não pode ser dado pela expressão da equação 5.15, pois a força externa necessária diminui com o aumento de R.

A expressão correcta da variação de energia potencial gravítica quando um corpo passa de uma distância $R_i \rightarrow R_f$ é:

$$\Delta E_P = m(\frac{GmM_T}{R_i} - \frac{GM_T}{R_f}).$$

Se levarmos o corpo de R até uma distância infinita da Terra, $R_f \rightarrow \infty$, temos

$$E_P(\infty) - E_P(R) = m\frac{GM_T}{R}.$$

É habitual tomar como estado de referência o de afastamento infinito, isto é, considerar energia potencial nula quando o corpo está infinitamente afastado da Terra (peso nulo),

$$E_P(\infty) = 0.$$

Sendo assim,

$$E_P(R) = -m\frac{GM_T}{R}.$$

O facto da energia potencial gravítica ser negativa significa apenas que é menor que o seu valor no infinito, $E_P(\infty) = 0$. De facto, é necessário realizar trabalho externo (aumentar a energia) para afastar dois corpos que se atraem.

■ Energia Potencial Gravítica ■

No texto afirma-se, sem demonstração, que a variação de energia potencial gravítica de um corpo que passa de uma distância R_i para R_f do centro da Terra é

$$\Delta E_p = m\left(\frac{GM_T}{R_i} - \frac{GM_T}{R_f}\right).$$

Esta expressão pode escrever-se na forma

$$\Delta E_p = mGM_T\left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_f}\right).$$

Reduzindo ao mesmo denominador as duas fracções,

$$\Delta E_p = mGM_T\left(\frac{R_f - R_i}{R_iR_f}\right) = m\frac{GM_T}{R_iR_f}\left(R_f - R_i\right).$$

O termo entre parêntesis é a variação de altura $\Delta h = R_f - R_i$. Se $\Delta h \ll R_i$

$$R_iR_f = R_i\left(R_i + \Delta h\right) \approx R_i^2$$

e obtemos uma expressão semelhante à usada no $10^{\underline{o}}$ ano:

$$\Delta E_p = mg\Delta h$$

$$g = \frac{GM_T}{R_i^2}.$$

Em resumo, a expressão usada no $10^{\underline{o}}$ ano é uma aproximação válida quando a variação de altura é muito menor que a distância ao centro da Terra.

Caixa 5.3: Energia potencial no campo gravítico da Terra.

5.3.3 Órbitas abertas e energia

A energia total de um corpo que se move num campo gravítico de outro é a soma da sua energia cinética com a energia potencial gravítica,

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - m\frac{GM}{R}; \tag{5.17}$$

m é a massa do corpo e M a massa do planeta ou estrela em cujo campo gravítico ele se move (estamos a supor, como sempre, que $M \gg m$). Por conservação de energia, a energia total é constante em todos os pontos da órbita; R e v variam de tal maneira ao longo da órbita que a expressão da equação 5.17 se mantém constante.

É fácil concluir daqui que a energia de uma órbita aberta é positiva. Quando os dois corpos estão infinitamente afastados a energia potencial gravítica é nula:

$$m\frac{GM}{R} \to 0; \quad \text{se } R \to \infty$$

Em pontos da órbita de grande afastamento ($R \to \infty$) a energia total fica igual à energia cinética, que é sempre positiva. Como a energia não varia na órbita, ela é positiva em todos os pontos da órbita.

Numa órbita com energia negativa, por outro lado, a distância entre os dois corpos terá um valor máximo; se a distância pudesse aumentar indefinidamente, a energia potencial gravítica tenderia para zero e a sua soma com a energia cinética não poderia manter-se negativa: estas órbitas são fechadas.

Assim, os astrónomos que observaram Rama teriam apenas que calcular o segundo membro da equação

$$\frac{E}{m_{\texttt{rama}}} = \frac{1}{2}v^2 - \frac{GM_\odot}{R}$$

para o que precisavam apenas de saber a velocidade, v, e distância ao Sol, R, de *Rama*: se esta grandeza fosse positiva, a órbita seria aberta e *Rama* voltaria para o espaço interestelar; se fosse negativa, *Rama* estaria numa órbita fechada em torno do Sol[2]. Não daremos a resposta: diremos apenas que esta é uma questão importante na novela, uma das melhores obras de sempre de ficção científica.

