Ondas Sonoras

Michael Fowler

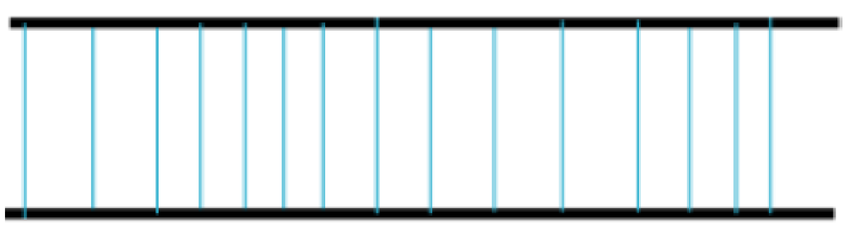
Ondas sonoras “unidimensionais”

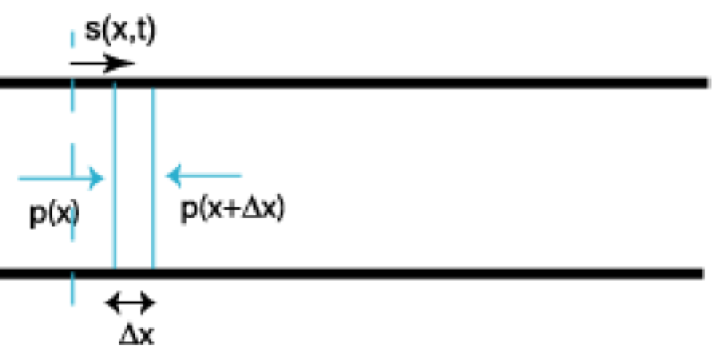
Começaremos por considerar a propagação do som num tubo oco, para evitar complicações matemáticas desnecessárias. O som é uma onda longitudinal – à medida que a onda passa, o ar move-se para a frente e para trás no tubo, sendo este movimento oscilatório na mesma direcção em que a onda viaja.

Para visualizarmos o que está a acontecer, imagina mentalmente que divides o ar no tubo, que está em repouso se não houver som, em finas fatias. Concentra-te numa dessas fatias. Em equilíbrio, ela sente pressões iguais e opostas de ambos os lados. (Analogamente ao pequeno segmente de corda em repouso que sente tensões opostas nos dois lados, mas claro que a pressão do gás é para dentro). Assim que a onda sonora atravessa essa fatia, a onda de pressão gera pequenas diferenças de pressão entre os dois lados, surgindo uma força que acelera a fatia de ar.

Para analisarmos isto quantitativamente – aplicar $F = ma$ à fina fatia de ar – temos de começar por definir o *deslocamento*, a quantidade correspondente ao movimento transversal da corda $y(x, t)$. Usaremos $s(x, t)$ para denotar o deslocamento *horizontal* (ao longo do tubo) da fina camada de ar cuja posição de equilíbrio é x quando não há som.

Onda sonora propagando-se num tubo





Se o tubo tiver raio a, e consequentemente área πa^2, uma fatia de ar de espessura Δx tem volume $\pi a^2 \Delta x$, logo escrevendo a densidade do ar ρ (1.29 km/m^3), a massa da fatia de ar é $m = \rho V = \rho \pi a^2 \Delta x$. Claramente, a aceleração é $a = \partial^2 s(x,t)/\partial t^2$, portanto já temos o lado direito de $F = ma$. Para encontrarmos o lado esquerdo – a força exercida na fina fatia de ar – temos de encontrar a diferença de pressão entre os dois lados.

Relação entre diferenças de pressão e deslocamento

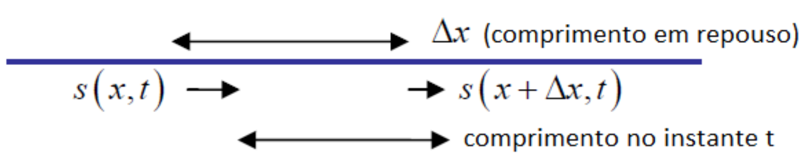
A variação da pressão à medida que a onda sonora se propaga ao longo do tubo está intrinsecamente relacionada com a compressão ou expansão local do gás. É como uma mola: à medida que o gás é comprimido para um volume menor, a pressão aumenta, e assim que se expande diminui. E, exactamente como numa mola, as variações de pressão e volume estão linearmente relacionadas. O coeficiente de proporcionalidade é chamado ***módulo de compressibilidade***, usualmente escrito B, e definido pela equação:

$$\Delta p = -\frac{B \Delta V}{V}$$

Repara no sinal! Se o volume diminui, a pressão aumenta. Uma vez que a razão entre volumes é adimensional, as unidades do módulo de compressibilidade são as mesmas que a da pressão: Pascal. Para o ar à pressão e temperatura normais, o seu valor é $B = 10^5$ Pa.

Agora, estamos a monitorizar o movimento do gás à medida que a onda passa analisando o parâmetro $s(x,t)$, o deslocamento ao longo do tubo no instante t do gás cuja posição de equilíbrio é x. Obviamente, se $s(x,t)$ não depender de x, todo o gás é transladado pelo mesma quantidade, e não ocorre compressão nem expansão. Variações locais de volume ocorrem *apenas* se houver *variações* locais de $s(x,t)$.

Para tornar isto quantitativo, considera uma fatia de gás com espessura Δx (em repouso): se, nalgum instante em que a onda passa através dela, o lado direito sofrer um deslocamento $s(x+\Delta x, t)$, e o lado esquerdo um deslocamento maior $s(x,t)$, digamos,



a espessura da fatia passou evidentemente de Δx para

$$\Delta x - \big(s(x,t) - s(x+\Delta x, t)\big).$$

Uma vez que o volume de ar na fatia é directamente proporcional à sua espessura, a onda sonora variou neste instante o *volume* do ar inicialmente no segmento Δx junto ao ponto x por uma fracção

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{s(x + \Delta x, t) - s(x, t)}{\Delta x} = \frac{\partial s(x, t)}{\partial x}$$

sendo a derivada exacta no limite de uma fatia muito fina.

Portanto, *a pressão extra local é directamente proporcional a menos o gradiente de* $s(x, t)$:

$$\Delta p = -B\frac{\Delta V}{V} = -B\frac{\partial s(x, t)}{\partial x}.$$

De $F = ma$ à equação de onda

Tendo encontrado como é que a variação local de pressão se relaciona com $s(x, t)$, estamos prontos a deduzir a equação de onda a partir de $F = ma$ para uma fatia de gás. Recorda que para uma destas fatias $m = \rho V = \rho\pi a^2 \Delta x$, e obviamente $a = \partial^2 s(x, t)/\partial t^2$.

A força resultante F na fatia é a diferença entre a pressão em x e em $x + \Delta x$:

$$F = p($$

Inserindo em $F = ma$:

$$\frac{\partial^2 s(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 s(x, t)}{\partial t^2}\text{ , onde } v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$$

Esta é exactamente a equação de onda que encontrámos para um corda, agora com o deslocamento longitudinal s no lugar do deslocamente transversal y, e o módulo de compressibilidade a desempenhar o papel de tensão, ambos medidas da energia potencial armazenada com origem nas variações locais do deslocamento. As densidades, claro, desempenham o mesmo papel nos dois casos, medido a energia *cinética* armazenada para dadas velocidades de deslocamento.

Condições fronteira para ondas sonoras em tubos

Uma vez que a nova equação de onda é idêntica em forma à equação de ondas numa corda, a nossa discussão de ondas a viajar, ondas estacionárias, etc, para um corda pode ser aplicada aqui com as mudanças de notação apropriadas.

Por exemplo, uma onda estacionária num tubo tem a forma $s(x, t) = A \sin kx \sin \omega t$, para um tubo *fechado* em $x = 0$, de modo que o ar não se move em $x = 0$.