[2] Supondo, é claro, que a órbita de *Rama* não a levaria a um encontro próximo com um planeta.

Exercício: Podemos lançar um projéctil que nunca mais volte à Terra, que continue a afastar-se para sempre?

A energia total de um projéctil lançado com velocidade v de um ponto da superfície da Terra é:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - m\frac{GM_T}{R_T}.$$

Se esta energia for positiva, a órbita será aberta e o corpo afastar-se-á para sempre da Terra. Para isso, a sua velocidade terá que ser tal que

$$\frac{1}{2}v^2 > \frac{GM_T}{R_T}$$

ou

$$v > v_e = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}} = 11,2 \times 10^3 \,\mathtt{m\ s^{-1}}.$$

A velocidade v_e é a **velocidade de escape** da Terra. O projéctil não tem que ser lançado na vertical. Desde que não colida com a superfície da Terra pode ser lançado para o espaço em qualquer direcção.

5.4 Movimento assistido por gravitação

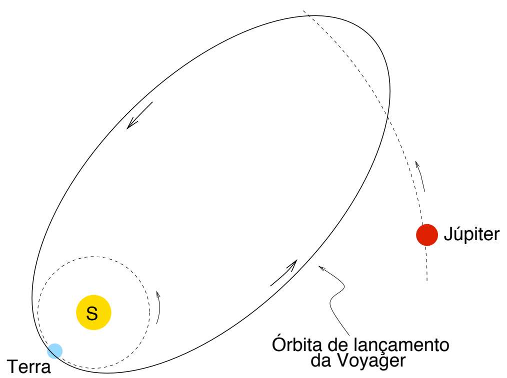

Figura 5.13: Com a velocidade imprimida pelo foguetão de lançamento, e sujeitas à atracção do Sol, as sondas *Voyager* teriam ficado num órbita elíptica, com um afastamento máximo do Sol da ordem da distância Sol-Júpiter.

Na figura 5.13, reproduzida do Capítulo I, mostra-se a órbita de lançamento das *Voyager*. A velocidade com que são lançadas da Terra pelos foguetões Titan-Centaur soma-se à velocidade orbital da Terra, e as naves entram numa órbita elíptica à volta do Sol,

/home/jlsantos/trabalhos/cursos/faraday/figs/aires_voyager_jupiter2_fig

Figura 5.14: (a) Posições da *Voyager* relativamente a Júpiter espaçadas de 20 horas; (b) Posições de Júpiter em relação ao Sol nos mesmos instantes.

com afastamento máximo do Sol da ordem do raio da órbita de Júpiter. Como dissemos na altura, a passagem junto a Júpiter permite aumentar a velocidade das naves relativamente ao Sol, lançando-as numa órbita aberta.

Como funciona este mecanismo? Como é possível aumentar a energia das naves no campo gravítico de Júpiter?

Na figura 5.14a representam-se posições sucessivas da sonda *Voyager I*, separadas de 20 horas, durante o seu encontro com o planeta[1, 2]. Júpiter ocupa a origem do referencial, sem se movimentar, o que significa que esta órbita está representada tal como seria vista por um observador em Júpiter (referencial de Júpiter). A unidade de distância usada, unidade joviana (`UJ`), é o raio do planeta Júpiter:

$$1\,\mathtt{UJ} = 7,14 \times 10^7\,\mathtt{m} = 7,14 \times 10^4\,\mathtt{km}.$$

O Sol encontra-se muito distante, no eixo Ox, com uma coordenada $x = -10700\,\mathtt{UJ}$. O efeito da atracção gravítica do Sol no movimento da sonda é muito menor que o de Júpiter no intervalo de tempo representado nas duas figuras.

A órbita da *Voyager* em relação a Júpiter é aberta. A sonda aumenta de velocidade ao aproximar-se do planeta, devido à sua atracção gravitacional, e reduz a velocidade ao afastar-se, pois continua a ser atraída por Júpiter. Neste referencial, o encontro com o planeta apenas altera a direcção da velocidade da sonda, não altera o respectivo módulo. Se representarmos os deslocamentos entre as posições 1 e 2 e entre 8 e 9, vemos que têm sensivelmente

/home/jlsantos/trabalhos/cursos/faraday/figs/aires_voyager_jupiter_v.eps

Figura 5.15: Para obter o deslocamento da sonda em relação ao Sol temos que somar ao deslocamento em relação a Júpiter, $(1 \rightarrow 2)$ e $(8 \rightarrow 9)$, o deslocamento de Júpiter em relação ao Sol, (c). O deslocamento em 20 horas é maior após o encontro, (b), do que antes, (a).

o mesmo módulo. Sabemos que este resultado é uma consequência da conservação de energia no campo gravitacional de Júpiter: dois pontos à mesma distância de Júpiter têm a mesma energia potencial gravítica: como a energia total é conservada, têm também a mesma energia cinética, ou seja, a mesma velocidade.

Mas, durante as 20 horas que decorrem entre posições sucessivas, Júpiter desloca-se relativamente ao Sol na direcção do eixo Oy (fig. 5.14b). O deslocamento da sonda relativamente ao Sol é obtido somando o seu deslocamento relativamente a Júpiter ao deslocamento deste relativamente ao Sol. Ora, depois do encontro, a velocidade da sonda em relação a Júpiter e deste em relação ao Sol têm praticamente a mesma direcção e sentido. Como se vê na figura 5.15, nas 20 horas entre 8 e 9, o deslocamento da sonda relativamente ao Sol é muito superior em módulo ao que ocorre entre 1 e 2. A velocidade da *Voyager* em relação ao Sol aumentou consideravelmente neste encontro. Na actividade 5.4 constrói-se a órbita da *Voyager* relativamente ao Sol, durante este intervalo de 180 horas, a partir das figuras 5.14.

5.5 Conclusões

Neste capítulo explorámos uma parte muito pequena das consequências da Lei da Gravitação Universal. Não falámos de marés, dos anéis planetários, da formação de galáxias e estrelas por contracção gravitacional. Até a dinâmica da expansão do Universo tem aspectos que se podem compreender usando mecânica newtoniana, embora a Relatividade Geral de Einstein seja essencial para uma compreensão detalhada da estrutura do Universo.

Alguns destes problemas são bastante mais complexos do que os que discutimos neste capítulo. Mas é importante perceber que são as consequências das mesmas leis que o génio de Isaac Newton desvendou para toda a Humanidade.

5.6 Actividades, Questões e Problemas

5.6.1 Actividades

5.1. **Visualização da órbita de um planeta relativamente a outro**.
Ver ficha de Actividade A24.

5.2. **Aceleração centrípeta**.
Ver ficha de Actividade A25.

5.3. **Queda de planetas em direcção ao Sol**.
Ver ficha de actividade A26.

5.4. **Assistência gravitacional**.
Ver ficha de actividade A27.

5.5. **Força centrípeta e velocidade angular**.
Ver ficha de actividade A28.

5.6.2 Questões

5.1. Aristóteles considerava que o movimento "natural" dos corpos celestes ocorria em órbitas circulares. Se interpretarmos "natural" como livre de influências externas, de que modo é que Newton contestou esta concepção?

(a) Qual era para Newton o movimento "natural"?

(b) Segundo Newton, os planetas do Sistema Solar tinham um movimento natural?

(c) Segundo Newton, o movimento circular carecia de uma explicação? Qual?

5.2. A órbita de um satélite geo-estacionário tem energia negativa, positiva, ou nula? (No campo gravítico da Terra).

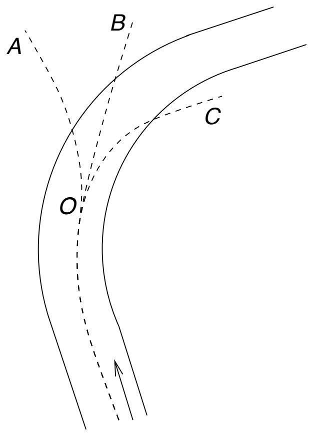

Figura 5.16: Qual das trajectórias segue o automóvel ao despistar-se?

5.3. Um automóvel começa a descrever a curva da figura 5.16, mas encontra gelo no ponto O, perdendo completamente a aderência dos pneus ao piso da estrada. Qual das trajectórias segue o automóvel ao despistar-se? Justificar.

5.4. Um asteróide está em órbita em torno do Sol a uma distância de duas `UA`, duas vezes o raio da órbita da Terra. Qual é o período da sua órbita em anos?

5.6.3 Problemas

5.1. A Lei da Gravitação Universal permite-nos calcular o peso de um corpo à superfície da Terra, em termos da massa e do raio da Terra.