A condição fronteira para um tubo com uma extremidade fechada é:

$$s(x, t) = 0 \text{ na extremidade fechada.}$$

E numa extremidade *aberta*? Nesse caso, o ar é livre de se mover – a condição fronteira não será $s(x,t)$. Contudo, a pressão *não* pode variar livremente: é sempre a pressão atmosférica. Portanto numa extremidade aberta $\Delta p = 0$. Recordando que $\Delta p = -B\, \partial s(x,t)/\partial x$, a condição fronteira escreve-se:

$$\frac{\partial s(x,t)}{\partial x} = 0 \text{ numa extremidade aberta.}$$

Ondas estacionárias harmónicas em tubos

Considera agora uma onda harmónica estacionária num tubo de comprimento L, *fechado* em $x = 0$ mas *aberto* em $x = L$.

Da condição fronteira $x = 0$, a onda tem de ser da forma $s(x,t) = A \sin kx \sin \omega t$.

A condição fronteira da extremidade aberta em $x = L$ requer que o declive $\partial s(L,t)/\partial x = 0$. Isto é, $\cos kL = 0$.

Exercício: prova que o maior comprimento de onda possível de uma onda estacionária no tubo é $4L$, e esboça a onda.

Exercício: qual é o maior comprimento de onda seguinte? Faz um desenho.

Potência e Intensidade

Uma outra solução da equação de onda é:

$$s(x,t) = A \sin(kx - \omega t)$$

onde $\omega = vk$, tal como na corda. Esta é uma onda que viaja ao longo do tubo. Pode ser gerada por um prato oscilante na extremidade fechada: por outras palavras, um altifalante.

Qual é a **potência** emitida pelo altifalante? Está-se a mover e a empurrar contra a pressão:

Potência = *P* = taxa de trabalho = força x velocidade = pressão x área x velocidade

Quão rápido se está a mover? No instante t, o prato está em

$$s(x=0,t) = -A \sin \omega t$$

portanto move-se com velocidade

$$v_{prato}(t) = \frac{\partial s(x=0,t)}{\partial t} = -A\omega \cos \omega t.$$

A pressão no prato é Δp onde

$$\Delta p = -B\frac{\partial s(x,t)}{\partial x} = -B\frac{\partial}{\partial x}\, A\sin(kx-\omega t) = -ABk\cos\omega t$$

Em $x = 0$.

Portanto a taxa a que o trabalho é realizado no instante t, a potência $P(t) =$ velocidade $\times$ força:

$$P(t) = v_{prato}\,(t)\Delta p\pi a^2 = A^2 B\pi a^2 \omega k\cos^2\omega t$$

*A definição habitual de potência para qualquer tipo de gerador de onda é a potência **média** ao longo de um ciclo completo.*

Uma vez que o valor médio de $\cos^2 x = 1/2$,

$$\text{potência } P = \frac{1}{2}A^2 B\pi a^2\omega k.$$

Usando $B = v^2\rho$ e $\omega = vk$, podemos escrever

$$P = \frac{1}{2}A^2\pi a^2\omega^2\rho v.$$

Isto diz-nos também quanta energia há na onda:

$$\frac{1}{2}A^2\pi a^2\omega^2\rho \text{ por metro.}$$

A ***intensidade*** da onde é a ***potência média por metro quadrado da secção recta***, portanto aqui

$$\text{Intensidade } I = \frac{1}{2}A^2\omega^2\rho v$$

e I mede-se em *watts por metro quadrado*.

O factor v, a velocidade, na expressão anterior surge porque num segundo, a energia transmitida pela onda a um metro quadrado de área perpendicular à direcção de propagação da onda é a energia em v metros cúbicos de onda: tomando a velocidade do som como 330 metros por segundo, 330 metros cúbicos de energia sonora atravessarão um metro quadrado de área em cada segundo.

Tradução/Adaptação **Casa das Ciências 2009**