(a) Obter a seguinte expressão para a aceleração da gravidade à superfície da Terra:

$$g = \frac{GM_T}{R_T^2}.$$

(b) Usando uma tabela de dados astronómicos, calcular as acelerações da gravidade nas superfícies da Lua, de Marte e de Júpiter.

5.2. Um corpo à superfície da Terra também é atraído pelo Sol.

(a) Calcular a força exercida pelo Sol sobre um corpo de massa $m = 1\,\mathtt{kg}$ à superfície da Terra e comparar com o respectivo peso (terrestre).

5.3. Num planeta como a Lua, sem atmosfera, não se faz sentir a resistência do ar, como na Terra. É possível ter um corpo em órbita "rasante" à superfície, conforme indica a figura 5.1, na página 8.

(a) Calcular a velocidade de um projéctil em órbita em torno da Lua, a uma distância do seu centro igual ao raio da Lua.

(b) Repetir o cálculo da alínea (a) para uma órbita em torno de um planeta de massa e dimensões da Terra.

(c) Calcular a energia gravitacional de um corpo de massa $1\,\mathtt{kg}$, nas órbitas das alíneas anteriores.

5.4. Quantos `Joule` por `kg` são necessários para acelerar um corpo até à velocidade de escape da Terra?

5.5. Qual é altura máxima atingida por um projéctil lançado na vertical com metade da velocidade de escape da Terra? (ignorar o efeito da atmosfera).

5.6. Os satélites da rede GPS (**G**lobal **P**ositioning **S**ystem) têm períodos orbitais de cerca de 12 horas.

(a) A que altura acima da superfície terrestre orbitam a Terra?

(b) Qual é a respectiva velocidade orbital?

5.7. Calcular a velocidade de escape de um corpo à superfície da Lua.

5.8. Calcular a energia de movimento orbital do planeta Terra (cinética mais potencial gravítica, no campo do Sol).

5.9. O Sol tem um movimento orbital, de órbita aproximadamente circular, em torno do centro da nossa galáxia. A distância ao centro é de cerca da 28 000 anos-luz. A velocidade orbital do Sol é cerca de $280\,\mathtt{km\,s}^{-1}$.

(a) Qual será o valor da massa da galáxia, interior à órbita do Sol, responsável pela atracção que mantém este movimento orbital do Sol?

(b) A quantas estrelas de massa média igual à do Sol corresponde essa massa?

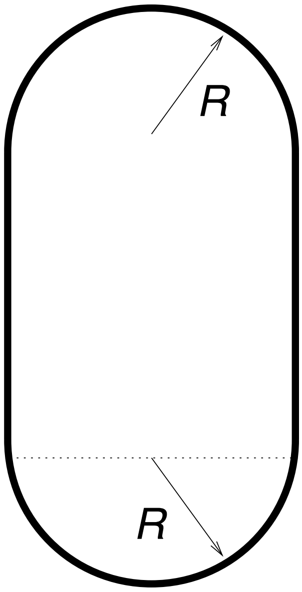

Figura 5.17: Um circuito automóvel.

5.10. A figura representa um circuito automóvel em planta. O raio das curvas é $R = 150\,\mathtt{m}$.

(a) Se um automóvel descrever a curva a uma velocidade de $140\,\mathtt{km\,h}^{-1}$, qual é a força, no plano horizontal, em módulo, direcção e sentido, que tem que exercer num ocupante de massa $80\,\mathtt{kg}$ para o manter na trajectória circular?

5.11. Os astronautas são sujeitos a acelerações muito elevadas, quer no lançamento das naves quer na reentrada na atmosfera. Nos treinos são colocados numa "centrifugadora": uma cápsula montada na extremidade de um braço que pode girar a alta velocidade em torno de um eixo na extremidade oposta.

(a) Se o braço tiver $5\,\mathtt{m}$ de comprimento (distância da cápsula ao eixo de rotação), a quantas rotações por minuto terá que rodar para que a aceleração centrípeta dos astronautas na cápsula seja $a_c = 10g$? (g, a aceleração da gravidade).

Bibliografia

[1] Aires Francisco. Trabalho de Física Computacional, FCUP, 2003-2004. Projecto da disciplina de Física Computacional, 2002/2003, 2003.

[2] Nuno Peres. O encontro do milénio. *Gazeta de Física*, 25(4):4, 2002.